LA TRIBU

(Bulletin oecuménique, apériodique et bourbachique, n°30)

Congrès nilpotent de CELLES-sur-Plaine (1-8 Mars 1953)

Présents : Cartan, Delsarte, Dixmier, Godement, Koszul, Schwartz, Serre, Weil.

Visiteurs : Smithies, Thom.

Conformément aux traditions générales, de grands évènements mondiaux ont marqué la semaine du Congrès. Bourbaki a même devancé certains d'entre eux en félicitant par télégramme, huit jours à l'avance, le Professeur Jean LERAY pour son élection académique. On a proposé aussi un télégramme de félicitations à Malenkov, mais Schwartz, qui songe à la succession de Staline, s'y est opposé. Un décret est paru, prévoyant l'internement des alcooliques réputés dangereux pour leur entourage : on en espère d'heureuses conséquences pour Bourbaki. Le correspondant spécial du "Monde" à Celles-sur-Plaine a cablé à son journal dans les termes suivants : "La voie est libre pour la ratification, en troisième lecture, des traités d'intégration ".

Les santés furent plutôt déficientes, les fidèles traînant qui son furoncle, qui ses vapeurs, qui son lumbago, qui ses bocksteins (un vrai massacre). Mais un déjeûner à la truite au Donon rétablit le moral, et Cartan déclare : "Cette fois-ci, je parle franchement".

A la lecture des EVT, on a décidé que les rédactions seraient désormais expédiées sous enveloppe fermée scellée cerclée. D'autre part, le congrès a observé avec horreur et dégoût un phénomène qu'on n'a pu baptiser autrement que delavalépoussinisation de Dieudonné. Un comité de dédelavalépoussinisation de Dieudonné a été aussitôt constitué pour conjurer le fléau.

Le sérieux, la discipline et la combativité des disciples furent en fâcheuse régression, et l'esprit du Maître ne souffla que très épisodiquement. Malgré la révélation des travaux de Buridan, les décisions principales furent qu'on se déciderait au prochain Congrès.

Bourbaki

(par Anna de Noailles et Paul Valéry, retrouvé par L.Sartre).

On lit sur ton front haut qu'un éclair illumine
Qu'Euclide fut ton frère et Thalès ton cousin.
Tes dieux, qui sont en Crête et dans l'île d'Egine,
A ta vigne toujours donnent le bon raisin.

De l'orgueilleux impie on peut voir la vertèbre
Blanchir honteusement dans les champs reconquis
De l'Absolu divin dont tu défends l'Algèbre,
Et ton bien, Bourbaki, est un bien bien acquis.

De l'Espace et du Temps tu détiens tous les jeux.
Je m'étonne pourtant quand je vois que tu peux,
Sans te sentir frôlé d'une présence ailée,

Sans que cille ton oeil ou tremble ton compas,
Voir, à ces mêmes cieux que vit Zénon d'Elée,
Une flèche qui vole et qui ne vole pas.

Etat des rédactions.

Livre I.- Chap.II adopté modulo la terminologie.
On souhaite que Dieudonné puisse rédiger les structures pour juin (ce qui permettra, accessoirement, de discuter plus facilement la question terminologique).
Chap.III. Rédaction Dieudonné pour Octobre.

Livre II.- Réédition II. On est très indécis, et on en reparlera en juin. Les solutions possibles sont exposées plus loin.

Réédition III-IV - Rapport Koszul pour juin.
Formes quadratiques. Rédaction Chevalley pour juin.
Géométrie élémentaire. Fascicule de résultats de Samuel (sans date).
Algèbres de Lie. On lira la rédaction Godement en juin.
Anneaux primitifs. Koszul fera l'Etat 4 pour février 54.

Problème : Publiera-t-on un fascicule de résultats pour les 5 premiers chapitres d'Algèbre (par exemple) ?

Livre V.- Chap.III. Adopté.
Chap.IV. Dieudonné fait la rédaction définitive.
Chap.V : §1 adopté. §2 Dixmier fait une rédaction qu'on lira rapidement en juin.
Fascicule de résultats. Serre (juin 53).

Livre VI.- Chap.V-VI. Dieudonné fera l'état 4 (sans date).
Chap.VII (mesure de Haar). Etat 2 de Godement (sans date).

Topologie p.... On se décidera en juin en discutant des variétés.

Variétés. On va avoir une rédaction Godement et une rédaction Dixmier, qu'on lira en juin.

Algèbre locale.- On a prévu à Pelvoux 52 une refonte du début par utilisation de la linéaire compacité et des filtrations. Samuel est invité à écrire à Weil à ce sujet.

Engagements.

Cartan, Chevalley, Delsarte, Weil : cf. Tribu de Pelvoux 52 (pour Weil, remplacer " localisateurs" par "régularisateurs", et, pour Chevalley, "biconvexes" par "plan concaves").

Dieudonné : Structures : juin 53
Ensembles ordonnés : Octobre 53
Spécialisations ... : sans date.
Intégration V - VI : sans date.
Rédaction définitive de Ens.II, EVT IV, retouches à EVT III et V § 1.
+ ce qu'il pourra faire dans ses moments perdus.

Dixmier : Etude infinitésimale des variétés (y compris les transformations infinitésimales) : Février 54.
Espaces hilbertiens, § 2 : juin 53.

Koszul : Réédition d'Alg.III-IV (rapport) : juin 53
Anneaux primitifs : février 54.

Godement : Mesure de Haar (sans date).
Rapport d'Analyse harmonique (sans date).
Envoie à Dieudonné des exercices ergodiques pour l'Intégr.VI.

