NBT n°003 52

La Tribu n°8

DECISIONS DU 3ème CONGRES DE CLERMONT (5-14 Août 1942)

LIVRE I . Reste provisoirement en sommeil ; Dieudonné fera tirer et distribuer son monstre logique .

LIVRE II . Chapitre II : Nouveau plan :

Par.1 : Modules et espaces vectoriels .
Par.2 : Fonctions linéaires ; dualité .
Par.3 : Matrices .
Par.4 : Produits tensoriels et tenseurs .
Par.5 : Algèbres .

Détail : Par.1 : Définition des modules ; notation multiplicative à gauche et à droite ; notation typographique : lettres grecques pour opérateurs , latines pour les éléments . Passage à l'anneau opposé ; homothéties ; restriction du domaine d'opérateurs à un sous-anneau . Exemples : en particulier , l'anneau considéré comme module à gauche (resp. à droite) sur lui-même , est noté A_g (resp. A_d).

Axiome (M_{IV}) : les modules qui y satisfont sont dits unitaires . Définition des espaces vectoriels ; exemples .

Annulateurs : 1) d'une partie ; 2) d'un élément ; 3) de tout le module ; module normal associé. Caractéristique d'un anneau comme cas particulier .

Sous-modules; définitions et exemples .

Modules quotients ; exemples .

Modules produits ; exemple : produits A_g^I .

Sous-module engendré : 1) par un élément ; 2) par une réunion de sous-modules : définition de la somme d'une famille de sous-modules ; 3) cas général : définition des combinaisons linéaires .

Somme directe d'une famille de sous-modules ; composantes ; isomorphie avec un sous-module du produit ; sous-modules supplémentaires . Associativité . Systèmes libres ; bases ; bases régulières . Cas des espaces vectoriels .

Modules simples . Modules complètement réductibles; th. 1 et th.2 (théorème d'échange) : 2 énoncés , 1 démonstration . Corollaires . Th.3 déjà démontré au chap.I. Cas des espaces vectoriels ; dans le cas de la base finie , 2ème dém. du th. d'échange par récurrence , d'où la résolution "par substitutions successives" des équations linéaires . Relations entre un système libre par rapport à un corps et par rapport à un sous-corps .

Par.2 : Fonctions linéaires . Définition : propriétés générales (cas particuliers des prop. des représentations) Cas des espaces vectoriels : définition du rang . Applications linéaires : dans une somme directe , dans un produit , d'une somme directe dans une somme directe. Anneau des endomorphismes d'un module .

Dualité . Définition d'une forme linéaire , structure de module à droite du dual . Notation $\langle x,x' \rangle$; forme linéaire définie sur le dual par $\langle x,x' \rangle$. Exemples de duals . Orthogonalité. Dual d'un module quotient . Dual d'une somme directe : 1) cas général , isomorphie avec le produit des duals ; 2) cas fini , XXX somme directe des XXXXX sous-modules orthogonaux . Dual d'un sous-module : un mot sur le cas général , cas où le sous-module a un supplémentaire .

53

Dualité dans les espaces vectoriels ; 2 théorèmes sur l'orthogonalité : $A^{\urcorner\urcorner}=A$ pour tout sous-espace de E , $A'^{\urcorner\urcorner}=A'$ pour tout sous-espace de dimension finie de E' (commencer par le cas des hyperplans , puis procéder par récurrence). Bases biorthogonales , rattachées au dual d'une somme directe .

Transposée d'une application linéaire u : cas général, cas des espaces vectoriels : théorème $u(E)=\overset{-1}{u}{}^{*}(0)^{\urcorner}$ dans le second cas . Application aux équations linéaires .

<u>Par.3</u> : Matrices semi-finies sur un anneau avec élément unité: correspondance avec les applications linéaires de $A^{(I)}$ dans $A^{(J)}$, rapportées aux bases canoniques . Somme , produit par un scalaire , produit . Matrices carrées correspondant aux endomorphismes .

