. LA TRIBU

(Bulletin oecuménique, apériodique et bourbachique)

N° 17 - 15 Mars 1949.

COMPTE RENDU du CONGRES de NICOLAIDES.

(Nancy, 13-20 Février 1949)

Présents : Cartan - Chevalley - Delsarte - Dieudonné - Godement - Pisot - Roger - Samuel - Schwartz et 6 cobayes.

Absents : Chabauty - Ehresmann.

Ce Congrès fut placé sous le signe d'émouvantes effusions familiales. Notre Maître eut le bonheur de recevoir la visite d'un sien cousin, le diplomate NICOLAIDES BOURBAKI ; celui-ci, se rendant de Paris à Berlin, s'arrêta à Nancy, attiré par la gloire et le renom de Notre Auguste Maître, qui le régala d'un mémorable POT. Durant ce Pot les congressistes apprirent la glorieuse histoire de la famille Bourbaki. On retrouve, sous le nom de Scordylis, des traces de celle-ci en Crète dès l'an 1089 ; nos lecteurs remarqueront les propriétés mirificques du nombre $1089 = 3^2.11^2$; ceci nous donne à supposer que cette famille est apparue sur la terre en 1089 par la vertu de quelque opération magique, et que notre Maître ne compte parmi ses ancêtres aucun Epiménide ou autre Crétois brouilleur de types. Les Turcs donnèrent à cette vaillante famille d'adversaires le surnom de Βουρμπαχη (Vourbachi), "celui qui attaque le premier". Les Grecs l'écrivirent Βουρβαχη. Sôter Bourbaki (1750-1820) quitta Sfakia en Crète en 1774 ; pendant une tempête au large de Zante il voue à St-Denys, l'enfant que sa femme attendait ; il s'installe à Céphalonie, navigue en Méditerranée au service de l'armateur Marseillais Clary, beau-père de Joseph Bonaparte. C'était alors l'expédition d'Egypte, où un cousin de Sôter avait conduit 90 volontaires Crétois ; il s'agissait d'apporter à Napoléon un important courrier malgré le blocus britannique ; seul Sôter était capable de mener à bien l'entreprise ; comme récompense il demanda à Napoléon d'éduquer ses enfants. L'aîné Constantin entra au Prytanée Militaire de la Flèche, fut le plus jeune colonel de la Grande Armée, et mourut en 1827 en attaquant Athènes sous Fabvier ; il eut un fils Charles qui devint général du Second Empire et fit une habile retraite vers la Suisse en 1871 ; c'est celui qui est chanté dans la chanson suivante des turcos :

Gentil Turco
Quand autour de ta boule
Comme le serpent s'enroule
Ce calicot
Qui te sert de shako
Ce chic exquis
Par les turcos acquis
Ils le doivent à qui ?
A Bourbaki !

Le second Joseph entra dans la diplomatie. Notre hôte Nicolaïdès, - qui descend d'un frère cadet Nicolas de Sôter, par Géorges Nicolaïdès archéologue et Louis, -ne savait pas ce qu'était devenu le troisième fils de Sôter, Denys ; une rapide induction nous permit de conjecturer qu'il s'installa en Poldévie ; et là, à Cucuteni, en 1886, naquit Notre Illustre Maître son arrière petit-fils.

Là-dessus, malgré les critiques de Cartan et les fausses sorties de Dieudonné ("Mon gendre, tout est rompu .."),- malgré les propositions quasi-subversives de Chevalley et lés sarcasmes désabusée de Delsarte,- malgré les contre-rédactions de Roger et la transformation de Laplace suspendue par Pisot au-dessus des équations différentielles,-malgré les distributions de Schwartz, le style de Godement et les erreurs de Samuel, - malgré l'effarement des cobayes et les disputes des "Founding Fathers", -malgré le froid, la neige, les bancs incorfortables, -malgré les lumbagos, le café terminé et les tuyaux fuyant,- malgré tout BOURBAKI attaqua le premier l'Analyse et l'Algèbre !

ETUDE LOCALE DES FONCTIONS (Livre IV, chap. IV, § 1). Le paragraphe est définitivement adopté, à de petits détails de rédaction près.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES (Livre IV, chap. VI). Le plan d'ensemble est conservé, mais de nombreuses et importantes modifications sont apportées à la rédaction, qui devra donc revenir une dernière fois devant le Congrès d'Avril (vu le manque de temps, il ne sera pas possible de faire polycopier la nouvelle rédaction, qui devra donc être examinée sur 3 exemplaires seulement).

