

.LA TRIBU

(Bulletin oecuménique, a périodique et bourbachique).

 COMPTE RENDU DU CONGRES OECUMENIQUE DU COCOTIER.

(Royumont, 13-25 avril 1949)

Présents : Cartan, Chevalley, Delsarte, Dieudonné, Godement, Pisot, Roger, Samuel, Schwartz, Weil, et le cobaye Serre (en cours de métamorphose).

Absents : Chabauty, Ehresmann.

Après avoir absorbé un cobaye coriace, Bourbaki monta au faite du cocotier de Royumont, et déclara, sous les applaudissements unanimes, qu'il ne rectifierait que les courbes rectifiables, qu'il traiterait la mécanique rationnelle (resp. réelle) sur le corps \mathbb{Q} (resp. \mathbb{R}), et, qu'avec un peu de vaseline et beaucoup de patience on finirait par rédiger la Topologie Algébrique. Le soleil était radieux, la conjoncture favorable et la température ambiante. Les flots de francs et de dollars dispensés par Freymann et Rockefeller tournèrent la tête aux Congressistes, qui se gorgèrent d'Armagnac, et n'eurent à la bouche que ces mots : "Ca ne coûte pas plus cher ! Delsarte paiera !" ; Godement se fit fort d'acheter Krein et Milman pour 5 dollars ; cette déviation capitalo-titiste, visco-lubrique, et nyc-vipérine a été signalée à qui de droit !. Le soleil et l'Armagnac firent naître d'étranges phrases du genre : "Urysohn non américain raisonne sur un rétracte", "Quand je décoiffe ce n'est pas d'un air tranchant". Cartan essaya en vain de vendre ses "orologies" et Dieudonné ses espaces de Fréchet. Les autres habitants de Royumont se demandent encore "est-ce vraiment des mathématiciens ?" , et leurs coups d'oeil furtifs sur les rédactions laissées dans l'oratoire de Saint-Louis n'ont fait que les confirmer dans leur doute. Soucieux de l'avenir, Bourbaki décida d'envisager des situations de repli pour ses membres ; la liste suivante a été adoptée :

- Cartan Professeur d'orthographe.
- Chevalley Métaphysicien.
- Delsarte Souteneur (ou, sinon, archevêque).
- Dieudonné Adjudant (ou crieur public).
- Bilenberg Concierge dans un collège de filles.
- Godement Révolutionnaire en peau de lapin.
- Pisot Anatomologiste.
- Roger Un sage.
- Samuel Controleur à la SNCF (ou historien).
- Serre Champion olympique (ou nerve).
- Schwartz Orateur (ou ministre des Distributions).
- Weil Philologue, et auteur de traités de versification.
- Les absents Gardes-malades.

En attendant Bourbaki décida d'adjoindre à ses activités celle de cénacle poétique, et l'atmosphère bucolique de Royaumont inspira les oeuvres suivantes :

Congrès

Godement se débat dans un bordel compact.
 Cartan, foutre de foutre, intervient avec tact
 Et d'une carapace au bon endroit l'accable.
 Delsarte en rut égrène un chapelet furtif ;
 Weil sommeille en un coin ; Samuel discursif
 S'étend sur quelque corps qu'on croit inséparable.

Un ronron quelque part a fait baisser les yeux
 A Pisot rougissant, confus d'être en ces lieux
 Où l'esprit se divise et la pudeur s'étonne.
 Schwartz ne s'en est ému, puissant distributeur,
 Et sur la bipolaire il fonce avec ardeur ;
 Elle aussitôt se rend ; mais c'est lui qui déconne.

Tout seul sur un divan, l'axiome à la main,
 Chevalley s'évertue et s'excite sans fin ;
 Il vomit un chapitre, et s'endort avec peine.
 Ecoeuré, Dieudonné proclame, furieux,
 Son départ, et bientôt se rassied, sous les yeux
 De Roger attentif et du cobaye obscène.

De signe primitif en abrégiateur,
L'ensemble est défini. Dans le moule typique
Couplage, appartenance et le reste s'imbrique ;
Et l'on écrit enfin l'axiome créateur.

Mais d'un fauteuil surgit un sot contradicteur,
Criant, vil excrément de l'hydre ontologique,
Que tout n'est point ensemble en la Mathématique.
Un second craignait fort d'effarer le lecteur.

Un autre réclamait la classe universelle.
Pour tous les contenter, l'on vous introduisit
Le type "non ensemble" ; et, mis en appétit,

Le Congrès bombina dans cette voie nouvelle.
Chevalley devint rouge, et Dieudonné livide :
On était canulé, car le type était vide.

Un Fréchet en travail bombinait solitaire.
"Qu'importe, disait-il, si mon dual n'adhère
A ses filtres bornés, pourvu qu'il soit complet ?
C'est donc fort qu'il doit être ; et par toute la terre
Il fera sonner haut le beau nom de Fréchet.

Quel plaisir de le voir, convexe et continu,
Pour un autre moi-même aisément reconnu,
Bombiner à son tour auprès des semi-normes,
Et enrichir sans fin mon illustre tribu
De Fréchets tous pareils, tous charmants, tous conformes !"

Mais hélas ! le Fréchet n'était pas réflexif ;
Il n'avait su prévoir qu'aussitôt subversif
Le dual briserait les liens qui le dénombrent.
C'est en vain qu'il s'acharne et se traîne, inductif ;
Son rêve est envolé, Banach, songe d'une ombre.

Dieudonné consterné rassemble les débris
Au pied d'un cocotier où triomphe un conscrit,
Et, toujours plein d'espoir, au bidual les plonge.
Trop tard : dans ses bras meurt le Fréchet incompris ;
Finis ses tristes jours, que nul Zorn ne prolonge !

Par cet exemple instruits, apprenez, s'il vous plaît,
Rédacteurs trop zélés, à borner vos souhaits ;
Baisez avec respect la main qui vous démembre.
Tel bien souvent se crut imprimé en juillet
Pour se voir vomé en septembre.

Sur l'espace fibré, cru préholomogique,
De sa fibre, isomorphe au groupe structural,
Apparaît, fibré propre ou fibré principal,
Un cocycle obstrucateur et caractéristique.

Au squelette attachée, une chaîne rapplique.
 Degrés, cycles, cobords, Hom., Ext., produit dual,
 Grouillant dans les replis du schème simplicial,
 Envahissent l'espace au nord épidermique.

Tchêkiste et singulier naissant deux faisceaux fins ;
 Isomorphie ! En immergeant la fibre enfin,
 S'accouplent sur l'anneau deux suites exactes.

Le filtre est oublié ; Chevalley est honni,
 Car la base et la fibre étaient paracompactes ;
 Le dénombrable seul existe à l'infini.

ENGAGEMENTS DU CONGRÈS.

CARTAN : Séminarise les relations entre homologie et homotopie.

Arrange les types avec Dieudonné (2 rapports, majoritaire et
 minoritaire, seront présentés)

Rédige une page sur (ou contre) les fonctions à variation
 bornée.

Fait un rapport sur les systèmes différentiels (tout ce qui
 peut se faire sans fonctions analytiques).

CHEVALLEY : Rédige le th. d'isomorphisme des structures.

Fait le laïus d'introduction (avec toute la philo. qu'il
 voudra)

Regarde le calcul des variations.

DELSARTE : Termine le Fasc. Res. de topologie (on se servant de la
 proctorédaction Weil) .

Rédige le chap. I d'homologie (Hom., Ext., etc.)

DIEUDONNÉ : Intégration, chap. I, II, III (état 5)

Espaces vectoriels topologiques, chap. I, II et IV (sauf
 les Fréchets).

Formes quadratiques (état 2)

ELLENBERG : Fait un rapport sur ses vieux trucs de multicohérence et d'applications dans les cercles.

GODEMENT : Rédige le chap.II d'intégration pour Octobre.

Le reste de l'intégration.

Rédige, pour dans deux ans, l'état 1 des espaces fibrés.

PISOT : Rapport sur le Calcul des probabilités (avant le 1-1-1950)

ROGER : Rédige les variétés différentiables (chap.I avant le 1^{er} juin, chap.II avant 1950).

Rédige ensuite les espaces fibrés en relation avec Godement et les variétés différentiables.

SAMUEL : Fait la note historique des Corps.

Rédige l'algèbre homologique, l'algèbre simpliciale et les théories de l'homologie en état 1 .

