

NBT 03

400

LA TRIBU

(Bulletin oecuménique, apériodique et bourbachique, n°29)

Congrès de l'incarnation de l'Ane qui trotte.

(Celles-sur-Plaine, 19-26 Oct. 1952)

Présents : CARTAN - KOSZUL - SERRE - WEIL. Quasi-présents : DIXMIER, SCHWARTZ. Quasi-absent : DELSARTE.

Pour ranimer l'ardeur des disciples, Notre Maître a décidé d'admettre le culte des icones. Deux formes matérielles de l'Ane qui trotte ont été offertes à l'adoration des fidèles. Un message venu d'au-delà des mers nous montra l'Ane, se dirigeant d'un pas lent mais sûr vers un gouffre. Mais une deuxième réplique du Sacré Symbole provoqua du délire; cette réplique, placée au sommet d'un échafaudage convenablement incliné de fascicules imprimés ou de rédactions, se propage par ses propres moyens; ses méandres, interprétés par les docteurs de la Loi, ont montré que Notre Maître était fort irrité par l'Intégration, mais satisfait par les Espaces Fonctionnels (ou le Dictionnaire ?). On a beaucoup remarqué que l'Ane se dirige bien plus facilement en marche arrière qu'en marche avant.

Naturellement, une telle situation fut favorable à l'éclosion de miracles. On eut la multiplication des boîtes d'allumettes. CARTAN, parti seul à la recherche d'une casquette égarée, ne mit pas plus de deux heures à retrouver le chemin de l'hôtel. Et l'on dut admettre, avec notre professeur atomique SCHWARTZ, que "les mathématiques sont comme une baleine".

La situation financière donna des soucis. Le congrès de Felvoux n'ayant pas épuisé la caisse autant qu'on l'espérait, nombre de congressistes se dévouèrent journallement, sacrifiant leur santé en ingurgitant force apéritifs et digestifs. On jugea bon de forcer sur les thés-au-rhum.

Les discussions provoquèrent encore l'étonnement de certains indigènes (Celles rit, mais Celles tique). Toutefois, la conversation prit un tour plus académique, et on ne sait plus comment qualifier le futur livre de
Topologie.

Les membres fondateurs regrettèrent le bon temps comme celui où "un professeur gagnait trois fois plus qu'un petit maître de conférences".

Inspiré par l'exemple de DELSARTE, WEIL proposa un nouveau test précis. On put ainsi faire la statistique des péchés capitaux les plus familiers aux congressistes, ce qui donna : deux fois la paresse, deux fois la jalousie, une fois la luxure ...

La réserve du coffre terminologique s'est accrue considérablement. Voici, au hasard, quelques exemples : tautovoque, omnivoque, équivoque, épimorphisme, isotypie, injectif, submersif, omnivore, idemjection, unifuge, omnipète, conjonctif ...

Pour la poésie, on dut se contenter d'un alexandrin provoqué par l'Intégration :

A s'induire trop tôt, on s'induit en erreur et d'une chanson (Sur l'air "J'ai une histoire à raconter" ou "En descendant la rue d'Alger") :

Le mod' d'emploi de ce Traité (bis)

Est d'la plus grand' simplicité (bis)

Si quelqu'chos' n'est pas clair

Eh bien

Il vous suffit d'abstraire

Et là lumière revient (bis).

L'alphabet de tout' les nations (bis)

Sera mis à contribution (bis)

On a, pour êtr' plus clair

Souvent

Mis en p'tits caractères

Les passages importants (bis).

Les exercic' sont alléchants (bis)
Leur énoncé est séduisant (bis)
N'essayez pas d'en faire
Beaucoup
Car on dit qu'les deux tiers
Sont faux ou au d'ssous d'tout (bis).

Les notations, vous le verrez (bis)
Ont été fort améliorées (bis)
Et le meilleur critère
Eh bien
C'est que sur tout'la Terre
Personn' n'y comprend rien (bis).

L'ordre suivi dans l'exposé (bis)
A été longu'ment médité (bis)
On met les points s'condaires
Devant
Et puis, en corollaires
C' qui doit servir tout l'temps (bis).

Etat des rédactions.

- Livre I. - Introduction, chap. I : adoptés.
Chap. II : §§ 1, 2, 4, 5 adoptés modulo quelques détails.
§§ 3 et 6 : Dixmier fera une rédaction pour février 53.
Les fidèles doivent envoyer leur opinion sur les questions terminologiques (cf. plus loin).
Chap. III, Cardinaux (resp. IV, Structures) : Dieudonné fera l'Etat 6 (resp. 7) pour Octobre 1953.
Note historique : Samuel (sans date).
Samuel réclamera Rosser pour qu'il donne rapidement son avis sur les chap. I-II.
- Livre II. - Réédition II : on a une rédaction Cartan (!!!) qui va être tirée. Réédition III-IV : Koszul fera un rapport pour févr. 53.
Anneaux primitifs : Serre va envoyer sa rédaction au tirage.
Algèbres de Lie : on choisira le rédacteur de l'Etat 2 en mars.
Formes quadratiques : Etat 3 de Chevalley pour juin 53.
Géométrie élémentaire : Fasc. de résultats de Samuel (sans date)
- Livre V. - Chap. III (Espaces d'applications linéaires) : On a l'état définitif de Dieudonné.
Chap. IV (Dualité) : On va avoir l'Etat 7 de Dieudonné.
Chap. V (Espaces hilbertiens). On lira l'Etat définitif en mars 53.
Fascicule résultats : Sammy (sans date).
- Livre VI. - On lira le chap. VI en mars, et on choisira alors un rédacteur pour l'Etat 4 des chap. V-VI (Intégration et Désintégration des mesures).
Chap. VII (Champs de vecteurs) : On ne sait s'il faut les mettre en 1^{ère} partie.
Chap. VIII (Haar) : Etat 2 de Godement pour Déc. 52.
- Livres VII, VIII, IX, parties suivantes : cf. Tribu de Felvoux 52.

Engagements.

Cartan, Chevalley, Delsarte, Godement, Sammy, Weil : cf. la Tribu de Pelvoux 1952.

