NBT 006 314

La Tribu n° 5

CONGRES DE CLERMONT (7-10 Décembre 1940).

<u>LIVRE I</u> . Retrouvé miraculeusement dans les papiers de de Possel. On envisage la publication des chap.III,IV,V , déjà discutés et qui devraient ~~aboutir~~ après une nouvelle rédaction et une discussion en Congrès . En principe , il est entendu que Dieudonné fera cette rédaction après avoir fini l'Algèbre . Ne pas oublier d'y insérer l'Analyse combinatoire (le moins possible).

<u>LIVRE II</u> : <u>ALGEBRE</u> . Rédaction Dieudonné du ch.I ~~démembrée~~ foutue . Weil promet une nouvelle rédaction, avec le plan suivant :

§ 1 . Définition des lois internes . Formules d'associativité et commutativité .(prévoir lois non définies partout, cf. groupoïdes, Fastringe, etc)

§ 2 . Définition des lois externes . Distributivité .

§ 3 . Structures algébriques (plusieurs lois externes ou internes) . Principe de dédoublement des lois internes (loi interne opposée , 2 lois externes associées en prenant un autre exemplaire de l'ensemble comme domaine d'opérateurs). Parties stables . Quotients . Principe de permanence des relations par passage au quotient . Représentations . Produits .

§ 4 . Elément unité . Eléments réguliers . Eléments inversibles. (…tuellement …ire de …ite après § 1)

§ 5 . Groupes à opérateurs (abstraits) . Jordan-Hölder (voir Zassenhaus). Groupes abéliens à opérateurs .

§ 6 . Groupes de transformations (en particulier , groupe conservant une structure , par extension convenable à un ensemble de l'échelle des types).

Weil répartira au mieux le reste du chapitre dans les paragraphes suivants (anneaux , corps , éventuellement modules et systèmes hypercomplexes (pour ces derniers - sur un anneau - on adopte le terme d'<u>algèbre</u>)) . Mettre les entiers rationnels avec les deux lois de composition et l'ordre le plus tôt possible. (revoir Mégarédaction Ensembles). Insister sur l'anneau d'endomorphismes d'un groupe abélien .

Terminologie:	Groupe	Anneau
	Module	Algèbre.

Prolongement des structures commutatives (th. de Chevalley) par opérateurs sur une partie variable du truc à compléter (idée Weil pour leçon d'Agrèg.).

<u>Chapitres suivants</u> : Plan Dieudonné adopté en principe .

Desidarata divers : au chap.III , nombres de Clifford (2^n unités).

En Appendice au chap. VI : Théorie de Galois pour ~~corps~~ extensions infinies (Weil donnera des tuyaux , le mémoire essentiel est celui de Krull , cité dans Herbrand, Corps infinis)

Exemples intéressants dans les premiers paragraphes : Algèbres booléiennes , produit $N \times N$/. Le passage d'une loi interne à la loi opposée par composition avec la symétrie canonique dans $E \times E$. Pour le dédoublement de l'ensemble E ,(afin de passer d'une loi interne aux lois externes associées), on se réserve le droit de ne pas le faire par abus de langage quand c'est sans danger .

§ congruences multiplicatives

LIVRE III . TOPOLOGIE . On décide la publication , pour 1941 , des chap. III , IV , V (ancien VI) et VI (ancien V) ; les deux premiers* devant être discutés en Congrès à Pâques , les deux autres** en Juillet ; Dieudonné se charge des rédactions .

* = fasc. 2
** = fasc. 3

Chapitre III : Plan actuel adopté . Modifications de détail suivantes :

§ 1 . Rappeler que + est commutatif sauf indication formelle .
Noter que axb et axa^{-1} donnent des groupes d'homéomorphismes .
Meilleur contre exemple pour AB non fermé ??
Avec définition de l'isomorphisme , rappeler la définition générale d'un automorphisme de structure .
Dans la condition pour que f soit isomorphisme , intervertir 2° et 3° .
Etudier l'isomorphisme local : dans quels cas la condition 1° entraîne-t-elle 2° (peut-être des conditions de connexion); en tout cas , la remarque qui suit la déf. passe en proposition .

