NBT 024

LA TRIBU.

(Bulletin oecuménique, apériodique et bourbachique).

N° 22 - COMPTE RENDU DU CONGRES DE LA REVANCHE DU COCOTIER.

(Royaumont, 5-17 Avril 1950)

Présents : Cartan - Chabauty - Delsarte - Dieudonné - Godement - Mackey (au début), Pisot - Roger, Samuel, Schwartz, Serre-Weil

----

Les membres Phondateurs avaient décidé de prendre une éclatante revanche sur l'indiscipliene des jeunes ; mobilisant tous les secrets magiques à eux dévoilés par Le Maître, ils foudroyèrent les jeunes de maux divers : abcès, gravelle, chemars et cochemars quaternionniques ; rares furent ceux assez valides pour sauter par dessus les ruisseaux de Royaumont. Delsarte se surpassa : il fit la cour à toutes les femelles présentes, et même "entre 8h du matin et 10h du soir", contrairement aux règles de l'ordre ; pressé par les questions des algèbristes, il se contenta de répondre "je ne vide pas les matrices, je les remplis" . On vit aussi Dieudonné, grimpant à un arbre avec une légèreté incroyable, et miaulant de toutes ses cordes vocales, s'écrire, blanchotiquement, devant l'air effaré des autres : "Je ne suis pas fou, je suis un non-Chat !!! " "points d'exclamations fournis gracieusement au rédacteur par Schwartz).

Mais ce débordement de jeunesse n'eut qu'un temps. Le froid et la pluie décochèrent leurs traits sans distinction d'âge. Et Delsarte de s'écrier :

" Mon sang, rendu visqueux par la sénilité,

Les assauts des grands vents ne peut plus supporter ".

Ainsi, guettant les éclaircies, le Congrès, transportant chaises, tableau noir et une éponge (baptisée "soucoupe" à cause de ses facheuses tendances à l'envol), faisait dix fois par jour le trajet de la salle de conférences à la terrasse, puis à l'oratoire de Saint-Louis. Hélas pour la bonne marche des débats, une salle de travail était munie d'une riche bibliothèque, et nombreux furent ceux qui préfèrent les lectures littéraires aux bombinages bourbachiques.

Enfin les canulars furent localement négligeables, s'ils ne furent pas négligeables. Ecoeuré par les chenilles et cochenilles du Haut Commissariat à la "Topologie Bombinatoire", Delsarte se démit pendant une heure. Malgré Dieudonné, on vit la technique obscurcir les idées, et Godement se fit engueuler, pas toujours à bon escient. Un naïf, enthousiasmé par les espaces Polonois, demanda si la fonction caractéristique d'un ensemble analytique était toujours analytique. Les créations terminologiques furent empreintes de la plus grande fantaisie : espace bornographiques, bornologiques, bornivores, espaces tonnelés. Pour satisfaire les désirs inavoués de Chevalley, on basera la logique sur le symbole "yoga" de Hilbert. Et, on eut beau "chasser le Dénombrable", "il revint en trottant" .

Il ne fut pas le seul à trotter, car Samuel proposa, dans l'enthousiasme général, de marquer les démonstrations naturelles du "signe de l'Ane Qui Trotte". Pour montrer au Congrès qu'il était là sur le droit chemin, Le Maître fit apparaître le lendemain, aux yeux écarquillés de trois fidèles (Schwartz, Serre et Weil) tout fiers d'être les témoins du miracle, le fameux Ane Qui Trotte, gambadant dans un champ voisin de l'abbaye.

Nous eumes la joie de recevoir à déjeuner, le lundi de Pâques, un cousin DU Maître, Nicolaïdès Bourbaki, le diplomate, qui vint avec sa femme, sa soeur et son neveu. Ceci, grâce aux soins et aux charmes de Cartan et de Schwartz, nous valut de gagner un pari contre de gentes pucelles (??, demander à Delsarte), qui ne voulaient pas croire que "Bourbaki" ait, en personne, déjeûné avec nous ; le prix en était une bouteille de champagne, que le manque de ressources locales transforma en douze bouteilles en chocolat liquoreux. Ceci s'ajouta à l'Armagnac, puis aux vins de "Pharamond" chez qui eut lieu le POt de Congrès ; outre les Congressistes et quelques épouses, Nicolaïdés, Freymann et leurs "bourgeoises" y assistèrent.

L'an dernier, seule l'Intégration n'avait ("étant donné le bon état où elle se trouv(ait)"!) pas excité les poétes. Elle prit une éclatante revanche cette année. Et les flots grondants du Dénombrable, des Polonois, des Diplodocus et des mesures abstraites, qui menaçaient de tout envahir, inspirèrent des vers pessimistes :

Intégration.

L'ouvert, l'analytique et le fermé, sommables,
Se mesurent, joyeux, au sein d'un Polonois,
Où Lebesgue, absolu, gouvernait autrefois
La tribu borélienne et le clan mesurable.

Mais, discret, le segment n'était pas séparable.
Radon, à l'infini, ne connaît plus de lois
Sinon les canulars que distille à la fois
L'espace brésilien au support innombrable.

Hélas ! Rien n'est plus vrai que dénombrablement,
Car le compact éclate où s'induit Godement.
Nicodème chancelle, et Fubini s'effondre.

De ce Livre avorté ne reste qu'un foetus.
Et le Congrès, défait, se lamente, hypocondre,
Sous le regard narquois du vieux Diplodocus.

GRAND PLAN GENERALISSIME.

Voulant en finir avec la perpétuelle valse des livres de la première partie, le Congrès décide de réduire cette partie à sa plus simple expression, et de mettre aux Parties II, III et IV les chapitres un peu trop techniques de la première partie. Ceci obligera à doter les parties II, III et IV d'un Leitfaden très strict. Mais cette solution a été jugée préférable à celle, d'abord envisagée, qui créait une "partie I bis", rendez-vous des chapitres techniques de la première partie. Ceci dit, voici le Plan :

Première partie :

- I Ensembles (la rédaction Chevalley de l'Introduction, et des chap.I et II donnant des espoirs de publication, on abandonne l'idée de publier le chap.III avant)
- II Algèbre (le chap.I sera reproduit tel quel ; Cartan fera un rapport sur la réédition des chap.II, III et IV ; V est sous presse ; VI et VII (petite divisibilité) sont en état 4 ; viennent ensuite les formes quadratiques (VIII) et les géomètries élémentaires (IX) ; et c'est tout).
- III Topologie générale (Entièrement publiée, sauf le fascicule de Résultats ; on réédite I et II ; ne pas oublier de dire qu'une fonction unif.continue définie sur un uniforme non séparé passe au quotient sur le séparé associé).
- IV Livre élémentaire.
- V Espaces vectoriels topologiques.
- VI Intégration (réduite aux chap.I, II et III, à IV (coupé en deux) et à un "manuel du chasseur de Diplodocus")
- VII Variétés différentiables.
- VIII Fonctions analytiques élémentaires.
- IX Groupes de Lie, géomètrie différentielle locale. (On jugera, d'après les rapports de Schwartz et de Weil, quels en sont les chapitres qui doivent figurer ici, et ceux à mettre dans la troisième partie).

Deuxième partie : analyse algèbrique.

- I Algèbre supérieure (algèbre homologique, anneaux associatifs, algèbres de Lie) anneaux noethériens, spécialisations et valuations, algèbre unidimensionnelle).
- II Arithmétique (ou, plutôt, algèbre unidimensionnelle).
- III Géomètrie algèbrique et algébroïde. (Voir, pour le plan détaillé de ces 2 livres, le "Commentaires sur la Divisibilité")
- IV Equations différentielles algèbriques.

Troisième partie : analyse géomètrique.
I Topologie algébrique.
II Théorie globale des fonctions analytiques.
III Groupes de Lie globaux, et géomètrie différentielle globale.

Quatrième partie : analyse fonctionnelle.
Mesure de Haar, Décompositions spectrales et anneaux d'opérateurs, représentations linéaires des groupes, Distributions, Fourier, Laplace, équations aux dérivées partielles, calcul des variations, potentiel, etc..

ENGAGEMENTS DU CONGRÈS.

CARTAN : Rapport sur la réédition de l'Algèbre (chap.II,III et IV)
Rapport sur Stokes, et sur la "petite topologie algèbrique" à mettre dans la première partie.

CHEVALLEY : Rédige le chap.II des Ensembles (surtout le § des structures
Rédige les géomètries élémentaires (complètement ou sous forme de rapport)

DELSARTE : Fait un rapport sur les équations diophantiennes.

DIEUDONNÉ : Intégration I à V .
Espaces vectoriels topologiques I,II,III.
Fait un rapport sur les fonctions analytiques élémentaires.
Chapitre préhomologique des Hom, Ext, Baise, Bande.