- Dieudonné : Spécialisations, Entiers, Anneaux divers : juin 1953
Ensembles ordonnés, Cardinaux, Entiers : Oct. 1953
Structures : Oct. "
Retouches aux §§ 1,2,4,5 du chap. II
des Ensembles : rapidement
- Dixmier : Chap. IV et V des variétés : juin 1953
Leray-Schauder (rapport) : sans date
§§ 3 et 6 des Ensembles II : Févr. 53
- X Koszul : Réédition d'Alg. III et IV (rapport) : Févr. 53
Transformations infinitésimales : sans date
- Samuel : Géométrie élémentaire (rapport) : sans date
Note historique des ensembles : sans date
Chap. I, II, III des variétés : Octobre 53
Envoie à Dieudonné comme exercices
ses remarques sur l'axiome d'extensionnalité.
- Schwartz : Rapport sur les fonctions analytiques : Octobre 53
Papier sur les chaînes volumétriques : sans date

Prochains Congrès

1-8 Mars 1953 : Weil et Schwartz étudieront les possibilités de Congrès sur la côte d'azur. En cas d'échec, on choisira au Séminaire de Décembre.

Programme maximum : Ensembles II, §§ 3, 6 (comité)
Alg. II, III, IV.
Anneaux primitifs.
E V T III (comité), IV et V
Intégration : VI, désintégration des mesures,
VII, champs de vecteurs (?) et VIII, mesure de Haar

5 - 20 Juin : à Royaumont.

Séminaires

6-7-8 Déc. Weil : Variété de Picard (2 exposés)
Serre : Petit Cousin
Jaffard : Thèse de Lang
Bruhat : Mackey (imprimitivité)
Grothendieck : Espaces nucléaires.

14-15-16 Février : Programme à étudier.

Avis aux rédacteurs. - 1. A titre d'essai, les rédacteurs indiqueront, par un point d'exclamation gras en marge, les endroits vraiment délicats des démonstrations. Si le système donne satisfaction, on envisage de l'utiliser dans les fascicules imprimés.

2. Prière de mettre un sommaire en tête des rédactions.

Dans ce qui suit, on n'indique pas les décisions de détail, qui seront communiquées directement aux rédacteurs.

Ensembles II.

Les §§ 1,2,4,5 sont acceptés. Dieudonné fera les retouches de détail sur la rédaction définitive des §§ 1,2, état 7, et fera la rédaction définitive des §§ 4,5, état 8. Par contre, les §§ 3 et 6 seront rerédigés, tirés et distribués en Etat 8.

Une lettre de Samuel montre qu'on peut substituer à l'axiome d'extensionnalité l'axiome $y = \tau_x((\forall z)(z \in x \iff x \in y))$, plus faible, grâce à S7. On pourrait même se passer de tout axiome d'extensionnalité pour beaucoup d'ensembles. Mais on ne pourrait démontrer que $x \subset y$ et $y \subset x \implies x = y$. Finalement, on laisse les choses en état, et on renvoie les remarques de Samuel en exercice.

§ 3.- On admet l'abus de langage, consistant à dire fonction au lieu de graphe fonctionnel quand l'ensemble d'arrivée n'a aucune importance ; on l'évitera au chap. II.

On donnera les "lemmes de Serre" : soit $h = g \circ f$; alors, f injectif et g injectif $\implies h$ injectif ; f projectif et g projectif $\implies h$ projectif ;

h pro. \Rightarrow g pro. ; h inj. \Rightarrow f inj. ; h pro. et g inj. \Rightarrow f pro. ;
 h inj. et f pro. \Rightarrow g inj. Le théorème de Weil en est un corollaire.
On tâchera de réordonner la rédaction autour de ça . On parlera de sections et de rétractions (inverses à droite, à gauche) (cf. plus loin pour la terminologie). On s'efforcera d'écrire des formules.

On aura deux notions de "familles". "Famille", sans plus, sera synonyme de "graphe fonctionnel". Synonyme usuel : "famille d'ensembles" .
D'autre part, "famille $(x_z)_{z \in I}$ d'éléments de E " signifiera fonction admettant E pour ensemble d'arrivée ; lorsque $E = \mathcal{P}(F)$, on dit "famille de parties de F ". Voir plus loin les conséquences heureuses au § 4. Définir les familles "doubles".

On est indécis pour "restriction" et "prolongement". Est ce que ça doit concerner uniquement les graphes, ou doit-on imposer des conditions (plus ou moins strictes) aux ensembles d'arrivée ? On est prié d'envoyer son opinion au plus tôt.

p.76, lignes 5-6 du bas : "l'ensemble des éléments de la famille" est un abus de langage.

p.77, ligne 1 du bas : on dira que $x \in E$ est invariant par f seulement si l'ensemble d'arrivée et l'ensemble de départ de f sont égaux à E .

p.78, vider les terminologies "fonction réduite" et "fonction univalent"

p.79-80, la prop.9 et son cor. sont rejetés au § 4, avec les formules analogues pour réunion, intersection.

p.80, dans C54, on parlera de graphe fonctionnel, et des projections de ce graphe.

p.81, exemple 5, dire "l'application diagonale".

p.81, on définira $f \cdot y$ comme $x \rightarrow f(x,y)$. Dire qu'elle est déterminée (et non engendrée) par f .

p.82, vider les notations $[u,v]$ et (u,v) . On dira : "on utilise parfois la notation uxv , malgré la confusion...". Donner la formule $(u \cdot u') \times (v \cdot v') = (u \times v) \cdot (u' \times v')$. La notation $[u_i]$ est vidée du § 5, et ne sera pas remplacée.

§ 4. On étudiera simultanément familles d'ensembles et familles de parties de E . Dans le 2° cas, on définira $\bigcap X_i$ même si $I = \emptyset$, et on retrouvera les conventions de Ens. \mathbb{R} . Observer que $\bigcup X_i$ ne dépend pas de l'ens. d'arrivée de $z \rightarrow X_i$; de même pour $\bigcap X_i$ si $I \neq \emptyset$.

p.87, prop.3, introduire le graphe non seulement dans la démonstration, mais dans l'énoncé.

p.90, prop.6 : 1° : dire que f et g coïncident dans E ; 2° : parler de graphes.

§ 5.- Le produit $\prod X_i$ et E^F seront des ensembles de graphes fonctionnels. On parlera de l'application canonique de E^F dans l'ensemble des applications de E dans F , et on justifiera ainsi la terminologie usuelle.

Au n°3, on utilisera $\bigcup X_i$ pour prouver l'existence de $\prod X_i$. Mais, dans la définition de $\prod X_i$ qu'on donnera ensuite, on ne parlera pas de $\bigcup X_i$.

p.97, supprimer la ligne 5.