Sammy : Algèbre homologique : juin 53.
Top. p..., chap.I et IV : sans date.

Samuel : Géomètrie élémentaire (résultats) : sans date
Premiers chapitres des variétés : Octobre 53.

Schwartz : Rapport sur les fonctions analytiques : Octobre 53
Papier sur les chaînes volumètriques : sans date.
Produits tensoriels d'EVT : juin 53.

Serre : Fascicule Résultats EVT : juin 53. Espaces fibrés : sans date
Demander à Borel un fascicule de résultats sur les espaces riemanniens symétriques.

Prochain Congrès

5 - 20 Juin à Royaumont.

Rédactions existantes ou sur le point d'exister, et discutables.

Début de l'Algèbre unidimensionnelle.

Anneaux noethériens.

Etude globale des variétés, état 2 .

Algèbre de Lie : rédaction Godement.

Variétés : rédactions Dixmier et Godement.

Rédactions attendues d'ici juin :

Formes quadratiques, Algèbre homologique,

Structures.

On choisira le programme au Séminaire.

Séminaire des 16-17 et 18 Mai 1953

Weil : Jubilation de Takagi (2 exposés).

Serre : Espaces fibrés algèbriques.

Godement : Fonctions sphériques.

Lévy-Lattès ou Lions : ?

Ensembles II.

Les §§ 3-6 sont adoptés, sauf sur des points de détail et mises à part les questions terminologiques.

A côté de la vieille terminologie, on a adopté provisoirement injection, surjection, bijection (resp. tif). Mais on attend la prochaine rédaction des Structures pour prendre une décision définitive.

On estime qu'on peut actuellement éviter de dire "canonique" dans certains cas. Par exemple, on parlera de l'extension de f à l'ensemble des parties, des extensions de f et g au produit... (on aura aussi le droit de dire "canonique").

Pour faciliter le langage au chap.II, on pourra parler de l'ensemble de définition et de l'ensemble des valeurs d'un graphe.

Introduire comme synonymes les phrases suivantes : soit f une application de A dans B, soit une application $f : A \rightarrow B$, soit $f : A \rightarrow B$.

On vide la terminologie "transformation de A en B" (malgré Ens.R).

Réintroduire la rotation (u,v) pour le produit d'applications.

Ne pas parler de "projection canonique" de E sur E/R .

Parler de "représentant d'une classe", et de "système de représentants" (comme généralisation d'une section).

A part cela, il n'y a que des modifications de détail.

<u>Ensembles IV</u>.

On souhaite pouvoir discuter la prochaine rédaction en juin.

Faire les limites inductives et projectives dans les structures.

<u>Algèbre II</u>.

Le Congrès est incapable de conclure, et renvoie la décision à juin. Les possibilités sont les suivantes : 1) Réédition sans changements. 2) Si on décide des changements, ils peuvent porter sur les points suivants : a) insertion des modules semi-simples (éventuellement jusqu'au th. de densité, qui permet de trivialiser le th. de Jacobson-Bourbaki, et le th. d'Artin du chap.V), b) insertion des produits tensoriels sur un anneau non commutatif. c) considération des matrices dont les éléments ne font pas partie d'un anneau (Exemple : on a une famille de modules E_ι , et $\alpha_{\iota\varkappa}$ est un homomorphisme de E_ι dans $E_\varkappa$; il y a aussi des matrices de distributions qu'utilise Schwartz). d) Introduction du langage des suites exactes.

Théorème de densité $\Rightarrow$ Jacobson-Bourbaki et Artin : Soit K un corps. Dans $\mathcal{L}_Z(K,K)$, K opérant à gauche est le commutant de K opérant à droit Pour L sous-corps, on considère les $\varphi \in \mathcal{L}_L(K,K)$ (L opérant à gauche sur K) ; i.e. le commutant de L ; il contient K (opérant à droite sur K) Pour $\mathfrak{M}$ anneau d'endomorphismes du groupe K , avec $\mathfrak{M} \supset K$, on considère le sous-corps L attaché qui n'est autre que le commutant de $\mathfrak{M}$.

$$L \longrightarrow \mathfrak{M} \longrightarrow L \quad \text{trivial}$$

$$\mathfrak{M} \longrightarrow L \longrightarrow \mathfrak{M}'$$

$\mathfrak{M}$ est dense dans $\mathfrak{M}'$ (th. de densité). Alors :

1) Si $[K:L] < +\infty$, $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}'$ (Jacobson-Bourbaki).

2) Dans le cas général, $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}'$ coïncident sur un sous-espace de dimension finie de L (Artin).

Demander à Cartan ses papiers pour une rédaction éventuelle de la fin du chapitre.

p.1, lignes 11-12 du bas, supprimer : amputé ....

lignes 1-3 du bas : dire simplement qu'un sous-module d'un module unitaire est unitaire.

p.2, ligne 4, ajouter : supprimer la remarque.

Faire au n°2 les sommes et intersections quelconques de sous-modules.

p.2, en bas, signaler avec un Z que les homothéties ne sont pas des applications linéaires.

p.3, définir par abus de langage, l'image d'un homomorphisme.

Remonter la prop.2 tout de suite après la prop.1, en remarque.

p.4, ligne 4 : si $u(x)=0$ pour tout $x \in S$ ... Supprimer les lignes 6-8.

Faut-il une définition plus formalisée des suites exactes, et, si oui, laquelle ? Il faut le cas des suites infinies dans un sens, dans les 2 sens, des suites finies, des suites cycliques (ce dernier exemple prouve qu'il n'y a pas de structure d'ordre sur l'ensemble des indices, mais seulement une notion de "précédent" et de "suivant"). Ce ne sont pas des "suites" au sens Bourbaki.

ligne 6 du bas, supprimer "d'une manière générale" (l'exemple 2 est un cas particulier de l'exemple 1).

p.5, lignes 1-2 : un isomorphisme de conoyau de u_1 sur le noyau de u_3 ; donner la démonstration.