GODEMENT : Un § sur Hilbert-Schmidt - Fait (pour juin) une contre rédaction "Darstellung-théoretisch", de la réduction des matrices. Manuel du chasseur de Diplodocus.
Etat 1 des espaces fibrés.
Mesure de Haar.

SAMUEL : Divisibilité.
Valuations et spécialisations.
Algèbre simpliciale.
Théories de l'homologie.

SCHWARTZ : Fait un rapport sur les groupes de Lie.
Etat 3 des formes quadratiques.
Etat 2 des variétés différentiables (chap.II)

SERRE : Anneaux associatifs (anciens "anneaux primitifs" ;état 3)

WEIL : Fait un rapport sur la géomètrie différentielle.

PROCHAINS CONGRÈS.

Comités de juin 50 (Strasbourg, 10 au 20 Juin) : Algèbre VI et VII, et Intégration I et II (on commencera par l'intégration).

Congrès d'Octobre 50 (Roaymont, du 8 au 15) : Ensembles I et II, et espaces vectoriels topologiques I en Congrès pleinier,
- Intégration III et Manuel du chasseur de Diplodocus en comité.

Congrès de février 51 (Nancy) : espaces vectoriels topologiques II et III, Hilbert-Schmidt, début du rapport sur les Algèbres de Lie.

Congrès oecuménique de Juin 51 : Mesure de Haar, Rapport Cartan sur l'algèbre linéaire, rapport Schwartz sur les groupes de Lie, fin du rapport Chevalley sur les algèbres de Lie, rapport Weil sur la géométrie différentielle.

Spécialisations et valuations, espaces fibrés.

Rapport Cartan sur Stokes, rapport Dieudonné sur les fonctions analytiques.

Les rédacteurs (s'ils ne sont pas des minus) en déduiront les délais qu'ils ont pour faire leurs rédactions. Les rédactions autres que celles mentionnées dans ce programme sont pour Octobre 1951.

SEMINAIRE BOURBAKI de 50-51.

Travaux de Von Neumann (Godement et Dixmier).

Démonstrations de la conjecture de Minkowski : travaux de Hajos-Rédei (Delsarte)

Travaux de R. Brauer et Peck (Chabauty).

Fonctions modulaires selon Hecke-Peterssön (Godement).

Travaux Cartan-Oka sur les fonctions de plusieurs variables complexes (Cartan)

TravauxIgusa sur la variété de Picard (Samuel)

Mémoire Weil du Bulletin, et améliorations (Delsarte).

Théorèmes de Whitney, avec démonstrations DÉTAILLÉES (Schwartz).

Théorie des quaternions selon les ouvrages récents de Tait (Schwartz).

LOGIQUE et ENSEMBLES.

Un premier coup d'oeil sur le chap.I de Chevalley, le fait juger satisfaisant. Il n'est donc plus question de publier le chap.III en premier.

On mettra en exergue du Traité la phrase de Blanchot : "N'en rien dire, voila le seul espoir de tout en dire" .

Pour l'Introduction,il faudra élaguer les citations littéraires (bien que Dieudonné lui-même ait été ravi de voir Dostoïewski et Sierpinski dans le même sac) et les confessions de Chevalley. Ajouter (cf. états précédents) une démonstration disséquée, -et une justification du ε de Hilbert. Pour l'explication du point de vue axiomatique, la meilleure place est la note historique, qui devra être très chiadée. Quant à une publication personnelle de Chevalley, on lui en parlera de vive voix cet été.

FORMES QUADRATIQUES.

Comme principe général on décide de revenir à la séparation des alternées et des hermitiennes, d'introduire tout de suite le groupe associé, et de vider le cas de plusieurs formes au chapitre d'algèbre associative.

Plan :

§ 1 - Le corps K est quelconque, mais $\sigma^2 = 1$. On fait tout de suite les formes sesquilinéaires sur $E \times E$; définition de g et h , transformée, matrice, rang, sommes directes.

Les corrélations (anciennes "semi dualités", seront dites ici "linéaires", - on introduira les corrélations projectives au chap.IX). Extension aux algèbres tensorielles et extérieures (K commutatif, et $\sigma^2 = 1$) ; discriminant, transformation de celui-ci (cf. p.38) ; montée et descente globale des indices ; isomorphismes entre p- et (n-p)-vecteurs (dans le cas où le discriminant est une norme ou un carré). Pour ces questions, Weil est chargé d'interroger Chern sur l'utilité des tenseurs hermitiens (avec deux genres d'indices) ; on croit se souvenir que Papa Cartan ne les aimait pas ; Weil dit qu'il ne faut parler de tenseurs que sur le groupe linéaire complet (c'est à dire qu'on descend à la structure réelle, et qu'on fait intervenir des permutabilités).

§2 - (Formes réflexives). Définition, réflexivité de l'isom. (p, n-p). Kaplanski est vidé en exer., mais on l'annoncera dans le texte Expulsion des formes dégénérées (sous espace où f induit 0). Le lemme suivant (clé de toutes les récurrences) : si la forme induite sur le sous-espace V est non dégénérée ($V \cap V^0 = 0$), on a la décomposition en somme directe $E = V + V^0$ (si on a au préalable expulsé les a tels que $f(a,x)=0$ pour tout x). Réduction isotrope (prop.7, p.49).

§3 - (Formes alternées). Définition du groupe ; réduction ; pfaffien. Groupe symplectique, ses symétries, déterminant égal à 1 (p.55).
Equivalence des sous-espaces (partie du th.1, p.50).

§4 - (Formes hermitiennes) - Définition du groupe, réduction. Cas d'un corps ordonné maximal : passage des réels aux complexes et quaternions ; loi d'inertie ; formes positives ; Cauchy-Schwartz ; orthonormalisation ; prop.3 (p.69) ; prop.1 (p.66).
Théorème de Witt.
Groupes unitaire, orthogonal ; leurs relations ; rotations.
Transformation des sous-espaces (par le grand groupe, et par son sous-groupe unimodulaire).
Paramétrisation de Cayley (pour l'unitaire et l'orthogonal seuls) ; pour le symplectique, çà ne colle pas en caract.2 ; une remarque ici donnera la paramétrisation de ce dernier (valable en toutes caract.) obtenue par résolution des relations (13), p.55).

<u>Détails</u>.

§ 1 - On dira que σ définit une structure de module à gauche sur le dual (outre la structure naturelle, qui est à droite).

Dans toutes les questions "où l'ane trotte", on donnera la formule et ensuite son explication et sa démonstration en petits caract. Conformément à l'usage des Hilbert, on mettra les scalaires à <u>gauche</u> (écrire $\sum x_i f(a_i, a_j) \bar{y}_j$ et $E \times E_\sigma$).

Comme au chap.III on mettra des points pour indiquer la place des indices des tenseurs.

On s'aperçoit que, se donner une orientation, c'est choisir une classe modulo les carrés ou les <u>normes</u> (p.14) ; dans le cas ordinaire, on choisit un élément de longueur 1 de $\bigwedge^n E$ (s'il y en a), et il y en a alors deux ; le discriminant est alors un carré. On a déjà orienté C sur R en prenant $e(i)=1/4$ et non $3/4$. Malgré la beauté de cette définition générale de l'orientation (et les effluves ~~fxxx~~ de corps de classes local qui s'en dégagent, au grand ravissement des algèbristes), on décide de n'orienter que sur un ordonné maximal.

Mettre le produit vectoriel en footnote.

Dire au début (pour aider le lecteur) "corrélation non dégénérée".

Vider la p.17. La prop.3 (p.18) sera faite dans le cas non dégénéré sous la forme du lemme-clé du § 2 .

§ 2 - On le commence avec la p.20 ; une proposition disant que $g=h$ ou $g=-h$ caractérisent les réflexives ; Kaplanski en exer. (annoncé). Définition de l'adjointe et de l'inverse ; notation g_{ij} et g^{ij} ; expression analytique de l'inverse et de l'adjointe ; effet d'un changement de coordonnées.

Définition de l'équivalence (n°1 du § 2, début ; à rendre plus clair avec deux espaces et transport de structure ; puis aspect matriciel avec deux bases n'importe comment ; enfin cas particulier d'un espace et d'un autom.).

Isotrope sera défini par "forme induite dégénérée", tot.isotr. par "forme induite nulle" ; puis en français : "contient des vecteurs orthogonaux à V" ; traductions en notation ensuite (p.47) ; la prop.4 rentre dans le lemme-clé ; le cas excercisé en haut de la page 49 sera dit "cas loufoque", et on énumérera soigneusement tous les cas <u>non</u> loufoques; la réduction isotrope consiste en la prop.7 (p.49) ; on en fera la démonstration pour le plan, puis une récurrence au moyen du lemme-clé ; donner aussi les expressions de la forme quadratique avec de bonnes bases : $\sum_i X_i Y_i + (Z)$; en cor. les formulations (utiles pour les hermitiennes et alternées) avec $\langle e_i, e_{r+j} \rangle$ et $\langle e_{r+j}, e_i \rangle$. Regarder l'espace des p-vecteurs isotropes (correspondent-ils aux variétés isotropes de dim.p ?)