§ 2 . La remarque qui précède la prop.2 devient une proposition; si H n'est pas fermé , $\bar{H} \cap \complement H$ est partout dense dans $\bar{H}$.
La prop.9 est remontée avant la prop.5 et devient théorème
La remarque à la suite de la prop.9 devient corollaire .
Rédiger autrement la remarque avec 2 qui suit la déf.1 : "le mot homéomorphisme se rapportant uniquement à la structure topologique , un homéomorphisme f..."
Dans la remarque après le th.2 , intervertir compact et discret .
La remarque qui précède la prop.11 en exercice .

§ 3 . Dans la prop.2 , remplacer "uniformément continues" par "isomorphismes".
Après la prop.2 , dire que les automorphismes intérieurs sont des automorphismes de la structure uniforme .
Remarque 2 après prop.6 : voir si le caractère "biunivoque dans" ou "sur" ne se conserve pas par prolongement lorsque f est un homomorphisme .

Dans la structure uniforme produit , dire que la structure uniforme est unique pour le produit d'un abélien et d'un compact .

Les précompacts et les bornés sont vidés (év^t exercices).

Le th. sur les localement compacts (prop.11) , à la suite de la définition des groupes complets .

A la suite du th.1 , signaler que les adhérences des voisinages de e dans G forment un syst. fond. de voisinages de e dans $\hat{G}$.

§ 4 .Remplacer la prop.7 , scurrile , par une remarque à la suite de la déf.1 . Terminologie : "a une somme" et "sommable" synonymes

Dans la remarque finale , faire un renvoi au chap.IV ($\overline{R}$).

Quelques mots sur les ~~séries~~ à la fin du § ,

suite de s_H suivant un filtre plus fin

§ 5 . Plan nouveau : Anneau topologique~~s~~ . Définition ; propriétés élémentaires . Complétion par le th. sur les formes bilinéaires .

Corps topologiques . Définition ; propriétés élémentaires . Distinction des 3 structures uniformes .

L'anneau complété est un corps si $x \to x^{-1}$ applique tout filtre de Cauchy (additif) non adhérent à 0 sur un filtre de Cauchy (additif) . La condition (KT_{II}) de Cartan est rejetée en exercices .

Remarquer que pour tous les corps qu'on verra , les structures uniformes multiplicatives sont complètes si la structure uniforme l'est (localement compacts).

Appendice . Livré à Weil pour révision .

Chapitre IV . Nouveau plan : § 1 . Définition des réels . § 2 : Topologie de R . § 3 : Corps des réels. § 4 : Droite achevée. § 5 : Limites de fonctions numériques . § 6 : Fonctions numériques continues et semi-continues . § 7 ; Développement usuels des réels .

Les laius sur les groupes ordonnés et les diverses caractérisations de R par l'ordre (ancien § 1 et prop.2 du § 1 du chap.VI , avec les autres caractérisations chères à Cartan) , en Appendice à la fin du chap.V (voir plus bas).

Détail : § 1 . Q est ordonné (rappel de l'Algèbre) . Topologie de Q (compatible avec le groupe).Complétion de Q : nombres réels .

37

Prolongement de l'ordre ; invariance par translation ; topo-logie de R définie par les intervalles . Fonctions x^+, x^- , $|x$ longueur ; structure uniforme additive .

§ 2 . R engendré par un voisinage quelconque de l'unité (Archi-mède) . Borel-Lebesgue et caractérisation des compacts dans R . Borne supérieure . Parties connexes de R . Homéo-morphismes des intervalles .

§ 3 . Prolongement de $1/x$. Groupe mult. produit de 2 groupes. Formation d'homéomorphismes (à l'aide de $1/x$) ; 3 sortes d'intervalles non homéomorphes deux à deux . Définition de $x^{1/n}$. Somme d'une infinité de nombres réels . Critère d'existence (convergence absolue). Une infinité dénombrable seulement peut être $\neq 0$. Sommes partielles bornées . Inégalités ($x_n \leq y_n$ entraîne $\sum x_n \leq \sum y_n$).