Détail : § 1. Prendre partout comme notations t pour la variable x pour la fonction. Ne pas parler de "courbes intégrales" afin de ne pas être amené à définir ici le mot "courbe". Faire les systèmes d'équations différentielles vectorielles. Au n° 2, mettre en proposition le cas où f est continue. Au n° 4, définir les fonctions lipschitziennes pour une fonction $k(t)$, et donner le th. 1 pour ce cas. Après le th. 1, une proposition permettant de comparer deux intégrales approchées de $x' = f(t, x)$ et $x' = g(t, x)$ lorsque $\|f - g\| \leqslant \varepsilon$ dans $I \times H$ et que l'une des deux équations est lipschitzienne. Au n° 5, diviser le th. 3 en alinéas : 1° existence d'un plus grand intervalle J où l'intégrale existe et est unique ; 2° l'intégrale sort de tout ensemble compact ; 3° si $f(t, u(t))$ est bornée, u tend vers une limite aux extrémités de J, et une telle limite est point frontière de H si l'extrémité de J n'est pas extrémité de I. Cas où H est l'espace entier. Les prop. 3 et 4 sont fondues dans une même proposition, qui occupe un nouveau n° : "continuité des intégrales en fonction des paramètres" ; cette prop. est la suivante : soient f quelconque, g lipschitzienne pour k dans $I \times H$, $\|f - g\| \leqslant \varepsilon$ dans $I \times H$. S'il existe une sol. approchée u à ε près de $x' = g(t, x)$, telle que dans K, la distance de

$u(t)$ à la frontière de H soit $> \frac{3\varepsilon}{k}(e^{k|t-t_0|}-1)$, alors il existe des solutions arbitrairement approchées de $x' = f(t, x)$ dans K. Un corollaire lorsque f contient un paramètre en fonction duquel elle est continue. La prop.5 (actuelle) découpée en 3 alinéas : 1° existence d'un intervalle fixe J où $u(t,t_0,x_0)$ est définie ; 2° continuité de $u(t,t_0,x_0)$ dans $J \times J \times V$; 3° équivalence de $x = u(t,t_0,x_0)$ et de $x_0 = u(t_0,t,x)$ dans des voisinages assez petits. Donner si possible des figures.

§ 2. Ecrire partout dx/dt au lieu de x' ; remarquer que si E de dimension finie, $A(t)$ est toujours continue ; expliquer que $A(t).x$ est une notation plus commode pour $(A(t))(x)$. Remarquer qu'un système scalaire homogène à coefficients réels donne naissance à un système par rapport à des inconnues vectorielles dans n'importe quel espace normé. On suppose $A(t)$ réglée. Faire les limitations et l'existence des intégrales pour l'équation non homogène. Un nouveau n° : linéarité des intégrales, où on dit qu'il s'agit d'un problème linéaire, les solutions forment une variété linéaire. Si un endomorphisme constant B permute avec A, Bx est solution pour toute solution x (de l'équation homogène) ; cas particulier où E est espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, B une homothétie complexe.

N°3 : dépendance des conditions initiales (équations homogènes). Définition (dans le texte du théorème 2) de $C(t,t_0)$; démonstration du th.2 par l'astuce Schwartz : on introduit (avec une justification heuristique) l'équation $C'=AC$ dans l'espace $\mathcal{L}(E)$ avec la condition initiale $C(t_0)=I$, et on vérifie que Cx_0 est l'intégrale, d'où $C=C(t,t_0)$; corollaires : 1) continuité de $C(u,v)$ déduite de $C(u,v)=C(u,0)C(0,v)$; 2) l'espace des solutions est isomorphe à E ;

3) si l'endomorphisme constant B permute avec A , il permute avec $C(t,t_o)$. N°4 : intégration de l'équation non homogène (pratiquement inchangé). N° 5 : adjointe : remarquer que la matrice Γ correspondans à l'adjointe est la contragrédiente de C . N°6 : systèmes fondamentaux d'intégrales. Définir le déterminant de n intégrales, et utiliser la formule $[Cy_1,\dots Cy_n] = \det C . [y_1,\dots,y_n]$; le cas $n=1$ remonté en exemple au n°3 ; au bas de la p.33, utiliser la contragrédiente. P. 34, en haut, montrer l'équivalence ; le bas de la p.34 et haut de la p.35 passe avec l'intégration de l'équation non homogène, on peut prendre une base variable avec t. N°7 : on remarque que $C(t,t_o)=C(t-t_o,0)$ et on note $C(t,0)=C(t)$; on pose $C(1)=\exp A$, alors $C(t) = \exp At$, commute avec A , $d(\exp At)/dt = A \exp(At)=(\exp At)A$; développement en série par la formule de Taylor ; $\exp A(t+u) = (\exp At)(\exp Au)$, si A et B commutent, $\exp(A+B)=(\exp A)(\exp B)$ par les trois équations $C'=AC$, $C'=BC$, $C'=(A+B)C$. Se ramener au cas où il y a une seule racine caractéristique, et développer par Taylor : $y=e^{rt}(y_o+(A-rI)ty_o/1!+\dots+(A-rI)^{p-1}t^{p-1}y_o/(p-1)!)$. Cas où il y a des seconds membres de la forme $e^{ht}P(t)$, P polynome à coefficients vectoriels, donner la règle du degré du polynome solution particulière. N°8 : équations scalaires d'ordre n : dire que l'indépendance entre fonctions est équivalente à l'indépendance entre vecteurs (ne pas la redéfinir) ; l'adjointe d'une équation d'ordre n est vidée, la formule de Lagrange ne se comprenant qu'avec les distributions. N° 9 : équations linéaires d'ordre n à coefficients constants : écrire l'équation $\prod_k P_k(D)y=0$ et utiliser l'identité de Bezout, les P_k premiers entre eux 2 à 2. Le n°9 actuel est rejeté en exercice. Nouveau n°10 (petits caractères) : résolution d'un système $\sum_j P_{ij}(D)y_j=b_i$ où les P_{ij} polynomes en D , les seconds membres étant

