struct. unif. $\mathcal{U}_i$, est la borne sup. des topologies déduites des $\mathcal{U}_i$. il faut réparer cet oubli au Chap.X (ou déjà au Chap.IX, à propos des écarts), et appliquer ici à la topologie de l'espace uniforme $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}}(E,F)$. Ce principe permettrait d'alléger des énoncés, ou tout au moins des démonstrations, relatifs à la topologie de la convergence compacte : on est chaque fois ramené au cas d'un espace compact et de la convergence uniforme. Ceci s'applique par ex., à la prop.7 - sur laquelle nous faisons d'ailleurs <u>toutes réserves</u> : la <u>bonne</u> caractérisation de la topologie de la convergence uniforme sur un espace compact est celle donnée au § 2 , corollaire de la prop.7 . Nous demanderons du reste que ce "corollaire" soit érigé en <u>théorème</u> ! La prop.7 du § 1 pourrait être reléguée en exercice.

<u>P. 11, prop.8</u>.- A la fin de la dém., il est casularesque de faire appel au théor. qui dit que tout sous-groupe ouvert est fermé : prouver directement, ce qui est immédiat, que $\mathcal{B}_0(E,F)$ est <u>fermé</u>.

<u>§ 2, n° 1</u> : rédaction de la remarque 1 qui suit la prop.2 : "dans l'énoncé de la prop.2, on a supposé le filtre $\Phi(x)$ convergent pour tout x ; il suffit de supposer $\Phi(x_0)$ con vergent ".

<u>§ 2, n°2</u> : il faut arriver le plus vite possible au coroll. de la prop.7, qui devient <u>théorème</u>. Voici des suggestions précises sur l'ordre à suivre. Le n° 1 prend fin après la prop.2 et les remarques qui la suivent. Le n°2 commence aussitôt, avec la prop.4, dont on abrégera au maximum la démonstration. Puis, uniquement pour espaces <u>compacts</u> : prop. 3, suivie de l'actuel corol. de la prop. 7, qui devient théorème et s'énonce ainsi : "soit E un espace compact, F un espace uniforme séparé, H une partie de l'ensemble des applications continues de E dans F ; sur H , la topologie de la convergence uniforme est la moins fine des topologies séparées telles que l'application $(u,x) \rightarrow u(x)$ de

de $H\times E$ dans F soit continue." On traduit ensuite ces résultats pour un E topol. quelconque et la convergence sur les parties compactes. Prendre la peine d'expliciter dans le cas d'un espace <u>localement compact</u>, et donner le corollaire (important) : "si H est un ensemble d'applications continues d'un E localement compact dans un F uniforme séparé, et si H est muni d'une topologie telle que $(u,x) \to u(x)$ soit une application continue de $H \times E$ dans F, et telle que H soit <u>compact</u>, alors cette topologie sur H est celle de la convergence compacte".
(Cela sert dans la théorie des noyaux de groupes de transformations). Annoncer l'étude des ensembles compacts pour la convergence compacte (§ suivant). - Maintenant, on peut <u>traduire</u> les résultats précédents dans le langage des applications d'espaces produits : viennent ici le corollaire de la prop.4, et la prop.5 qui n'a pas besoin de nouvelle démonstration.- Cette traduction pourrait faire l'objet d'un n° 3, pour décharger le n° 2.- Ainsi finit le § 2.

<u>§ 3, n°1</u> : supposer tout de suite que les ensembles de $\mathfrak{S}$ sont <u>fermés</u>.

<u>§ 3, n°2</u> : ligne 1 du n°, supprimer "autre".

<u>Remarque</u> suivant la prop.1 : au lieu de "la condition nécessaire que nous venons d'obtenir", écrire "l'équicontinuité de H relativement à toute partie $A \in \mathfrak{S}$".

<u>§ 3, n°3</u> : tâcher d'éclairer la lanterne le plus tôt possible : le lecteur se demande où l'on veut en venir. Dire, au moins pour le théor. 2, qu'on va s'intéresser à la convergence compacte.

<u>§ 3, n°4</u> : le théorème est-il d'Arzela ou d'Ascoli ?