Produitsinfinis ; équivalence de la convergence de $\prod(1+x_n)$ avec celle de $\sum x_n$ (majorer $\prod_p^q(1+x_n)$ par $\sum s^n$, où s est la somme des x_n considérés , supposés ≥ 0).

§ 4 . Droite achevée : transport des structures ...ques, unif. et d'ordre de $[-1,+1]$ à l'ensemble formé de R et de deux nouveaux éléments, par une fonction coïncidant avec un homéomorphisme de ~~XXXXX~~ $]-1,+1[$ sur R, dans cet intervalle ouvert . Opérations dans $\bar{R}$ Sommes et produits infinis dans $\bar{R}$ (termin. : sommable dans $\bar{R}$)

§ 5 . Fonctions numériques . 2 théorèmes fondamentaux : 1° $f \leq g$ entraîne $\lim f \leq \lim g$. 2° Toute fonction croissante dans un filtrant a une limite .

Borne supérieure : propriétés . Enveloppe supérieure synonyme de borne supérieure dans le filtrant achevé des fonctions numériques . Limite supérieure ; propriétés

§ 6 . Deux théorèmes de Weierstrass . Fonctions semi-continues (en remarque : continuité pour la topologie gauche ; en exer-cice : x+y continue pour cette topologie , mais non x-y). Propriétés des semi-continues (suivre papier Weil).

Après le corollaire du th.5 , mettre en remarque que la réci-proque est vraie dans les complètement réguliers , avec ren-voi au chap.VII .

§ 7 . On conserve la suite (d_n) avec $d_{n+1} \equiv 0 \pmod{d_n}$. En exercices : développements n!-adiques périodiques .

Chapitre V . § 1 . Plan : Automorphismes et automorphismes locaux de R ; unicité lorsque $\varphi(1)=a\neq 0$ donné . Sous-groupes fermés . Application au th. de Kronecker (2 démonstrations , une quali-tative , l'autre par tiroirs). Groupes quotients ; fonct. périodiques. Topologie

de T ; dès la définition , dire entre astérisques que T est homéomorphe au cercle . Sous-groupes et groupes quotients de T .
Groupes localement isomorphes à R : isomorphes à R ou T s'ils sont connexes . Homomorphismes de R sur T . Automorphismes de T .

§ 2 : On commence par considérer un espace E , avec un homéomorphisme φ de E sur le segment $[0,1]$ et une loi de composition $(x,y) \to xy$, définie pour x et y assez voisins de ω ($\varphi(\omega)=0$) , satisfaisant à : $x(yz)=(xy)z$; $x\omega=\omega x=x$; $xy=xz$ ou ~~xz~~ $yx=zx$ entraînent $y=z$; xy continue . On montre qu'il existe un homéomorphisme ψ de V (voisinage convenable de ω) sur $[0,1]$ tel que $\psi(xy)=\psi(x)+\psi(y)$. Plusieurs étapes : 1) définition et invariance par translation,de l'ordre sur V ; 2) archimédien ; 3) xy commutatif dans V ; 4) définition de ψ par le procédé Cartan (existence de $x^{1/q}$ dans E).
Application immédiate au th. sur les groupes à 1 paramètre .
§ 3 : Dire en remarque qu'on choisira e dans le Livre V , par la condition $\lim_{x \to 0} (a^x-1)/x=1$.
§ 4 : Ne pas parler de "plan de Gauss" ni de "module" d'un nombre complexe .