N°4 : noter E_ι les familles de modules.

N°5 : le début est rejeté au n°2 jusqu'à la déf.7 .

Définir d'abord la notion du haut de la p.9 . Exemple : cas où les i_α sont des injections canoniques. Puis, existence de E lorsque les E_α sont donnés et qu'on veut des i_α biunivoques.

Améliorer la terminologie "famille spectrale".

p.10, lignes 14 et 16, remplacer $g \circ f$, par $f \circ g$; lignes 3-4 du bas :style.

p.12, ligne 7 du bas, style !

Dire quelque part que si E est somme directe des F_α et des G_α , avec $G_\alpha \subset F_\alpha$, on a $G_\alpha = F_\alpha$.

p.14, dire qu'un module peut être non libre avec tous ses éléments libres ; exemple : Q .

p. 15, supprimer les lignes 16-17.

p.16, lignes 1-2 du bas : il ne faut pas envisager seulement le cas où la famille engendre E (cf. p.52, démonstration du th.6).

p.17, lignes 1-4 du bas : supprimer (on a besoin de l'annulateur au chap. VII).

p.26, supprimer les lignes 1-5, et, dans la ligne 6, l'hypothèse de finitude.

Grouper les prop. 3-4-5, en un seul énoncé.

La prop.10, p.28, absorbe la prop.7. Le corollaire doit se prouver en envoyant E/F dans $\prod_i E/F_i$. Donner un exer. prouvant que le cor. est faux s'il y a une infinité de F_i .

Raccourcir les p. 30-31. Ne pas parler du centre de A, mais du cas où A est commutatif.

p. 33, ligne 1 du bas, vider "linéaire" ; p.34, ligne 7, vider :

"on vérifie ..."

Supprimer les allusions aux foncteurs.

p.39, ligne 2 : $\mathcal{L}(E,A)$ désignera le groupe abélien des applications linéaires de E dans A_s .

p.41, ligne 1 : style !

Dire que $\check{u}$ s'obtient par transport de structure.

p. 42, remplacer (x_α) par x , (x'_β) par x' dans (16)

ligne 13, style !

La formule (17) entraîne que les e'_α sont linéairement indépendants.

p.44, ligne 12 du bas, supprimer "facilement".

ligne 4 du bas : c'est K_d^I au lieu de K_s^I , ce qui canule la suite.

p.45, supprimer les lignes 3-4 .

lignes 10-11 du bas : supprimer les 0 dans les suites exactes.

p.47, lignes 11-12 : on dira que les modules sont accouplés sur A .

Préciser si les modules sont indépendamment à droite ou à gauche.

p. 48, ligne 3 du bas, style !

p. 54, supprimée.

p.55 , notation $E \otimes_A F$, ou $E \otimes_A F$ pour des raisons typographiques.

p.56, lignes 7-12 du bas : pas de suite exacte.

p. 57, diagramme :

$$\begin{tikzcd} & E \otimes_A F \arrow[dr, "\varphi"] & \\ E \times F \arrow[ur] \arrow[rr, "h"'] & & H \end{tikzcd}$$

ligne 10, style !

p.58, ligne 3 du bas, un Σ pour $f \otimes g$.

p.60 : ne peut-on supposer partout les modules unitaires ?

ligne 6 du bas, remplacer γx par $x\gamma$.

ligne 1 du bas, remplacer αx par $x\alpha$.

p. 61, lignes 1-2 du bas : $E \otimes_A A$ peut être muni canoniquement ...

p.62, prop.3 : l'application $x \rightarrow x \otimes 1$ est un isomorphisme de E sur $E \otimes_A A$ pour les structures de modules à droite.

p.63, ligne 5, style !

p.64, lignes 6-7 du bas : exhiber un contreexemple avec torsion dans le ~~[illegible]~~ quotient. La prop.5 viendra en corol. des sommes directes

p.65, lignes 5-6 : signaler le miroir $E \rightarrow F$, $F \rightarrow E$, $A \rightarrow A^o$.

Notations : utiliser $E_1, E_2, \ldots$ plutôt que $E', E'' \ldots$

p.66, prop.7 : après les sommes directes.

p.67, donner la formule $(\sum_\alpha x_\alpha) \otimes (\sum_\beta y_\beta) = \sum_{\alpha\beta} x_\alpha \otimes y_\beta$.

lignes 4-6 du bas : rédaction

p. 68, ligne 12, désouligner "commutatif" .

p. 70, donner la formule $\varinjlim_{\alpha,\beta} E_\alpha \otimes F_\beta = (\varinjlim_\alpha E_\alpha) \otimes (\varinjlim_\beta F_\beta)$

p. 72, ligne 3, considérer le cas d'un sous-anneau du centre.

ligne 10, remplacer "l'une" par "chacune" .

Enoncer l'ancien Scholie.

p.73, l'homomorphisme (20) est biunivoque si E et F ont des bases. En d'autres termes, $E'^I \otimes F'^J \rightarrow (E' \otimes F')^{I \times J}$ est biunivoque. Ça donne en particulier les homomorphismes canoniques $K^I \otimes K^J \rightarrow K^{I \times J}$ et $V \otimes K^I \rightarrow V^I$ qui méritent peut être d'être explicités (Noter que $K^I = \mathcal{L}(K^{(I)}, K)$.

p. 75, ligne 3 du bas, supprimer "naturel".

p. 77 : Tr est défini sur $E^* \otimes E$; il est défini sur $\mathcal{L}(E,E)$ quand on a la chance que θ soit biunivoque.