SERRE : Fait sa thèse.

Participe activement au séminaire CARTAN.

SCHWARTZ : Rédige l'état 4 les Fréchets ou assimilés.

Fait un rapport sur les groupes de Lie (en collaboration avec Chevalley).

Rédige l'état 1 les distributions (pour dans 5 ans)

WELL : Rédige la divisibilité.

Fait un rapport sur la géométrie différentielle (en collaboration avec Chern).

Rédige un projet d'homologie étroite (??)

PROCHAINS CONGRÈS

Du 1 au 8 Octobre à PARIS (Lecture définitive de l'Intégration, chap.I, II et III, et des entiers et puissances (rédaction Chevalley) ; examen des anneaux primitifs).

En février 1950 à Nancy (lecture définitive des espaces vectoriels topologiques (chap. I, II, III et IV) ; lecture de la rédaction Weil de la divisibilité, et comparaison avec la contre-rédaction Chevalley ; lecture définitive du Fasc. res. de Topologie).

ETAT DES PUBLICATIONS.

8 fascicules en vente.

Livre élémentaire (I, II, III) sort des presses.

Espaces fonctionnels : en épreuves.

Fin du Livre élémentaire : Livraison rapide à l'impression.

Corps commutatifs :

Intégration :
Fin du Livre I : } Livrables au début de 1950.

On espère pouvoir livrer à l'impression à la fin de 1950 : Divisibilité ; Fasc. Res ; de Topologie, - espaces vectoriels topologiques.

(Soit 17 fascicules en vente en 1951).



DÉCISIONS du CONGRÈS.

Pour mémoire : L'utilisation du th. d'Ascoli dans les extensions galoisiennes de degré infini est vomie par Weil ; on reviendra à l'ancienne rédaction, et on parlera du th. d'Ascoli en remarque. Ne pas attribuer à Artin le th. d'indépendance algébrique des automorphismes. Afin de mieux suivre en Congrès les sommaires seront tirés sur feuilles séparées

LOGIQUE ET ENSEMBLES.

Dès la première séance de discussion, Chevalley soulève des objections relatives à la notion de texte formalisé ; celles ci menacent d'empêcher toute publication. Après une nuit de remords, Chevalley revient à des opinions plus conciliantes, et on lui accorde qu'il y a là une sérieuse difficulté qu'on le charge de masquer le moins hypocritement possible

dans l'introduction générale. Un texte formalisé est en effet une notion idéale, car on a rarement vu de tels textes et en tous cas Bourbaki n'en est pas un ; il faudra donc ne parler dans le chap.I qu'avec beaucoup de discrétion de ces textes, et bien indiquer dans l'introduction ce qui nous en sépare.

Dans l'introduction des arguments typiques un canular a été caché, qu'il faudra mettre en évidence : si on veut faire une démonstration raisonnable, il faut, en introduisant un argument typique dans une démonstration (p.ex. "soit U un ouvert qui ..., que..."), ou bien s'assurer que le type en question n'est pas vide (ceci étant une conséquence des autres hypothèses), -ou bien dire qu'on pose en axiome le fait qu'il n'est pas vide, soit en vue de raisonner par l'absurde (cf. descente infinie), soit en vue de déduire des conséquences d'une conjecture non démontrée (postulat d'Euclide au 19-ème siècle, hypothèse de Riemann). Pour mieux éclairer sa lanterne on disséquera une ou deux démonstrations de la suite du traité (p.ex. du chap.I de Top.Géné., où les choses sont assez simples).

Malgré une vive opposition de Weil on introduira la relation "x est un ensemble" (notée $Ens.x$) comme relation primitive (Si on la définit par $(\exists y)(y \in x)$ il n'y aura que les ensembles et \emptyset , ce qui gêne beaucoup de gens, et rend moins immédiat le raccord avec le système de Gödel).

Cartan et Chevalley font admettre les relations structurales. On demande à Chevalley une démonstration du th. (métamathématique) d'isomorphisme des structures.

Le rédacteur de l'Introduction est prié de mettre le nez dans leur caca aux intuitionnistes ; il trouvera, dans le n° des Maths.Reviews reçu en Avril, des citations bien gratinées ("il est impossible qu'il n'existe pas...")

TOPOLOGIE ALGÈBRIQUE.

Le haut commissariat à la Topologie Algèbrique ayant daigné révéler quelques secrets aux profanes, on a pu tirer des trois rapports une ébauche de plan. Le Congrès réserve son opinion sur l'idée de faire l'homotopie et les espaces fibrés avant l'homologie (voir sonnet). La situation actuelle de l'homologie permet la rédaction d'un état 1 du "bloc homologique" dont la structure a été bien débrouillée, -le choix entre un diplotocus et une "homologie étroite" étant, bien entendu, laissé aux rédacteurs.

Pour le contenu du livre de Topologie Algèbrique, le Congrès n'a pas pris de décisions définitives. Il y a des choses incontestablement utiles : homologie et groupe fondamental (pour Stokes, Cauchy, et les surfaces de Riemann), espaces fibrés (pour la géom.diff.). La notion d'homotopie est-elle aussi indispensable (classification des espaces fibrés, réalisation de certains opérateurs d'homotopie, etc.), mais on n'y parle pas des groupes d'homotopie ; celui qui intervient dans la première obstruction est aussi un groupe d'homologie. Il n'est donc pas exclus que l'on ne parle pas de groupes d'homotopie dans la première partie de Bourbaki. D'autant plus que Cartan, suivant l'opinion de J.H.C. Whitehead, croit qu'une homologie "enrichie" (spectres de Bockstein, carrés de Pontrjagin, théorie de Leray) pourrait donner toute l'homotopie, en utilisant probablement aussi le groupe fondamental ; il est chargé d'étudier la question dans son séminaire de l'an prochain.

Le Congrès réserve son opinion quant à la subordination des revêtement aux espaces fibrés (De Rham trouve ça ridicule). En tous cas il faudra pouvoir parler du groupe fondamental pour autre chose que pour des espaces localement compacts (p.ex. espaces fonctionnels ; c'est d'ailleurs une théorie singulière).

A ce propos le Congrès décide qu'il ne faudra pas trop séparer les points de vue tchékiste et singulier, et ne pas faire de laïus vaneux du genre : il y a la topologie, avec les applications continues, et le produit topologique (qui marche pour les compacts), -et le "cotopologie" avec les applications ouvertes et le "produit de Mandlebrojt" (qui marche pour les discrets). Il n'y a là qu'une dualité métamathématique mal foutue (à la Mac Lane), peut être d'intérêt heuristique, et que les rédacteurs pourront trouver utile de garder à l'esprit.

1) Remarques sur l'homotopie (Rapport Eilenberg).

Il faudra commencer par des lemmes sur la connexion par arcs. Le Congrès voudrait bien qu'on le tapirise sur l'homotopie toroïdale de Fox (qui donne toute l'homotopie sphérique, plus les produits de Whitehead), et décidera alors entre les deux méthodes d'exposition.

Remarquer (pour $\pi_{n+p} = \pi_n(\int_p)$ sauf "low cases") que, si A et B sont loc. compacts, on a $(X)^A \times B = (X^A)^B$ pour les topologies de la convergence compacte. Pour l'homomorphisme induit (p.4) il serait plus suggestif de se ramener à π_1 ; de même π_1 et π_2 pour le bord et l'exactitude. Les suites généralisées (avec deux sous-espaces) sont utiles pour les intersections des chaînes sur les variétés (p.5). Pour la démonstration du lemme p.8, on remarque que L est rétracté d'un de ses voisinages dans K, et on applique Urysohn. Introduire (p.9) la notion de système localement simple. A la p.1 de la fin, le th.1 est une trivialité (résulte de la définition de \mathcal{D} et de celle de la "nice map") le th.2 utilise la commutativité des groupes d'homotopie supérieurs.

Au concours : trouver une démonstration commune d'exactitude pour l'homologie singulière et l'homotopie ; unifier les deux démonstrations évoquées p.8.

2) Remarques sur les espaces fibrés. (Rapport SEAW).