supposés indéfiniment dérivables ; méthode Chevalley : si $P=(P_{ij}(D))$, il y a deux matrices unimodulaires A(D) et B(D) telles que APB soit sous forme diagonale (diviseurs élémentaires) ; posant $y = B(D) z$, d'où $z = B^{-1}(D) y$, on est ramené à $A(D)P(D)B(D) z = A(D) b$, système qui se décompose en n équations (d'ordre quelconque) par rapport aux z_i, d'où aussitôt les conditions de compatibilité et le nombre de constantes arbitraires dans la solution générale.

Il est entendu que le Livre IV comportera un dictionnaire.

SÉRIES FORMELLES.

Adoptées sans discussion.

ANNEAUX PRIMITIFS (Livre II, ch.IX, état 2).

Pour la terminologie on décide de parler de modules semi-simples aussi bien dans le cas infini que dans le cas fini ; on pourra dire "représentation simple" (resp. "semi simple) au lieu de "irréductible" (resp. "complètement réductible") ; pour les anneaux on dira "primitif" et "semi primitif" (fini ou non). On dira "bicommutant" au lieu d'"anticommutant" (confusion avec les xy=-yx). Un module simple ne sera jamais trivial, mais un semi-simple pourra l'être ($\emptyset$!). Pour plus de généralité on traitera d'anneaux avec opérateurs, et en particulier d'algèbres (sur des anneaux ; Z s'il n'y a pas d'autres opérateurs).

Le Congrès n'a examiné que les §§1 et 2, qui seront fondus en un seul. Les références pour les rappels. La prop.5, canulée, sera remplacée par un th. de densité. (Gegenbeispiel en exerc.). Faire le lemme de Schur pour un ensemble d'opérateurs. Le module n'a besoin que d'être semi simple dans le th. de densité (th.2) ; il caractérise le bicommutant (comme adhérence). Parler de "systèmes complets de représentations" (dans la déf des semi-primitifs). On dégonfle le § du radical, malgré les jolis résultats de Roger("we shun the somewhat unpleasant radicals") ; on ne démontrera que les équivalences de 1),4) et 4a) (et donc 1a)) du th.1 (p.15) ; ceci d'abord dans le cas où il y a un élément unité ; dans le cas général on remarquera que les A-modules simples et les A^*-modules simples sont les mêmes, A^* étant l'algèbre obtenue par adjonction d'un élément unité à A).

PUISSANCES. ENTIERS. ENSEMBLES ORDONNÉS . (Livre I, chap.III et IV, état 3).

Le Congrès, gêné par le fait qu'on traitait des entiers sans parler tout de suite de leur ordre, décide de fondre ces deux chapitres en un seul, avec le plan suivant :

§ 1 Ensembles ordonnés.

§ 2 Puissances.

§ 3 Ensembles finis, entiers, ensembles dénombrables.

§ 4 Théorème de Zorn et applications.

§ 5 Ensembles bien ordonnés.

Modulo détails les §§ 1,4,5 sont adoptés et ne reviendront pas en Congrès ; Chevalley rédigera à nouveau les §§ 2 et 3 , sans s'autocanuler avec la restriction de ne parler que des puissances de parties d'un même ensemble (voir les détails plus loin) ; il rédigera aussi, dans le même esprit, la théorie des ordinaux, Zorn étant supposé connu.

§ 1. Ensembles ordonnés.

On suit le § 1 du chap.IV, avec les modifications suivantes : Delsarte voudrait des axiomes un peu plus généraux ($x \leqslant_n y$) comprenant les cas suivants : n copies de x sont sous groupes de y , x^n divise y , nombre de représentations irréductibles, suites de J.H. La question est mise au concours.