Parler de la diagonale d'un produit quelconque, et de l'application diagonale.

§ 6. On ne définira pas les relations réflexives. On définira "réflexive dans E " comme $R(x,x) \iff x \in E$. On dira "réflexive" par abus de langage quand il n'y a pas d'équivoque sur E . Les lignes 6 à 15 de la p^a 105 sont vidées; on dira seulement : si R est une rel. d'équ., $R(x,y) \implies R(x,x)$. ~~xxxxx~~ Abréger les lignes 17 à 22.

Dans la prop.1, dire : pour qu'une correspondance entre X et $X...$ et vider la condition a.

p.106, Exemples.-- Les remonter avant la prop.1. Donner l'ex.3 en même temps que 1. Autres exemples : cas où on identifie les points d'une partie, congruence des entiers modulo n .

p.107, C55. Dire : $R(x,y) \Leftrightarrow (f(x) = f(y))$.

p.108, lignes 11-12, dire : soit $P(x)$ une relation ; soit $R(x,y)$ une relation d'équ. ; soit x' une lettre distincte de x et ne figurant pas dans P ...

Formuler C56 et sa démonstration en langage naïf.

p.109, sortir les $\forall \in R/R$ des quantificateurs.

p.110, n°5, rédiger ainsi : dire que f est compatible avec R , c'est dire que f est constante sur les classes d'équivalence d'après C56. Abréger la suite.

p.111, les lignes 1 à 16 remontent au § 3 (on s'efforce d'oublier la nature exacte de l'espace quotient).

p.112 en haut, un diagramme.

Parler des relations compatibles avec une relation d'équivalence par rapport à plusieurs lettres.

Questions terminologiques.

Le Congrès prend connaissance de propositions du caucus des Carioques, relatives à la terminologie "homomorphisme sur, isomorphisme dans, isomorphisme sur", pour lesquels le caucus propose "épi- resp. mono- resp. isomorphismes".

Le Congrès est unanime à regretter que Bourbaki, dès ses débuts, n'ait pas restreint l'usage des mots "isomorphisme", "biunivoque" à "isomorphisme sur", "biunivoque sur". Dans l'état actuel du Bourbaki imprimé, il paraît tout à fait impossible de revenir sur le sens initialement donné à "biunivoque" sans tout réimprimer ; il serait possible, néanmoins,

sans changer la définition, de veiller à ce qu'en pratique le mot "biunivoque" ne soit plus jamais employé dans Bourbaki qu'au sens "biunivoque sur" (ce qui serait grandement facilité par l'introduction d'un nouveau terme pour "biunivoque dans", cf. plus loin), ce qui permettrait, dans un avenir plus ou moins éloigné (lorsque tous les fascicules où figure ce mot avec le sens actuel auront paru en nouvelles éditions) de changer la définition si on le désire. Pour "isomorphisme", Cartan affirme que ce mot apparaît assez rarement dans le Bourbaki imprimé avec le sens "isom. dans" pour qu'on puisse sans inconvénient en changer dès maintenant la définition ; le congrès n'en est pas convaincu a priori, et décide de demander à Dieudonné une liste complète des passages où le mot figure avec le sens "isom. dans" afin de pouvoir prendre une décision en connaissance de cause ; au cas où ces passages seraient trop nombreux, on pourra toujours adopter le parti proposé plus haut pour "biunivoque".

Quant aux trois termes proposés par les carioques, le congrès fait les constatations suivantes : a) une telle terminologie ne serait satisfaisante qu'en algèbre pure, vu que c'est seulement en algèbre qu'une représentation (ou homomorphisme) biunivoque de A sur B est automatiquement un isomorphisme ; il est bien connu que, dès qu'intervient la topologie, il n'en est plus ainsi, de sorte que la terminologie carioque serait par exemple canulée dans les groupes topologiques, EVT, etc. ; b) du point de vue du vocabulaire, en dehors des objections des puristes et hellénistes auxquelles le congrès n'attache qu'une importance tout à fait secondaire, il paraît essentiel, pour pouvoir traduire en français des phrases telles que "cet homomorphisme est sur" (ou en anglais la phrase "this homomorphism is onto"), d'avoir des adjectifs à côté des substantifs qu'on se propose d'introduire ; or "épimorphique, monomorphique" ou même "épimorphe, monomorphe" sont lourds, et il semble impossible de dire "cet homomorphisme est isomorphique" (ou "est isomorphe"). Le congrès décide qu'il y a lieu d'introduire une terminologie franchement ensembliste faisant abstraction

de la structure, et fondée sur la décomposition canonique d'une application ; bien entendu, dans toute partie de Bourbaki où ne figureront jamais d'autres applications que les représentations pour une certaine espèce de structure, on aura le droit d'insérer une déclaration d'intention qui restreindra en conséquence le mot "application" ainsi que les nouveaux termes qu'il s'agit d'introduire pour répondre aux desiderata des carioques.

Finalement, le congrès adopte provisoirement (sous réserve d'approbation par la branche en émigration) les termes suivants :

a) injection = application biunivoque dans, avec l'adjectif "injectif"; injection canonique = application canonique de X dans A quand X est une partie de A .

b) projection = application sur, avec l'adjectif "projectif" (traduisant "onto" = "sur") ; projection canonique = application canonique de E sur E/R si R est une rel. d'équiv. dans E (avec le canular bien connu et apparemment irrémédiable que $E/R \neq E$ quand R est la relation d'égalité).

Il est reconnu que les termes ci-dessus sont bien en accord avec la terminologie actuellement en usage dans les espaces fibrés ; Cartan, d'abord inquiet sur le multiplodoque Sammy-Cartan, finit par se persuader que tout est pour le mieux de ce côté aussi (il n'y a pas incompatibilité entre "homomorphisme projectif" de la nouvelle terminologie et "module projectif" au sens du multiplodoque ; au contraire, il y a entre ces termes un parallélisme fort agréable à l'œil, et de même pour "injectif"). On se pose, sans essayer de la résoudre, la question des termes "limite projective resp. inductive" : faudrait-il remplacer le second par "injective" ou au contraire modifier "projective" ?

c) en revanche, il subsiste un certain flottement sur le 3^e terme à introduire pour "application biunivoque sur" : pour n'avoir que des mots finissant en -jectif, Weil propose, au choix, "ambijectif", "bijectif",

"conjectif" (avec les substantifs "ambijection", "bijection", "conjection")
"objectif" semblerait bon, mais "objection" est impossible ; Koszul
propose "conjonctif", "conjonction". On attendra, pour prendre une
décision, que tous les membres de Bourbaki aient formulé leur opinion
sur ce point précis ainsi que sur l'ensemble de la question, et il leur
est enjoint de le faire au plus tôt, envoyer les avis à A. WEIL,
3 rue Auguste Comte, PARIS (6^e). Donner aussi son opinion sur
"section" et "rétraction".