§3 - La réduction des alternées doit se faire très vite, grâce aux résultats du §2 (p.ex. le second alinéa de la p.27 est déjà fait). On donnera la forme normale en th., et la condition d'équivalence en cor.; donner (en cor.) la forme $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; application à la décomposition des bivecteurs (en cor.). A la p.29 les calculs sont peut être plus commodes avec (2s, 2s+1) au lieu de (t,t+m) (forme donnée en cor.) ; de même pour le cor.1 p.30 .

§4 - Les généralités sur le groupe sont p.43 et 44 ; dire que, pour que u groupe, il faut et il suffit que $u^*u=1$ ou que $uu^*=1$ (remarque pour la dimension infinie) ; donner la décomposition du groupe si on a décomposition directe en sous-espace + conjugué ; mettre les remarques 1) et 2) (p.43) en prop., et les prop.1 et 2 (p.44) en remarque, pour compenser ; raccourcir le laïus sur le surcorps (bas de la p.44), en le mettant juste après la formule (ε), et en remarquant que celle-ci s'écrit dans tout corps contenant les coeff. de la forme.

(Réduction ; p.31 et 32). On vide la notation F et la notion de "forme quadratique" ; mais on dira qu'une forme de degré 2, au sens du chap.IV, définit une forme bilinéaire ; renverser les barres dans les formules (12) et (13) ; diviser par ω la formule (15) de Godement ; donner, en exer., son analogue quaternionnique. Remarquer (p.33) que les quadratiques réductibles à une somme de carrés sont triviales en caract.2 (ce sont des carrés de formes linéaires).

Enumérer les cas non exclus (p.33) ; le laius des formes polaires est inutile ; se ramener tout de suite au cas non dégénéré ; faire alors la p.34 pour une bilinéaire ; dire (cor. p.34) que les éléments de D sont réels dans les cas complexes et quaternionnique). Pour l'étude sur un ordonné maximal, on passe au début de l'ancien § 4 (p.63) ; faire Cauchy-Schwartz par la méthode classique, puis par la positivité des coeff. diagonaux ; dire "projecteurs" en bas de la p.64 ; pas de corps pythagoriciens (p.66, en exer.; rien que des ordonnés max. dans le texte. Donner la prop.1 (p.66) avec la conséquence $A=UDV$, où D est diagonale ; méthode : on a déjà $A=UH$ (H=hermitienne) et $H=VDV^{-1}$ (réduction) ; vider les remarques sauf que L et U sont réelles si A est réel ; donner, en cor., la prop.3 (p.69) (méthode <u>non</u> géomètrique : on a $T=PAP^{-1}$ (T triangulaire, par le chap.VII), $P = LU$ (prop.1), d'où $L^{-1}TL = UAU^{-1}$). On n'ira pas plus loin de l'ancien § 4 .

Pour Witt, on met au concours sa démonstration par l'algèbre extérieure ; énoncer les bons cas (haut de la p.38) juste après l'énoncé).

Les divers groupes sont p.56 sqq.; donner le cas des formes de rang 1 (bas de la p.57) en cor. à la prop.11 ; on dira unitaire et orthogonale "unimodulaire" au lieu de "rotation" ; avec la prop.11 il y a décomposition directe sur R et C, mais, en général, les racines de l'unité canulent taire le groupe des commutateurs ; séparer le th.2 en deux morceaux ~~fx~~ (a) cas général, b) cas des génératrices rectilignes) en éclairant bien sa lanterne : il y a 3 groupes O_n , O_n^+ et le groupe g laissant V invariant ; et on se demande quand O_n^+ opère transitivement dans l'espace homogène O_n/g , c'est-à-dire si on a $O_n = O_n^+ g$; utiliser la forme canonique (même dans le cas général) et écrire la matrice de la forme ; les classes d'intransitivité de la p.60 passent en exer. Démontrer la prop.12 (p.61) en remarquant que l'éq. caract. de U est réciproque (car $U^*U = 1$). Pour les relations entre les divers groupes (p.62) donner un énoncé, et écrire les formules (21) et (22) en matrices ; le renforcement de structure vectorielle (par u tel que $u^2 = -1$) aura été fait au chap.VII .

Pour Cayley (p.46 ; a droit au nom de théorème), on écrira la démonstration en endomorphismes $((1+h)(1-h)^{-1}$, h étant hermitien) et elle doit tenir 4 lignes ; une remarque symplectique.

GÉOMETRIES ÉLÉMENTAIRES.

Le Congrès a montré peu d'enthousiasme pour ces questions. Il a l'impression qu'il y a trois points de vue dans cette rédaction : la géomètrie élémentaire "pure", les groupes (à séparer nettement du reste) et la géomètrie algèbrique (éviter comme la peste de s'y laisser entraîner). Trois § sont dès maintenant rédigeables : espaces projectifs, espaces affines, orientation. Pour les géomètries euclidienne et hermitiennes, il est difficile de se faire une idée sur rédaction complète, vu le manque général de connaissances sur ces sujets trop récents ; bref, le Congrès aurait préféré un rapport qui ne le noie pas dans un flot de détails. Il charge donc Chevalley de rédiger un rapport sur ces géomètries (naturellement celui-ci peut rédiger aussi les trois § précédents ; il peut même faire une rédaction en forme au lieu d'un rapport, si çà lui chante). Pour le point de vue des groupes, le Congrès "se détourne avec horreur et dégoût" des scurrillités Kleinéennes de cette rédaction, et proclame que çà ne colle pas du tout avec le point de vue des structures.

Espaces projectifs.

On adopte la définition "fibroïde" suivante : un espace projectif est un ensemble E , plus une famille d'appl. biuniv. de $P_n(K)$ sur E , telle que deux applications de la famille ne différence que par un élément de $PL_n(K)$.

Vider les laius des 2 premières pages ; remplacer n par n+1 (p.907). Alléger les variétés linéaires proj. engendrées ; vider la prop.2 (p.909). Vider l'alinéa des matrices (#910), ainsi que les canulars non commutatifs Donner tout de suite les homom. (projections) puis les isom. (par transport de structure). Le cor. (913) en exer.; prop.5 (914) vidée, cor. gardé ; les projections (915) remontent (le bon point de vue est de considérer une projection comme un passage au quotient, et de ne projeter sur rien du tout. Abréger la dualité en laissant le lecteur remonter tout seul au vectoriel (tant pis pour lui s'il se casse le cou !). La définition d'une quadrique comme ensemble de points (qui peut être vide !) fait frémir les géomètres-algèbriques : la quadrique sera une équation (à un facteur près), sinon gare aux dégénérescences, aux corps de base, etc..; on ne parlera pas des tangentes. Les semi projectivités et dualités (p.921 sqq) passent à l'appendice, avec le "théorème fondamental" On dira "birapport" au lieu de "rapport de l'âne à Monique", car Bourbaki ne connaît d'autre âne que l' "Ane Qui Trotte" ; et on se bornera à l'étudier sur la droite projective ; ce n° viendra en fin de § , précédé de celui des Grassmanniennes, et de celui des repères (sur un corps commutatif, -étudier la transitivité du groupe sur ces repères).

La grassmannienne sera $P_{n,p}$, $G_{n,p}$ n'étant qu'une manière de la plonger dans un espace projectif ; puis plongement dans une puissance extérieure (dans le cas commutatif). On utilisera la notation G avec les indices des topologues (voir Chern et feuilles du séminaire Cartan ; rectifier Top.Géné.VII). Mettre le bas de la p.932 en prop. (existence d'un isom. canonique compatible avec le plongement).

Pris de remords à cause de sa rage d'expulsions, le Congrès décide de mettre dans le texte Pappus (; commutativité) et Désargues. On mettra en exer. le plan projectif des octaves de Cayley (Blanchard fournira un modèle en platre (ou en carton fort) de ce fourbi là).

Espaces affines.

Le Congrès préfèrerait voir ce § venir avant celui des espaces projectifs : il forme en effet une transition entre les vectoriels et ces derniers, les uns ayant une définition axiomatique, les autres une définition "fibroïde" avec modèle standard. Il faudra s'arranger pour avoir le bon groupe : $(x_i) \longrightarrow (\sum_j a_{ij} x_j + b_i)$, qu'on soit ou non dans le commutatif.

On adopte comme définition celle qui inspira l'exer.21, § 6,chap.I (relation à 4 termes du parallélogramme, construction du "groupe des translations, on supposera ici que c'est un espace vectoriel ; celle-ci marche aussi bien en dim. infinie). Equivalence triviale : espace à opérateurs vectoriels, ou K^n et son groupe de translations comme espace affine type. Viendront en théorèmes : la caractérisation par plongement dans un vectoriel de dim.n+1 (points massifs, barycentre), -celle avec un espace projectif et un hyperplan à l'infini (à mettre au projectif, s'il forme le § 2).

