Samuel

NBT 017 118

• LA TRIBU

(Bulletin oecuménique, apériodique et bourbachique)

COMPTE-RENDU du CONGRÈS de NANCY (9-13 Avril 1948)

Présents : Chabauty - Delsarte - Dieudonné - Godement - Roger - Samuel - Schwartz - Weil -

Malgré l'incertitude de la situation internationale, une note optimiste domina ce Congrès. Weil constata avec plaisir la convergence du processus bourbachique, et Dieudonné félicita à maintes reprises les congressistes de leur esprit constructif. Il est vrai que le "leader de l'opposition" et l'"avocat du diable" étaient outre-Atlantique. Toujours est-il qu'ayant bandé leurs processus mentaux les plus élémentaires, les congressistes ne tentèrent jamais de bouleverser tout l'édifice bourbachique, et réservèrent leur virulence à des discussions de points de détail, aisés à circonscrire. L'on fut ainsi étonné de se voir en avance sur l'horaire prévu ; et cette avance permit à Dieudonné, Schwartz et Weil de tapiriser le Congrès sur l'Intégration, les Variétés différentiables et la Topologie algébrique anticipant ainsi sur le travail du Congrès oecuménique de Juin. Les matinées furent consacrées au Livre I , les après-midis aux autres questions. L'hospitalité des Nancéiens, les cafés brésilien et américain de Dieudonné et Delsarte, et les promenades en commun, allièrent heureusement l'utile à l'agréable. On parvint à éviter qu'un jeu polonais de construction ne torpillât le Congrès, car l'Esprit du Maître veille, et saura déjouer les tentatives sournoises de certains, tendant à faire sombrer Bourbaki sur les écueils du jeu de Gô !

<u>Corps commutatifs</u> (Alg., chap.V). Weil accepte le projet d'Algèbre étroite, mais fait revenir le Congrès sur certaines expulsions décidées à Nöel : les bases séparantes (pour les extensions de type fini)

sont remises au § 7 , ainsi que le facteur inséparable du degré (pour les extensions algèbriques, il n'y a que 2 mots à en dire). Un nouveau n° (à la fin du § 8) traitera rapidement des extensions normales non séparables. Norme et trace seront définies au n° des fonctions symétriques (avec renvoi à la trace d'une matrice et à la définition générale pour les algèbres, qui sera donnée au chap.VII). Il est décidé que les séries formelles seront faites en Appendice au chap.IV, et qu'on s'en servira au chap.V pour démontrer les formules de Newton. On rassemble au § 9 , avec les racines de l'unité et les corps finis, un morceau d'extensions cycliques (th. de Hilbert-Lagrange) ; le § deviendra ainsi un § d'exemples. On renonce à faire (même en Appendice) la résolution des équations par radicaux, mais il faudra que la Note historique expose succinctement le lien entre cette question et la thérorie moderne des corps.

On adopte la proposition Chevalley, tendant à appeler polynomes en x (par abus de langage) les éléments de $K[x]$ lorsque x est transcendant sur K . On dira "p-radicielle" au lieu de "radicielle". Le mot "extension" est réservé à un surcorps muni de sa structure d'algèbre par rapport au sous-corps ; pour les anneaux, le mot "algèbre" suffit. Pour la définition des éléments algèbriques, la position Cartan-Samuel-Schwartz est adoptée. On restreindra la place donnée au grand corps Ω . Pas de calcul sur les polynomes cyclotomiques (on se borne à leur définition et au fait que leurs coefficients sont dans le corps premier).

<u>Espaces fonctionnels</u> (Top. gén., chap.X). On félicite les Illinois de leur bon travail, et on accepte leurs trois principes fondamentaux.

Au § 1, la topologie de E n'intervenant pas, on définira les structures uniformes pour un E ensemble quelconque, la topologie n'intervenant que dans les exemples (convergence compacte).

Les §§ 2-3 du plan des Illinois sont redécoupés en 3 §§ , comme suit :

§ 2 : Espaces de fonctions continues (le § 2 des Illinois jusqu'à l'équicontinuité exclue, plus le § 3 jusqu'à l'équicontinuité exclue).

§ 3 : Equicontinuité (la fin du § 2 des Illinois)

§ 4 : Ensembles compacts de fonctions continues (la fin du § 3 des Illinois).