Matrice correspondant à une application linéaire rapportée à deux bases <u>régulières finies</u> . Changement de bases : équivalence et similitude des matrices . Rang dans le cas vectoriel . Transposée : égalité des rangs de 2 matrices transposées dans le cas des espaces vectoriels .

<u>Par.4</u> :

Fonctions bilinéaires sur un produit de deux modules E,F sur un anneau commutatif (modules unitaires). Formes bilinéaires : définition , elles forment un module (les questions de rang , représentation par une matrice , changement de bases , sont en principe réservées pour le chap.VIII sur les formes quadratiques , sauf si Ehresmann trouve des généralisations intéressantes pour les formes multilinéaires).

Produit tensoriel de E et F pour les espaces vectoriels seulement :méthode Cartan . On prend l'espace B des formes bilinéaires , son dual B' : à tout couple $x\in E, y\in F$ on fait correspondre la forme linéaire $f\to f(x,y)$ sur B , qu'on note x.y ; le produit tensoriel $E\otimes F$ est la partie de B' engendrée par les x.y . Th.1 : si les x_i et les y_j sont indépendants , les $x_i.y_j$ le sont . Th.2 : existence et unicité du prolongement d'une fonction bilinéaire sur $E\otimes F$ en une fonction linéaire sur $E\otimes F$. Corollaire : le dual de $E\otimes F$ est B . Cas fini ; cas où E et F sont identiques au corps. Dans le cas fini , isomorphie canonique du dual de $E\otimes F$ avec le produit tensoriel des duals de E et F . Produit tensoriel d'applications linéaires ; transposée d'un tel produit . Définition des tenseurs covariants et contravariants ; applications tensorielles : cas de la somme , du produit , de la contraction . Produit tensoriel de p espaces vectoriels, formes multilinéaires.

<u>Par.5</u> : Définition d'une algèbre , écriture des axiomes; restriction des opérateurs à un sous-anneau . Bases d'une algèbre : on se borne aux bases régulières . Sous-algèbre=sous-anneau (renvoi au chap.I). Idéaux , représentations ,quotients . Produits et sommes directes.Produits tensoriels pour des algèbres sur des corps. Définition des bimodules : on ramène leur structure à celle d'un module sur un produit tensoriel . Exemples d'algèbres : anneau des matrices (sur un corps ou un anneau?) extensions quadratiques (y compris les nombres duaux) , quaternions , algèbre d'un monoïde (ensemble muni d'une loi associative); le fourbi général ~~xxx~~ relatif à l'algèbre tensorielle est foutu dehors.

<u>Par.3</u> : Définition de la topologie des espaces projectifs réels et complexes . L'espace projectif est séparé ; il ~~XXXXX~~ est compact et connexe (par le quotient de la sphère) Variétés linéaires projectives ; elles sont homéomorphes aux P^p . Le complémentaire d'un hyperplan projectif dans P^n est homéomorphe à R^n. Immersion de R^n dans P^n; prolongement des fractions rationnelles d'une variable réelle ou complexe à la droite projective par adjonction du point à l'infini. Immersion de l'espace projectif réel dans l'espace projectif complexe .

<u>Par.4</u> : Sous-groupes discrets de R^n; leur structure (2 théorèmes : le 2-ème donne la décomposition d'un sous-groupe discret K en l'intersection $V \cap K$ d'un sous-espace V de rang egal à $V \cap K$, et un sous-groupe discret dans un supplémentaire de V ; le 1er th. est le cas particulier où $V=\{0\}$; 2 énoncés , 1 démonstration). Sous-groupesd'un groupe discret (rappel des diviseurs élémentaires) . Structure des sous-groupes fermés . Relations entre deux sous-groupes fermés dont l'un contient l'autre . Application aux théorèmes de Kronecker . Groupes quotients de R^n . Fonctions périodiques dans R^n . Sous-groupes et groupes quotients de T^n. Représentations continues de R^n dans un groupe topologique (une telle représentation est déterminée par ses valeurs dans un voisinage de 0) ; représentations de R^n dans R^m ; groupes localement isomorphes à R^n .