<u>§ 3, n°5</u> : donner l'exemple : si E est un groupe topologique séparé, muni de sa structure uniforme gauche, et si F est un espace uniforme séparé, si enfin $x \to f(x)$ est une application uniformément continue de E dans F, alors les $x \to f(ax)$ forment une famille uniformément équicontinue.

§ 3, n° 6 : dire que le plus petit ensemble convexe contenant une famille équicontinue est équicontinu avec même module d'équicontinuité.
Idem pour les enveloppes supérieures et inférieures finies. Alors le corollaire de la prop. 7 se ramène immédiatement à la prop.2 .
oubli : pour la prop.2 du § 5, il faudrait faire la remarque explicite que les éléments de H sont des fonctions continues.
D'une manière générale, ce § 5 laisse une impression pénible, mais nous n'avons pas su faire mieux. Il faudrait pouvoir alléger, mais y a-t-il vraiment quelque chose en trop ? L'équicontinuité est-elle intéressante en soi, ou seulement dans la mesure où elle entraîne la compacité ?

Restent les n^{os} 7 et 8 relatifs aux groupes d'homéomorphismes.- Il nous semble qu'il y a 2 choses, l'équicontinuité et la compacité des groupes envisagés, et l'équicontinuité semble avoir un intérêt pour elle-même (prop.9), indépendamment des critères de compacité. D'autre part, pour chacune de ces questions, il y aurait deux points de vue : le point de vue global, le seul envisagé dans l'actuelle rédaction, et le point de vue local, dont il était question dans la rédaction antérieure Enfin, reste la question de savoir s'il y a intérêt à envisager autre chose que des groupes d'homéomorphismes, notamment au théorème 4 : quel est l'intérêt de ces groupes de permutations qui ne sont continues que sur les compacts ? Avez-vous des exemples précis en vue ?

Voilà beaucoup de questions, auxquelles nous ne voyons pas de réponse nette. CARTAN suggère qu'on substitue au théor. 4 le théorème suivant (formulé dans le cas d'homéomorphismes d'un espace localement compact) : " Soit G un groupe d'homéomorphismes d'un espace localement compact E . Si, lorsqu'on munit G de la topologie de la convergence compacte, il existe dans G un voisinage symétrique H de l'élément neutre qui soit relativement compact dans $\mathcal{C}_c(E,E)$, la topologie de G est compatible avec la structure de groupe, et G est sous-groupe partout dense d'un groupe $\overline{G}$ d'homéomorphismes de E, groupe qui est localement compact pour la topologie de la convergence compacte". Pour la démonstration, on montre que $u \circ v$ et $\overset{-1}{u}$ sont des applications continues de $G \times G$ (resp. G) dans G, uniformément continues sur $H \times H$ (resp. H) ; ces applications se prolongent en applications continues de $\overline{H} \times \overline{H}$ dans $\overline{G}$ (resp. de $\overline{H}$ dans $\overline{H}$), et on montre que $\overline{G}$ se compose des $u \circ v$, où $u \in \overline{H}$ et $v \in G$.

En conclusion, il y aurait lieu d'étudier une nouvelle rédaction des n^{os} sur les groupes d'homéomorphismes, avant de donner le manuscrit à l'impression.

Bien entendu, la prop. 11 tombe, puisque nous avons demandé une prop. analogue pour le cas d'un ensemble quelconque (par seulement un groupe) d'applications continues (cf. § 2, n°2).

§ 4 : approx. des fonctions continues numériques.

Dans l'hypothèse où ce § est maintenu au Ch. X (voir plus loin), il importe d'abord de ne pas traîner le boulet des applic. continues à valeurs dans un espace normé : ou on n'en parle qu'à la fin, ou, si on en parle au début, c'est pour les liquider immédiatement, sans cacher son jeu et sans attendre le corollaire 1 dont la démonstration est scurrile. Il faut tout de suite montrer que les partitions continues de l'unité permettent d'approcher les fonctions à valeurs dans F par des comb. linéaires (à coeff. dans F) de fonctions numériques. Après quoi on ne parlera plus que de ces dernières.