Orientation.

C'est une propriété d'espaces vectoriels sur des corps ordonnés. On pourrait mettre ce § aux corps ordonnés, mais çà alourdirait une jolie chose ; le mieux est de le laisser ici, en § préliminaire. On dira : transformations directes et rétrogrades, orientations positives et négatives. Définir l'orientation sans base. Dire qu'une structure complexe définit une orientation sur l'espace réel sous-jacent. Donner la règle des n doigts, et celle du bonhomme d'Ampère (dans l'espace à n dimensions). Dire (964) qu'un secteur saillant (resp. rentrant) est intersection (resp. réunion) de 2 demi-plans.

ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES.

Après quelques pénibles piétinements dans les premières pages des Fréchets, le Congrès s'aperçoit de l'existence d'un commentaire croustillant, et décide, dans l'enthousiasme, de donner le pas aux espaces bornographiques (seront dits : "bornologiques") et aux espaces forts (seront appelés "fins" ou "tonnelés", un convexe, cerclé, équilibré fermé prenant le nom de "tonneau"). D'autre part divers théorèmes fins de la rédaction étant vrais sans la restriction aux loct convexes, on décide de les faire au chap.I sur un corps valué complet qqconque. Le plan détaillé suivant est adopté :

Chap.I - Espaces vectoriels topologiques sur un corps valué.

§ 1 - Définition, sortie, ensembles bornés.

§ 2 - Sous-espaces de dim. (ou de codim.) finie, caractérisation des loct. précompacts, topologie produit (sur un corps complet).

§ 3 - Espaces métrisables et complets. Lemme p.3 (chap.III) et prop. 2 ; th. de Banach (p.4) et ses corollaires. Exemples d'espaces séparables (dual faible d'un Banach séparable).

§4 - $\mathcal{L}(E,F)$, ses topologies diverses, ses ensembles bornés, ses équicontinus, ses voisinages, son beau soleil, ses hotels confortables, son terrain de golf, et ses tennis.

§5 - Dual, dual fort, dualité faible. Espaces à dual séparant, $\mathcal{L}(E,E')$. Propriétés des duals de séparables.

Chap.II - Ensembles convexes et espaces localement convexes.

§1 - Convexes, cones, structures d'ordre, cones maximaux. Dire qu'un convexe équilibré d'un produit contient le produit de 2 convexes équilibrés des facteurs.

§2 - Fonctions convexes.

§3 - Espaces loct convexes, trivialités, sorite ; réels et complexes ; enveloppes convexes de précompacts ; semi-normes ; métrisabilité (prop.1, p.1, chap.III).

§4 - Espaces bornologiques. Topologie déterminée par les bornés, deux borno. avec mêmes bornés sont identiques. Exemples (métrisables loct convexes et sous-espaces, (LF) et duals de (LF) réflexifs (3-ème espèce), -duals de borno réflexifs complets, -produits finis de borno, -sous espaces fermés de borno réflexifs, et probablement leurs quotients).

§5 - Espaces tonnelés. Trivialités ; la topol. faible détermine la topologie ; exemples (loct convexe de Baire, R^I, (LF), produits, quotients, dual d'un tonnelé réflexif) ; prop.C, p.30 .

§6 - Hahn-Banach, avec Grothendieck (th. p.25).

§7 - Krein-Milman.

Chap.III - Dualité dans les espaces localement convexes.

§1 - Le dual est séparant.

§2 - Un convexe fortement fermé est faiblement fermé.

§3 - Un faibt borné est fortement borné dans E (qqconque) et dans $\mathcal{L}$(E,F) si E est complet.

§4 - Polarité, semi-polaires, bipolaires.

§5 - Dual d'un sous-espace, d'un quotient.

§6 - Bidual, réflexivité.

§7 - Propriétés des bornologiques (prop.1, p.7 (simplifiée par usage de la prop.(A),p.8),- prop.4,p.12,- prop.2,p.20, et cor., -la topologie est déterminée par la topologie faible, - prop.4, p.23 pour les complets réflexifs).

§8 - Propriétés des tonnelés. La topologie faible détermine la topologie ; prop (B') p.29, et th.1, p.9, convergence des filtres bornés à base dénombrable ; conséquences pour le dual (th.2,p.14) et cor.; prop.5 (p.15) de polarité parfaite entre voisinages et bornés, conséquences pour le bidual (prop.1, p.16, et cor.); prop.5, p.24 ; corollaire de Banach, p.27 .

§9 - Continuité forte et faible.

§10 - Transposées.

§11 - Parties de $\mathcal{L}$(F',E').

On vide les uniformément convexes et les complètement continues. On n'oubliera pas de dire, dans la 2-ème édition de TG I qu'une fonction continue a un graphe fermé. Introduire la terminologie "séparément continue". On définira au chap.I la polaire pour deux espaces en dualité pour un σ (x,x') séparant et séparément continu.

<u>Chapitre</u> IV - <u>Espaces de Hilbert</u>.

On adopte l'ordre suivant : §1 (définitif), §2 (livré à un comité), §4 (définitif), §3 (auquel Godement ajoutera Hilbert-Schmidt, qui est plus qu'une décomposition spectrale, et marche pour d'autres opérateurs que les normaux ; çà se fait sans rien savoir sur l'intégration (complèter abstraitement, ou rester dans les préhilbertiens) ; on discutera en Congrès de la rédaction Godement),- enfin un appendice quaternionique sera rédigé par Schwartz.

On se demande s'il y a lieu de faire des préhilbertiens sur les rationnels ($*$-algèbres des matrices de Riemann ; il est vrai qu'on les complète), et si un préhilbertien sera toujours séparé ?

On note (pour TG II, 2-ème édition) qu'un complété sera toujours séparé.

La notation $\ominus$ est idiote ; redactor demerdetur sans ce signe d'opération non partout définie (prendre des projecteurs ?)

Décisions de détail.

§ 1 - Ne pas dire "sesquilinéaire" (p.1). Vider les 1.1 à 2 (p.2) et dire que $f(x,x)$ est réelle. Redonner la démonstration de Cauchy-Schwartz. Dire "problème à 2 dim." (remarque p.3). Dire (déf.2,p.4) "espace réel ou complexe selon que $K=R$ ou $K=C$; vider les petits caract. du bas. Dire que $\langle u(x), u(x)\rangle = \langle x,x\rangle$ suffit pour avoir (9) ; donner un exemple où c'est biunivoque mais pas sur (fonctions continues à support compact sur $[0,+\infty[$), ce qui remplace la remarque p.5 . La remarque 1) (p.6) est faite dans la déf. (2 lignes), et le reste en algèbre ; parler des espaces euclidiens et hermitiens dans la remarque 2), et remonter la rem.3) (p.7). Identité de "la médiane" (12) ; figure avec des cercles pour la prop.4 ; utiliser la prop.4 pour démontrer le th.1 ; un cor. disant que les projections sur une suite croissante (décroissante) de convexes tendent vers la proj. sur la réunion (intersec.) ; une remarque : le th.1 ne dépend que de la prop.4 qui exprime une propriété d'esp.vect.topol. appelée "uniforme convexité" . Le point y sera dit le "proximus de x". La prop.10 est le th. des trois perpendiculaires. Les lignes entourant le th.3 (p.14) et la prop.12 passent au § 4 (ancien).

§ 4 . Commencer par le n° du dual faible (pour les Hilbert seulement). Dire "adjonctif" au lieu de "régulier". Ajouter "l'espace E étant bornologique" (1.5, p.30) ; dire que le dual de E préhilb. est plus grand que E ; montrer que $x \longrightarrow Dx$ n'est pas continu au moyen des exponentielles. Vider les lignes suivant le cor. (p.32) ; la prop.3 (valable pour des non hermitiens) passe au n°1 (cas hermitien en remarque ici. Ne pas donner (p.33) la terminologie "strict.positif" ; introduire juste après la déf.3 les A tels que $A \geqslant mI$, et la relation d'ordre (prop.6 et 7 avec) ; ordre : " $\|Ax\| \geqslant \|mx\|$ et $\|A^*x\| \geqslant \|mx\|$ " équivaut à "A inversible" (si continu) (vaut pour les Banach) ; cas des hermitiens $\geqslant 0$; $1+iH$ et $1-iH$ (partie de la prop.10) ; spectre sur $[m,M]$. Annoncer le produit de 2 hermitiens positifs. Un exemple d'isométrique dans (p.35) pour lequel (10) n'est pas vrai. Vider les lignes suivant la déf.4 . Transport de structure au milieu de la p.36 . Terminologie des topologies (p.37) : simple forte et simple faible (on omet simple s'il ne peut y avoir de confusion), -topologie de la convergence bornée (au lieu de "maximale") ; dire qu'il y a continuité double si l'un des facteurs reste borné (cf.Nagy). Enoncer la prop.11 (p.39) en langage plus naïf, et référer aux esp.vect.top. pour sa démonstration. Sorite habituel pour l'algèbre engendrée (bas de la page). Un lemme à la prop.12 (si V est invariant par A , son supplémentaire orhtog. l'est par A^*) ; rappeler (prop.13) que $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'$, est décroissante, et redonner la démonstration de la commutativité de la bicommutante. Une footnote renverra à l'Algèbre (supérieure) pour l'aspect algèbrique du th. de Von Neumann. Comme tout hermitien a un spectre non vide, on peut montrer ici la semi-simplicité de toute algèbre autoadjointe (si $A^*A + xI$ inversible pour tout x (ce qui a lieu si A appartient au radical), alors A n'a pas de spectre) ; mais, comme

comme ceci fait appel à un chap. d'analyse Algèbrique, il vaudrait mieux le mettre là .