Utiliser autant que possible un langage imagé ("une limite uniforme de fonctions continues est continue", "sur un ensemble équicontinu, la convergence simple équivaut à la convergence uniforme", etc.) ; traduire en français les $\mathcal{C}_u$, $\mathcal{F}_c$, etc. dans les énoncés ; n'user qu'avec modération des $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$.

Au § 2, donner l'exemple de l'espace des applications linéaires d'un Banach dans un autre, avec la convergence uniforme sur les boules (nécessaire pour les équations différentielles). Au § 4, l'actuel th.1 du § 3 devient un corollaire du th. d'Ascoli, appliqué à E rendu discret. La question des groupes compacts d'homéomorphismes reste en suspens, Weil ne se souvenant plus exactement du point en litige : il est décidé d'en référer à Cartan.

§ 5 : Approximation des fonctions continues sur un compact. On adopte la présentation de Stone : 1) caractérisation des fonctions continues qu'on peut approcher par les fonctions d'un ensemble réticulé de f. continues ; corollaire : th. de Dini ; 2) th. de Stone : si V est un espace vectoriel de f. continues tel que $1 \in V$, et que $f \in V$ entraîne $|f| \in V$, et si en outre V sépare deux points quelconques, V est dense

181

dans $\mathcal{C}(E)$; 3) th. de Weierstrass : approximation de $|x|$ dans $]-1, +1[$ par itération :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(x^2 - y_n^2)$$

les y_n vont en croissant, on applique le th. de Dini ; 4) conséquences des th. précédents : Urysohn dans les compacts, approximation des fonctions continues dans un produit (ne pas oublier le cas où la fonction s'annule dans un ensemble $A \times F$, on peut approcher par une somme de produits de fonctions de x et de fonctions de y, les fonctions de x s'annulent toutes dans A).

Passage aux fonctions à valeurs dans un normé par les partitions continues de l'unité.

Il est décidé que le chap. X ne reviendra plus devant le Congrès, devant être livré à l'impression en Juillet.

<u>Dictionnaire de Topologie</u>. Il est décidé de faire une introduction au Dictionnaire, où sera cité un texte de Lavoisier (voir l'Introduction à son Traité de Chimie) où il explique qu'il vaut mieux que personne ne comprenne rien pendant 10 ans à une terminologie nouvelle et cohérante, que d'être indéfiniment canulé par une terminologie aberrante. On expliquera que les mots étrangers dont la forme est voisine et le sens identique à celui des mots français correspondants seront omis (exemples : kompakt", "continuous"). Il est décidé qu'on n'insèrera pas les termes russes : il est probable en effet qu'un lexique mathématique anglo-russe sera bientôt publié en Amérique.

Le Dictionnaire ne devant plus revenir devant le Congrès, chacun est prié de transmettre ses observations de détail à ce sujet à Dieudonné, <u>avant le 1er Juillet</u> : passé cette date, les modifications ne pourront plus être insérées.

<u>Fascicule de résultats de Topologie</u> (<u>fiches d'essai</u>) . Le résultat de l'expérience décidée en Décembre est jugé favorable, et on décide de confier à Delsarte la rédaction de tout le fascicule suivant ces principes. Le style Samuel est jugé trop laiüsard, celui de Schwartz un peu sec, on penche vers un compromis du genre du fascicule de résultats des Ensembles. Pour être utile aux non spécialistes, il sera bon de faire un peu plus de laïus dans les premiers paragraphes (Filtres, limites, suites, voisinages, boules, ouverts, fermés).

<u>Logique et ensembles abstraits</u> (Livre I, Introduction et chap.I-II) Malgré le soin constant de chacun de ne pas faire de philosophie ("Philosophy is the systematic misuse of a language especially created for this purpose"), le Congrès fut souvent menacé d'enlisement. Dieudonné rappela à l'ordre les récalcitrants, et "ontologiste" fut l'injure suprême. On nota une éclatante conversion de Schwartz à la Dialectique.

<u>Introduction</u>. On constate que l'Introduction actuelle n'explique pas assez tous les détails de notre point de vue logique, et d'autre part s'étend inutilement sur des questions oiseuses.