D'autre part, la lecture du § prouve sans conteste combien il serait commode de pouvoir parler de "partition subordonnée à un recouvrement ouvert fini". On demande donc à nouveau que la définition en soit donnée au chap. IX .

Enfin, quelles que soient les méthodes qu'on utilisera, il est infiniment désirable d'expliciter le "th. de Stone" sous la forme : "anneau de fonctions numériques contenant les constantes, et séparant les points de l'espace". Le plus souvent, c'est sous cette forme qu'on a à l'appliquer.

Question méthode : il est clair que <u>tous</u> les théor. d'approxim. de ce paragraphe sont des conséquences immédiates du th. de Stone ci-dessus y compris l'approximation des fonctions sur un produit ; par conséquent, si on pouvait démontrer directement, le plus vite possible, le th. de Stone, tout serait fini. Mais nous ne connaissons pas de démonstration qui ne fasse intervenir au moins un petit bout de Weierstrass, ne serait-ce que le développement en série de $(1-u)^{1/2}$. On est alors ramené à montrer que tout espace vectoriel V de fonctions continues numériques, <u>réticulé</u> ($f \in V$ entraîne $|f| \in V$), qui contient les constantes et sépare les points de l'espace (compact), est partout dense dans l'ensemble des fonctions cont. num.; ce qui se démontre avec les part. cont. de l'unité.

Mais cela nécessite aussi le "lemme de décomposition" dans un réticulé, ce qu'on peut considérer comme une raison pour rejeter cette manière de faire, ou au contraire comme un argument en faveur du lemme de décomposition, qui n'intervient pas seulement dans la théorie de l'intégration.

Si on se rallie au point de vue du rédacteur et qu'on mette à la base des th. d'appr. le th. de Weierstrass, alors on a besoin de démontrer à part l'approximation sur les produits (ce qui est inutile dans l'autre manière de faire, puisqu'elle résulte de Stone), et en outre il y a l'inconvénient esthétique d'avoir (pour démontrer la prop.3) à faire un prolongement d'Urysohn qui, après coup, ne sert ~~ax~~ à rien.

Reste la question de la méthode à employer pour démontrer Weierstrass. Ces questions de méthode avaient à peine été envisagées lors de l'examen de la précédente rédaction (état 3), qui était la première où l'on parlât de l'appr. des fonctions numériques. <u>Argument contre Bernstein</u> : c'est artificiel dans le contexte des probabilités, et cela n'"explique" pas la raison de l'approximation par les polynomes, qui réside, nous semble-t-il, dans le fait que, sur le groupe additif de la droite numérique, le produit de composition d'une fonction continue, nulle en dehors d'un compact, et d'un polynome est un polynome de même degré. L'approximation avec les polynomes-noyaux, qui donne en même temps l'approximation uniforme des dérivées quand celles-ci existent, pourrait fort bien être donnée dans le Livre élémentaire, et il apparaît finalement que c'est bien dans ce Livre que serait la vraie place du th. de Weierstrass.- Argument pour Bernstein précisément parce que c'est artificiel, c'est à sa place dans le Ch. X , où il est impossible de donner des idées générales sur la question, et où on doit se borner à arriver d'une manière ou d'une autre au résultat, puisque c'est ce résultat qu'on désire.

En conclusion, pourquoi désire-t-on tant obtenir ce résultat au Ch. X ? On a l'impression que c'est pour "rehausser l'intérêt du Chapitre" ! Ce qui nous paraît bien dans la ligne des Ch. IX et X , c'est l'approximation sur les espaces produits et l'utilisation des partitions continues de l'unité. Weierstrass ne peut arriver que par raccroc .

Nous posons donc encore une fois la question de savoir si Weierstrass doit être maintenu en Topologie générale. Et nous posons aussi la question du produit de composition et des noyaux sur la droite, pour le Livre élémentaire.

RÉPONSE de DIEUDONNÉ et WEIL

(24 mars 1947)

"Nous avons examiné soigneusement vos observations sur le chap.X de Topologie, qui nous ont paru dans l'ensemble très raisonnables et apportant de sérieuses améliorations à la rédaction actuelle. Voici les points où nous avons des remarques à faire (pour tous ceux mentionnés dans vos observations et sur lesquels nous ne revenons pas, nous acceptons purement et simplement votre point de vue).