Démontrer (28) dans le cas où u est "traçable" et v quelconque.

Expliciter quelque part au Chap. II :

1) K corps, L surcorps, non nécessairement commutatifs ; K ensemble des points fixes d'un groupe d'automorphismes de L ; V vectoriel sur K ; $W \subset V \otimes L$, W stable par le "groupe de Galois". Alors, $W = T \otimes L$, avec $T = W \cap V$ (utiliser les éléments primordiaux).

2) la méthode des lignes 4-8, p.26, de la rédaction Serre des anneaux primitifs.

<u>Faire un erratum</u> au chap. I d'Algèbre, p.122 ; y définir le commutant d'un ensemble dans un anneau.

<u>Anneaux primitifs</u>.

S'inspirer aussi de la rédaction Cartan.

p.4, donner la notion de classes de modules simples ; pour A donné, elles forment un ensemble (il y en a moins que d'idéaux de A).

Au début du n°2, un théorème annonçant l'équivalence de 3 définitions des semi-simples.

Prop.2 en lemme et sous la forme de Cartan.

p.5, ligne 3 du bas, vider "directe".

p.6, remplacer la remarque 2 par le n°4 de Cartan.

Après, dire que tout module de type fini et semi-simple est somme directe d'un nombre fini de modules simples.

p.7, déf.3 : soit S un module simple ; un module est dit homogène d'espèce S si .... "Homogène", tout court, sera un abus de langage. 0 est homogène d'espèce quelconque.

M homogène $\Longleftrightarrow$ M somme de sous-modules simples isomorphes $\Longrightarrow$ tous les sous-modules simples de M sont isomorphes.

Dans la prop.4, parler de classes de modules simples. Prendre un E module quelconque, et conclure que la somme des E_α est directe. Ne pas définir le composant d'espèce S_α dans la prop. Faire la dém. d'abord pour E semi-simple.

N°4, expliciter : quand 2 endomorphismes de modules commutent, le noyau et l'image de l'un sont stables par l'autre.

Faire le raccord avec le point de vue : changement d'anneau (chap.II) p.9 ; Pas de "commutant de A", mais "commutant de $\varphi(A)$".

Isoler la remarque 2 au début, qui est un remord du chap.I.

Dire que, si F est un facteur direct de E , $(A')_F = (A_F)'$.

Signification des cor.1 et 2 en termes de matrices.

La situation : homomorphisme d'une somme directe dans une somme directe aura été chyadée au chap.II, dans les compléments sur les matrices

p.15.- Déf.1 : un anneau est dit primitif si .... Déf.2.- On appelle radical...

Déf.3.- Un anneau est dit sans radical (par abus de langage) si son radical est nul (on vide "semi-primitif").

Il revient au même de dire qu'il existe un A-module semi-simple et fidèle ; en effet, on a, plus généralement, la prop. suivante: Prop.1 ...

Donner la prop.4 le plus vite possible.

p.17, prop.3.- Dire que M_n (radical de A)=radical (M_n(A)) ; il faut prouver que, si M=(m_{ij}) avec $m_{ij} \in R(A)$, 1+M est inversible (cf. pp. 28-29).

p.20, ligne 3, ajouter entre astérisques le th. de Segal sur la semi-simplicité des C^*-algèbres.

p.21, définir la représentation régulière, et le degré d'une représentation quelconque.

Introduire la représentation régulière d'une algèbre dans l'espace dual. Dire que cette représentation contient n fois une représentation irréductible de degré n .

p.26, utiliser la méthode de la variante, avec le diagramme ci-dessous, que permet de construire le projecteur $L \to K$:

$$\begin{tikzcd}
N\otimes L \arrow[r] & M\otimes L \arrow[r] & N\otimes L \arrow[d] \\
N \arrow[u] \arrow[r] & M \arrow[u] \arrow[r] & N
\end{tikzcd}$$

Préciser la Remarque 3 : si M est irréductible, $M\otimes L$ est somme directe de V et V^{σ} (σ , générateur du groupe de Galois), et V est irréductible.

p.28, dans la prop.8, essayer d'utiliser les représentations.

Modification possible de la fin du § 2 : au § 4, on a besoin de ceci :

1) A sans radical, K/k fini, centre C de K séparable sur $K \Rightarrow A\otimes K$ sans radical.

Supposons établi : a) 1) lorsque K est galoisien sur k ; b) $A\otimes L$ sans radical et L/K fini $\Rightarrow$ A sans radical.

Alors, 1) s'obtient facilement (soit $L \supset C$ une extension galoisienne de k ; $A\otimes L$ est sans radical par a), donc $A\otimes C$ par b), donc $A\otimes K$ par a).

b) résulte de la prop.8 du texte. Pour a), voici une nouvelle possibilité :

Soit M, A-module semi-simple fidèle. $M\otimes K$ est un $A\otimes K$ module fidèle. Montrons qu'il est semi-simple. On peut supposer M simple.

a) Il existe $W \neq 0$, $W \subset M \otimes K$, W sous-module (pour $A \otimes K$) minimal, donc simple.

En effet, une suite $W_1 \overset{\neq}{\supset} W_2 \dots \overset{\neq}{\supset} W_r$ a au plus n termes $(n = [K:k])$ (c'est même vrai pour le A-module $M \otimes K$, car $M \otimes K = M + M + \dots + M$, et on applique Jordan-Hölder). (Tâcher de bloquer ça avec la prop.7).

b) Soit W minimal. Alors, si G est le groupe de Galois, $\sum_{\sigma \in G} W^{\sigma} = M \otimes K$.

p.36, démonstration du cor. : dire que l'idéal engendré par un élément nilpotent est nilpotent.