[N.B. A l'occasion de cette discussion, il a été observé aussi que
la distinction établie par Bourbaki entre "représentation" et "homomor-
phisme" lorsqu'il s'agit de groupes topologiques n'a pas été sanctionnée
par l'usage en dehors de Bourbaki ; mais aucune proposition concrète
n'est faite à ce propos] .

Ensembles. Chapitre III.

Remarque générale de style : vider les resp.

§ 1, p.1 : on dit que R est une relation d'ordre par rapport aux lettres
x et y ... La définition des relations d'ordre dans E est canulée
(on n'a pas $R(x,y) \Rightarrow x \in E$ et $y \in E$). On décide d'ajouter aux axiomes
des relations d'ordre la condition $R(x,y) \Rightarrow R(x,x)$ et $R(y,y)$. On
conserve alors la déf. des relations d'ordre dans E .

p.2 : parler déjà de la relation d'ordre induite dans E (en haut). Noter
l'abus de langage qui consiste à dire " $x \leq y$ est une relation d'ordre
dans l'ens. des réels" pour " x réel et y réel et $x \leq y$ ".

Un ordre sur E sera une correspondance admettant E pour ensembles de
départ et d'arrivée. Prop.1 : pour qu'une correspondance G entre E et E
soit un ordre sur E , il faut et il suffit que son graphe ...

Remonter les ex. du bas de la page avant la prop.1 ; dans l'ex.3, la
définition de "p plus fine que p'" est canulée.

p.3. Noter l'abus consistant à employer \leq pour des relations d'ordre distinctes.

Compléter (RO_I) et (RO_{II}) (cf. plus haut).

"Ensemble ordonné" devra avoir été défini (avec renvoi au chap.IV).

p.5. Ligne 9 du bas, dire : soit $R(x,y)$ une relation ; si R est transitivité et si $R(x,y) \Rightarrow R(x,x)$ et $R(y,y)$, R n'est pas nécessairement une relation d'ordre. Exemple. Mais en tous cas.... Si R est une relation d'ordre dans E , S est une relation d'équivalence dans E ... $R'(X,Y)$ doit être l'une des relations équivalentes

" $X \in E/S$ et $Y \in E/S$ et $(\exists x)(\exists y) (x \in X$ et $y \in Y$ et $R(x,y))$ ",

" $X \in E/S$ et $Y \in E/S$ et $(\forall x)(\forall y) ((x \in X$ et $y \in Y) \Rightarrow R(x,y))$."

R' est réflexive dans E/S (mais R n'entraîne pas R'). Renir compte de (RO_{III}) .

p.7, dans l'ex.c, considérer l'ensemble des préordres ; échanger plus fin et moins fin.

p.9, remonter les isomorphismes.

p.10, vider l'ex.4.

p.11, vider la déf. des segments. Dans la prop.2, attention au cas

" $b < a$ " !

p.12, l'ex.3 est vidé (sauf si Dieudonné a des raisons personnelles sérieuses pour le garder).

p.13, établir l'unicité avant la déf.4 ; dans la déf., dire "le plus grand". Vider les 2 lignes en petits caractères.

p.14, vider les ex. 1 et 4. Au moment des bornes sup., on donnera des exemples de 3^{e} espèce montrant les divers cas possibles.

p.15, déf. 8 : la borne inf.

p.16, la prop.4 devient laius avec un \sum .

§ 2, p.21, on commencera par définir une "relation de bon ordre" : sur tout ensemble sur lequel elle induit une relation d'ordre, il y a un plus petit élément.

Avant de définir le "segment déterminé par x ", on définira un "segment" S par " $x \in S$ et $y \in E$ et $y \leq x \Rightarrow y \in S$ ".

Donner un énoncé en forme (comme dans l'Etat 4) des propriétés de E^0 . L'application $x \rightarrow S_x$ est un isomorphisme pour E totalement ordonné. Un segment d'un segment est un segment. Réunion, intersection de segments. Dire que : ou bien E est réunion de ses segments, ou bien E a un plus grand élément.

p.22, dans la prop.2, on envisagera le cas où les X_i sont seuls donnés, et où on construit E .

Les ordinaux sont vidés (!). On ne gardera que ce qui peut s'énoncer aisément et utilement en langage d'ensembles bien ordonnés.

Expliquer dans ce § la démonstration de relations et la construction de termes par récurrence transfinitie en se guidant sur la présente rédaction de la récurrence ordinaire.

Soient A bien ordonné, B un segment vérifiant ceci : si $x \in A$ et si $y < x \Rightarrow y \in B$, alors $x \in B$. Conclusion : $B = A$.

§ 3, p.31, les alephs sont vidés.

p.32, la prop.2 s'énoncera : la relation $a \leq b$ entre cardinaux est une relation de bon ordre. Débaptiser les cor. 1 et 2.

p.37, prop.12 : remplacer i par 0 et j par 1 dans la dém.

p.39, le cor. est débaptisé, et s'énoncera : il n'existe pas d'ensemble dont tout cardinal soit élément.

Dire quelque part que $a+1 = b+1 \Rightarrow a = b$. Notation $a-1$.

Un \sum pour $a-a'$.

Donner en exer. les cardinaux "exorbitants".

§ 4. Plan du début : A) Déf.1. B) Prop.1 sous la forme : pour que n soit fini, il faut et il suffit que $n+1$ soit fini. C) un théorème donnant la caractérisation intuitive des ensembles finis : soient E un ensemble, \mathcal{A} la plus petite partie de $\mathcal{P}(E)$ contenant \emptyset et contenant $X \cup \{x\}$ si $X \in \mathcal{A}$ et $x \in E$. Alors, pour que E soit fini, il faut et il suffit que $E \in \mathcal{A}$.