Schwartz se demande si on ne pourrait pas faire rentrer les structures différentiables et analytiques dans le même moule que les structures fibrées. Il ne faudra pas oublier de songer aux fibres singulières de Seifert, que Godement essaiera de rattacher à ses sommes continues. Pour plus de clarté on commencera par le cas des espaces fibrés principaux (ou "galoisiens", voir ci-dessous pour la terminologie) ; là le fait que G opère simplement sur la fibre est essentiel ; dans le cas général on commencera tout de suite par le cas où G opère de façon quelconque (cf. FP ; 53,54). On n'oubliera pas de parler du groupe fondamental d'un produit.

La terminologie suivante, inspirée de celle des corps commutatifs, est adoptée (au moins en ce qui concerne les revêtements, qui correspondent aux extensions algébriques, les espaces fibrés généraux correspondent aux extensions transcendantes ; Weil est chargé, directement ou par personne interposée, d'expliquer à Bourbaki la théorie des espaces fibrés en Géométrie algébrique) : on appellera "séparables" les espaces fibrés "propres" (si la base est loc. connexe on peut séparer localement les feuilletts du revêtement) ; on appellera "galoisiens" les espaces fibrés principaux ; le groupe structural G sera appelé "groupe de Galois". On rappelle que, dans la terminologie Américaine, les espaces avec application fibroïde sont appelés "fibre spaces", et les espaces fibrés propres (ou "séparables") "fibre bundles".

Voici quelques remarques de détail :

p.11 : A côté du relèvement des homotopies (qui est un truc de quotients il y a la propriété analogue des sous-espaces (cf. fin du rapport Eilenberg) : si $A \subset B$, si f et g sont des applications homotopes de A dans X , et si f se prolonge à B en f_0 , alors il arrive souvent que g se prolonge en g_0 et que f_0 et g_0 soient homotopes.

- p.22 : (en haut) expliciter l'homéomorphisme entre B et B' .
- p.26 : Il y a deux choses : le passage d'un espace fibré à un ensemble fibré principal (ou "galoisien") (ensemble qui est un espace si G a la topologie de la convergence compacte), -et passage d'un espace fibré galoisien à un espace fibré par F .
- p.28 : Si F est un espace homogène G/g l'espace fibré galoisien associé s'obtient de façon très simple.
- p.29 : La possibilité de détrivialisatation correspond à l'existence d'une section.
- p.31 : On peut faire les trucs du haut sans théorie des groupes de Lie, on ne parle que de groupes de matrices.
- p.36 : peut-on zornifier ?
- p.37 : G doit être un groupe de Lie simplement connexe.
- p.40 : débrouiller l'aspect tchékiste du premier corollaire.
- p.43 : comparer avec la p.9 (bas) du rapport Eilenberg.
- p.46 (bas) : on fait ici le contraire de ce qui est fait aux revêtements on tue l'homotopie de la fibre, et non celle de la base.
- p.65 (haut) : y a-t-il des histoires de structure uniforme là-dessous ?

Le Congrès fait toutes ses réserves quant à la déplaisante méthode des chenilles.

3) Plan du bloc homologique (Rapport Cartan).

Le découpage en chapitres que voici est adopté :

- I Algèbre des produits tensoriels, hom., ext. et produits duaux.
- II Algèbre homologique.
- III Algèbre simpliciale.
- IV Cohomologie de Čech .
- V Homologie et cohomologie singulières.
- VI Faisceaux et applications.

Chapitre I

Il y a trois définitions possibles de $\text{Ext}(G, H)$: systèmes de facteurs
 trucs Brauer du produit, par des groupes abéliens libres (si $G = F_G/R_G$,
 F_G étant le groupe abélien libre engendré par les éléments de G et R_G
 le sous-groupe des relations, on a $\text{Ext}(G, H) = \text{Hom}(R_G, H) / \text{Hom}(F_G, H)$.
 Le noyau de $R_G \otimes H \rightarrow F_G \otimes H$ est le torseur (ou produit dual) $G \times H$.
 On établira l'exactitude des suites :

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 0 & \rightarrow & F * \gamma & \rightarrow & G * \gamma & \rightarrow & H * \gamma & \rightarrow & F \otimes \gamma & \rightarrow & G \otimes \gamma & \rightarrow & H \otimes \gamma & \rightarrow & 0 \\
 0 & \leftarrow & \text{Ext}(F, \gamma) & \leftarrow & \text{Ext}(G, \gamma) & \leftarrow & \text{Ext}(H, \gamma) & \leftarrow & \text{Hom}(F, \gamma) & \leftarrow & \text{Hom}(G, \gamma) & \leftarrow & \text{Hom} & & \\
 & & & & & & & & & & & & & \text{Hom} & & \\
 & & & & & & & & & & & & & (H, \gamma) & \leftarrow & 0 \\
 0 & \leftarrow & \text{Ext}(\gamma, H) & \leftarrow & \text{Ext}(\gamma, G) & \leftarrow & \text{Ext}(\gamma, F) & \leftarrow & \text{Hom}(\gamma, H) & \leftarrow & \text{Hom}(\gamma, G) & \leftarrow & \text{Hom} & & \\
 & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & & & & & (\gamma, F) & \leftarrow & 0
 \end{array}$$

(F est un sous-groupe de G , et on a $H = G/F : 0 \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow 0$).

Tout ceci devra être fait pour des modules (sur un anneau commu-
 tatif ayant un élément unité). Ces suites apparaîtront au chap. III
 comme cas particuliers des suites de cohomologie des groupes.

Chapitre II.

1) modules gradués (sur un anneau commutatif à élément unité ; peut
 être sur des anneaux plus généraux, Hopf se servant d'anneaux de
 groupes non abéliens). Les projecteurs (on ne considèrera que la somme
 directe des sous-trucs homogènes) ; graduation de l'anneau des endo-
 morphismes ; bigraduation, degrés partiels et total ; produits tenso-
 riels de modules gradués ; $\text{hom}(A, B)$; anneaux et algèbres gradués
 (ne pas se borner au cas associatif à cause des algèbres de Lie).

2) Modules à bord (pas de graduation). Homomorphismes permis, suites
 exactes, homomorphismes induits sur l'homologie, naturalité ; dire
 qu'une suite est exacte revient à dire que son homologie est nulle
 (homologie de suites "semi-exactes", - sera peut être utile en théorie
 de Čech).

- 3) Modules gradués à bord. Graduation de $H(G)$; déroulement de la suite exacte ; cas où $r=+1$ ou -1 . Produits tensoriels.
- 4) Dualité, cochaines, cohomologie. On prendra γ non gradué. Cas des accouplements.
- 5) Théorèmes de Hünneberg et des coefficients universels (avec les ext. et produits duaux) ; au concours : que sont $H(\text{Ext}(G,H))$ et $H(G * H)$?
- 6) Structure multiplicative (Se déduira d'un homomorphisme de $G \otimes G$ dans G ; la formule de bord d'un produit exprime que c'est un homom. permis) ; structure multiplicative sur $H(G)$.
- 7) Opérateurs d'homotopie ; ce qu'ils engendrent dans les Hom., , ...
Exemple des formes différentielles.
- 8) Limite inductive (homologie) = homologie (limite inductive).

Chapitre III.

Le choix entre méthodes simpliciale et "cubique" est laissé au rédacteur ; les cubes facilitent l'étude des produits.

- 1) Complexes simpliciaux ; complexes simples (bord, cochaines, cobord, leur homologie est triviale (par opérateur d'homotopie))
- 2) Notion de sous-complexe ; chaines et cochaines relatives ; suites exactes ; applications simpliciales ; complexes non simples comme sous-complexe de complexes simples (sous-groupe stable des chaines, groupe quotient des cochaines.
- 3) Structure multiplicative des cochaines (on considèrera l'application φ de $C_r(E)$ dans $\sum_{p+q=r} C_p(E) \otimes C_q(E)$ définie par $\varphi((a_0, \dots, a_r)) = (a_0) \otimes (a_0, \dots, a_r) + (a_0 a_1) \otimes (a_1, \dots, a_r) + \dots$, et on en tirera les caps et cups ; éventuellement les produits de Steenrod et les carrés de Pontrjagin (Steenrod : prendre $p+q=r+1, r+2, \dots$, au lieu de $p+q=r$) .

4) Homologie des groupes (quotient par les chaines invariantes par G ; cochaines équivariantes ; voir mémoires Milenbergl, Hopf et Eckmann) ; lien avec le chap. I

On fera aussi dans ce chapitre la cohomologie des algèbres de Lie ; celle des algèbres est vouée à l'expulsion.