On supprimera les exemples relatifs aux puissances et aux entiers sauf quelques exemples de 3^{è} espèce.

p.209 : Plus de "$(x/u)(y/v)R$" (mais $R(x,y)$) ; supprimer le mot "asymétrique".

p.210 : Un ordonné F (au lieu de N) dans l'ex.5 .

p.211 : Dire (1.13) "successivement" au lieu de "dans un ordre déterminé" .

p.212 : Démontrer la prop.1 par référence à la règle "A $\Longleftrightarrow$ (A et non B) ou B" ; ne pas définir "incomparables" (on dira "non comp.")

p.213 : Le haut (ordre opposé) est à remonter au bas de la p.210. Plus de "relations normales", ni de "asymétrique".

p.214 : Ex. de 3-ème espèce de la divisibilité des polynomes à coeff. réels.

p.215 : Mettre le laius initial en Français ; "branches des Math." et non "parties" ; expliquer l'ex.2 en langage naïf.

p.217 : Dire qu'on évitera d'utiliser la notation $f \leq g$; " ... est dite monotone si l'une des deux conditions suivantes est réalisée.." (déf.1) ; on donnera comme ex. l'appl.identique, $X \times X$ dans $E \times E$, $\mathfrak{P}(X)$ dans $\mathfrak{P}(E)$.

p.218 : Supprimer les suites. Dire tout de suite qu'une partie d'un tot. ord. est tot. ord.

p.219 : l'ex.2 est gardé (donc de 3-ème espèce)

p.220 : Ne pas trop employer les notations d'intervalles illimités, $E_x(x \leq a)$ est aussi simple ; l'intersection de deux intervalles est un intervalle, pas leur réunion ; le cor. est vrai pour tous les ordonnés, et il passera comme ex. d'appl. croissante (p.217). On remontera ici la déf. et les propriétés élémentaires des <u>bien ordonnés</u> (pp.254,255, ex.1 et 2 en 3-ème espèce, ex.3 vide) p.221 : Dire qu'on revient au cas des ordonnés généraux ; constater que la terminologie est compatible avec celle de l'inclusion ; ne pas préjuger de l'unicité du plus petit élément dans la déf. 4.

p.222 : Pas de "partie non vide" dans la déf.5 ; ne pas dire qu'on se bornera aux éléments minimaux (sinon il faudrait démontrer un métathéorème de renversement d'ordre).

p.223 : L'ex.4 admet une réciproque ; la fin du n° passe au § 3 ;

p.225 et suiv. : On définira filtrants et réticulés au moyen de parties réduites à deux éléments (les déf.7 et 9 actuelles passent en prop. au § 3).

p.226 : X est majorée automatiquement (déf.8), mais la réciproque est fausse (un exemple).

p.227 : Mettre l'important ex.3 en prop.

p.228 : La remarque est une c.n. et s.

p.229 : Donner inf$\emptyset$ et sup$\emptyset$ dans la prop.5 .

p.230 : La prop.9 est fausse pour $\emptyset \times E$.

Mêmes remarques pour les réticulés que pour les filtrants.

§ 2. Puissances.

Cartan propose de parler de relation d'équivalence en dehors de tout ensemble : étant donnée une relation d'équivalence (axiomes habituels) $R(x,y)$ entre variables d'un même type, on introduit une nouvelle relation primitive $Eq_R(\xi, x)$ et on pose comme nouvel axiome que c'est une relation fonctionnelle en ξ ; on écrira $\xi = Cl(x \text{ mod.} R)$ le symbole fonctionnel correspondant. Ceci présente l'avantage considérable de permettre de parler de cardinaux, d'ordinaux, de groupe abstrait etc.; çà sera très commode aussi dans les applications universelles.

On décide aussi de revenir sur le tabou ontologique de ne pas admettre d'ensemble fondamental vide (mais on ne parlera pas du type de ses éléments).

On bloquera les démonstrations des pp. 155,6 (renvoyer aux transports de structures). Parler de partitions dans le th.1 (p.159) ; se ramener à un seul ensemble ; dire que A est le plus petit ensemble contenant R et stable pour f ; une explication naïve (ou une figure). La transitivité est à remonter au début du §. (p. 155) cor.1 sans commentaire ; introduire les notations avec la définition. Les prop.9 etc. seront données sans démonstration (référence au chap.II). Remonter la prop.14 plus haut. Avoir introduit les mots "ensembles disjoints" au chap.II. Mettre en exer. l'associativité et la commutativité infinies (p.167,8), vider les inégalités (p.168) ; un Z pour la différence (p.169).

§ 3. <u>Ensembles finis</u>. <u>Entiers</u>. <u>Ensembles dénombrables</u>.