Dém.- 1) Toute partie finie de E est dans \mathcal{A} ; sinon, soit n le plus petit entier pour lequel existe $B \subset E$, $B \notin \mathcal{A}$, $\text{card } B = n \neq n+1$; soient $b \in B$, $B' = B - \{b\}$, $n' = \text{card } B'$; on a $n'+1 = n$, donc $n' < n$, donc $B' \in \mathcal{A}$; contradiction.

2) Toute partie de \mathcal{A} est finie ; car \emptyset est fini et B fini $\Rightarrow B \cup \{b\}$ fini (prop.1). D) Principe de récurrence. On donnera une dém. plus formalisée ; des phrases telles que "il existerait un entier q tel que non $R(q)$ " peuvent induire en erreur un lecteur peu doué. Insister sur $s' < s$. Le (a) de C50 va en variante. Essayer de ramener les variantes les unes aux autres "logiquement" ; par exemple, 1 se ramène à C50 en remplaçant $R(n)$ par " $n \geq k \Rightarrow R(n)$ " ; 3 se ramène à 2 en remplaçant R par non R . On donnera après les autres résultats des pp.40-41. Le th.1, qui aura déjà été donné, est vidé.

En exer., les caractérisations classiques des ensembles finis : Dedekind, Denjoy, Tarski (toute partie non vide de $\mathcal{P}(E)$ a un élément maximal, resp. minimal).

La soustraction sera donnée à la fin du n°3 avant les inégalités.

Le cor.2 de la p.40, qui est de la soustraction camouflée, n'aura pas été donné avant.

p.46, la prop.6 deviendra : tout ensemble totalement ordonné à n éléments est isomorphe d'une seule façon à $[1, n]$ (par récurrence sur n).

on montre d'abord qu'il y a un plus grand élément; puis, on obtient la prop. par une deuxième récurrence sur n).

p.47, prop.7 vidée.

p.48, déf.2 : pas de terminologie pour q quand b ne divise pas a . Quand b divise a , q s'appelle le quotient. Le seul fait d'écrire a/b signifiera que b divise a . Vider les lignes 6 et 7 du bas.

La prop.8 sera énoncée ainsi : $(r_0, r_1, \dots, r_{k-1}) \rightarrow \sum r_i b^{i-1}$ est un isomorphisme du produit lexicographique $\prod [0, b-1]$ sur $[0, b^k]$ (dém. par récurrence sur k). Après, on observe que $b^k \gg k$, d'où le résultat du texte, en latin. Remarque : la prop. sera surtout utile pour b premier (parfaitement!).

p.51, vider les lignes 6 à 9 du bas. Les lignes 2 à 5 du bas remontent à la déf. des entiers.

p.52, le cor. en prop. et la prop. en cor., ou vidée si elle ne sert à rien, ce qui semble être le cas.

p.53, poser $\binom{n}{p} = 0$ pour $p > n$.

p.54, cor.3 : soient E et F des ensembles finis totalement ordonnés.

Prop.13, supprimer "tels que $p+1 \leq n$ ".

p.56, prop.15 : faire la dém. par récurrence. Entre *...*; indiquer la relation avec les polynômes.

§ 5. Après la déf.1 : on ne sait pas démontrer qu'il existe un tel ensemble à partir des axiomes précédents (vider la footnote). Remarques : 1) si la relation "x est un entier" est coll., l'ensemble des entiers est infini. 2) S'il existe un ensemble infini, "x est un entier" est coll. Introduisons, alors l'axiome suivant... Les remarques qui précèdent prouvent alors le th.1 : la relation "x est un entier" est collectivisante.

p.58, vider les lignes 9 à 11 du bas.

Pas de resp. dans C51 : faire deux critères. Ça devra être un cas particulier de l'induction transfinie.

p.59, vider l'ex.4 .

p.60, nouvelle dém. de la prop.1 : Lemme 1 : un ensemble infini E contient un ensemble D équipotent à N (définir par récurrence une application injective de N dans E). Lemme 2 : N est équipotent à N^2 (écrire les symboles numériques de n et n', et les intercaler). Ceci posé, on zornifie sur les couples (X, ψ) , où $D \subset X \subset E$, et où ψ est une application biunivoque de X sur $X \times X$ prolongeant une application biunivoque donnée de D sur $D \times D$. Soit (X, ψ) un couple maximal. Soit $x = \text{card } X$. On a $x^2 = x$, donc $2x = x$ et $3x = x$. Si $x = \text{card } E$, c'est fini. Sinon, $\text{card } (E - X) > x$, donc $\exists Y \subset E, Y \cap X = \emptyset, \text{card } Y = x$. Soit $X \cup Y = Z$. On définit une application biunivoque de $Z = X \cup Y$ sur $Z \times Z = (X \times X) \cup (X \times Y \cup Y \times X \cup Y \times Y)$ qui prolonge ψ , en observant que $\text{card } Y = \text{card } (X \times Y \cup Y \times X \cup Y \times Y)$.

p.62, cor.4 : $ab = a+b = \sup(a,b)$. Vider le cor.5. La prop.3 sera déjà connue.

p.64, vider à partir de : "mais on sait ..." .

Exer. de Cartan (Moustique!) : si, dans un ensemble bien ordonné, tout élément a un prédécesseur, il est isomorphe d'une seule manière à N ou à une suite finie.

§ 6 - p. 65, Le cor. aura été fait. Prop.2 et 3 vidés. Caractériser les bien ordonnés parmi les totalement ordonnés ainsi : toute suite décroissante est stationnaire.

p.67, donner la terminologie "filtrant croissant" (lorsque la relation d'ordre se lit "plus petit que"), et l'employer. Eviter les resp. en confiant un miroir au lecteur.

Le n°4 sera conservé à l'impression, mais : 1) le th.2 viendra comme cor. du th.3 ; 2) on dira plutôt : filtrant à droite et à gauche (vider la 2^e coquille) ; 3) vider les 2 dernières lignes de l'ex.2 .
Vider le n°5 .

Ensembles. Chapitre IV.

Le Congrès se félicite du brusque progrès des structures. On n'a pas chydé les détails, mais il semble qu'il serait peu utile de relire la rédaction en congrès. Un nouvel état sera donc rédigé par Dieudonné, tiré et distribué.

p.4, C3, remplacer dans par sur.

Il semble que presque tout est indépendant de (ISOM). Rajeter si possible cette condition et le transport de structure à la fin du chap.

p.7, la terminologie des lignes 8-9 est peu heureuse.

Un Σ pour dire qu'il n'y a pas toujours de structure induite, quotient, produit. Exemples.