Supprimer "d'Artin" ligne 7 du bas ; le rajouter lignes 1 et 5 du bas ; énoncer la condition 3 : il existe n et K tels que ...

p.37, pour $1 \Rightarrow 2$: est-il vraiment nécessaire d'utiliser 2 fois le th. de densité ?

p. 38, le cor.1 ne suppose pas que l'anneau est d'Artin ; il suffit d'appliquer le lemme de Schur à la double représentation régulière (rejeter ce cor. au § 1).

p.39, pour $2 \Rightarrow 1$, utiliser le th.1. Trivialiser $1 \Rightarrow 2$ en donnant, au § 1, "l'indépendance" de représentations irréductibles distinctes.

ligne 4 du bas, faire une définition.

Dire quelques mots des modules sur un anneau d'Artin A quelconque (par exemple : il n'y a qu'un nombre fini de A-modules simples (faire le quotient par le radical) ; si φ est une représentation, φ complètement réductible $\Longleftrightarrow$ $\varphi(A)$ anneau d'Artin semi-simple).

p.42 et sqq, utiliser quand il y a lieu la terminologie : module de type fini. Les remarques ajoutées au § 1 trivialisent la prop.3 qu'on bloquera avec le th.5 .

Parler des idéaux à gauche minimaux d'un anneau d'Artin semi-simple.

Donner l'équivalence de : 1) A_s module semi-simple ; 2) tout module à gauche est semi-simple ; 3) tout module homogène à gauche est semi-simple ($1 \Rightarrow 3 \Rightarrow 2 \Rightarrow 1$; $1 \Rightarrow 3$ parce que le quotient d'un module semi-simple est semi-simple) ; et ces conditions entraînent que A est d'Artin par Jordan-Hölder.

p.44, parler de la double représentation régulière.

p.45, prononcer les mots : algèbre irréductible d'endomorphismes.

Citer Burnside.

p.49, faire le raccord de la déf.1 avec le cas des extensions d'un corps

p.51, ligne 7 : extension <u>commutative</u> ; idem. dans la suite.

p.53, exemple : ne faut-il pas que p soit discrète ou du moins archimédienne ?

p.54, th.3 : dire que A est de dimension finie ; éviter les "isomorphismes dans".

ligne 1 du bas : tout k-automorphisme.

La notation $\approx$ est-elle canonique ?

p.60, vider le cor.1.

p.62, ligne 11 du bas : un sous-corps commutatif séparable (sur k) maximal.

ligne 10 du bas : soit L un sous-corps commutatif séparable ...

Expliciter complètement le n°10.

p.74, ligne 15 du bas, définition de "conversible à droite" ?

lignes 11 et 12 du bas, remplacer - par + .

Parles des idéaux réguliers.

E V T

Chap.III, §§ 1-2-3 : Adopté modulo les virgules.

Chap.III, § 4 (hypocontinus).- Prop.2 : détailler la démonstration.

Prop.3 : Soient E,F,G, 3 EVT, $\mathfrak{S}$ un recouvrement de E par des parties bornées. Soit u une application bilinéaire séparément continue de $E\times F$ dans G . Les propriétés suivantes sont équivalentes : a) pour tout voisinage W de 0 dans G et tout $M \in \mathfrak{S}$, il existe $V \subset F$ tel que $u(\dot{M}\times V)\subset W$; b) pour tout $M \in \mathfrak{S}$, l'image de M par $x \rightarrow u_{x.}$ est une partie équicontinue de $\mathcal{L}(F,G)$; c) $y \rightarrow u_{.y}$ est continue de F dans $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(E,G)$. Détailler un peu la démonstration, en disant qu'on se ramène au cas où $\mathfrak{S}$ est formé d'une seule partie M . Puis, définition : u est $\mathfrak{S}$-hypocontinue si u est séparément continue et si .... En laïus : 1) échanger E et F ; 2) la ($\mathfrak{S}$, $\mathfrak{C}$)-hypocontinuité. Vider les lignes 4-9 du bas de la p.5 . En prop.: le b $\Longrightarrow$ a de la prop.2 .

Une prop.: si Q est borné dans F , $u(M\times Q)$ est borné dans G .

Dans la prop.4, vider la dernière assertion.

Pas de notation $u_{.y}$, $u_{x.}$ p.5 et p.6 .

p.6, vider les lignes 12-16.

Prop.5.- Si F est tonnelé, toute application bilinéaire séparément continue de $E\times F$ dans G est $\mathfrak{S}$ -hypocontinue quel que soit le recouvrement $\mathfrak{S}$ de E par des parties bornées.

Bien avant la prop.6, avoir remarqué que le remplacement de $\mathfrak{S}$ par $\overline{\mathfrak{S}}$ ne change pas l'hypocontinuité.

Démonstration de la prop.6 : 1) Unicité d'un prolongement séparément continue. 2) si ce prolongement existe, il est ($\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$)-hypocontinu (immédiat).

3) Existence du prolongement séparément continu (procéder dissymétriquement, en plongeant d'abord en x_1, puis en x_2.

N°5 (i.e., n°4) en petits caractères. Y faire toutes les modifications homologues à celles qui précèdent. Ajouter la prop. homologue à la prop.6. Rejeter la prop.10 au n°1, après la prop.2 .