1) § 1 , n°7. (espaces d'applications continues bornées dans un espace normé). Nous demandons que l'on démontre les prop.8 et 9 pour un espace F <u>métrique</u> et non seulement normé ; cela implique que l'on remette dans le chap.IX , après la définition du diamètre d'un ensemble, celle d'ensemble <u>borné</u> ; je sais bien que tu as toujours fait des objections à ce propos, mais nous ne voyons nullement pourquoi on passerait cette notion sous silence ; bien entendu, elle ne concerne que la structure d'espace <u>métrique</u> et non celle d'espace <u>métrisable</u>, mais elle n'est pas seule dans ce cas, et il peut avoir des cas en dehors des espaces vectoriels où elle a à intervenir (exemple : variété munie d'une métrique riemannienne) ; il n'y a donc aucune raison sérieuse à cet ostracisme.

2) Nous sommes d'accord sur votre nouveau plan du § 2 , sauf sur un point : la prop.3 n'a rien à voir avec la continuité de $(u,x) \rightarrow u(x)$, et doit donc rester au n° 1 ; d'ailleurs, le cor. de la prop.7, devenu théorème comme vous le désirez, suivra ainsi directement la prop.4 , ce qui est beaucoup plus satisfaisant que d'avoir en sandwich une proposition sur les filtres.

3) Je vais essayer de faire une nouvelle rédaction sur les groupes d'homéomorphismes qui satisfasse à vos desiderata. En ce qui concerne les groupes de permutations continues sur tous les compacts, naturellement ce genre de fonctions n'a d'intérêt que lorsque ce sont des homéomorphismes ; ce qui est intéressant, semble-t-il, c'est que pour les espaces métrisables, il suffit de savoir qu'une fonction est continue sur tout compact pour qu'elle soit continue partout ; c'est une remarque qui nous semble d'ailleurs mériter d'être dite dans le texte, au § 1 ; on pourra alors, pour les groupes compacts (ou localement compacts) d'homéomorphismes, conserver le point de vue du texte, en rappelant que dans les cas intéressants (espaces localement compacts ou métrisables) on n'obtient rien de plus que les homéomorphismes.

4) § sur l'approximation des fonctions numériques. En premier lieu, pourquoi le mettre là ? Parce qu'on ne voit pas très bien où le mettre ailleurs ; si on reléguait Weierstrass au Livre élémentaire, où mettrait-on Stone et ses conséquences? Nous avons été très frappés par votre remarque que Stone entraîne tout le reste, ce qui augmente encore la nécessité de conserver toutes ces questions bien liées ; nous demandons donc que le paragraphe soit conservé.

En second lieu vient la question de méthode pour la démonstration de Weierstrass. Nous sommes tout à fait d'accord que la dém. de Bernstein n'est pas une "bonne" démonstration ; mais personnellement, je considère que jusqu'ici on ne connaît aucune bonne démonstration de Weierstrass, car je ne serai satisfait que lorsque j'aurai vu une démonstration qui donne en même temps une caractérisation de tous les corps topologiques où le th. est vrai ; jusqu'ici, aucune ne répond à ce critère. J'ajoute que Weil ne partage pas ma façon de voir sur ce point, car il estime qu'en raison de la différence de structure topologique de R et des corps p-adiques, le th. de Weierstrass n'est pas en réalité le même théorème dans les deux cas.

Quoi qu'il en soit, il est bien clair que dans toutes les démonstrations actuelles, ce qui joue un rôle essentiel c'est l'ordre sur R ; votre théorème "pré-Stone" sur les ensembles de fonctions réticulés ne fait que renforcer cette opinion. J'ai donc essayé de tirer parti de vos idées en faisant encore plus nettement graviter tout le § autour de cette notion, ce qui lui donne une ossature un peu plus solide. Voici ce que je propose, Weil étant entièrement d'accord :

1°- Théorème de Dini : convergence uniforme d'un ensemble filtrant de fonctions continues sur un compact, qui converge simplement vers une fonction continue (immédiat par Borel-Lebesgue). Il est absurde de relèguer ce théorème dans l'intégration, alors qu'il peut rendre de nombreux services ailleurs.