Etudier l'associativité des produits.

Changer la déf. des images réciproques : soit $f : A \rightarrow A'$, S une structure sur A . Une structure S' sur A' est dite image réciproque de S si ... et copier le cas des structures induites (on rendra clair ainsi que, une fois connues les représentations, on peut tout faire). On a l'unicité, etc. S'il existe une image réciproque au sens de Samuel, c'est l'image réciproque au nouveau sens ; la nouvelle image réciproque est, lorsqu'elle existe, la plus grande structure contenue dans celle de Samuel (du moins, pour les bonnes variances) (cette plus grande structure ne semble pas, lorsqu'elle existe, être nécessairement l'image réciproque). Faire le raccord, non seulement avec les structures induites, mais avec les structures produits. Modifier dualistiquement la déf. des images directes.

Etudier la décomposition canonique d'une représentation. Dire que l'application du milieu n'est pas toujours un isomorphisme (un \mathcal{Z}).

p.27, il semble qu'une structure d'espace compact avec une mesure de Radon soit un appauvrissement d'une structure d'espace compact (choisir la mesure avec un \mathcal{C}). C'est bien fâcheux.

Supprimer "canoniquement" à la ligne 11.

Exemple de "procédé de déduction" : changement des variances.

p.28, ne pas dire que deux espèces de structures sont équivalentes alors qu'elles peuvent ne pas avoir les mêmes représentations.

Appliquer Blanchot aux identifications ; mais signaler le danger des identifications en cercle ; exemples.

Exemples de 3^d espèces des relations et termes structuraux (groupe des commutateurs, etc.)

Intégration V

Remarque générale de style : arranger les "fonctions positives finies ou non définies dans T".

§ 1, après la déf.4, observer que (f_α) est équimesurable si et seulement si $t \rightarrow (f_\alpha(t))$ est mesurable comme application de T dans $\prod X_\alpha$. Alors, la prop.7 est une conséquence du chap.IV, et passe en laus.

p.10, ligne 8, supprimer "désormais".

Comme l'intégrale essentielle prolonge l'intégrale usuelle, on la notera \int et non $\bar{\int}$ (mais on garde $\bar{\int}^*$).

Observer en italique que les notions introduites ne sont pas nouvelles dans les dénombrables à l'infini.

§ 2. Entièrement rejeté après le chap.V, on verra plus tard à quel endroit exactement. Voici cependant les améliorations à prévoir :

prop.2 : énoncer comme condition $0 \leq \int^* hg \, d\mu < +\infty$ et comme conclusion $\int fg \, d\mu \in (\int^* hg \, d\mu)D$. Il faut une démonstration à part pour $\int^* hg \, d\mu = 0$ (expliquer pourquoi), que voici : $fg \in hgD$ presque partout, et $hg = 0$ presque partout, donc $fg = 0$ presque partout, donc $\int fg \, d\mu = 0$.

Dans la dém. du cor.2, on peut alors ne pas considérer à part le cas où $\int^* q(f) \, d\mu = 0$; mais on ne peut éviter de faire séparément le cas des normes, contrairement à ce qu'on a cru à Gelles (à cause de $f(t) \in h(t)D$).

Avant le th.1, un laius pour rappeler le minimum nécessaire sur les limites inductives. Observer que le th. du graphe fermé s'étend trivialement aux limites inductives de Fréchet, et que la dém. va s'appliquer en réalité à tout espace vérifiant le th. du graphe fermé (mais pas dans l'énoncé).

p.17, renvoyer à un exer. pour une dém. élémentaire du cor.2.

p.17, ligne 13, dire : dans un espace de Banach G (et même dans un espace de Banach réflexif).

n°4, dire : mesurable pour la topologie affaiblie (parfois : faiblement mesurable).

§ 3. On ne dispose plus du § 2. On considérera uniquement des familles $t \rightarrow \lambda_t$ de mesures positives. Si pour toute $f \in \mathcal{K}(X)$, $t \rightarrow \langle f, \lambda_t \rangle$ est ess. intégrable, il existe $\nu \geq 0$ telle que $\nu(f) = \int \langle f, \lambda_t \rangle \, d\mu(t)$ (trivial); on la note $\int \lambda_t \, d\mu(t)$. On dira que $t \rightarrow \lambda_t$ est adéquate (à défaut de mieux) si de plus $t \rightarrow \lambda_t$ est "vaguement mesurable" (remplacer ces mots par leur définition). Dans toute la suite, λ_t est supposée adéquate.

Exer : Soit $\nu_\alpha = \int \lambda_t \, d\mu_\alpha(t)$, μ_α famille filtrante croissante de borne supérieure μ ; alors $\nu = \int \lambda_t \, d\mu(t)$ est la borne supérieure des ν_α (observer comme lemme facile que, si g est une fonction μ -intégrable,

on a $\int g d\mu = \lim \int g d\mu_\alpha$). Voir si ça peut servir à simplifier des dém. ultérieures.

p.24 : lemme vidé.

p.25 : remarque vidée.

p.26 : remarques vidées.

p.27, prop.3 : dire : si en outre $t \rightarrow \lambda_t$ est vaguement continue.

Remarques vidées.

p.28, énoncer le cor.2 ainsi : soit f une fonction définie dans X , à valeurs dans un espace topologique G , et ν -mesurable. Alors, si X et T sont dén. à l'infini, f est λ_t -mesurable sauf pour un ensemble négligeable de valeurs de T .

p.29, énoncé du th.1. Dire : soit N l'ens. des $t \in T$ pour lesquels f n'est pas λ_t -intégrable. Alors... La formule (4') ne sera pas écrite puisque (4') \equiv (4) maintenant. La dém. devra être changée puisque le cor.2 de la prop.3 a été vidé ; il suffit (cf. Etat 2) de passer à la limite à partir des combinaisons linéaires de fonctions continues à support compact.

p.30, vider le cor.1 .

N°5, vidé.

§ 4. N°1, tenir compte de la nouvelle terminologie.

Th.1, vider " si π et g sont continues..." et la dém. correspondante (bas de la p.37), à moins que l'usage de (1') permette de simplifier la dém. de (1) (à regarder de près). Dans la dém., il faut expliquer pas à pas les suites d'inégalités.

Si on supprime la deuxième moitié du th.1, il faudra naturellement supprimer tous les corollaires qu'on en déduit au cours du chap.

N°4, vidé.