Donner l'hypocontinuité de la composition des endomorphismes $(A,B) \longrightarrow A\circ B$ (cf. rédaction Schwartz du fascicule de résultats).

Chap. IV, Dualité.

Remarque de style : Dire plutôt "A est B" que "A est identique à B" . Dans le § 1, on peut éviter de dire "pour $\sigma(F,G)$". Eviter de mélanger des x_0 et des M^0.

p.11, dire que l'exemple 1 est le seul en dimension finie (remonter et abréger l'exemple de la p.14).

p.12, abréger un peu les lignes 6-11.

p.13, ligne 8, dire "dual algèbrique".

ligne 10, dire : "isomorphisme de G sur son image dans F".

Rectifier la fin de la déf.1 .

On décide de ne faire le § 1 que sur R ou C . Les linéairement compacts seront développés en Algèbre quand il y aura lieu (Le n°7 peut d'ailleurs être abrégé, l'idée générale étant simplement d'ajouter "linéairement" aux démonstrations sur les compacts ; a) une application linéaire continue d'un linéairement compact dans un linéairement topologisé a pour image un linéairement compact. b) 2 topologies linéairement compactes comparables sont identiques. c) E est faiblement dense dans E'^*, donc $E=E'^*$. d) les topologies de E et E'^* sont identiques d'après b).

Naturellement, on bloque les parties homologues des §§1 et 2. D'une manière générale, on préfère la rédaction du § 2 à celle du § 1 .

On signalera dans le texte que certains phénomènes sont purement algébriques, avec renvoi à des exerc.

p. 15, lignes 6-9 : les remonter au n°1 .

p. 17, vider les lignes 1-9 .

p. 19, ligne 9, dire : on a $\langle x,y_1\rangle=\langle x,y_2\rangle$.

lignes 15-17, dire : ceci résulte aussitôt de la condition (D_I) et de la définition de M^o .

ligne 18, supprimer "faible" ; idem ligne 2 du bas.

Echanger les rôles de F et G dans la prop.6 (et dans la démonstration qui suit).

Démonstration de la prop.6 : Soient $G/M^o=W$, $\varphi:G\to W$, $\mathcal{C}$ la topologie quotient de $\sigma(G,F)$ et $\sigma=\sigma(W,M)$. Il est clair que $\mathcal{C}$ est plus fine que σ . D'autre part, soit U un $\mathcal{C}$-voisinage de 0, $U'=\overset{-1}{\varphi}(U)$, et $V(x_1,x_2,\dots,x_n,\varepsilon)\subset U$. Si $y\in M^o$, on a $|\langle\lambda y,x_i\rangle|\leqslant\varepsilon$ pour tout λ , donc $\langle y,x_i\rangle=0$, donc $x_i\in M^{oo}=M$. Donc $V(x_1,\dots,x_n,\varepsilon)$ est saturé et donne par passage au quotient un σ-voisinage de 0 qui est contenu dans U .

p. 22.- Après la prop.7, préciser l'orthogonal de F dans G , en remarque. Il faut qu'il n'y ait <u>rien</u> à démontrer pour le cor.1 .

p. 27.- lignes 5-14, dire ceci : soient F_o et G_o les R-espaces sous-jacents à F et G . Soit $B(x,y)=\mathcal{R}\langle x,y\rangle$. On définit ainsi une dualité entre F_o et G_o . On a $\langle x,y\rangle=B(x,y)-iB(ix,y)$ (II, § 6,1). Ceci nous amène ....

Vider les 3 lignes après la déf.2 .

p. 28, prop.1 : M^o contient 0, et c'est ...

p.29, prop.3 et les remarques qui suivent : remonté en remarque après les déf. 1 et 2 .

Pour le § 3 : vu la déclaration d'intention, on ne précisera pas "séparé" dans les propositions qui sont indépendantes de cette hypothèse.

Si E est complexe, soit E_o l'espace réel associé. Dire que E_o' s'identifie au dual topologique de E, et que la dualité entre E_o et E_o' se déduit de celle de E' et E par le procédé du § 1 .

Mettre des "primes" aux parties situées dans E'.

p.30, ligne 10 : style.

p.31, échanger les lignes 7-10 et 11-14.

ligne 9, supprimer "entièrement".

ligne 7 du bas, style.

p.32, ligne 6 du bas, ajouter : donc relativement compacte (th.1), donc compacte puisque fermée.

Cor.2 : donner une démonstration.

ligne 1 du bas : on munit $\mathcal{L}$(E,F'), espace des applications...

p.33, ligne 3, supprimer "simplement".

p.33, ligne 12 du bas : la prop.2 ci-dessus dit que P est compact (introduire P dans la proposition). Le cor.2 de la prop.5, § 3, chap.III, dit que P est métrisable (puisque R et C sont des espaces métrisables).

Définir en forme une topologie compatible avec la dualité.

p.34, vider les lignes 13-16. Dire qu'un ensemble convexe est défini par des inégalités.

ligne 7 du bas, dire : pour une topologie localement convexe.

Dire que tonneau initial = tonneau affaibli. En déduire que les semi-normes semi-continues inférieurement sont les mêmes pour les topologies initiale et affaiblie.

p.35, ligne 8, rappeler la définition de la $\mathfrak{S}$-topologie.

p.36, ligne 2, supprimer la référence ; ligne 3, remplacer la référence par : "cor.3 du th.1" ; vider "mais comme ... prop.1 et 2 ".

ligne 6, avant "D'ailleurs", ajouter : les V^o sont compacts.