Chapitre IV

La cohomologie de Čech est liée à une structure uniforme ; on ne considèrera que des structures uniformes définies par des recouvrements ouverts localement finis ; la cohomologie de première espèce du rapport Cartan (sur les loct. compacts paracompacts) doit être liée à la structure uniforme universelle. Les trucs à support compact ne dépendent pas de la structure uniforme. Suites exactes (quand il y en a ; sinon, regarder si ce ne seraient pas des suites semi-exactes et si on pourrait considèrer l'homologie du truc tournant).

Chapitre V

Exposé V du rapport Cartan. Application des opérateurs d'homotopie à l'invariance topologique de l'homologie d'un complexe euclidien ; calculs pratiques ; homologie des boules et sphères ; homomorphisme Čech \rightarrow singulière. On pourra faire (sans faisceaux) l'identité des cohomologies tchékiste et singulière pour les espaces à épiderme.

Chapitre VI

Comme applications du grand théorème des faisceaux, on fera le th. de DE RHAM, l'identité des diverses cohomologies, et la dualité de Poincaré. La dualité d'Alexander en est un corollaire (utiliser les suites exactes). Ensuite : théorème de Jordan, nombres d'intersections, théorèmes de points fixes.

Ultérieurement il faudra faire : l'homologie et l'homotopie des surfaces (essentiel) ; équivalence de "surface simplement connexe" et "une rétrosection la coupe en deux morceaux" ; $\pi_1(A \cup B)$ où $A \cap B$ est connexe ; les relations entre homologie et homotopie (avec le degré d'application) ; la théorie de Leray-Schauder (avec l'homologie d'une application) ; la théorie de Morse ; l'homologie d'un quotient E/G , G étant un groupe d'automorphismes sans points fixes de E ; l'homologie des espaces fibrés.

" un peu de vaseline, beaucoup de patience, et"

INTEGRATION.

De même que les peuples heureux n'ont pas d'histoire, l'Intégration seule n'inspirera aucun poème, ce qui montre l'état satisfaisant dans lequel elle se trouve. Le Congrès décida d'en faire un livre plein de primes au lecteur et de théorèmes plaisans et délectables. Le plan général suivant est adopté :

- I Espaces de Riesz et convexité.
- II Mesures de Radon.
- III Prolongement des intégrales de Radon ; espaces L^p .
App. : sommes continues.
- IV Théorème de Lebesgue-Nikodym ; dualité des L^p ; mesures quotients.
- V Mesures de Haar et de Lebesgue ; produit de composition.
- VI Décompositions spectrales commutatives.
- VII Groupes abéliens localement compacts ; transformation de Fourier.
- VIII Distributions.
- IX Calcul des Probabilités ; théorie ergodique.

On mettra dans le dépliant la définition des espaces de fonctions $\mathcal{C}, \mathcal{L}, \dots$ la notation $|f|$ est adoptée pour les valeurs absolues et normes dans les espaces où les fonctions intégrées prennent leurs valeurs, la notation $\|f\|$ étant réservée aux normes L^p .

Chapitre I

- 1) Définition d'un espace de Riesz, f^+ et f^- , lemme de décomposition.
- 2) Les absolument réticulés.
- 3) Décomposition en bandes.
- 4) Le dual d'un espace de Riesz est absolument réticulé.

Ce chapitre, assez trivial, doit être le plus court possible ; il ne fait qu'introduire un langage simple et commode. On y parlera des clans de fonctions (afin d'avoir f^0), mais sans grand laïus sur les clans.

On y donnera l'inégalité de la moyenne, celles de Hölder et de Minkowski (pour $p \leq 1$ et $p \geq 1$) ; pour des fonctions convexes positivement homogènes. Pour éviter des confusions on dira "~~ordinaire~~ ordinalement borné".

Chapitre II

On décide d'y introduire un nouveau § (§ 3) sur les intégrales de fonctions vectorielles (intégrale forte, -déduite d'une intégrale pour les fonctions numériques). L'intégrale induite et la restriction à un ouvert sont réservées. On évitera de trop référer dans le texte aux trivialités des espaces vectoriels topologiques, mais on y fera des renvois en petits caractères à titre d'exemples. Un laïus terminologique dira qu'on réserve plutôt le mot "mesure" aux ensembles et fonctions caractéristiques, et le mot "intégrale" au cas général. La notation des valeurs des intégrales est réservée. Les mesures discrètes sont rejetées à la mesure des ensembles, mais fourniront ici des exemples. L'appendice sur les décompositions spectrales est adopté, mais fera l'objet du chap. VI

§ 1 (compacts).

- p. 3 : notation $\langle f, \mu \rangle$.
- p. 4 : ϵ_x ou δ_x .
- p. 6 : ensemble "total" dans la prop.1 ; dire tout de suite que les $\mu(f)$ ne sont pas arbitraires.
- p. 7 : admirer l'arithmétique de la 1.11 ; la déf. 2 est conforme à la déf. générale relative aux Banach.
- p. 8 : dire que la topol. vague est la topol. faible ; la prop.4 est la définition ; la masse totale est $\mu(1)$ et non la norme (il faudra l'introduire aussi) ; biunivocité par complète régularité (rem. 4) dire que la topol. forte donne une image discrète.

p. 11 : il y a 3 notions " μ continue" (1), " μ relt. bornée" (2), "diff. de deux mesures positives" ; l'équivalence (1)-(2) vient de ce que bornée au sens de Riesz équivaut à borné au sens de la topologie ; l'équivalence (2)-(3) vient du chap. I ; le th. 1 ((1) \Leftrightarrow (2)) viendra en lemme au th. 2 ; le cas des mesures positives en cor. ; dire que μ^+ et μ^- sont disjointes.

p. 12 : la prop. 7 est versée au § 2 (elle devra tenir en 6 lignes : multiplier par $e^{i\theta}$ afin d'amener les trucs à être réels).

Introduire $\|\mu\| = \|\mu^+\| + \|\mu^-\|$, (la variation totale) et $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$.

§ 2 (localement compacts).

Après les généralités (n^0 1, 2, 3) on fera : n^0 4) Convergence vague ; n^0 5) Sommes d'Archimède ; n^0 6) Supports, th. 2 (utiliser les sommes d'Archimède) ; n^0 7) l'algèbre normée complète ; n^0 8) points extrémaux, prop. 18bis, idéaux maximaux (7 et 8 en petits caractères). On fera le prolongement par rapport à la norme) aux fonctions continues nulles à l'infini. On ne parlera pas d'autre topologie que de la topologie vague ; on s'efforcera de ramener les questions de convergence des mesures au cas des mesures à support compact, les autres or étant des limites par gonflement des compacts. Essayer de débrouiller le lemme général suivant ("principe de localisation") : E compact, sous algèbre \mathcal{A} de $\mathcal{C}(E)$ définie par des propriétés locales, forme linéaire μ sur \mathcal{A} , idéal \mathcal{A} des $f \in \mathcal{A}$ telles que $\mu(fg) = 0$ qq. soit g ; alors \mathcal{A} est l'ensemble des $f \in \mathcal{A}$ nulles sur un fermé convenable. Essayer de montrer directement (sans Hahn Banach, si possible) que les ε_x ($x \in \text{supp}(\mu)$) sont dans le sous-espace fermé engendré par les $\mu \varphi$ (φ : continue à support compact) et même par les $\mu \varphi$ de norme 1 (redactor demerdetur).

p. 15 : définition en règle du support (noté $\text{supp}(f)$) pour des fonctions à valeurs dans n'importe quoi ; notations ($\mathcal{C}(E)$ pour toutes les

continues, $\mathcal{L}(E)$, $\mathcal{L}_R(E)$, $\mathcal{L}_+(E)$ pour les continues à support compact, $\mathcal{L}_\infty(E)$ pour les continues nulles à l'infini ; arranger la prop.1 (qui n'est pas exactement sous cette forme au chap.IX de Top.Géné.)

p.16 : $\mathcal{L}(E;F)$ est un idéal de $\mathcal{L}(E)$; vider le laïus de la fin.

p.17 :(et suivantes) Ordre : déf.3, exemples, intégrales réelles, intégrales positives (donner, après le th.1 (p.20) un énoncé pour les mesures positives (positive \Rightarrow Radon) en cor. ; dire qu'un ensemble borné de mesures de Radon est relt.compact)), μ^+ et μ^- , les intégrales bornées (prop.2, p.21 pour les intégrales complexes), revue des exemples (bornées ou non bornées) ; la prop.7 du §1 (jointe aux lignes 3-9 de la p.22) viendra juste avant les intégrales bornées ; donner l'exemple de la mesure singulière $1/q^B$ sur les $\exp(ip/q)$ (si $(p,q)=1$) (on le reprendra aux supports).