Ajouter des remarques prouvant qu'on peut supposer π et g définies localement presque partout.

§5. N°2, on considère seulement des densités ≥ 0 (à cause du nouveau §2), et on rattrapera ce qui concerne les densités de signe quelconque dans un n° final.

Déf.2 : si g est localement μ -intégrable ...

p.47, ligne 4 : $d\nu = g d\mu$, mais pas $d\nu(t) = g(t)d\mu(t)$, ni $g(t) = d\nu(t)/d\mu(t)$.

Prop.3, etc.: références précises au § 4. Donner (en latin) la formule $\int f(g d\mu) = \int (fg)d\mu$.

Prop.5 vidée.

p.49, lignes 13-16, dire que g peut être $+\infty$ sur un ens. localement négligeable.

N°5, démontrer seulement le cor. (en suivant la dém. du th.2).

p.58, scholie : améliorer le style au début. Vider les lignes 1 à 5 du bas.

Prop.11, comparer à la condition 3 de Lebesgue-Nikodym. Énoncé : soit f une fonction positive à support compact, finie ou non, μ -intégrable et ν -intégrable.

Prop.12 : vider la condition 1 ; dans la condition 4, vider : dans ce cas ...

Prop.13 : on a échafaudé deux dém. simples au congrès. Mais la plus courte me paraît maintenant déconnante. Quant à l'autre, elle repose (de façon évidente) sur l'existence d'une suite (f_n) de fonctions continues ≥ 0 à support compact, "localement finie", et telle que $\sum f_n > 0$ partout. Mais on ne sait où référer pour ce résultat.

Déf.5 : observer que M est μ -mesurable.

p.65 : la remarque passe en exer. Dire en remarque que N est l'ens. des points de mesure > 0 .

p.66, après le 2^e alinéa, se ramener à ν^+ et ν^- .

La prop.16 passe en exer., et comme application du graffermé.

§ 6. Références précises pour les énoncés du n°2.

Prop.4 vidée.

Prop.5, dire "transitivité".

Démontrer les prop.5 et 6 directement (ce qui est trivial) sans utiliser les prop. vidées sur les intégrales faibles.

N°4 rejeté au chap.VI. On dira "mesure pseudo-image" au lieu de "mesure quotient".

§ 7. On commencera ainsi : soit μ une mesure ≥ 0 sur T , X une partie mesurable de T . Si f , définie sur T , est telle que $f\varphi_X$ soit intégrable, on pose $\int_X f d\mu = \int f\varphi_X d\mu$. Si g_X est définie sur X , on pose $\int_X g d\mu = \int g^X d\mu$. On observera qu'on définit ainsi une mesure abstraite sur X . Lorsque X est loc. compact, on va voir que cette mesure est une mesure de Radon. Reprendre alors la rédaction. On posera plutôt $\lambda_t = \varepsilon_t$ pour $t \in X$, $\lambda_t = 0$ pour $t \in T-X$; t_0 ne servira qu'à rattraper le schéma du § 4; $\nu = \varphi_X \mu$ s'appellera la mesure "réduite".

Prop.1, vider "portée par X " dans l'énoncé; donner des références dans la dém.

Vider la prop.4.

Vider toute la fin du n°2, à partir du lemme de la p.82.

N°4, on vide le mot "Stieltjes". La mesure de Lebesgue sur un intervalle est remontée au n°1 en exemple. On ne cherchera pas à établir la correspondance entre mesures et fonctions croissantes, la prop.14 est donc vidée. Le changement de variables dans l'intégrale de Lebesgue sera présenté comme suit :

1) φ étant une application croissante (ni continue ni biunivoque), on prend l'image ν de la mesure de Lebesgue par φ ; 2) cas où ν a une densité θ par rapport à Lebesgue ; 3) il en est ainsi quand φ a une dérivée intégrable, qui est alors θ . Tout ceci remonte au § 6 .

§ 8. p.90, en bas : donner des références.

p.91, cor.2 : seulement pour T et T' dénombrables à l'infini.

Dans le th.1, supprimer les resp.

p.92, donner un cor.3 : si $f \geq 0$ est ν -mesurable, si $t' \rightarrow f(t, t')$ est μ' -intégrable pour presque tout t, et si $t \rightarrow \int f(t, t') d\mu'(t')$ est μ -intégrable, alors f est ν -intégrable. Un \sum pour le cas où f n'est pas ≥ 0 .

p.93, ligne 5, dire "de nouveau" au lieu de "toujours" .

Prop.4 : dire dans l'énoncé que $0 + \infty = 0$ donne un sens partout à $f(t)f'(t')$. Expliquer pas à pas les suites d'inégalités.

p.94, lignes 4,5,6, commencer par le cas non canularesque.

p.95, vider le cor.4 .

Prop.6, vider la notation $\pi \times \pi'$.

N°5, vidé.

Algèbres de Lie.

La lecture du Chapitre I a conduit aux décisions suivantes :

- 1 - L'Etat 2 utilisera la démonstration de Witt pour le Théorème de Birkhoff. Elle est valable, d'après Lazard, sous des hypothèses plus générales.
- 2 - Avec quelques explications sur les suites exactes, on pourra se passer de toute référence à l'"Algèbre homologique".

On ajoutera pas mal de choses : algèbre opposée, idéal dérivé des algèbres de Lie semi-simples, extensions arbitraires d'algèbres semi-simples unicité de la décomposition en produit de simples, représentations semi-simples des algèbres de Lie réductives, correspondance entre extensions abéliennes et classes de cohomologie de degré 2 .

On définira les algèbres nilpotentes par les extensions centrales.

Les exemples rédigés seront envoyés en Exer. Par contre, on mettra dans le texte les algèbres simples en car. p de Jacobson.

Terminologie : Les répliques seront appelées des héritiers (héritier diagonal et héritier nilpotent, lequel n'a d'autre héritier que lui-même). La forme bilinéaire fondamentale retrouvera son nom "forme de Killing". On ne parlera pas de l'algèbre enveloppante d'un module de représentation. On tâchera de se dispenser de lui donner un nom.

p.2 Définir $[a,b]$ lorsque a et b sont des sous-espaces.

p.3 Prop.1 : "Si f est un homomorphisme de l'algèbre de Lie a sur l'algèbre de Lie b , alors f applique chaque $D^p a$ sur $D^p b$ " .

p.4 Tirer le Lemme 3 du Lemme 2 .