55

Appendice 1 : 2ème démonstration de l'invariance du nombre de dimensions , pour le cas fini et le cas infini.
Appendice 2 : méthode Whitney pour le produit tensoriel de modules quelconques ; essayer de simplifier (en considérant ~~XX~~ l'ensemble de toutes les fonctions bilinéaires , dont on a le droit de parler ; $\sum_i x_i y_i$ et $\sum_j x_j y_j$ sont équivalents si $\sum_i f(x_i, y_i) = \sum_j f(x_j, y_j)$ pour toute fonction bilinéaire f .)
Question au concours : invariance du nombre d'éléments d'une base régulière finie ; on peut l'établir lorsque l'anneau d'opérateurs n'a pas de diviseur de 0 , en utilisant le th. de Remak-Krull-Schmidt.

Chapitre III . On y remet les puissances symétriques et antisymétriques , expulsées du chap.II . Essayer de se débarrasser du canular de la caractéristique (quand la caractéristique n'est pas divisible par p), la puissance tensorielle p-ième est somme directe de ~~XX~~ l'espace des tenseurs symétriques et de l'espace des tenseurs annulés par toute forme multilinéaire symétrique).Cartan se charge de la mise au point de tout le chapitre (y compris les déterminants).

Autres chapitres (IV,V,VI) non discutés . Dieudonné continue la rédaction des chap.VII,VIII et IX

LIVRE III . Chapitre VI : Nouveau plan :
Par.1 : Topologie de R^n et de ses variétés linéaires .
Par.2 : Métrique euclidienne ; boules et sphères .
Par.3 : Topologie des espaces projectifs .
Par.4 : Sous-groupes et groupes quotients du groupe additif de R^n .
(N-B. On a adopté ce plan pour éviter autant que possible le mélange des structures , l'ordre étant le même sensiblement que pour le cas n=1 traité aux chap.IV et V : topologie , puis groupes. La topologie des groupes linéaires est renvoyée au chap.VIII , où elle sera définie comme exemple de topologie de groupe de transformations continues ; on en dira alors le moins possible , en particulier les questions de connexion seront renvoyées à la Topologie combinatoire).

Détail : Par.1 : Définition de l'espace numérique , des pavés ; l'espace est connexe et localement connexe ; parties relativement compactes . Le groupe additif est complet. Structure d'espace vectoriel . Continuité des applications affines . Les variétés linéaires sont homéomorphes aux R^p . Demi-droites (les demi-espaces à p dimensions rejetés en Top.combinatoire); segments . Puissance de R^n. L'espace C^n et sa structure vectorielle complexe .
Par.2 : Distance euclidienne , propriétés . Cosinus de l'angle de 2 demi-droites ; orthogonalité . Définition de la structure uniforme et de la topologie par la distance . Boule ouverte , boule fermée , sphère.
Projection centrale , projection stéréographique ; homéomorphies qui en résultent .

…omorphie de la boule
…ate de R^n

Chapitre VII : examiné très superficiellement , ne semble pas devoir subir de modifications très profondes ; renvoyé à l'an prochain pour examen détaillé .
Chapitre VIII : non discuté . Il faudra sans doute y mettre pas mal de choses sur la topologie des groupes de transformations, peut-être (si possible) la théorie de la dualité de Pontrjagin; Charles voudrait aussi qu'on y parle de la notion de déformation continue (?) .