INTÉGRATION.

Cette fois ce fut l'intégration qui suscita les discussions les plus violentes. Godement subit de violentes attaques sur deux fronts : à gauche Mackey se fit le champion des mesures abstraites contre les mesures de Radon, et montra des exemples où les premières semblaient intervenir ; à droite des conservateurs, arithméticiens et algèbristes, inquiets de voir des énoncés se ressemblant comme des frères être l'un vrai et l'autre faux à cause des espaces non dénombrables à l'infini, - réclamèrent avec vigueur l'expulsion de ces monstres, brésiliens et autres. Mais le bon sens conserva ses droits. Bien appuyé par Dieudonné, Schwartz et Serre, Godement parvint à éviter qu'on ne tombât dans des solutions extrêmes ; et les principes suivants furent adoptés, à la satisfaction de tous, opposants ou non :

1) L'expérience a montré jusqu'ici que, chaque fois qu'une mesure abstraite semble s'introduire, il existe une mesure de Radon qui est liée de façon naturelle à la question, et qui remplace avantageusement la mesure abstraite. Les méthodes pour trouver cette mesure de Radon seront exposées dans un "Manuel du chasseur de Diplodocus", où l'on verra Godement, ayant installé un fusil sur le Kakutani et un autre sur la mesure de Lebesgue, arroser de feux convergents une phratrie de Diplodocus grognons.

2) On fera les propriétés locales (qui ne sont pas autre chose que des propriétés de compacts) avec n'importe quel espace et n'importe quelle mesure (de Radon). Les propriétés globales marchent bien pour <u>une</u> mesure dénombrable à l'infini, et pour <u>toute</u> mesure si l'espace est dénombrable à l'infini ; on décide ainsi de se borner aux <u>espaces</u> dénombrables à l'infini pour énoncer les propriétés globales.

Le plan suivant est adopté :

Chapitre III - Prolongement.

§ 1 - Intégrale supérieure. On la fera avec inf.sup. On garde la prop.16 (p.10), et la semi continuité de $\mu \longrightarrow \mu^*(f)$.

§ 2 - Fonctions et ensembles négligeables (inchangé)

§ 3 - Espaces L^p (inchangé)

§ 4 - Fonctions intégrables (inchangé)

§ 5 - Ensembles intégrables. On y ajoute le papier Cartan sur les phratries.

Ces 5 §§ seront faits sur n'importe quel espace.

§ 6 - Fonctions et ensembles mesurables. Ici "mesurable" sera l'ancien "localement mesurable" ; tout ici se passe sur les compacts et on regarde ce qui se passe sur chacun d'eux. Les références données ici se rapportent à la version Cartan.

Il faudra dire que les fonctions étagées peuvent rendre ici les mêmes services que les fonctions continues. Ordre :

Def. 1 bis (sur un compact), équivalence avec la déf.1, scholie ; ensembles mesurables (prop.7 et 8, bloquées) ; prop.1,2,3 ; Egoroff ; th.2 sur un compact, et un cor. sur un dénombrable à l'infini ; th.3, th.4 ; prop.4 (toujours valable).

Pour les fonctions non définies partout, redactor demerdetur (à la fois pour leur définition (~~xxxx~~ prop.6 ou méthode Cartan), et pour sa place (ici ou au début)) ; définition des loct négligeables th.5 ; critère d'intégrabilité .

§ 7 - Inégalités de convexité. On vide les th. de Thorin et de Marcel Riesz (on les mentionnera dans la note historique) ; on ne fera la dualité que pour les L^p numériques (ou hilbertiens), et ceci par Lebigle-Nicodème.

§ 8 - Fubesgue-Lebini. Il faudra bien montrer (au chap.II ?) les relations entre mesures bornées et compactification (d'Alexandroff p.ex). Les sommes mesurables de $G_o$dement semblent prématurées ici ; de même la mesure induite et les sous-ensembles.

Chapitre IV - Mesure induite, Lebesgue-Nikodym.

On mettra dans ce chap. les parties de l'ancien chap.IV qui sont maintenant bien fixées. Un chap.V contiendra des résultats plus récents (fonctions faibt sommables, mesure quotient), sur lesquels il faudra encore expérimenter. Le "fil conducteur" du chap.IV est l'isomorphisme entre fonctions mesurables et mesures de base donnée (Serre dixit).

§ 1 - Mesures définies par une densité réelle. Définition ; $|\varphi\, d\mu| = |\varphi|\, d\mu$ si μ est réelle ; unicité de φ loct.p.p. ; Lebesgue-Nikodym (commencer par les réelles positives ; d'abord $0 \leqslant |\nu| \leqslant |\mu|$, puis les bandes (utiliser l'astuce hilbertienne)) ; expliciter alors l'isomorphisme, remarquer qu'il conserve l'ordre, suites croissantes ; dualité des L^p .

§ 2 - Intégration par rapport à $\varphi\, d\mu$ ($\varphi \geqslant 0$). Associativité, ce qui exprime qu'on a un isomorphisme de modules (Redactor demerdetur ; éviter de passer 15 fois à la limite et essayer de se servir de ce qu'on sait déjà de l'isomorphisme) (pp.23 sqq.) ; corollaire ($f\, d\mu$ borné) ; deuxième forme de LN ; mesures équivalentes ; suites de mesures. Dans tout ceci on se borne aux dénombrables à l'infini pour les trucs globaux.

Définition : $\int_A f\, d\mu = \int (f\, \varphi_A).d\mu$; théorème : $\int_A f\, d\mu = f(\varphi_A d\mu)$ dans les bons cas.

§ 3 - Mesure induite (c'est le cas où A est loct compact). C'est l'ancien § 2 . Uryshon simplifie la prop.3 (où il y a un projecteur ;

simplifier la prop.4 (utiliser compacts et ouverts rel^t compacts ; faire le plus tôt possible la transitivité, et s'en servir.

§ 4 - Mesures vectorielles. Ici ν est majorée par $\mu \geqslant 0$; définition de $|\nu|$; intégration par rapport à une telle ν ; $|\varphi \, d\mu| = |\varphi| \, d\mu$ (si les valeurs sont dans un Banach) ; enchaîner avec Dunford-Pettis ; les L^1.

Chapitre V - Choses à laisser murir.

§ 1 - Polonois. Il n'y a pas lieu de faire un état 2 de ce , qui ne sera repris qu'à l'état 3 . Rendre plus claire la nécessité du th.1 ; parler d'"espaces" analytiques ; l'image réciproque d'un analytique (dans un Polonois) est analytique ; "tribu" au lieu de "corps" (p.61) ; le th.3 et ce qui suit se simplifient beaucoup dès qu'on a vu qu'un analytique est une image continue de Z^N ; cela permet aussi de mieux voir les dévissages. Il y a (au th.2 et au th.3) un lemme disant que les adhérences des gens d'un filtre de Cauchy forment la base d'un filtre de Cauchy. Remarquer que "borélien dans un polonisable" est une propriété intrinsèque. Le lemme 2 (p.66) est avantageusement remplacé par : "c'est homéomorphe à un fermé de Z^N ". Le th. de Federer-Morse (dû probablement à Siegel ?) est indépendant des trucs fins, et peut venir dès le début ; on remarquera que, pour un compact, le dévissage se fait avec un nombre fini de trucs à chaque pas. Remarque générale : les "totalement discontinus" de Kuratowski sont tot.disc. (à la Bbki) et tout point a une base de voisinages ouverts et fermés.

§ 2 - Sommes continues et mesurables. Pour les intégrales faibles (qui ne sont pas des fortes déguisées), on se bornera à des duals (de Banach ?) ou des $\mathcal{L}(E,F')$.

§ 3 - Image d'une mesure (§ 7 du chap.III). Améliorer la prop.1 (p.90) grâce à ce qu'on a mis dans les fonctions mesurables) ; améliorer la p.93 en considérant des images réciproques d'ouverts, de compacts et de négligeables.