Les ensembles énumérés passent au chap.II. Pas de moyen terme dans la définition de $\{a\}$ (p. 170 ; c'est un symbole fonctionnel). Vider le laïus métamathématique (p.171). Faire la démonstration avant la déf.1 ; mettre que $\mathcal{P}(E) = \mathcal{F}(E)$ dans la déf.1 (p.172). On veut avoir la récurrence le plus tôt possible, et on propose l'ordre suivant : Définition des ensembles finis ; parties d'un ensemble fini ; principe d'induction totale, première forme (les variables étant du <u>type</u> des cardinaux finis ; ce sera donc une <u>règle</u>, avec un schéma de démonstration ; on l'appliquera pour les 25 relations suivantes ; l'axiome de l'infini permettra de donner plus tard un théorème). Image d'un fini (n'utilise pas Zorn ; c'est un cas particulier de qq. chose de plus général qui se démontre avec Zorn) ; réunion, produit, $\mathcal{P}(E)$; $a + n = b + n$ entraîne $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ unicité de $m-n$; "$a+n \leq b+n$" entraîne "$a \leq b$" ; si n est un entier et a un cardinal quelconque, on a $a=n$ ou $a < n$ ou $n < a$; l'intervalle $[0,n]$ a la puissance n . Principe d'induction totale (2-ème forme) ; tout ensemble de cardinaux finis a un plus petit élément. Réunion et produit de familles finies. L'axiome de l'infini arriverait ici. Définition par récurrence. Itérées d'une fonction ; récurrence limitée. Si X est fini et Y infini, il existe une application biunivoque de X dans Y . Division euclidienne ; numération ; analyse combinatoire. Ensembles dénombrables, produits. Suites.

Il faudra insérer, avant l'axiôme de l'infini, un nouveau n° "Ensembles finis et ensembles ordonnés" (Filtrants, réticulés, ordre total des ensembles finis est unique). D'où le plan :

n°1) Définitions, cardinaux finis (Ordre, cardinal plus petit qu'un cardinal fini est fini, principe d'induction première forme, quotients et images d'ensembles finis, $p+q$, pq, p^q et 2^q sont finis, $p_1 \cdot\cdot p_n \neq 0$, $\sum_i p_i$, $\prod_i p_i$; trichotomie entre a et n ; l'ensemble des cardinaux $< n$ est de puissance n).

n°2) Ensembles finis et ensembles ordonnés.

n°3) L'axiôme de l'infini.

n°4) Division euclidienne. Numération.

n°5) Analyse combinatoire.

n°6) Ensembles dénombrables.

§ 4 <u>Théorème de Zorn</u>.

p.238 : "soient E un ensemble ordonné, a un élément de E,.." (th.1)

"on conçoit ainsi l'existence..." (l.12 du bas)

p.239 : Trois conditions dans le th.1 ($a \in X$, pour tout $x \in X$...,et 2°); dire que A est bien ordonné.

On remontera la déf. de la chaine (p.241, haut ; notée A_a) avant le cor. (p.240) ; la réciproque de celui-ci passe en exerc.; ajouter le cor.: si toute partie bien ordonnée non vide de E possède une borne supérieure, il existe b tel que $f(b)=b$ (ce qui introduira la notion d'ensemble inductif) ; un exer. avec "majorée" .

Il faudra faire un laïus général relatif à "borne sup., filtrant, inductif pour la relation ($\subset$) ; dans le cas de "$\supset$" la borne sup. est l'intersection (début du n°2). Une prop., et des gros caractères pour les propriétés de caractère fini ; de même pour l'ex.3, p.242 ; celui-ci se simplifie en remarquant que la biunivocité est de caractère fini (graphe). Un rappel pour la prop.1, p.243, déjà démontrée.

A la p.244 on se servira de l'astuce suivante, due au cobaye Serre : soit (X_λ) une famille non vide de parties de E ; il existe un X de la famille tel que $\overline{\omega}(X_{\lambda_0}) \leqslant \overline{\omega}(X_\lambda)$ pour tout λ ; ceci montre à la fois la trichotomie et le fait que l'ensemble des cardinaux des parties de E (le "conclave") est bien ordonné (Démonstration : on choisit un X_0 fixe et on considère tous les systèmes (φ_λ) d'applications biunivoques de parties A_0 de X_0 dans des parties A_λ de X_λ, φ_λ appliquant A_0 sur A_λ ; on ordonne l'ensemble des systèmes (φ_λ) par prolongement, et on zornifie ; pour un système maximal on doit avoir $A_\lambda = X_\lambda$ pour au moins un indice λ). On dira en remarque qu'un ensemble infini est équipotent à un vrai sous-ensemble (faire glisser une partie dénombrable) ; le contraire caractérise les ensembles finis (on aura dit au § 3 que toute application biunivoque d'un ensemble fini dans lui-même est sûr).

p. 245 : "familles disjointes d'ensembles dénombrables" dans la prop.2 ; mieux expliquer le début de la démonstration.

p. 246 : Faire la prop.4 avec un ensemble dénombrable de cardinaux dont l'un au moins est infini ; dire "somme=borne sup." (ce qui fait rentrer le cor.1 dans la prop.4).

p. 247 : Une figure pour la prop. 5 ;

p. 248 : mêmes remarques pour la prop.6 que pour la prop.4 . Dire qu'il ne faut pas passer à la limite dans des inégalités de cardinaux.