Dire que le centre est stable par les dérivations.

Définir les extensions de a par b ($b \xrightarrow{\text{isom}} g \xrightarrow{\text{sur}} a$) .

p.5 Définition 8. Définir trivial avant essentiel.

p.8 Donner en scholie les Prop.5 et 6 tout de suite après la définition 13. Observer qu'un g -module à gauche est un module à droite sur l'algèbre opposée qui aura été définie au n°1 .

Dire qu'un g -module est un module sur l'algèbre enveloppante.

p.12 Ecrire 4 comme une dérivation $x(f\dots) = (xf)(\dots) + f(\dots x \dots)$

p.14 Ajouter comme exemple des algèbres de Lie définies par des invariants. ligne 2 : forme de Killing et non forme fondamentale.

Ne pas parler d'invariants, mais seulement d'éléments invariants.

- p.15 Utiliser si possible la démonstration de Witt (Journal de Crelles) qui d'après Lazard (C.R. 1952) vaudrait pour des modules très généraux. La démonstration du texte est valable pour des algèbres de Lie sur un anneau A qui sont des modules libres sur A .
Fin de la p.15 : signaler la récurrence.
- p.16 B changer l'ordre des termes du second membre.
- p.17 lignes 15 lire 1 au lieu de j
ligne 18 lire k_1 au lieu de k_j
lignes 20 et 24, lire k_1 au lieu de k .
- p.18 Proposition 9. La tirer du résultat : il existe un isomorphisme canonique de l'algèbre symétrique $S(g)$ sur l'algèbre graduée associée à $U(g)$ filtrée par les sous-espaces provenant de tenseurs de degré $\leq p$ sur g .
- p.22 Essayer de rédiger la cohomologie sans renvoyer à aucune étude générale préalable, c'est-à-dire essentiellement, justifier la suite exacte. Dire module de cohomologie et non espace.
- p.23 Prop.1. Ne pas parler d'extension, mais d'idéal et quotient. Dire que, si a est un idéal résoluble de g , l'image du radical de g dans g/a est le radical de g/a .
- p.26 Le début de la démonstration aura été donné avec les généralités sur les extensions. Définir les algèbres de Lie nilpotentes par les extensions centrales.
- p.27 Lemme 3 . Procéder dans l'algèbre enveloppante universelle.
- p.28 Corollaire 3. N'est pas à sa place. Le donner après la définition de résoluble et pour un idéal résoluble.
Théorème 2. Préciser que \mathbb{H} est de dimension finie.
- p.29 Idéal nilpotent doit être défini.
- p.30 Ajouter le comportement du radical nilpotent dans un homomorphisme sur .

p.30 3 lignes avant la fin. Prendre la représentation par homothéties, dans un espace de dimension L .

p.32 (Danger) la réciproque du Lemme 4 est fausse. **2**

p.33 Lemme 6, renvoyer au Prop.11 et 13 de Alg. Chap.VII, par.5 . Dire "héritier" au lieu de réplique.

p.34 Prop.7 Dire que β est un polynome en α .

p.32 Lemme 5. Première partie seulement.

Lemme 5'. Soit α un endomorphisme diagonal et soit $e_1 e_2 \dots e_n$ une base de vecteurs propres de α . Si β est un autre endomorphisme admettant les e_i comme base de vecteurs propres et si toute relation lin. à coefficients entiers entre les valeurs propres de α reste vraie lorsqu'on y substitue les valeurs propres correspondantes de β , alors β est un héritier de α .

Pour la réciproque, renvoyer par une remarque à un Exercice.

p.35 Mettre en Lemme la seconde partie de la démonstration de la Prop.7.

p.37 ligne 14. Dire que l'on utilise l'invariance de la forme bilinéaire.

p.40 Donner dans la remarque une définition intrinsèque de l'opérateur de Casimir (il ne semble pas que l'on gagne grand chose à partir d'une définition intrinsèque de ρ).

Observer que la Déf.1 écarte également l'alg. de Lie (0).

p.41 Dém. de la Prop.1. A revoir : on commence par supposer que la représentation adjointe de g soit non seulement semi-simple mais simple. Ou mieux, commencer par écarter le cas abélien, puis dans une autre Prop., faire la décomposition en produit de simples et abéliennes.

p. 42 Lemme 1. A remonter au n^0 sur le radical.

Numéro 4. A compléter : 1) Etant donné un idéal semi-simple, le sous-espace qui lui est orthogonal suivant la forme de Killing est un idéal supplémentaire. 2) unicité de la décomposition des semi-simples en produit de simples. Mettre les exemples en exercice et essayer de donner dans le texte les contre-exemples de Jacobson en car. p.

- p.53 voir p.37
- p.54 Le "Théorème de Lie" en Corollaire de la Prop.10 (resp. simples d'alg. résolubles).
- p.55 Prop.12. Annoncer que l'on va se servir du Théorème 2 et de la Prop.11.
- p.56 μ et μ' sont des applications (et non des isomorphismes).
- p.57 Dire que toute classe de degré 2 correspond à une extension. Ceci remplacera le Lemme 2 .
- p.58 Dans le Lemme 3, préciser que M est de dim. finie.
- p.60 Théorème 2 . α_1 et α_2 sont des "sections".
- p.64 a) lire $g \neq g'$.
- p.65 Traiter en Lemme le prolongement à l'algèbre enveloppante d'une dérivation.
- p.67 Première ligne. Lire R^S au lieu de R .

Divers. Une alg. semi-simple coincide avec son idéal dérivé.

- Si une algèbre noeth. M est un module de représentation de l'alg. g (semi-simple) et si pour tout $x \in g$, x_M est une dérivation de M, alors la sous-algèbre des invariants de M possède une base finie.
- Toute sous-algèbre, tout quotient d'une algèbre de Lie nilpotente est nilpotente.
- Toute extension d'algèbre semi-simple est inessentielle (p.59).
- Ex. Etant donnée une extension abélienne d'algèbre de Lie semi-simple, déterminer le plus grand facteur semi-simple de l'extension.
- Le produit tensoriel de deux représentations semi-simples est s.s.
- Conditions pour qu'une représentation d'alg. réductive soit sem. si b est une sous-alg. de q, alors $E(b) \rightarrow E(q)$ est un isomorphisme ($E(b) \subset E(q)$, alg. env. universelles).
- Ne pas dire " algèbre enveloppante d'un module de représentation".