2°- Votre théorème "pré-Stone" : si V est un espace vectoriel de fonctions continues sur un compact E, tel que $f \in V$ entraîne $|f| \in V$ contenant les constantes et séparant les points de l'espace, V est partout dense dans l'espace des fonctions cont. numériques.

Démonstration : a) pour tout point $x \in E$ et tout voisinage ouvert U de x, il existe une fonction $f \in V$, compris entre 0 et 1, égale à +1 en x et à 0 dans $\complement U$; pour cela, pour chaque $y \in \complement U$, soit g_y une fonction de V égale à +1 en x et à -1 en y, et soit W_y un voisinage de y ou $g_y(z) \leqslant -\frac{1}{2}$; on recouvre $\complement U$ par un nombre fini de W_y, on considère l'enveloppe inférieure g de 1 et des g_y ; la fonction $f = g^+$ répond à la question. b) Cela étant, pour toute fonction continue $u \geqslant 0$ dans E et tout $x \in E$, il existe une fonction $f_x \in V$, positive, $\leqslant u$ et telle que $f_x(x) \geqslant u(x)-\varepsilon$, d'après a) ; donc u est l'enveloppe supérieure de l'ensemble des $f \in V$ qui sont $\geqslant 0$ et $\leqslant u$; c'est aussi la limite simple de l'ensemble filtrant formé des enveloppes supérieures d'un nombre fini des f ; donc, d'après Dini, u est limite uniforme de fonctions de V (tu vois ainsi qu'il n'intervient plus ni partitions de l'unité, ni lemme de décomposition !).

3°- Passage du "pré-Stone" au th. de Stone, ce qui exige seulement qu'on démontre l'approximation de $|x|$ par des polynomes dans tout intervalle compact. Je commence par remarquer que si on sait approcher $|x|$ dans un intervalle compact I à ε près par une fonction rationnelle P/Q, on saura aussi l'approcher par un polynome ; car, dans I, Q a un minimum $\lambda > 0$; si μ est son maximum, on écrit

$1/Q = \frac{1}{\mu}(1-(1-\frac{1}{\mu}Q))^{-1}$, et on a $1-\frac{1}{\mu}Q \leqslant 1-\frac{\lambda}{\mu}$, donc la progression géomètrique permet d'approcher arbitrairement $1/Q$ par un polynome. En second lieu, on a $\sqrt{\varepsilon^2+x^2} - |x| \leqslant \varepsilon$ uniformément ; il suffit donc d'approcher $\sqrt{\varepsilon^2+x^2}$ par des fonctions rationnelles. Si $y = \sqrt{\varepsilon^2+x^2} - \varepsilon$, on a $y = \frac{x^2}{2\varepsilon+y}$; posant $y_0=0$, et par récurrence, $y_n = \frac{x^2}{2\varepsilon + y_{n-1}}$ (fractions continues), la suite des y_{2n} est croisante et majorée par les y_{2n+1} , donc converge vers la racine positive de $z = \frac{x^2}{2\varepsilon + \frac{x^2}{2\varepsilon+z}}$, qui n'est autre que y ; comme les y_{2n} sont continues et convergent vers une fonction continue y , elles convergent uniformément dans tout compact (Dini), d'où le théorème. Tu observeras que non seulement c'est plus élémentaire que la dém. de Lebesgue (puisque ce dernier doit supposer connue la convergence uniforme du dév. de $(1-x)^{1/2}$ dans l'intervalle de convergence fermé, ce qui n'est nullement évident), mais c'est beaucoup plus intuitif que Bernstein, et ne demande même aucune astuce de dérivation de polynomes comme chez ce dernier.

4°) Conséquences de Stones : approximation des fonctions dans les produits (on peut tout de suite prendre les produits infinis).

5°) Passage des fonctions numériques aux fonctions à valeurs dans un normé, par les partitions de l'unité ; en particulier, fonctions complexes.