Il est entendu que l'Introduction doit à la fois servir d'Introduction au Livre I et à tout Bourbaki. Il faut y insister sur le fait que, dans les chap.I-II du Livre I, nous voulons uniquement faire la <u>grammaire</u> des mathématiques et donner des règles qui permettent de vérifier qu'une démonstration est correcte ; il faut rester aussi neutres que possible sur le terrain philosophique. A ce propos, il faudra expliquer : 1° que nous ne cherchons nullement à bâtir un système logique qui pourrait servir à autre chose qu'aux mathématiques (et même qu'aux maths. de Bourbaki) ; 2° que nous admettons implicitement une fois pour toutes les hypothèses ("métaphysiques" si on veut) que suppose l'emploi du langage, et que nous faisons confiance au bon sens du lecteur sur ce point, jugeant inutile de répondre aux questions saugrenues sur ce que c'est que reconnaître si deux signes sont distincts, ce que c'est que remplacer un signe par un autre, etc. ; 3° que nous ne prenons aucun parti dans la question "mathématique et réalité" , laissée aux préférences de chacun. S'engager le moins possible dans les discussions concernant l'"existence" des "objets" dont s'occupe le mathématicien ou leur "nature" métaphysique (suivant en cela les observations Chevalley). Dire explicitement que nous nous désintéressons des querelles du début du siècle sur les ensembles et leurs paradoxes, et maintenir le point de vue de la rédaction actuelle sur l'inutilité des "démonstrations" préalables de non-contradiction : si une contradiction se rencontre un jour, on modifiera les axiomes en conséquence, et ce sera sans doute une source de grands progrès.

Il faudra aussi dans cette introduction faire ressortir la distinction entre les points de vue "naïf" et "formaliste" et expliquer que la rédaction des chap.I-II est faite de façon à faire glisser par paliers successifs du strict formalisme au langage naïf utilisé dans tout le reste du Traité.

La tâche difficile de rédiger à nouveau l'Introduction de manière à répondre à tous ces desiderata est confiée à Weil.

<u>Chapitre I (Logique)</u> : D'une manière générale, il faudra constamment insérer de petits laïus explicatifs, interprétations "naïves" et exemples de 3è espèce pour que les chap.I-II soient lisibles et que le lecteur se rende compte de ce qu'on fait.

§ 1 : formation des relations. n°1 : ne pas décrire encore les signes de séparation ; à propos des arguments, dire que le mathématicien peut constamment en introduire de nouveaux, et qu'en théorie il faudrait en utiliser une quantité considérable ; par abus de langage, on rend disponibles pour des démonstrations ou des successions de démonstrations des arguments déjà utilisés dans des démonstrations précédentes. Appeler $\forall$ et $\exists$ les quantificateurs universel et existentiel, mais non "signes transfinis" ; remplacer $\bar{R}$ par "non R" , et dire que "et", "ou", "non" sont des signes et non des mots lorsqu'ils entrent dans des relations. Une note de bas de page pour renvoyer au n° sur les signes abréviateurs en disant qu'on pourrait considèrer deux des 5 signes fondamentaux comme abréviateurs. Spécifier que remplacer un argument par un autre consiste à le remplacer dans toutes ses occurences.

n° 2 : Dire que les r elations sont des assemblages de signes parmi lesquels il y a des arguments, dont certains sont dits libres et d'autres liés ; puis donner les 5 schémas fondamentaux de formation (à partir de relations contenant ou non des signes abréviateurs), sans signe de remplacement, mais en utilisant comme signes de séparation les cadres proposés par Delsarte et acceptés par acclamation (bien entendu, ces cadres sont aussitôt remplacés par les parenthèses ordinaires pour raisons typographiques) ; on ne forme plus que des relations normales, et en outre on s'interdit de quantifier un argument déjà quantifié antérieurement (tabou inutile, mais conforme à la pratique ; Schwartz propose même de ne jamais quantifier 2 fois le même argument (exemple : $((\forall\ x)R$ et $(\exists\ x)S))$), ce qui serait un tabou gênant). On dit chaque fois quels sont les arguments libres de la relation obtenue par les schémas fondamentaux ; lorsqu'il n'y a pas

135

de signe abréviateur, ce sont les arguments qui ne figurent dans aucun signe quantificateur. Suppression des fantômes d'arguments (lettres grecques grasses), mais on dira en énonçant chaque règle pour des arguments x,y, etc. que la règle reste valable par substitution d'autres arguments à ceux qui sont explicités. Introduction des lettres de remplacement (pour les relations) après l'énoncé des règles de formation.

n° 3 : Il aura fallu remarquer dans l'Introduction qu'il n'y a pas de distinction essentielle entre la synonymie et l'équivalence : ce n'est qu'une question de commodité. Mettre les règles (s11) et (s12) au début ; au lieu de (s22) et (s23), dire qu'en remplaçant partout S par une relation synonyme on a une relation synonyme. Dire comment quand on ne peut former (R et S) (un argument libre dans l'une étant lié dans l'autre), on forme (R et S') en remplaçant S par une relation synonyme S' par application de (s1).