§ 4 - Mesure quotient. On ne voit pas bien l'utilité des relations d'équivalence mesurables, mais elles ne semblent pas plus difficiles à traiter que les continues. Parler de la "classe" et concentrer toutes les mesures (th.,p.75) ; préciser la dernière phrase de son énoncé ; donner un lemme plus précis pour le cas des mesures bornées ; dire (p.77, milieu) que m_i est déterminée pour presque toutes les fibres. Demander à Dieudonné son truc rendant évidente la positivité des m_i . Au n°5 on "constate" que les m_i sont presque toutes concentrées, et on modifie les autres. A la prop.2 (p.81) remplacer le plus vite possible le négligeable par un négligeable saturé (saturer les K_n en K'_n) ; mettre dans son énoncé la suite (K_n) ; essayer d'abréger la p.82. La prop.3 est une propriété de séparation dénombrable des fibres; remonter le laïus du bas de la page (les géodésiques du tore sont en réalité des sous-groupes irrationnels). La prop.4 donne une "presque section" mesurable ; y rester dans les analytiques. La prop.5 est canulée. Dans le n°8 on canonifie en considérant l'ensemble des m_i dans l'espace des mesures positives de masse totale 1 ; peut être est-il possible de procèder ainsi auparavant ? On décide de donner au th.1 le nom de "théorème de Lebesgue-Fibrini".

<u>Manuel du chasseur de Diplodocus</u>.

Pour mémoire.

VARIÉTÉS DIFFÉRENTIABLES.

Question de Stokes.

La lecture du papier Cartan laisse le Congrès rêveur, parce qu'on ne voit pas où est la formule du chgt de variables. D'ailleurs la seule difficulté pour celle-ci est de l'énoncer. On décide de faire deux fois Stokes, une fois avec tous les outils possibles de Topologie Algèbrique, une fois de façon élémentaire (cf. Goursat et livre de Chevalley), avec de bons trucs bien ronds et le chgt de variables des intégrables multiples La place de ce Stokes élémentaire sera un appendice aux variétés différentiables. Cartan a eu une idée astucieuse de démonstration, utilisant une suite exacte ; alors Stokes viendrait avec un bout, très élémentaire, de Topologie Algèbrique, qu'on laisserait dans la Première Partie. Cartan rédigera un rapport, et on décidera alors si la meilleure place est bien ici.

Un système de notations.

Weil réclame, avant tout, que l'on ait un système de notations permettant d'écrire, sans trop d'abus de langage, des formules ressemblant à $\sin x.dx$, $d(xy)= x.dy + dx.y$ (dans un groupe de Lie), et à toutes les formules de Papa Cartan, dont le succès montre qu'elles veulent sûrement dire quelque chose.

On adopte, après maintes cogitations, le système suivant, dû à Weil.

a) Il faut faire la distinction entre vecteurs libres et liés. On note V une variété, et F son prolongement du premier ordre ; i (ou ι) désignera toutes les applications identiques ; Dφ sera le prolong^t du premier ordre de l'application φ . Ainsi $D(i_V) = i_F$; (Di)P sera la restriction à la fibre de P .

b) Si V est l'espace affine, F est l'espace des vecteurs liés, et s'identifie canoniquement à un produit de deux R^n (origine, vecteur libre).

Dans ce cas d sera "l'opérateur de libération" des vecteurs liés : $d = \mathrm{proj}_2\, D$; ainsi $di(x) = \mathrm{proj}_2 Di(x)$ (on l'écrira éventuellement dx).

c) On considère une application φ de V dans V' ; alors $D\varphi : F \to F'$. Si $Q = \varphi(P)$, on aura $D\varphi(P,V) = (Q,W)$ (en notant (P,V) le couple formé d'un point V de l'espace fibré et de sa projection P) qui s'écrit aussi $D\varphi(V) = W$; par restriction à la fibre de P on a $D\varphi(P)(V) = W$.

d) Supposons alors φ numérique ($V' = R$). Alors $d\varphi(P,V) = d\varphi(P)(V) = \mathrm{proj}_2(D\varphi)(P,V)$; ainsi ~~dn~~ $d\varphi(P)$ applique la fibre de P dans les vecteurs libres.

e) Maintenant soit φ une application d'un vectoriel V dans un vectoriel W ; alors $V_{prol} = V \times V_L$ (espace des vecteurs libres). On a le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} V_{prol} = V \times V_L \arrow[rr, "D\varphi"] \arrow[d, "pr_2 = di"'] \arrow[drr, "d\varphi"] & & W_{prol} \arrow[d, "pr_2"] \\ V_L \arrow[rr] & & W_L \end{tikzcd}$$

Comme ça on a bien $d\varphi = \varphi' \circ di$, où φ' est la transformation linéaire tangente.

f) On a $D(f \circ g) = Df \circ Dg$; $(D\varphi)(P)$ est l'application vectorielle des espaces tangents. Il y a aussi D^p_q qui opère avec les espaces tensoriels et ${}^tD(\varphi)$ (ou φ^*) qui opère sur les covecteurs.

g) Pour les différentielles partielles ; soit $\varphi : U \times V \to W$, et soient PR_1 et PR_2 les projections de $U \times V$ sur U et V. Alors D applique $(U \times V)_{prol}$ dans W_{prol}. On pose $D_1\varphi = (D\varphi) \circ (DPR_1)$; ainsi $Di(P,Q) = DPR_1(P,Q) + DPR_2(P,Q)$, et $D = D_1 + D_2$.

Décisions sur le chapitre II.

§1 - Définition par les cartes locales (la topologie étant donnée) ; on commence par p=0 ; structures plus ou moins fines ; exemples ; atlas complet et incomplets ; isomorphismes ; structure induite sur un ouvert.
2) Applications différentiables. Définition ; transitivité ; définition équivalente des var.diff. par les fonctions ; la structure locale et les coordonnées locales ; applications différentiables dans un vect.topol.(??)
3) Partitions compactes de l'unité. Grouper les changements de p .
Prop.8 (sans Nachbin, hélas!). Il y a le principe métamathématique "toute propriété vraie pour un ouvert de R^n et "invariante" (?) reste vraie sur les variétés" .

Remarques : les applic. du n°2 (p.4) seront dites "cartographiques ; l'application inverse de la carte ($R^n \to V$) sera dite le "relevé" ($V \to R^n$). Il faut la paracompacité pour la prop.7 . On ne parlera pas des applications différentiables en un point. Donner l'homom. des fonctions diff. Essayer de faire ici le th. de Whitney (le trivial).

§2 - Extensions canoniques d'une var.diff. On dira "stationnaire" pour tangente à une constante. On définira séparément différentielles et vecteurs tangents. Grouper les formules de la p.11 dans la prop.3 . Dire (p.13) que l'espace des dérivations en ~~unø~~ point de R^n a été identifié à R^n . Terminologie fibrée en 3-ème espèce.

§3 - Prolongements d'une appl. diff. Utiliser les fons.stationnaires pour la prop.1. Ecrire D_j au lieu de $\partial / \partial x_j$. $D\varphi$ sera dit le prolongement (et non la différentielle) de φ .

§4 - Chants de tenseurs ("Mais la base..."). Dire (dans le déf.1) que l'image d'un point est un tenseur en ce point. Ne pas écrire les 1/n! (ce sont en réalité des signes conventionnels disant qu'on ne répète pas les termes. La propriété de produit tensoriel sur l'anneau des fonctions de classe k (p.22) est-elle vraie sur autre chose que des compacts ?

§ 5 - Sous-variétés. On parlera aussi des variétés plongées paramètriques (pour la paramétrisation, ce sont loct des sous-var). Les sous-var. seront tjs fermées. On dira injectif et inductif au lieu de contre (co-) variant. Montrer que, étant donnée une forme diff. ω définie sur une sous var. (fermée), il existe une forme diff. de la var. ambiante induisante ω.

§ 6 - Différentiation extérieure. On prendra ici $p = +\infty$.

§ 7 - Transformations infinitésimales. Il vaudrait mieux faire une "intégration locale" ; on obtient un groupe en intégrant ; et les transf. infin. sont des dérivées d'automorphismes, ce qui explique qu'elles transportent toutes les structures (cf. rapport Schwartz) ; mais on réserve le groupe à un paramètre à plus tard. Donner les produits intérieurs dans la prop.I. Ecrire l'opérateur lui-même ($A(\theta)$ ou $T(\theta)$) pour pouvoir calculer sur eux. La prop.4 (p.29) est un transport de structures. Prop.5 au § spécial. Redactor demerdetur pour la définition des crochets ; il y a, dans le rapport Schwartz des formules plaisantes et délectables à ne pas oublier.

§ 8 - (dit " § spécial") Espaces de champs de tenseurs. On mettra ici Whitney trivial, la déf. de la topologie évoquée dans la prop.1 (p.23), Nachbin, la prop.1 (p.26), et la prop.5 (p.30).