On dira (au n° des supports) que $\text{supp}(\mu f) = \text{supp}(\mu) \cap \text{supp}(f)$. Au n°7 on parlera des idéaux fermés des espaces de fonctions, et des sous-modules fermés de l'espace des mesures (avec les fonctions continues à support compact comme opérateurs ; on ne veut pas de la notation μ^ψ). Le n° des mesures discrètes est reporté après la mesure des ensembles ; cependant les mesures à support discret (prop. 8,9 et 10) seront traitées au n° des supports ; de même l'exemple de le rem.2 p.29. Le n°6 (norme d'une intégrale bornée) est réservé ; en tous cas il devrait être remonté au n° des intégrales bornées.

p.32 (n° remonté après les généralités). Dire qu'une mesure dont le support $\rightarrow \infty$, tend vers zero ; démontrer rapidement l'homéomorphisme ; dire que le dual faible $\mathcal{M}_-(E)$ n'est pas complet, mais que $\mathcal{M}_+(E)$ l'est ; la notion d'intégrale positive est une notion purement algébrique. Ordre suivant : prop.13, prop.14 (pour un ensemble faiblement borné de mesures), enfor. le cor. de la prop. 14 et la prop.15.

p.42 sqq. (ferment le n°7): la bonne notion est celle des formes linéaires positives prolongeables à l'algèbre obtenue par adjonction d'un élément unité ; référer (th.4) à Hahn Banach ou à son cor.547.

p.35 sqq (forment le n°8) La prop.16, relative aux points extrémaux (ou plutôt aux génératrices extrémales des cones), sera remontée aux e.v.t. (avec Krein Milman des cones) (on y notera l'analogie avec les éléments primordiaux). On donnera aussi une démonstration du th.2 qui n'utilise pas Krein Milman (utiliser les sommes d'Archimède). Dire qu'il s'ensuit de la prop.18 bis qu'un idéal maximal est fermé ; ne pas cacher les idéaux dans sa démonstration.

L'image d'une intégrale par application continue (n°10) sera faite pour les fonctions vectorielles au §3 ; l'inégalité de Minkowski remonte au chap.I .

§3 (Fonctions vectorielles : intégrale forte)

n°1) Définition ; comment une intégrale réelle donne une intégrale vectorielle (cf. chap.III, p.30 sqq) ; notion de centre de gravité ;

n°2) Image par application continue (p.46, sqq.). Dire que l'application propre φ transforme les fonctions à support compact en fonctions à support compact ; l'image d'un fermé est fermée (devra être mis en Top.Géné., chap.I, en 2-ème édition) ; pour les loct. compacts les applications propres sont les appl. prolongeables à l'infini. Dire que l'image du support contient le support de l'image (égalité dans le cas de mesures positives ; un contre exemple dans le cas contraire). Transitivité.

n°2) Th. de convexité ; lien avec les centres de gravité.

n°3) Minkowski et Hölder.

§4 (Produit d'intégrales)

L'ordre suivant est adopté : on va chercher $\mu \otimes \nu$ telle que

$\langle \mu \otimes \nu, fg \rangle = \mu(f) \nu(g)$; si elle existe elle est unique (approximation par les $\sum_i f_i g_i$) ; existence (comme au début de la rédaction actuelle) ;

l'unicité donne tout de suite l'interversion des intégrations (et ceci dans le cas de n facteurs. On parlera un peu plus de continuité afin d'éviter les débauches de notations (p.ex. à la p.53) ; le th.1 (p.55) est déjà fait en topologie X) ; mettre la prop.4 en exemple. On fera aussi Lebesgue Fubini pour les fonctions vectorielles (après les numériques. La définition du produit de n intégrales sera défini par récurrence. Le th.2 (p.61) sera fait seulement dans le cas $n=2$.

Choses à ajouter : support du produit = produit des supports ; convergence vague bornée des produits, le produit de deux mesures est séparément continu ; justifier la notation $f \otimes g$; images par applications produits. Weil réclame les produits infinis (compacts sauf un nombre fini) en vue de la mesure de Haar sur les tores infinis, et en vue des Probabilités ; on a fait le th. qu'il faut en Top. X .

Chapitre III.

On adopte la terminologie suivante :

Fonctions	Ensembles
Sommables (ou intégrables, suivant la terminologie étrangère)	intégrables
localement sommables	mesurables
mesurables	mesurables
dénombrablement mesurables	dénombr. mesurables.

On dira localement (négligeable, presque partout) au lieu de "sur tout compact". Suivant l'avis de Weil, le Congrès décide de donner le pas aux compacts, le reste étant un passage à la limite suivant l'ordonné filtrant des compacts ; le rédacteur devra s'efforcer de rédiger dans cet esprit.

Les sommes continues viendront en appendice ; on dira que le lecteur peut commencer par là, et transposer la lecture du reste du chapitre (qui devra donc être fait de façon à rendre cette transposition aisée).

On donnera le pas aux mesures positives, mais on n'oubliera pas de transcrire en termes de mesures quelconques.

Dire en Français dans les énoncés qui sont les espaces de fonctions envisagées ; les notations figureront dans le dépliant.

On fera les fonctions mesurables à valeurs dans un F métrisable quelconque.

On vide en exerc.: l'intégrale inférieure, la mesure intérieure, le n° 11 (§ 5) ; le n° 12 (§ 5) (qui vaut pour des fonctions quelconq.) ira en lemme à l'extension aux loc. compacts du th. de Lebigle-Nicodème compact. Le § des th. de convexité viendra au chap.IV, avec la dualité des L^p ; on l'allègera des cas limites de Hölder.

Les sommes de Lebesgue iront en exerc. au § des produits. On réserve le sort des mesures discrètes (pour être bien faites il faut avoir la restriction à un fermé qui vient naturellement avec Lebigle-Nicodème).

La question des fonctions à variation bornée est réservée (en fait elles sont presque vidées) ; ce sont des primitives de mesures (d'où la possibilité de les mettre aux Distributions), et aussi des trucs satisfaisant à une condition de Lipschitz dans L^1 .

§ 1 (Intégrale supérieure d'une fonction positive)

p.5 : donner une référence ou une explication pour la formule 1.4 ; garder le "la prop.1 suggère" .

p.6 : dire "fonction sci"="ensemble au dessous du graphe est fermé" ; le th.1 est une propriété d'ensembles ordonnés, -le faire ainsi.

p.10 : dire que la formule du haut tient à la prop.6 .

On fera la linéarité de l'intégrale supérieure deux fois (aux sci, et aux fonctions quelconques. On remontera au § 1 le n°6 du § 2 (p.22) (Fonctions sci et topologie vague).

p.12 : dans la prop.11, les deux pas (sci, qqconques) sont différents ; on l'expliquera rapidement sans trop de ϵ . Dire que les normes N_p ont les mêmes propriétés que N_1 .

p.13 : le raisonnement du haut devrait venir à la prop.11 ; mettre 2^n au lieu de n^2 (au choix) ; supprimer une des 3 remarques (répétée !)

§ 2 (fonctions et ensembles négligeables).

p.19 : la déf.3 n'est pas une définition mathématique, mais une règle de synonymie ; elle est ambiguë (cas où il y a d'autres variables que x) ; on ne l'énoncera donc que pour les propriétés ; on dira "l'ensemble des $x \in E$ tels que A est négligeable".

p.21 : le n° des classes de fonctions est à mettre au début du § 3. La prop.12 est reportée à la mesure des ouverts (on lui mettra en cor. le fait que le support de μ est l'intersection des fermés tels que ...) ; seul le cor.2 de la prop.12 reste au § 2. Le n°6 est remonté au § 1.

§ 3 (Espaces L^p_F).

On donnera la référence aux esp. vect. top. pour le truc de la série convergente (prop.1). La déf. aura été faite au chap.II (§ vectoriel).

p. 28 : simplifier le raisonnement de la prop.6 (passage à l'adhérence) ; faire la prop.7 avec un filtre et pour une loc. convexe qqconque.