Alors le n° 4 (relations normales) disparaît.

n° 5 : supprimer les signes ($\forall$ x, y), etc. : ($\forall$ x)($\forall$ y) est aussi bien ; les autres signes abréviateurs introduits dans ce n° doivent venir avant $\longrightarrow$ et $\rightleftarrows$. Le Congrès se heurte aux graves objections Chevalley (qui semblent avoir été ignorées par tous les logiciens, cf. p.ex. Church) : lorsqu'une relation contient <u>plusieurs fois</u> le même signe abréviateur, il n'est pas sûr qu'en la "désabrégeant" de plusieurs façons différentes (suivant l'ordre dans lequel on remplace chacune des occurences du signe en question) on obtienne la même relation, ni même des relations dont on pourrait prouver qu'elles sont synonymes sans faire appel à la règle de synonymie liée à l'emploi du signe abréviateur considéré. Il semble au-dessus des forces humaines de tenter une telle démonstration pour tous les signes abréviateurs ; il faut donc admettre la possibilité de contradictions résultant d'un mauvais choix des signes abréviateurs, et faire confiance à la pratique des mathématiciens et à la constante révision de l'emploi de ces signes qu'elle suppose.

Le signe (x|y) devrait venir ici, mais Weil remarque que c'est un signe <u>métamathématique</u>, et ne peut donc être introduit que comme abus de langage, et en tout cas pas dans l'énoncé des règles. Noter ce signe (Sub x à y) et dire qu'il permute avec toutes les opérations logiques.

§ 2 : <u>relations vraies</u>. On adopte le projet Cartan : suppression du laïus initial ; dire seulement qu'on donne des règles permettant de qualifier de vraies certaines relations. Puis donner R ou $\overline{R}$, et ensuite les 6 règles fondamentales (r1) à (r6). Faire aussitôt après les conventions de langage de la p.20, et la distinction de la p.21 entre "si A est vraie, B est vraie" et "A entraîne B" ; puis donner les schémas (v2) à (v42) arrangés le mieux possible, en utilisant les mots "entraîne" et "équivalent" . Interprétations naïves en petits caractères (notamment pour la distinction de la p. 21). Démontrer les plus difficiles des schémas une fois qu'ils sont tous énoncés. Ajouter (s'8) (p.40).

§ 3 : <u>théories et axiomes</u>. L'emploi fait dans le texte du mot "théorie" est jugé abusif et non conforme à la pratique ; utiliser un autre mot, par exemple "sorite" . Une théorie sera formée de tous les sorites où on prend pour axiomes les axiomes de la théorie et un nombre quelconque d'axiomes introduisant des arguments typiques ; "vrai dans la théorie" signifiera "vrai dans un sorite de la théorie". On se donne le droit de quantifier typiquement plusieurs arguments libres d'une relation H ; les arguments de base sont ceux qu'on ne quantifie pas typiquement. Donner des exemples de 3è espèce. Dire ce qu'on entendra en intitulant un énoncé "théorème","proposition",etc.

Supprimer le "sans intérêt en Mathématique" de la p. 27 (ne pas faire de morale). Un exemple de 3è espèce pour la "non-contradiction relative" de deux théories. Faire un arbre généalogique des théories ("Qui genuit Bourbaki").

Chapitre II (Ensembles abstraits) :

§ 1 . Egalité ; symboles fonctionnels ; couplage. n° 1 : écrire les axiomes avec des cadres : (e1) rigoureusement d'abord, puis avec l'abus de langage des (Sub x à z) ; mettre (e'1) aussitôt après (e1). n°2 : donner des traductions naïves des schémas fondamentaux ; donner dès le début l'exemple de la relation d'égalité (qui reviendra pour les rel. fonct. biunivoques). Des exemples de 3è espèce pour le haut de la p. 42. L'introduction des symboles fonctionnels se heurte aux objections générales de Chevalley sur les signes abréviateurs ; exemple de symbole fonctionnel canulé : $f'_x(x,y)$. Le signe $(f_R|x)$ est un métasigne, qui ne sera employé que par abus de langage. n° 5 : donner un exemple du canular de la p. 49, lignes 4 à 7 .