§ 5 <u>Ensembles bien ordonnés</u>.

On commencera à la p.256. Vider (ou allèger) l'invraisemblable prop.1. Dégonfler les segments. Dire qu'un ensemble bien ordonné dans les deux sens est fini. Ceci, avec la théorie des ordinaux parallèle à celle des cardinaux, est livré à Chevalley.

CORPS COMMUTATIFS (In cauda, et corporibus, venenum!) (Livre II, chap.V, état 5).

Après de vives discussions ce chapitre est adopté et ne reviendra plus en Congrès. Pour contenter à la fois les "Galoisiens" et les "dérivateurs" on mettra un Leitfaden. Le Congrès, "Dieudonné and Samuel dissenting", voudrait rejeter les dérivations hors du Livre II ; Chevalley les admettrait à condition que les Algèbres de Lie y figurassent aussi ; question à règler en Avril en présence de Weil.

<u>Leitfaden</u>.

1- Caractéristique. Corps premier.

2- Extensions.

3- Extensions algèbriques.

4- Corps algèbriquement clos.

5- Extensions transcendantes.

6- Prolongement d'isomorphismes. Conjugués. Extensions normales.

7- Extensions séparables.

10- Théorie de Galois. 8- Eléments radiciels. Mac Lane.

11- Racines de l'unité
Corps finis.
Extensions cycliques.

9- Dérivations.

App.I - Fonctions symétriques

App.II- Extensions galoisiennes de degré infini.

On préviendra le lecteur, à la fois dans le Leitfaden et en note de pied, que la formule "Tr D=D.Tr" et le n° "extensions normales non séparables" du § 10 supposent connus les §§ 8 et 9.

Détail. § 1 : Le Congrès reconnaît le bien fondé des observations Weil, en ce qui concerne le rôle de la caractéristique ou de l'exposant caractéristique, suivant les propositions, mais refuse unanimement de s'encombrer de deux notations, le contexte devant suffire à distinguer les deux notions, vu qu'il n'y a aucune proposition du texte où caractéristique et exposant caractéristique interviennent simultanément.

On rajoute au § 1 les prop.2 et 3 de l'actuel § 9, et leurs corollaires.

§2 : On rajoute à la fin l'exerc. 1 en proposition (transitivité de la disjonction linéaire.

§3 : Immédiatement après la définition du polynome minimal, on remarque qu'une racine d'un tel polynome n'est pas nécessairement simple, et on donne le critère $f \in K[X^p]$ pour qu'il y ait une racine multiple, avec l'exemple de la p. 109 actuelle.

§5 : Le Congrès repousse la proposition Weil tendant à réintroduire l'équipotence des bases de transcendance infinies, dont l'utilité reste à démontrer.

§6 (nouveau) : Le Congrès repousse unanimement la nouvelle définition d'éléments conjugués proposée par Weil, cette définition ne se distinguant pas de celle d'extensions isomorphes, alors que l'intérêt des éléments conjugués est précisément dans leur relation avec les automorphismes de Ω (cf. corps des invariants). Ceci amène à remanier l'ordre des matières en bloquant en un nouveau § le dernier n° de l'actuel § 5, la définition des éléments conjugués, la prop.1 (et ses corollaires) de l'actuel § 6, et enfin toutes les propriétés élémentaires des extensions normales, qui se trouvent ainsi faites avant les extensions galoisiennes, comme le demande Weil.

§7 : nouveau plan : 1. Th.: Soit Ω un corps quelconque, $\mathcal{G}$ un ensemble d'endomorphismes de la structure de corps de Ω tel que : 1° l'automorphisme identique appartienne à $\mathcal{G}$; 2° si $u \in \mathcal{G}$ et $v \in \mathcal{G}$, $u \circ v \in \mathcal{G}$. Soit K le corps des invariants de $\mathcal{G}$. Pour qu'un sous-espace vectoriel V de Ω_K soit de dimension finie n sur K, il faut et il suffit que l'ensemble des restrictions à V des éléments de $\mathcal{G}$ soit de rang n sur Ω. 2. Définition de E séparable sur K : il existe un surcorps Ω de E tel que pour tout sous-espace V de E (sur K) de dimension finie n, l'ensemble des restrictions à V des K-endomorphismes de Ω soit de rang n sur Ω (propriété P_Ω). 3. Critère de séparabilité de E : E est linéairement disjoint sur K du corps des invariants de sa clôture algèbrique : alors tout surcorps algèbriquement clos Ω de E a la propriété P_Ω. 4. Définition des corps parfaits (identique au corps des invariants de sa cloture algèbrique = toute extension est séparable). Critère $K^p = K$, exemples. 5. Sous-extensions d'une extension séparable ; caractère fini de la séparabilité ; transitivité (par la transitivité de la disjonction linéaire). 6. Th. de Dedekind ; des isomorphismes dans Ω d'un sous-corps E de Ω sont linéairement indépendants. Conséquences : borne supérieure du nombre d'isomorphismes d'une extension de degré fini ; critère de séparabilité d'une telle extension. 7. Eléments algèbriques séparables. 8. Eléments primitifs (comme aux p. 110-112 de la rédaction actuelle) ; le Congrès repousse unanimement la proposition Weil tendant à rejeter le th. de l'élément primitif avec les corps finis.