Le n°4 aura été fait au chap.II (§ vectoriel).

p.32 : afin d'avoir tout de suite le cas des mesures non positives, il faudra montrer que, si l'application linéaire $f \rightarrow u(f)$ (\in Banach) est telle que $|u(f)| \leq N_1(f)$, alors elle est continue ; faire le th.4 par prolongement des inégalités ; donner une définition en forme de $\int f d\mu$.

p.33 : dire au cor.3 qu'on a alors $\int f d\mu = \int g d\mu$; la référence à Hahn Banach est inutile au th.5 (prolongement des identités).

p.34 : conserver le titre du n°6 ; écrire la prop.13 avec la formule de la 1.7 du bas.

p.35 : ne pas extraire de suites à la prop.14, mais utiliser la prop.12 (si $f = \lim g$, alors $f^+ = \lim g^+$) ; la prop.15 est une propriété de classes : on mettra, à la fin du n^o, un Σ (avec contre exemple des fonctions nulles sauf en un point) qui introduira le th. de Lebesgue (th.6).

p.40 : ajouter le cor. de Carathéodory ($\lim(\sup..) = \sup(\lim..)$) appliqué convenablement ; ajouter à la prop.16 le cas des suites dénombrables et du paramètre réel.

p.41 : en prenant p et q tout de suite, on peut faire la nécessité et la suffisance d'un seul coup (th.8). Compléter la remarque (p.42) car on a déjà Hölder ; un Σ pour f réelle quelconque après le cor.

p.43 : théorème 8 bis ("Godolert") ; mettre des références aux espaces de Hilbert. Dire (en petits caractères) que $L_F^2 = L_C^2 \otimes F$ (avant la prop.16 bis). On dira "de type dénombrable" au lieu de l'horrible, malfaisant et antibourbachique "séparable".

p.45 : en prenant une fonction ses come différence "continue-sci", on obtient immédiatement les prop.17 et 18.

On vide l'intégrale inférieure. Modifier en conséquence le th.9, et n'y pas mettre de suites. Le th.10 en exer.

4 (Ensembles mesurables) (ou, maintenant, "intégrables")

p.51 : dire que la prop.8 provient de celle des ouverts par passage au complémentaire par rapport à un ouvert de mesure finie.

p.52 : donner d'abord la suffisance du th.1

p.53 : le th.2 passe en cor. au th.1 ; mettre en exercice la topologie de Cartan sur l'ensemble des parties.

Le n^o 4 est vidé en exer.

On introduira "la mesure est portée par A" si \int_A est de mesure nulle (ici ou au § 3). Dire au n^o5 que les fonctions à valeurs dans un sous-espace de dim. finie sont partout denses (au moyen des fonctions étagées).

Le n°6 (sommés de Lebesgue) est vidé. On garde le n°6 (mettre mieux en évidence les trucs de limite uniforme) ; exercices pour R^2 et R^n .
Le n°7 est réservé.

§5 (Fonctions "localement sommables")

Après de nombreux essais, on décide de ne pas introduire le th.d'Egoroff ; il faudra arranger (et synchroniser) les démonstrations du th.1 et de la prop.1. Faire le th.2 pour des produits infinis dénombrables ; on met au concours le cas des non dénombrables (auquel semble liée l'intégrale faible) ; on mettra pas mal de cor. du th.2 dans le cours du texte.

p.71 : remonter la remarque 1 avant la prop.3.

p.72 : mettre le lemme avant le th.3 (et en simplifier la démonstration au moyen d'une suite décroissante d'ouverts contenant K).

A propos de la terminologie "localement", il faudra montrer que, si c'est vrai sur les petits compacts, c'est vrai sur tous (partition).

p.75 : la prop.4 est évidente.

p.76 : décanuler la démonstration. Le th.4 vaut pour un métrisable quelc.

p.79 : dire que les notions "loc.négl." et "négl." sont identiques sur un espace dénombrable à l'infini ; on dira "maximum en mesure" ou " μ -maximum", et on démontrera son existence.

p.82 : faire une figure ; cor.1 en exercice.

On garde ici le n°10 (que certains voulaient renvoyer à Lebigle-Nicodème) afin de pouvoir intégrer sur des ensembles pas trop mal foutus de R^n (cube moins une face, par exemple) le plus tôt possible. Il y a des canulars de non dénombrabilité à l'infini à mettre en évidence (les notions " $f \int_A$ mesurable pour μ " et " f mesurable pour $\sum_A \mu$ " sont alors distinctes. Le n°11 passe à l'intégrale faible. Le n°12 passe au chap.IV (extension aux loc. compacts du th. de Lebigle-Nicodème compact)

On n'oubliera pas de dire : une fonction fortement mesurable est limite forte (localement presque partout) de fonctions étagées ; les fonctions négligeables sur tout compact forment un idéal ; produit (sommable) \times (mesurable) ; (loc. négl.) \cap (sommable) = négl. ; pour qu'une fonction soit loc. négl., il faut que son produit par toute fonction sommable soit négl. et il suffit que son produit par toute fonction continue à supporte compact soit régl.

Ne pas oublier d'ajouter l'image d'une mesure par application mesurable (dans le cas d'une application continue on peut en dire plus).

Le § 6 (théorèmes de convexité) est versé en partie au chap. I. Y dire que $N_\infty = \text{li}x N_p$; donner (en exer.) la démonstration du th. 1 sans Hahn Banach ; terminologie "moyenne de f dans A" ; on fera le cor. 1 avant le th. 1 ($d\mu / \int f d\mu$ est une mesure ; la prop. 2 (décanulée) en exer. prop. 3 et 4 aussi (on ne parlera pas de variétés d'appui aux e.v.t.).

Application bilinéaire B dans le th. 2 ; exorciser (p. 95) les points où les dénominateurs sont nuls ; supprimer le cor. 3 (p. 96) et le remplacer par le cas des algèbres normées complètes ; ajouter le cas "f $\in \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}$, fg $\in \mathcal{L}^1_{\mathbb{F}}$ ". Les cas limites de Hölder en exer.

§ 6. (Théorème de Lebesgue-Fubini)

p. 112 : traduire le th. 1 en termes d'ensembles ; le bas de la page aura été fait au chap. II (vectoriel).

Utiliser l'inégalité $\iint^* fg |\mu_1| d|\mu_2| \geq \int^* d|\mu_1| \int f d|\mu_2|$ (pour f ≥ 0 qqconque) et tout en déduire. Commencer un nouveau n° avant la prop. 2 .

p. 115 : dire que la projection d'un ensemble mesurable est mesurable.

Questions ultérieures.

On réserve la question de l'intégrale faible (th. de Dunford et th. de Pettis) qui semble encore assez mal débrouillée. La mesure quotient se rattache ainsi aux sommes continues : en chaque point de la base sont attachés deux espaces en dualité, les fonctions continues sur la fibre,

et les mesures sur la fibre ; le th.8 de Godement permet de passer du cas des compacts à celui des loc. compacts. La mesure quotient viendrait bien avec Lebigle-Nicodème ; elle permet de rattraper Lebini-Fubergue.

ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES.

On décide de fondre les chap.II et III en un seul (la distinction entre propriétés topologiques et non topologiques est gênante, car elle amène à répéter deux fois la même chose, les propriétés non topologiques étant des cas particuliers des autres au moyen de la topol.loc.convexe la moins fine rendant toutes les formes linéaires continues). Le chapitre des Fréchet demande une refonte complète.

Plan :

I Espaces vectoriels topologiques sur un corps valué.

II Convexité. Espaces localement convexes.

§ 1 Ensembles convexes ; cores convexes (lien avec les relations d'ordre ; cones maximaux).

§ 2 Fonctions convexes.

§ 3 Espaces localement convexes.

§ 4 Hahn-Banach et ses innombrables corollaires.

§ 5 Krein Milman.

§ 6 Espaces complexes.

III Espaces de Fréchet.

IV Espaces de Hilbert.

Chapitre I.