Revêtements . Le Congrès a entendu avec intérêt le rapport d'Ehresmann sur la question . L'accord est fait sur les points essentiels ; tout le monde , sauf Ehresmann , est d'avis que les chaînes ne jouent là-dedans qu'un rôle secondaire , et doivent être balancées chaque fois qu'on peut s'en passer ; en particulier , le principe de monodromie se fait de la façon la plus facile par la méthode Cartan . Il apparaît , à propos des revêtements , qu'il y a intérêt à étendre la théorie au cas où les espaces sont pourvus d'une "structure locale" plus riche que la topologie (p.ex. les variétés différentiables), ce qui conduit à insérer dans le même chapitre la définition de ces structures (cela se fait de façon très courte et facile dans le cas général) ; un cas particulier de la théorie des revêtements envisagée dans ce sens donne précisément le principe de monodromie .
Ehresmann promet , dans le plus bref délai (1er Décembre 1942) une rédaction avec structures locales , principe de monodromie , revêtements d'un groupe topologique . Il met aussi à l'étude la question des revêtements du point de vue algébrique (rapports avec la théorie des groupes libres et des groupes définis par des générateurs et des relations).

LIVRE IV : Fonctions d'une variable réelle (théorie élémentaire).

Plan général : Chapitre I : Dérivées , primitives , intégrales.
Chapitre II: Fonctions convexes et fonctions élémentaires usuelles .
Chapitre III : Etude locale des fonctions .
Appendice I : Fonction Γ.
Appendice II: Corps de Hardy .

Détail : Chapitre I . Par.1 : Fonctions définies dans R , à valeurs dans un vectoriel normé complet (la norme aura été définie à titre d'exemple , dans le chapitre VII du Livre III (Espaces métriques)) . Préliminaires ; langage géométrique (pour les fonctions réelles) . Dérivée (à droite): calcul formel sur les dérivées (pour le produit , faire le cas plus général d'une fonctionnelle bilinéaire , à valeurs dans un normé) ; quelques mots sur l'extension au cas où la variable est complexe (ou plus généralement dans un corps valué ?). Théorème de la moyenne (si $\|f'\| \leq M.g'$, où g est une fonction réelle croissante, $\|f(b)-f(a)\| \leq M.(g(b)-g(a))$).
Par.2 : Primitives .Définition : fonction continue ayant une dérivée à droite donnée . Existence pour les limites uniformes de fonctions en escalier . Terminologie : intégrale définie . Notation . Propriétés de linéarité (traduction des propriétés de la dérivée). Intégrales impropres ; propriétés de linéarité ; convergence absolue , principe de comparaison (sans critères précis); lien avec

les séries à termes décroissants .

Changement de variable et intégration par parties (ces dernières pour une fonction bilinéaire) : traduction des propriétés des dérivées ; cas propre et impropre .

<u>Par.3</u> : Dérixées d'ordre supérieur . Intégration par parties générale . Formule de Taylor (utiliser la forme ci-dessus de la formule de la moyenne pour avoir le meilleur résultat) ; mettre le reste sous forme intégrale dans le cas où c'est possible.

ces Cartan
en exercice

<u>Par.4</u> : Fonctions dépendant d'un paramètre (à valeurs dans un espace filtré quelconque). Rappel de la convergence uniforme. Convergence uniforme des dérivées , des primitives et intégrales impropres . Convergence normale. Continuité par rapport au paramètre, pour une intégrale impropre . Pour le cas d'un paramètre réel ou complexe , dérivation sous le signe $\int$.

<u>Chapitre II</u> : <u>Par.1</u> : Fonctions convexes d'<u>une</u> variable réelle (à peu près le par.1 du chap.II des "Techniques élémentaires"). Hölder et Minkowski rejetés en exercices (on les fera plus tard pour l'intégrale).

<u>Par.2</u> : Fonctions exponentielle et logarithme ; fonctions circulaires . Dérivées de ces fonctions (par les fonctions convexes); choix des unités : e et π . Définition de e^z pour z complexe (comme homomorphisme particulier de C sur le groupe multiplicatif C^*) et de log(1+z) pour z petit ,
(en petites lettres , appliquer le principe de monodromie pour définir log z partout); dérivée de e^{ax} , a complexe, x réel . Ensuite les trucs taupinaux sur x^α , fonctions circulaires réciproques , exponentielles et logarithmes itérés ; exemples d'intégrales impropres .

<u>Par.3</u> : Application au calcul des primitives se ramenant aux fonctions rationnelles .