§ 8 : 1. Eléments radiciels : prop.5 actuelle (du § 9), définition des éléments radiciels, on sait déjà (§ 6) qu'ils forment un corps parfait. Critère de Mac Lane et ses applications. Extensions radicielles ; facteur séparable du degré.

§ 9 : pratiquement inchangé (si on le conserve).

§10 : Nouvel ordre : 1. Définition et propriétés élémentaires des extensions galoisiennes (les extensions normales étant déjà faites, tout se réduit pratiquement au critère galoisienne = normale + séparable). 2. Sous-corps conjugués ; sous-corps galoisiens . 3. Composé d'une extension galoisienne et d'une extension quelconque, et première moitié du cor. de l'actuel th.3 (toutes ces propriétés ne font nullement intervenir le fait que les extensions galoisiennes considérées sont de degré fini). 4. Théorie de Galois (avec la seconde moitié du cor. du th.3). 5. Norme et trace. 6. Indépendance algèbrique des automorphismes. 7. Base normale.

§ 11 - <u>Racine de l'unité</u>. <u>Corps finis</u>. <u>Extensions cycliques</u>.

(Références à l'état 5 polycopié).

p.1 : p est la caract. (1.12 du bas) ; "Soit Ω un corps algt clos contenant P " (1.7 du bas) ; p est la caract. (1.5 du bas).

p.2 : On fera le th.1 par la méthode Weil (c'est tjs la caract.) : on a défini $\varphi(n)$ au chap.I ; un premier lemme " $\sum_{d/n} \varphi(d) = n$ " (intégration de Lebesgue!) ; puis "si G est un groupe non nécess. abélien d'ordre n tel que le nombre des éléments de G dont l'ordre divise d soit inférieur à d , alors G est cyclique d'ordre m " (2-ème lemme ; si x est d'ordre d , tous les g dont l'ordre divise d sont les x^r ; il y en a donc $\varphi(d)$; si G n'était pas cyclique il n'y aurait pas d'élément d'ordre n , et l'ordre de G serait $< n$ d'après le lemme 1). Ainsi le th.1 est à refondre avec la prop.1. Une remarque disant qu'il n'y a pas n racines de l'unité dans un corps quelconque.

p. 3 : Dans la prop.2 Ω est un corps alg. clos quelconque, et p est la caract.

p. 4 : p est encore la caract.; $R_n(K)$ est un abus de langage ; en bas on démontrera d'abord l'homom., puisque c'est un isom.

p. 5 : Le contre exemple de $\Phi_{12}(X)=X^4+X^2+1$ pour p=5 dans le texte ; dire que l'irréductibilité de $\Phi_n(X)$ est une c.n. et s. pour que l'ordre de Γ_o soit $\varphi(n)$. Un alinéa à la 1.2 du bas.

Corps finis : Rappeler (chap.II) que tout esp. vect. de dim. finie m sur un corps fini K à q éléments est fini et a q^m éléments ; alors un corps fini a p^n éléments ; ce sont les racines (p^n-1)-èmes de l'unité ; les éléments de la cloture alg. sont les racines de l'unité. Pour l'unicité une note de pied remarquera que deux corps ayant le même nombre d'éléments ont même caract. (si $p^n=q^m$, p et q étant premiers, on réduit mod. p , d'où q mult. de p). Le th.2 sera découpé en alinéas : p^n éléments, groupe additif, la prop.4 ; existence d'un corps fini pour tout p^n , c'est le corps et l'ensemble des racines de ..., corps des invt de $x \to x^q$. On commence alors un nouveau n° "Extensions finies d'un corps fini, avec le cor. p.8 en prop.; on dira que toute telle ext. est un F_{q^m} ; scinder la prop.5 en deux : groupe de Galois, et élément primitif (pour cette dernière prop. on donnera un énoncé général, corps fini ou infini, en vue des références).