On adopte la proposition Cartan de faire le couplage avant l'appartenance, et à la fin du § 1 . Donner les axiomes (E_{IV}), (E_V), (E_{VI}) avec leurs traductions en langage naïf ; puis on veut définir les fonctions $pr_1 z$ et $pr_2 z$ pour un couple z quelconque, et non plus seulement pour un z appartenant à un $E \times F$. Mais comme le point de vue naïf se refuse à considérer que n'importe quoi est un couple, on ne peut plus définir pr_1 et pr_2 comme des fonctions absolues. Samuel sauve la situation en remarquant qu'il suffit de définir pr_1 et pr_2 comme des fonctions typiques dans le "type des couples" (autrement dit, on quantifie typiquement z à partir de la relation $\circledast$ = z=(x,y)) ; appeler ici $pr_1 z$ et $pr_2 z$ les coordonnées de z (le mot " projection" étant, avant abus de langage, réservé aux parties). Donner les équivalences des p . 68-70 sur le passage d'une relation à 2 arguments à une relation à 1 seul argument "couple", et vice-versa.

§ 2 : Appartenance. La décision prise pour les couples amène le Congrès, au nom de la pratique des mathématiciens, à considèrer aussi que tout objet n'est pas nécessairement un ensemble, et par suite qu'on ne peut pas parler de $\mathfrak{P}$ (x) pour n'importe quel x , mais seulement définir cette fonction comme fonction typique, sur le type "ensembles" (c'est-à-dire quantifier typiquement x à partir de $\textcircled{H}$: $u \in x$) . Dieudonné craint que ce ne soit un tabou gênant (impossibilité de parler de $\mathfrak{P}(\emptyset)$!) et en outre éstime que ce n'est pas si conforme que ça à la pratique, puisqu'il est clair que tous les éléments explicités qu'on définira dans Bourbaki seront en réalité des ensembles (exemples : entiers = classes d'ensembles équipotents ; nombres réels = classes de filtres de Cauchy équivalents, etc.). On attendra la nouvelle rédaction pour prendre une décision définitive.

On admet que le signe abréviateur $\subset$ ne sera pas une source de canulars chevalleysques. Remarquer que $x \in \mathfrak{P}(x)$; exercice de Schwartz : si $\mathfrak{P}(x) = \mathfrak{P}(y)$, $x=y$.

Au lieu de "fonctionnaliser" , dire "passer au type supérieur" . Prendre comme symbole $\underline{E}(x \in y \mid R)$.

Au lieu de $(\forall\ x \in E)$, utiliser un signe plus correct, par exemple $(\forall_{x \in E}\ x)$ ou $(\forall\ x \mid x \in E)$.

Introduire avec les axiomes de l'appartenance l'axiome (E_{VIII}) ; p. 56, joindre ce qui est dit p.73 sur la partie de $E \times F$ définie par une relation. Supprimer la ligne 3 de la p.58 (pas de morale).

$\complement X$ est un abus de langage pour $\complement_E X$. Noter les formules $\underline{E}(R \text{ ou } S) = \underline{E}(R) \cup \underline{E}(S)$, $\underline{E}(R \text{ et } S) = \underline{E}(R) \cap \underline{E}(S)$. P.62, il s'agit d'une récurrence animale.

Pour les parties d'un sous-ensembles (p.64) remettre au point, et donner une preuve de non-contradiction relative ; supprimer le "on ne peut" (bas de la p. 64) .

Produit de 2 ensembles : utiliser le signe $Pr_1(Z)$ pour la projection d'une partie.

De manière générale, essayer d'abréger les démonstrations en ne mentionnant que le point crucial : "tout revient à démontrer que ..." Donner la démonstration de la prop.7 (p. 72) .

A partir du § 4, le Congrès se convainc que le reste du chapitre n'aura besoin que de retouches de détail, et en ajourne l'examen au moment où on examinera l'état 4 des §§ précédents.

<u>Engagements du Congrès</u> :

<u>Delsarte</u> : rédige le fascicule de résultats de Topologie (état 1)

<u>Dieudonné</u> : rédige en état 4 le chap.I et les 3 premiers §§ du chap.II des Ensèmbles.

<u>Samuel</u> : termine la rédaction état 4 des corps commutatifs.

<u>Weil</u> : rédige l'Introduction des Ensembles.