P.1 : Rappeler les notions de corps valué et de corps valué discret ; faire le n°1 sur un corps topologique qqconque ; rappeler que $(x,y) \rightarrow x \cdot y$ est continue ; exemple 1) pour un produit infini ; ajouter les exemples : espace discret (sur un corps discret), anneau topologique à élément unité contenant K ; fonctions différentiables ;

fonctions continues sur \mathbb{R} avec la topologie de convergence compacte (montrer qu'il n'est pas normé).

p.2 : $(\lambda, x) \rightarrow \lambda x$ n'est pas unif. continue (un Σ).

p.3 : une similitude à la 1.4 corps valués à partir du n°2 ; rappeler la condition de séparation ; exemple des boules au n°2 ; on dira "corps valué non discret" au lieu de "dont la valeur absolue n'est pas impropre" .

p.4 : des laïus expliquant les conditions ("on ramène un point par homothétie") ; expliquer "nécessité" et "suffisance" .

p.5 : on réserve le cor. (utilité douteuse).

p.6 : mentionner la structure uniforme induite dans le corite.

p.7 : donner l'exemple de l'intégrale du livre élémentaire.

p.8 : désouligner "finie" dans la déf.2 .

p.9 : définir les projecteurs avant la prop.5 .

p.10 : la prop.6 est un cor. de la prop.8 pour SB et $B_1 + B_2$; $B_1 \cap B_2$ se déduit de ce dernier en ajoutant l'origine à B_1 .

p.11 : mieux rédiger la démonstration de la prop.9 .

p.12 : un voisinage de 0 n'est total que si le corps n'est pas discret. remonter ici la prop.3 (en cor. de la prop.1)

p.13 : V "non partout dense (1.2) ; référence à la définition d'ensemble rare ; désouligner "fermé" dans la déf.2 ; la démonstration du bas est inutile.

p.14 : souligner l'équivalence de la prop.2 et de la condition L_2^1 ; la prop. 3 remonte au n°1 .

p.15 : on a interverti "nécessaire" et "suffisant" dans le th.1 ; il y a un contre-exemple au cor. (exerc. 6).

p.16 : rappeler au début du n°3 qu'un sous-espace de dim.1 est isom. à K ; des références dans la dén. du th.2 ; dire que tout isomorphisme algébrique est topologique (ce qui évite la récurrence de la pro.4)
La 1.7 du bas en cor.

p.18 : éviter le style "la prop.4 est inexacte si..." ; figure au th.3 ; dire "supposons alors que I soit différent de M " (1.11 du bas).

Les n° 1 et 2 du §3 formeront un nouveau §. Le n° sera relatif aux groupes (partie de la prop.1 relative à la structure de groupe ; prop.2 3 et 4 ; la démonstration de cette dernière est fautive, - si on n'arrive pas à la reprendre on dira "on croit que..." et on s'en servira !! ; en donner un énoncé avec des filtres ; il sera bon de considérer les $\mathcal{L}(E,F)$ comme des commutants). Le n°2 parlera des espaces vectoriels (donner l'exemple des fonctions numériques sur \mathbb{R} avec la topologie de la convergence uniforme ; référence au fait que "fini implique borné" (milieu de la p.20) ; corps discret (p.21) en petits caractères ; le dernier alinéa de la p.21 est probablement faux, - le remplacer par un exemple où c'est vrai ; dire que le dual algébrique est fermé dans E^K)

p.24 : vider le dual fort et l'exemple.

On gardera la topologie faible de l'espace (terminologie : "espace à dual séparant") ; on vide au cas des loc. convexes les notions d'ensembles polaires et bipolaires ; on garde celle d'ensembles orthogonaux.

p.26 : vider les considérations (milieu) sur la complétion.

p.27 : cas des duals faibles en cor. de la prop.5 .

p.28 : le n° 6 passera en exer.

p.29 : énoncer le th.1 en Français. On dira "soit E' le dual faible de E (afin d'éviter la notation E'_f) ; on notera avec des primes les gens du dual.

p.30 : vider les 1.4 et 5 du bas.

p.31 : prop.9 en exercice, ainsi que son cor.

p.32 : énoncer le th.2 en disant qui est U^0 (on ne parle plus de polaires ici) ; dire que les bornés de E'_f ne sont pas tjs relt. compacts.

p.34 : on garde la prop.13, mais il faudra l'énoncer sans bipolaires ; rendre sa démonstration plus explicite ; dire (à la prop.12) que " $t u(y')=0$ " équivaut à " r' est nul sur l'orthogonal..." .

Chapitre II.

Il s'agira au § 1 de propriétés d'un espace affine ; le dire et référer à Alg. IX ; pour simplifier on y mettra qqfois une origine (assez arbitraire). On supprimera le "sur R" (le dire). Dire que sauf mention expresse du contraire un espace de dim. finie aura la topologie ordinaire.

p.36 : dire $tC+(1-t)C \subset C$ dans la déf.1 .

p.37 : définir aussi le centre de gravité lorsque $\sum \lambda_i \neq u$;

p.38 : dire "invariance affine de la notion de convexité" (renvoi à l'exerc.6 pour la réciproque) ; afin de ne pas avoir de confusions avec la topologie, on parlera de "demi espaces algébriquement ouverts" ; mentionner les homothéties et translations comme cas particuliers de la prop.2 ; bloquer les cor.1 et 2 de la prop.3 .

p.39 : vider les remarques ; faire la prop.5 pour l'enveloppe convexe de la réunion d'une famille (A_λ) et donner une démonstration explicite de convexité ; l'actuelle prop.5 en cor.

p.40 : Pour les cônes on se placera dans un espace vectoriel, et l'origine sera le sommet (sauf mention expresse du contraire) ; donner une def. en règle des cônes ($C+C=C$, $tC=C$ pour $t \geq 0$, resp. > 0 pour les "cônes époutés") ; remonter l'alinéa de la fin du n°4 au début du n° .

A partir d'ici de nombreuses démonstrations se ramenaient à des situations de géométrie à deux dimensions, assez voisines les unes des autres. Il y a là dessous une propriété générale, le lemme de Pasch, qu'il faut expliciter une fois pour toutes (un n° entre 3 et 4) ; on l'utilisera à la prop.6

p.41 : figure pour le milieu de la page.

p.42 : remonter au début du n°5 la caractérisation des points internes au moyen des sections par des droites (milieu de la page) ; y remonter aussi le dernier alinéa du n° (bas de la p.43) ; dire l'invariance affine de la notion de point interne ; l'exemple du haut est une bonne définition de "mini" (!!) ; utiliser Pasch pour la prop.7 ; dire que si x (resp. y) est point interne de A (resp. B), alors $tx+uy$ est point interne de $tA+uB$.

p.43 : pour la remarque du haut : un point interne de la base est interne dans le secteur conique, puis appliquer la prop.7 et l'invariance par homothétie ; le cor.3 de la prop.7 est réservé ; le bas de la page remonte plus haut.

p.44 : Remarquer dès le début que la topologie sur les droites et les sous-espaces de dim. finie est l'ordinaire (référence au chap.I).

p.45 : Dans la prop.10 il suffit que A soit de rang fini.

On introduira, dès le §1 la notation PQ pour le segment fermé.

p.47 : supprimer le laïus (réduction aux fonctions d'une variable) ; interpréter la prop. avec des centres de gravité ; secteur conique "épointé" (l. 1 du bas).

On vide les p.48 et 49 jusqu'à la l.8 ; arranger sans cones le bas de la p.49 (cf. ancienne rédaction) ; un énoncé explicite pour la correspondance du haut de la p.50 ; figure pour la prop.2 (p.50) qui marche aussi en dim. infinie avec des points intérieurs ; pour la prop.3 (p.51) on montre que c'est majoré (car majoré dans n directions), et on applique la prop.2 (cette prop.3 doit marcher pour des normés car elle ne se sert que du fait que les voisinages sont bornés). On ajoutera au §2 la condition de convexité au moyen de la forme quadratique des dérivées secondes.

Un exercice : une topologie pendant toutes les formes linéaires continues identifie (ou presque) points internes et intérieurs.

Il faudra remonter au début du § 1 les questions d'hyperplans (bas de la p. 52 ; avec le haut de la p. 53 en énoncé explicite).