Arranger les lignes 9 à 11 du bas.

p.38, après le cor., dire qu'on parle de parties bornées sans préciser.

p.39, en bas, supprimer l'ultrafiltre. La topologie de B' n'a pas changé parce qu'on a rendu continues des fonctions qui l'étaient déjà.

p.41, annoncer que la topologie forte n'est pas compatible avec la dualité.

p.42, ligne 2 du bas : est équicontinu donc fortement borné.

p.43, changer de ligne après la 1ère phrase.

ligne 5, ajouter qu'on parle de parties bornées dans E' sans préciser

ligne 6, supprimer : séparé.

lignes 8-13 : pourraient être abrégées grâce au §1.

Définition en forme du bidual.

Eviter d'écrire E = E" lorsque E n'est pas réflexif.

p.44, lignes 4-5 : il faut et il suffit que, pour la topologie $\sigma(E,E')$, toute partie fermée bornée soit compacte.

ligne 8 : pour la topologie forte, par définition de celle-ci.

ligne 11, ajouter : si B est fermée, B est compacte.

ligne 12, supprimer "relativement".

lignes 1-4 du bas : dire d'abord que E est quasi-complet pour $\sigma(E,E')$

p.45, allonger la dém. du th.2 : invoquer d'abord le th.1. Puis :

a) les tonneaux dans E sont les polaires ... b) les polaires des parties fortement bornées de E' forment un système fondamental de voisinages de 0 pour la topologie forte de E" c) si l'ensemble E = l'ensemble E", la topologie forte sur E est compatible avec la la dualité entre E' et E, donc (Mackey) toute partie faiblement bornée de E' est aussi fortement bornée.

Prop.4, dém.: si E est réflexif; le bidual de E' est le dual fort de E, donc est E'.

p.46, ligne 3, tonnelé séparé.

lignes 5-6 : un espace normé qui est un espace de Montel est localement compact donc de dimension finie.

Exemple 2 : pas d'astérisques ; donner la dém.; vider le renvoi aux distributions.

p.47, ligne 8 du bas, vider la référence, mais en donner une pour "tonnelé".

ligne 7 du bas, annoncer : montrons qu'elle est tonnelée.

Scholie : dans un espace de Montel, soit P une partie fermée ; les propriétés suivantes sont équivalentes : P est fortement ou faiblement bornée ou relativement compacte.

Permuter les §§ 5 et 6 .

p.51, lignes 10-11 du bas : donner l'exemple c_0, ℓ, m, en renvoyant à un exer.

Prop.7 et 8 : y parler des structures normées. Voir si on peut déduire 8 de 7 par bidualisation.

Prop.9 : faire une démonstration directe : $M'=E'/M^0$, donc $M''=M^{00}=M$.

§ 6 - N°1. Ne pas parler d'application transposable. Dire : pour que u soit faiblement continue, il faut et il suffit qu'il existe v (pas forcément linéaire a priori) telle que ... Dans ce cas, v s'appelle (par abus de langage) la transposée de u .

Remplacer les lignes 6 à 9 du bas, p.54, par les topologies les moins fines qui .... Vider la dernière ligne.

Donner $u(A)\subset B \Rightarrow {}^tu(B^0)\subset A^0$.

p.55 : vider le corollaire ; compléter la prop.2 sur le modèle de l'Algèbre linéaire (rédaction Cartan, p.46, th.4).

N°2. Annoncer qu'on va établir le diagramme logique suivant :
u continue $\Rightarrow$ u faiblement continue $\Leftrightarrow$ ${}^tu$ faiblement continue $\Rightarrow$ ${}^tu$ fortement continue.

p.56 : vider les lignes 4 à 10.

Donner la prop.4 quand E a la topologie τ : soit V un voisinage initial de 0 dans F ; V^o est faiblement compact, donc ${}^tu(V^o)=W$ aussi ; on a $u(W^o) \subset V$, donc $\overset{-1}{u}(V) \supset W^o$, donc $\overset{-1}{u}(V)$ est un voisinage initial de 0.

p.57 : lignes 2-4 : abréger.

Vider le cor.2.

La prop.6 passe au § sur les Banach ; regarder si on peut en déduire les prop.7 et 8 de ce § ; ça semble douteux.

p.58.- Vider les lignes 4 à 16 (la prop.7 en exerc.)

La prop.8 sera déduite du résultat suivant. Soit $E \xrightarrow{\varphi_i} F_i$, F_i localement convexe, et sur E la topo. la moins fine rendant continues les φ_i (cf. chap.II). Alors, toute forme linéaire continue sur E est de la forme $\sum_{i=1}^{n} u_i \circ \varphi_i$, u_i étant une forme linéaire continue sur F_i. En effet, E se plonge dans $\prod F_i$, u se prolonge à $\prod F_i$, et $(\prod F_i)' = \sum F_i'$. Naturellement, ça va au § 3 (ainsi que la prop.8). Donner comme corollaire que "fortement" fermé $\Leftrightarrow$ "faiblement" fermé pour un convexe dans un $\mathcal{L}(E,F)$.

p.61 : dans le cor., préciser la topologie de $\mathcal{L}(E,F)$. Vider les lignes 4-16.

On étudiera en juin un § supplémentaire éventuel sur les produits tensoriels topologiques.

Chap.V, Espaces hilbertiens.

§ 1. Les formes strictement positives seront dites définies-positives.

Démontrer la prop.2 par la décomposition "en carrés" de la forme hermitienne $f(x + \xi y, x + \xi y)$, ξ quelconque. Dans le cas embêtant $f(x,x)= f(y,y)=0$, $0\leqslant f(x+\xi y, x+\xi y) = \xi \overline{f(x,y)}+ \bar{\xi} f(x,y)$, faire $\xi= -f(x,y)$.