§ 9 - Produits de variétés différentiables. On pourrait mettre en évidence les propriétés des produits locaux (ici 4 facteurs). Nachbin serait peut être mieux à sa place ici (fin du n°1) pour garder le parallélisme avec Stone. Commencer (n°2) par les vecteurs tangents. Le produit tensoriel gauche fait marcher le haut de la p.35. A la p.36 c'est la déf. par (I) la plus naturelle ; la donner aussi pour d_W (bien qu'elle soit alors un peu tordue). La prop.9 est un cor. du th.3.

§10 - Formule de l'homotopie. Introduire l'opérateur conique $k(\omega)$

La prop.1 est vraie pour une variété contractible en un point.

"Et ta variété différentiable, Delsarte ?" - "Elle est en carte !" .

ESPACES FIBRES.

Il est décidé de les faire avant l'homologie ; on n'y parlera donc pas d'obstructions. La théorie faite doit pouvoir donner facilement les revêtements (c'est là le critérium d'une bonne théorie des espaces fibrés). Le groupe structural est tjs topologique dans les applications (sinon un manuel du chasseur de trucs sans topologie, mis en appendice, les remettra dans le droit chemin!).

On adopte le plan suivant :

§1 - (Exposé I) Extension d'applications, homotopie ; rétractes ; faire à la fois l'aspect continu et l'aspect différentiable ; applic. dans les polyèdres (avec prolongement strict), et éventuellement les var.diff.

§2 - Espaces à opérateurs. Théorème de Serre sur la compacité (si B et G sont compacts, E est compact. Image réciproque, quotient, sorite. Le relèvement équivaut à une section dans l'image réciproque. Une section fermée est continue (avec G compact, et sans trivialité locale).

§3 - Espaces fibrés principaux. Second th. de Serre ; (FP) est vérifiée si G , compact, opère fidèlement. Image réciproque (sil y a homom. le premier truc est juste l'image rec. du second ; l'image rec. d'un groupe a une structure de groupe). Quotient, cas où E est un groupe. Sections locales, trivialisent loct, leur caractère local. Th. de Gleason (voir exposé Serre du Séminaire Bbki).

§4 - Espaces fibrés à groupe structural (efgs). C'est un quotient de $E \times F$. Espace principal associé. Cas des espaces homogènes ($g \subset G \subset H$) .

Correspondance entre sections et homom. de E dans F. Construction d'un efgs à l'aide de cartes.

§ 5 - Relèvement des homotopies. Sera fait par mise en facteur de I (qui sort avec toutes ses structures ; voir p.3, exposé VIII bis. Des applications homotopes des bases donnent un isom. des images rec. Cas de la base contractile (ou différentiablement contractile) en un point (Feldbau). Ca ne dépend donc que du type d'homotopie de la base. Au concours : peut on approcher une section par une section différentiable.

§ 6 - Théorèmes d'existence d'une section. Fibre ayant la propriété d'extension ouverte et espace loct trivial ; application à l'existence d'une connexion dans un e.f.princ. à groupe de Lie. Si $\pi_n(F)=0$ (le dire sans définir les groupes d'homotopie) pour tout n dim(base)+1, et si la base est un complexe, il y a une section. Exemple des variétés de Stiefel $(SO(n+1)/SO(p))$. Espaces universels.

§ 7 - Restriction du groupe structural (voir rapport SEAW).

§ 8 - Revêtements (idem.)

ALGÈBRE HOMOLOGIQUE.

On n'a pu prendre que des décisions de détail sur ce chapitre, car on n'avait pas sous les yeux les rédactions des chapitres suivants ; comme ceux-ci pourront apporter de nouveaux éléments, il est décidé de surseoir à la rédaction d'un état 2 .

Le "non-haut-commissariat" décide qu'on se bornera aux sommes directes sans se laisser entraîner par les séries formelles ; des astuces doivent permettre d'empêcher le reste de s'introduire, sinon on l'éjectera.

§ 1 - Exemple à degrés tous positifs dans la remarque 2) (p.2) ; donner tout de suite les exemples des polynomes, tenseurs, etc..; vider l'exemple canularesque (bas de la p.2). Introduire les homom.homogènes de degré s (les anciens "permis" sont ceux de d^{o}0 . Faire tout de suite les multigradués (avec trucs à n indices, et compatibilité) ; écrire les projecteurs du d^o total. Les produits gauches auront été faits dans la nouvelle algèbre linéaire. Mettre en évidence les homom.homogènes dans Hom(E,F) ; Weil conteste l'intérêt de sa bigraduation. Les degrés seront positifs dans une algèbre graduée ; voile pudique sur les non associatives. Parler des deux produits tensoriels d'algèbres (l'ordinaire est aussi gradué) ; bien montrer que l'anticommutativité $(-1)^{pq}$ est conservée par le produit tensoriel gauche (cf. algèbres extérieures). On n'étudiera que l'algèbre graduée des sommes d'endom. homog.

§2 - (Modules à bord) Au lieu de la déf.3 référer aux sous-modules d'un module à opérateurs. Dire que ω n'est pas nécessairement biuniv., ni π sur. Définir séparément suites et suites circulaires. Arranger le style du th.1 ; on n'aime pas bcp "homom. <u>sur</u>" (peut être "couvrant"). L'exemple (haut de la p.12) est canularesque. Il y a un prisme (ou deux triangles homothétiques) dans le diagramme du th.2 .

§3 - (Modules caténaires ; on n'aime pas ce nom). d est un homom. homogène. Prendre $f \neq 0$ en haut de la p.14 . Si E est somme directe H(E) l'est aussi Dans le th.1 le nombre de suites exactes est le nombre d'éléments de Z/(r) (exposant caract.) ; dire pourquoi c'est exact ; dire les degrés des 3 homom. Donner une déf. en forme du bord total ; vérifier (intelligemment) le truc d'assoc. (p.16) ; ne pas définir avant ce n^o l'isom. avev $(-1)^{pq}$, et dire qu'il est involutif.

§4 - (Cochaines, cohomologie) - On définira tout de suite ici la structure du Hom(E,F) (cf.,n^{o}1 du §5). Pour le th.1, l'énoncer après sa démonstration ; vider les remarques 1 et 3 . Caractériser cycles et bords (avec un "qq soit γ" qq part) ; détailler le cas où γ = anneau de base = = corps ; remarque en exer. Les lignes 4 à 8 (p.20) sont des trivialités contenues dans la prop.2 . Dire (rem.1, p.21) qu'on a un facteur direct si E est libre sur un anneau princ., ou si c'est un espace vect.; vider la rem.2 (coeff. univ.). On mettra des E' et F' si il ne peut y avoir de confusion. Un Σ : pas de suite exacte si Z(E) n'est pas facteur direct. Vider le n°4 .

§5 - (Th. de Künneth). On inversera les n°1 et 2 . Prendre tout de suite A principal (entiers, corps). La p.24 remonte au § précédent. La démonstration du th.1 étant incomplète, le prochain rédacteur trouvera des compléments à celle-ci à la fin de cette Tribu. On explicitera les degrés au th.1 ($\mathrm{Ext}(H_{n-r}(K),L)$ étendu par $\mathrm{Hom}(H_r(K),L)$). Demander à Cartan une démonstration du fait qu'il y a somme directe dans les th.1 et 2 ; mettre le cas du corps en prop. Ecrire une suite exacte dans le lemme p.28 ; écrire les deux diagrammes (avec $E/Z(E)$ et $B(E)$) ; ne pas se dégonfler en bas de la p.29 . On explicitera aussi le fait que $H_p(E)$ = libre + torsion ; d'où les $H_n(E \otimes E')$, les produits de torsion (anciens "duaux") des modules de torsion étant isom. à leurs produits tensoriels ; d'où les relations entre coeff. de torsion ; remonter les "séries formelles"(!) de Poincaré.

§6 - (Structure multiplicative). La prop.1 en laïus ("en d'autres termes" écrire (1) avec des $(-1)^{pq}$; faire (sans calcul) la démonstration du produit tensoriel. Se borner aux trucs assoc. (une remarque pour les autres). Remonter la remarque que B(E) est un idéal de Z(E) ; la var. de l'ex. (p.32) est indef. diff.

§7 - (Opérateurs d'homotopie) Ne pas préciser le d° dans la déf.1 ; écrire dh =..., hd =..., d'où dh = hd . Rédiger le th.1 comme chez Cartan. Vérifier (prop.2) si c'est bien $h \otimes h'$ (ou $h \otimes \bar{h}'$) qui est opérateur d'homotopie. Parler de "cone" au n°4, et se servir de la formule d'homotopie des var. diff.

§ 8 - (Homologie d'une limite inductive). Il faut prendre pour des <u>homomorphismes</u> (rédacteur s'est ridiculisé).

<u>Démonstration du théorème des applications universelles</u>.