Extension cycliques : Dire que tout sous-groupe de $Z/(n)$ est de la forme $dZ/(n)$ c'est-à-dire $Z/(n/d)$, et que le quotient corresp. est $Z/dZ = Z/(d)$. Donner (p.0) deux exemples : ext. de degré 2, corps des invts. d'un automorphisme ; dire dans l'énoncé du th.3 que $y^{1-\sigma}=y/y^{\sigma}$. Le cor. p.10 en prop., avec un énoncé décrivant mieux la situation ; deux alinéas (normes et traces) dans la démonstration. A la p.11 c'est la caract.; renvoyer au th.3 (à la 1.10) ; fondre la prop.6 et son cor.; commencer le n° par celle-ci (sans laïus), avec cependant la déf. d'une équat. binome auparavant ; dire (1.3 du bas) de quelle réciproque il s'agit.

Finir (p.13) par un Σ : çà ne marche pas si les racines n-èmes de l'unité ne sont pas dans K .

App.I - Fractions rationnelles symétriques.

p. 35 : Plus de "nous nous proposons..."(1.9 du bas) ; puis : "on a $N = E(X_1,\ldots,X_n)$; considérons ..."

p. 36 : Dire, dans la prop.1, "fraction rationnelle symétrique", et "$g(X_1,\ldots,X_n) = \varphi(s_1,\ldots,s_n)$ où $s_i = \ldots$" . Il suffit (dans les petites lettres) que le second membre soit défini. Remplacer les deux lignes qui suivent par "Il résulte aussi de ce que nous avons dit" . Séparer la dernière phrase de la prop.2 :"..; en outre N est une ext..."

p. 37 : Pour tout monôme M on formera la somme $\tau(M)$ des σM distinct. Les $\tau(M)$ forment alors une base des polynomes sym.; il suffit alors de calculer les $\tau(M)$ en fonction des s_i ; ceci sera la prop.3, que l'on démontrera par récurrence sur n (1-ère démonstration de V.d.W.) ; remarquer que les coeff. sont des entiers.

p. 38 : Le cor. devient alors une prop. à part, que l'on démontrera par homogénéité (remplacer $X_1,\ldots,X_n$ par $tX_1,\ldots,tX_n$).

P. 39 : Ajouter 1.5 du bas "ou encore, en multipliant par $f(Z)/Z^n$ ".

p. 40 : (1.4) "en ajoutant..., on obtient les identités (2)" . Ajouter l'inversion des formules de Newton en caract.0 (n p_i consécutives nulles).

App. II - Extensions galoisiennes de degré infini.

On montrera d'abord : soit E gal. sur K et G son groupe de Galois ; si G' est un sg. de G ayant K pour corps des invariants, G' induit sur un sous-corps de degré fini les mêmes autom. que G ; interprétation topologique : G' est dense dans G . On montrera ensuite que G est fermé dans E^E , puisqu'il est relativement compact dans E^E au moyen du th. d'Ascoli;

d'où sa compacité (pas besoin du fait que G est complet) ; le fait que G est totalement discontinu passe en exerc. Enfin la correspondance entre sous-corps et sous-groupes fermés, ainsi que la question des groupes quotients.

PLAN GENERAL.

A la demande générale, Dieudonné exécute son numéro habituel :

I. Ensembles

II. Algèbre

III. Topologie générale.

IV. Fonctions d'une variable réelle.

V. Différentielles et variétés différentiables.

VI. Espaces vectoriels topologiques.

VII. Intégration.

VIII. Distribution.

IX. Topologie algèbrique.

X. Fonctions analytiques.

XI. Groupes de Lie. Géomètrie différentielle.

Cartan, suivi par plusieurs membres du Congrès, voudrait placer le Livre sur les Différentielles après l'Intégration, afin de pouvoir y mettre la formule de Stokes. Dieudonné est violemment opposé à cette proposition : la formule de Stokes est trop étroitement liée à la Topologie algèbrique (notion de "bord", dualité entre homologie et cohomologie) pour être mise ailleurs. Il est entendu que la question sera soulevée au Congrès d'Avril, la décision devant être prise sous peu, vu l'état d'avancement des Livres VI et VII.

A LA MANIERE DE JACQUES PREVERT.

Ceux qui dénombrablent.
Ceux qui analysent.
Ceux qui illustrent Géomètrent.
Ceux qui extraient des suites.
Ceux qui savent couper des surfaces de Riemann.
Ceux qui prennent des bases.
Ceux qui calculent les déterminants.

Ceux qui écrivent des polynomes pour étudier les corps .
Ceux qui variétés virtuellent.
Ceux qui ont des dérivées discontinues.
Ceux qui ne prennent pas Gauss pour un mathématicien.
Ceux qui ont des idées directrices.
Ceux qui construisent mais ne zornifient pas.
Ceux qui n'excluent pas le tiers.
Ceux qui intuitionnent.
Ceux qui buridanisent.
Ceux qui basedemongent.
Ceux qui descriptivent.
Ceux qui ont la conique.
Ceux qui ontologisent.
Ceux qui regardent aux loops.

....