On passe alors au chap.III, § 1 (espaces loc. convexes).

p.63 : dire, dans la prop.1, que L_1^n , L_2^n et L_3^n sont évidentes, -seule L_4^n est à vérifier ; donner en exemple la borne supérieure de topologies loc. convexes.

p.64 : prendre pour Γ un ensemble saturé de semi normes (calquer sur Top.Géné.IX) ; définir les semi normes équivalentes. On mettra les exemples à la fin du n°2).

p.66 : expliciter le cas des normés au n°4 ; espace séparé "associé".

p.67 : il faut des ensembles saturés de semi-normes à la prop.3 .

p.68 et 69 : dire d'abord que les notions "continue", "continue en 0", "bornée au voisinage de 0" sont équivalentes (rapprocher les gens de l'origine par homothétie) ; donner le cor.2 en prop. ; puis la prop.3 et son cor.1 (en prop.) ; on fera le cor.2 pour les multilinéaires. A la prop.4 prendre Γ et Γ' saturés. On mettra la prop.5 en exer. et son cor. en prop..

La prop.1 (p.72) pourrait venir à la fin de ce § .

§ de Hahn-Banach.

On rassemblera ici le th. de Hahn-Banach et toutes ses conséquences, qui étaient dispersées dans 3 §§ (chap.II, § 3 et chap.III §§ 2 et 3).

Weil enverra de Chicago ses notes sur Hahn Banach et Krein Milman.

On donnera deux démonstrations : la non topologique (en éclairant le haut de la p.54 : on projète sur un truc de dim.2) ; celle des cones (avec les relations avec les groupes ordonnés ; on utilisera Pasch en haut de la p.56 ; il y a ici la la topologie : la topol.loc. convexe la plus fine rendant toutes les formes linéaires continues). A ce propos un scholie général dira qu'on ne parlera plus de propriétés non topologiques, celles-ci se déduisant des propriétés topologiques au moyen de

cette dernière topologie ; on donnera donc une espèce de dictionnaire permettant cette déduction.

On donnera les cor.1,2 et 3 en termes topologiques (p.56). Définition et existence des hyperplans d'appui (cor.p.73); hyperplans séparant un point et un ouvert convexe, deux convexes à points intérieurs, un point et un fermé convexe. Un fermé convexe est intersection des demi-espaces fermés le contenant. Une variété linéaire fermée est intersection des hyperplans fermés la contenant ; cas de 0. Supplémentaire topologique d'un sous-espace de dimension finie (p.74).

Prolongement des formes linéaires continues par rapport à une semi-norme ; cas d'une norme (p.75 ; la prop.5 passe en exerc.; ses cor. restent). La forme de krein (prop.6, p.77) qu'il faudra décanuler (f doit être > 0 en un point intérieur de $V \cap C$).

Le n° des dérivées (p.79 sqq.) en petits caractères.

On passe ensuite aux propriétés relatives au dual faible (p.81 sqq.). Après la prop.1 ("la topologie faible de E est séparée"), on définira d'abord l'isomorphisme canonique puis on identifiera E et $(E'_p)'$; dégonfler les gammes bourbachiques de la p.82 ; le bas de celle-ci est une trivialité pour E , (pas pour E'). Remonter le contre exemple de la p.83 avant la prop.2 ("toutefois pour les convexes...") ; un scholie à la prop.2 : "pour les convexes la notion de fermé ne dépend que des hyperplans fermés" ; les cor. de la pro. 2 (sauf les cor.5 et 6 qui passent en exer) ; un contre exemple (application identique) après le cor.4 . On vide le n°2 (sous espace et quotient).

On garde les définitions d'ensembles semi-polaires, polaires et bi-polaires. On évitera les 'resp.' (p.87) en disant une fois pour toutes qu'on énoncera les choses pour E et qu'elles s'appliqueront aussi à E' ; éviter les débauches de notations ("scoquironds") ; on distinguera U^{00}

(qui est dans E ; enveloppe fermée convexe de U) et $(U^0)^0$ (qui est dans le bidual) (un bidual sera ici sans topologie). Le cor. (p.88) et la prop.5 passent en exer., ainsi que les fonctions d'appui.

§ de Krein Milman.

On garde la notion d'hyperplan d'appui. Mais les variétés d'appui sont si loin de l'intuition géométrique de la plupart des Congressistes, qu'on décide de n'en pas parler. On parlera des facettes, mais il faut les définir de sorte que ce soient des ensembles fermés. Ceci réduit à presque rien le n°2 (p.57 sqq.). On montrera, en cor. à la prop.7

(p.77) qu'un compact convexe est l'intersection des demi-espaces fermés déterminés par ses hyperplans d'appui. On raccourcira le début de la dem. de la prop.8 (p.78) en utilisant mieux la compacité ; on dira "éléments minimaux". On donnera une définition en règle de l'enveloppe fermée convexe avant le th.3. Ne pas oublier le cas des cônes convexes à base compacte ; interprétation des génératrices extrémales au moyen de la proportionnalité (à remonter du chap.II d'intégration, -prop.16); on notera l'analogie avec les éléments primordiaux.

On laisse à la fin du chapitre le § (6) des espaces complexes.

Raccourcir les laius de la p.91 (qui auront pu être faits en Alg.IX). Style de la remarque du bas (au concours : que se passe-t-il en dim. infinie). Introduire la notion d'ensemble cerclé avant la prop.1 (p.92); éviter les sinus et cosinus dans la prop.1. Supprimer la scurrilité "la réciproque est inexacte..." (p.93, l.10 du bas). Dire (p.95) que les ensembles polaires sont cerclés.

Chapitre III (Espaces de Fréchet).

Le Congrès est choqué du mélange de trivialités et de théorèmes fins (de catégorie). Il adopte pour principe de classification : espace, dual, bidual. Il demande un nom pour les espaces de Fréchet.

Il réserve la question des limites inductives d'espaces de Fréchet (qui seront probablement vidées si elles figurent à la prochaine rédaction). SCHWARTZ démontrera dans sa rédaction les théorèmes qui sont utiles pour les Distributions ; si ça devait l'amener trop loin, il n'aura qu'à publier un mémoire en collaboration avec DIEUDONNE.

Les théorèmes utiles pour les Distributions sont :

(Espace) 1) Un borné dans (\mathcal{D}) est borné dans un (\mathcal{D}_k) (lim. ind.) 2) Les formes linéaires bornées sont continues (cor. L, prop.3, p.135).

3) Le th. des homomorphismes.

(Dual) 1) La topologie \mathcal{E}_k ; les faiblement bornés sont fortement bornés.

2) L'quicontinuité des faiblement bornés ; la limite faible d'une suite d'applications continues est continue (p.137).

3) Polarité des voisinages et des bornés (p.109).

(Bidual) 1) Polarité des voisinages et des bornés (pour le dual).

2) Réflexivité (th.3, p.113)

3) Une partie du th. des homomorphismes.

4) Pour qu'une forme linéaire sur le dual soit faiblement continue (et alors élément de l'espace), il faut et il suffit qu'elle soit faiblement continue sur tous les bornés.

Il faudra dire que beaucoup de résultats de ce chap. sont des réciproques de résultats du précédent. Se servir (p.99) du fait qu'une application d'un métrisable est continue si, et seulement si, elle transforme toute suite convergente en une suite convergente. Prendre des voisinages (au lieu de distances) à la prop.5 (p.100) ; montrer que le cor.4 est équivalent à la prop.5 ; il serait peut être plus commode de démontrer d'abord le truc du graphe (cor. 3) ; un cor. explicite pour "biunivoque continue entraîne bicontinue" .

Remonter au début du § le bas de la p.102. Répéter dans les énoncés qui sont les topologies \mathcal{E}_s , \mathcal{E}_f , \mathcal{E}_c . Énoncer le th.1 (p.104) avec "il faut que ..., il suffit que ..."; dire les parties du th.1 utilisées dans le cor.; ajouter (p.105) le truc du filtre à base dénombrable convergeant simplement. Polaires des bornés en prop. (p.107); dire qu'il n'y a que la compacité en plus du th.1 dans le th.2; utiliser Ascoli; ajouter (en d) du th.2) la prop.3 de polarité; vider les cor.1,2 et 3. Voile pudique sur les canulars de la p.109. Vider le cor.1 (p.110). Expliciter le cas des Banach (p.111); vider la topologie faible du bidual; la prop.5 remonte bien plus haut (y masquer le bidual). La prop.-6 (p.112) en remarque. Faire le th.3 (p.113) pour des bornés; mettre son cor. en exer. On vide le n°4 (dual fort d'un sous-espace et d'un quotient). Un Σ en haut de la p.118; prop.12 en exer; prop.13 pour les biunivoques seulement (cas général en exer.). Grouper les prop. 14 et 15.

Les applications complètement continues n'ont pas été lues.