K et L sont des modules caténaires de degrés impairs opposés ; on munit Hom(K,L) de la structure de module caténaire définie par le d° total et l'opérateur de bord D défini par

$$(1) \qquad \langle Df,x\rangle = \langle f,d_K x\rangle + d_L(\langle f,\bar{x}\rangle)$$

où f Hom(K,L) et x K. Alors

$\langle$ cocycle, cycle $\rangle$ = cycle de L

$\langle$ cocycle, bord $\rangle$ = bord de L

$\langle$ cobord, cycle $\rangle$ = bord de L

Donc, pour un cocycle $f \in$ Hom(K,L) et un cycle $x \in K$, la classe d'homologie de $\langle f,x\rangle$ (dans H(L)) ne dépend que des classes $\dot{f}$ et $\dot{x}$. D'où l'homomorphisme φ de H(Hom(K,L)) dans Hom(H(K),H(L)) défini par

$$\varphi(\dot{f})(\dot{x}) = \text{classe de } \langle f,x\rangle \text{ dans } H(L)$$

<u>Lemme</u> - Si K est un module libre sur un anneau principal A, pour tout homomorphisme α de Z(K) dans H(L) tel que $\alpha(B(K))=0$, il existe un homom. a de K dans L tel que, pour tout cycle $x \in Z(K)$, a(x) appartienne à Z(L) et admette $\alpha(x)$ pour classe d'homologie ; on peut prendre pour a un cocycle.

Comme K/Z(K) est isomorphe à B(K), il est libre, et Z(K) est facteur direct. Soient (z_i) une base de Z(K), (s_j) une base d'un supplémentaire de Z(K) dans K. Nous prendrons pour $a(z_i)$ un élément de Z(L) dont la classe mod.B(L) soit $\alpha(z_i)$. Alors, d'après (1), on a $\langle Da,z_i\rangle = \langle a,d_K z_i\rangle + d_L(\langle a,\bar{z}_i\rangle)=0$; ceci définit a sur Z(K). D'autre part $\langle a,d_K\bar{s}_j\rangle$ est déjà connu, car $d_K\bar{s}_j \in Z(K)$, et, d'après l'hypothèse sur α, on a $\langle a,d_K\bar{s}_j\rangle \in B(L)$; soit $\langle a,d_K\bar{s}_j\rangle = d_L m_j$;

nous définirons alors $a(s_j)$ par $a(s_j) = -m_j$, ce qui, en vertu de (1), montre que $Da=0$.

1) Démontrons que φ est un homom. de $H(Hom(K,L))$ <u>sur</u> $Hom(H(K), H(L))$. Il s'agit de montrer que tout homom. h de $H(K)$ dans $H(L)$ est de la forme $\varphi(\dot{f})$ où $f \in Z(Hom(K,L))$. Or h définit un homom. α de $Z(K)$ dans $H(L)$ au moyen de la formule $\alpha(x) = h(\dot{x})$ $(x \in Z(K))$; et on a $\alpha(B(K))=0$. Nous sommes donc dans les conditions d'application du lemme, et il existe un cocycle $f \in Hom(K,L)$ tel que, pour tout $x \in Z(K)$ $f(x)$ soit un cycle de L ayant $h(x)$ pour classe d'homologie. Ainsi $h = \varphi(\dot{f})$. CQFD .

2) Etudions maintenant <u>le noyau</u> N <u>de</u> φ . Ce noyau se compose des classes de coclycles $f \in Hom(K,L)$ tels que, pour tout cycle $x \in Z(K)$, $\langle f,x \rangle$ soit un <u>bord</u> de L ; soit T l'ensemble des cocycles $f \in Hom(K,L)$ tels que $\dot{f} \in N$. Nous allons introduire le sous-module T' de T composé des homom. g de K <u>dans</u> $Z(L)$ qui appartiennent à T .

On a $T'+B(Hom(K,L)) = T$. En effet, étant donné un cocycle f tel que $f \in T$, il s'agit de trouver un homom. g de K dans L tel que $f+Dg \in T'$, c'est-à-dire tel que $\langle f+Dg,x \rangle$ appartienne à $Z(L)$ pour tout $x \in K$. En vertu de (1) cette condition s'écrit $\langle f,x \rangle + \langle g,d_K x \rangle +$ $+ d_L(\langle g,\bar{x} \rangle) \in Z(L)$, c'est-à-dire $d_L(f(x)+g(d_K x))=0$. Comme f est un cocycle, on a $d_L(f(x)) = -f(d_K\bar{\bar{x}})$ en vertu de (1). Ainsi notre condition s'écrit $d_L(g(d_K x)) = f(d_K\bar{\bar{x}})$. Or ce dernier élément appartient à $B(L)$ en vertu de l'hypothèse que f est un cocycle. Alors, (z_i) étant une base de $Z(K)$, on a $f(z_i) \in B(L)$, puisque f est élément de T par hypothèse ; ceci s'écrit $f(z_i)=d_L m_i$. En prenant $g(z_i)=\bar{\bar{m}}_i$ notre condition sera réalisée.

Ceci étant acquis, le noyau N est isomorphe par définition à T/B (on pose $B=B(Hom(K,L))$ pour alléger) $= (B+T')/B$, donc est isomorphe à à $T'/(B\cap T')$ (second th. d'isomorphisme). C'est ce module que nous allons maintenant étudier. Appelons p l'homom. canonique de $Z(L)$ sur $H(L)$. L'assertion "$f\in T'$ " est équivalente à "$p(f(x))$ ne dépend que de $d_K x$" (en effet $p(f(x))$ a un sens, puisque f, appartenant à T', applique K dans dans $Z(L)$; et on a $p(f(z))=0$ pour tout $z\in Z(K)$). On peut alors poser $p(f(x)) = \tilde{f}(d_K x)$; et l'application $f \longrightarrow \tilde{f}$ (définie par $\tilde{f}\circ d_K = p\circ f$) est un <u>homomorphisme</u> de T' dans $Hom(B(K),H(L))$, que nous allons étudier.

a) Montrons d'abord que $f \longrightarrow \tilde{f}$ est un homom. de T' <u>sur</u> $Hom(B(K),H(L))$. En effet, pour tout homom. $u:B(K) \longrightarrow H(L)$, $v = u\circ d_K$ est un homom. de K dans $H(L)$ tel que $v(z)=0$ pour tout cycle $z\in Z(K)$. Nous "remonterons" v en un homom. w de K <u>dans</u> $Z(L)$ tel que $w(z)=0$ pour tout cycle $z\in Z(K)$; ceci est possible puisque $Z(K)$ est facteur direct de K, et qu'un supplémentaire de $Z(K)$ dans K est libre ; alors $v = p\circ w$. Comme $w(d_K x)=0$ et $w(\bar{x})\in Z(L)$, on a $Dw(x)=0$ pour tout $x\in K$; donc $Dw = 0$ et w est un <u>cocycle</u> de $Hom(K,L)$. Et, comme il applique K dans $Z(L)$, w est élément de T'. Comme, par construction, on a $v=p\circ w = u\circ d_K$, il en résulte bien que $u=\tilde{w}$, et que $f \longrightarrow \tilde{f}$ est un homom. sur.

b) Examinons maintenant à quelle condition $\tilde{f}$ se prolonge en un homom. de $Z(K)$ dans $H(L)$. Comme $Z(K)$ est facteur direct de K, ceci est équivalent à "$\tilde{f}$ se prolonge à K" ; et, comme K est libre, c'est encore équivalent à "il existe $g:K \longrightarrow Z(L)$ tel que $\tilde{f}(d_K x)=p(g(d_K x))$". Mais comme, d'après (1), $Dg(x) = g(d_K x)$ (le terme $d_L(g(\bar{x}))$ étant nul puisque g applique K dans $Z(L)$), l'assertion "$\tilde{f}$ se prolonge à $Z(K)$" est encore équivalente à "il existe $g:K \longrightarrow Z(L)$ tel que $\tilde{f}(d_K x) = p(Dg(x))$", c'est-à-dire à "il existe $g:K \longrightarrow Z(L)$ tel que $\tilde{f} = \widetilde{Dg}$ ". Le rédacteur suivant est alors prié de bien vouloir vérifier que ceci équivaut à "$f\in B\cap T'$ ".

Ainsi $T'/B \cap T'$ est isomorphe au quotient de $\mathrm{Hom}(B(K),H(L))$ par le sous-module des homom. de $B(K)$ dans $H(L)$ qui se prolongent à $Z(K)$; autrement dit il est isomorphe à $\mathrm{Ext}(H(K),H(L))$.

PS : Le point laissé de côté a déjà coûté une vingtaine d'heures d'efforts inutiles au rédacteur. Il fait remarquer à son successeur qu'il n'est <u>même pas</u> arrivé à démontrer que $\tilde{f} = 0$ entraîne $f \in T' \cap B$. Naturellement tout ceci se simplifie énormément si on ne met <u>pas</u> de structure de module caténaire sur L ($d_L = 0$).