<u>Chapitre III</u> : Comparaison de deux fonctions sur un ensemble filtré , à valeurs >0 . Notations O et o réintégrées avec précautions convenables (s'il y a plusieurs variables , on met en indice les variables qui bougent , comme pour la notation des limites) ; on conserve aussi les symboles de Hardy . Fonctions de comparaison : on se borne aux fonctions $x^\alpha(\log x)^\beta e^{P(x)}$ (en petites lettres les cas où interviennent des log. itérés). Développements asymptotiques ; cas des développements ordinaires . Calcul sur les développements asymptotiques : somme, produit, fonction composée , fonction réciproque ; dérivation dans le cas ordinaire (avec précautions) ; primitives (règle de L'Hospital). Règles de convergence des séries , produits infinis et intégrales.

<u>Appendice I</u> : en gros , suivre Artin .

<u>Appendice II</u> : suivre le chap.IV des "Techniques".

Delsarte , dans un moment d'enthousiasme , et malgré le poids de l'imminente quarantaine , promet pour le 1er Janvier 1943 une rédaction quasi-définitive.

<u>LIVRE V</u> . Ehresmann promet de diffuser son cours de l'année , pour servir au débrouillage de la question , ainsi qu'un rapport sur les diverses méthodes actuellement en

usage .

LIVRE VII . On envisage de rédiger cette année la partie locale, comprenant : différentielles d'une application d'un espace normé dans un espace normé , équations différentielles du point de vue local (théorème d'existence , cas réel) équations différentielles linéaires , formes différentielles (point de vue local) et calcul diff. extérieur , systèmes complètement intégrables (point de vue local). Ehresmann diffusera son cours sur les variétés différentiables pour servir de base aux discussions ultérieures .

LIVRE VIII . Le Congrès a entendu 3 rapports très complets de Cartan sur la fabrication des mesures de Radon , les mesures k-dimensionnelles et les intégrales baroques de fonctions à valeurs dans un normé quelcônque . Ces rapports n'arrivent pas à ranimer l'enthousiasme sur la question , et aucun point de vue unificateur n'apparaît encore , qui rendrait possible une rédaction d'ensemble (Delsarte ayant définitivement abandonné , accablé sous le poids des ans).

LIVRE IX . Cartan rédige , en collaboration avec Lelong , un bouquin sur les fonctions analytiques de plusieurs variables , qui deviendra le noyau du futur Livre de Bourbaki sur la question .

Nouveau plan de la Première Partie .

LIVRE I : Ensembles .
LIVRE II : Algèbre .
LIVRE III : Topologie générale .
LIVRE IV : Fonctions d'une variable réelle (théorie élémentaire).
LIVRE V : Topologie combinatoire .
LIVRE VI : Espaces vectoriels topologiques .
LIVRE VII: Calcul différentiel (y compris variétés différentiables).
LIVRE VIII: Calcul intégral (y compris intégration des formes diff.)
LIVRE IX : Fonctions analytiques .

ENGAGEMENTS DU CONGRES DE CLERMONT (14 Août 1942).

CARTAN : 1) Rédaction définitive de la mesure des angles , pour le 15 Septembre 1942 .

1 bis) Dépliant d'Algèbre

2) Rapport sur les différentielles d'ordre supérieur pour le 1er Janvier 1943

3) Mise au point du chap.III d'Algèbre pour le 1er Juin 1943

CHABAUTY : Rapport sur la théorie moderne des fonctions algébriques d'une variable et des courbes algébriques , pour le 1er Juin 1943 .

DELSARTE : Rédaction définitive du Livre IV (Fonctions d'une variable réelle , théorie élémentaire) pour le 15 Janvier 1943 .

EHRESMANN : Rédaction sur les revêtements pour le 1er Décembre 1942

Cours complet de Topologie combinatoire , pour le 1er Février 1943

Cours sur les variétés différentiables , pour le 1er Juillet 1943 .

DIEUDONNE : Tout le reste , au fur et à mesure .