Les espaces préhilbertiens ne seront pas nécessairement séparés.

Au lieu d'espace hilbertien "opposé", on dira "conjugué".

Proposition 5 : soient B et B' deux boules de rayons d et $d+\delta$, $(0\leqslant\delta<1)$. Si un ensemble convexe K est contenu dans $B'\cap\complement B$, son diamètre est $\leqslant 2d\sqrt{2\delta}$.

Prop.8 : L sous-espace.

Th.3 : Tout $y\in E$ définit une forme linéaire u_y sur E . L'application $y\to u_y$ est ...

Après le th.3, donner la prop.3 du § 2 .

§ 2. Commencer par le n°2. Ceci supprimera une partie de la dém. du th.1 (on envoie la somme algèbrique $\sum V_i$ dans la somme "externe" hilbertienne, et on prolonge par continuité). Introduire la terminologie " "somme hilbertienne externe" (ou somme hilbertienne par abus de langage). Au n°1, commencer par un lemme : si les x_i sont 2 à 2 orthogonaux et $x-x_i$ est orthogonal à x_i , on a $\|x\|^2\geqslant\sum|(x|x_i)|^2$, et, dans le cas d'égalité, $x = \sum (x|x_i)x_i$. Ceci fait, on séparera plus nettement les cas hilbertien et préhilbertien. Au n°3, on ne définira que les familles orthonormales.

Intégration

Plan : Chap.V : Intégration des mesures (sans intégrale faible).

Chap.VI : Intégrales faibles. §1. Intégrale faible. §2. Mesures vectorielles. §3. Désintégration des mesures. Appendice polonais.

Chap.VII. Mesure de Haar.

Les champs de vecteurs sont définitivement vidés de ce livre. Godement, qui a étudié l'intégrale de Wiener à Lund, estime que ca n'apporte pas d'outil nouveau, et que ca rentre aisément dans le cadre de Bourbaki. Seuls les problèmes sont nouveaux (mais non résolu

p.103. Définir $g\mu$ lorsque g est scalairement localement intégrable dans le dual algèbrique de F'. Ceci permettra de ne pas dire ultérieurement "l'application $f \longrightarrow \int fg\, d\mu$ de $\mathcal{K}(T)$ dans F", mais simplement "$g\mu$" . Introduire la notation $\int f\, dm$.

p.105, ligne 4 du bas : si F vérifie le théorème du graphe fermé.

Dunford-Pettis : Soient F un espace localement convexe de type dénombrable, F' son dual muni de la topologie faible. Soient μ une mesure positive sur T, et m une mesure vectorielle sur T à valeurs dans F' possédant la propriété suivante : quand .... de F'. Alors, il existe ....

Les lignes 6-7 du bas en Remarque après.

p.107, ligne 3 : ne pas appeler une classe $\acute{g}$ si on n'a pas d'abord introduit g .

lignes 11-12 du bas : ajouter, comme condition 1°, la linéarité.

Expliciter l'aspect suivant de Dunford-Pettis : formes bilinéaires continues sur $\mathcal{L}_1 \times F$.

p.109 : remonter la Remarque, amputée de sa 2è phrase, avant le th.

ligne 8 : et telle que $m = g\mu$.

p.111 : vider le n°5 .

Soit m une mesure vectorielle à valeur dans le dual F' de F. Pour tout $a \in F$, m définit une mesure ordinaire m_a . Chercher les bonnes conditions de dénombrabilité sur F pour que toutes les m_a soient de base une mesure fixe.

p.114, annoncer que, sauf exception, tous les espaces sont polonais, et qu'il n'y a pas de différence entre $\int$ et $\overline{\int}$.

Faire le th.1 en supposant μ quelconque et p μ-propre (le th.2 sera un corollaire) : pour $\varphi \in \mathcal{K}(B)$, soit $L(\varphi)=(\varphi\circ p)\cdot\mu$; on a $\|L(\varphi)\| = \|\varphi\|$, et on applique Dunford-Pettis à $\varphi \to L(\varphi)$.

Pour avoir les propriétés des λ_t, établir que, pour $\psi \in \mathcal{K}(B)$

(1) $\int f(x)\ (\psi\circ p)(x) d\mu(x) = \int \psi(t) d\nu(t) \int f(x) d\lambda_t(x)$

donc $p(f\mu)= \lambda_t(f) d\nu(t)$. Appliquant ceci au cas où $f \in \mathcal{K}^+(X)$, on trouve $\lambda_t(f) \geqslant 0$ presque partout, donc $\lambda_t \geqslant 0$ par élimination d'ensemble de mesure nulle. Puis, supposant $f=g\circ p$, avec $g \in \mathcal{K}(B)$, on trouve de même $g(t)= \lambda_t(g\circ p)$, donc $p(\lambda_t)=\varepsilon_t$. (Il faut donc établir (1) pour des f d'un type assez large).

p.117, dém. du th.2 : améliorer les notations.

N^{os} 3 et 4 en petits caractères. Commencer le n°3 par un laius : une application mesurable définit une relation d'équivalence. Réciproquement...

p.121, ligne 9, annoncer le résultat.

p.122, ligne 9, pas besoin de puissance du continu ; il suffit d'envoyer X dans X de la manière suivante : envoyer $\complement N'$ en un point fixe, et chaque point de N' sur un représentant de sa classe choisi une fois pour toutes ; c'est automatiquement μ-mesurable.

ligne 9 du bas, rappeler la définition de φ_A .

p.123, ajouter une proposition pour les relations d'équivalence définies par une suite d'applications mesurables.

Soumettre la future rédaction à l'approbation de Mackey.