mmes et produits
dans C. Voir
h. de Riemann-
witz – P. Lévy

Introduction de C en remarquant que R est un corps réel maximal au sens de l'Algèbre .
Pour démontrer que U est connexe , démontrer que C^* est connexe par la ligne brisée .
Am(z) est défini comme l'homomorphisme canonique de C^* sur C^*/R^*_+ ce groupe quotient noté additivement . Les ½-droites sont les classes d'équivalence suivant R^*_+ . Angle de deux demi-droites défini comme Am(z/z').
Définir $e(x)$ ($=e^{2\pi ix}$) ; formules fondamentales pour e(x) . Puis définition de $e_a(x)=e(x/a)$, $\sin_a$ et $\cos_a$; pas de formules trigonométriques à part $\cos^2+\sin^2=1$. Changement d'unité ; unités usuelles (choix du radian fait par la condition $\lim_{x \to 0} (e(x/a)-1)/ix=1$ dans le Livre V).
<u>Appendice</u> . Le but est de démontrer le <u>théorème des grandeurs</u> , d'où découlent toutes les caractérisations de R , et cela avec le moins de développements possibles sur la notion tératopologique de <u>groupe ordonné</u>(au sens de l'ancienne rédaction) .
Partir des axiomes : 1) E est totalement ordonné ; 2) il y a dans

E une loi associative xy ayant un élément unité ω ; 3) $x \leq y$ entraî ne l'existence de z et z' tels que $y=zx=xz'$; 4) $x \leq y$ est équivalent à $xz \leq yz$ et $zx \leq zy$; 5) axiome d'Archimède : quels que soient x et y il existe n tel que $x^n \leq y < x^{n+1}$ $(x \neq 0)$.

Avec cela , démontrer que E est isomorphe à un semi-groupe de nombres $\geqslant 0$ (ne pas compléter , utiliser $\rho(x,y)/\rho(x,y_0)$).

Si on enlève l'axiome 3) , pour avoir une isomorphie de E avec un ensemble, stable pour l'addition , de nombres $\geqslant 0$, l'axiome d'Archimède ne suffit plus , il faut un axiome plus fort (vraisemblablement l'axiome suivant , d'"Archimède-Weil" : quels que soient x,y,z tels que $y < x$, il existe n tel que $x^n > y^n z$).

<u>Chapitre VI</u> . § 1 : p.3 , dire qu'une application linéaire de R^n dans R^m est continue , puis la réciproque . Abréger les laîus d'Algèbre . Supprimer le corollaire du th.1 .

Nomenclature : droite , plan (2 dimensions) , variété linéaire à p dimensions , hyperplan (n-1 dim.) .

§ 2 . D'abord , automorphismes et automorphismes locaux de R^n. Introduire les variétés linéaires à p dim. et les sous-groupes discrets , comme exemples de sous-groupes fermés . Une somme directe de deux tels groupes peut être ramenée , par un automorphisme de tout l'espace , à la forme , $R^p \times Z^q$. Th.1 : Tout sous-groupe discret est engendré par un système libre de p points ; donner 2 démonstrations (voir papier Weil). Th.2 : Tout sous-groupe fermé peut être ramené à la forme $R^p \times Z^q$ par un automorphisme de R^n .

...à M. Rüwzy ...ès d'Oslo (?) ...otes sur les ...ules dans R^n.

Application au th. de Kronecker (dém. qualitative , en considérant l'adhérence d'un sous-groupe ; dém. quantitative , par tiroirs , en exercice).

Groupes quotients ; dire que T^n est obtenu par identification des faces d'un pavé . Fonctions périodiques . Sous-groupes fermés et groupes quotients de T^n . Dualité de Pontrjagin pour les groupes élémentaires .

§ 3 . Dire que la distance euclidienne définit la structure uniforme de R^n .

Dans les notations $P^n(R)$, $P^n(C)$, laisser tomber R et C lorsque cela n'a pas d'inconvénient .

Après la définition de P^n , dans l'ordre : quotient de la sphère , connexion , séparation (par la prop.4 du chap.I), compacité , localement euclidien . Dire que P^n n'est pas homéomorphe à T^n (renvoi à la Top.combinatoire).

Traiter simultanément , dans ,les §§ 1,4 et 5 , 40

le cas réel et le cas complexe (dans le § 1 , C^n formera la 2^e partie du paragraphe , en notant sa structure vectorielle différente).

Exercice au § 4 : xy et x+y ne peuvent se prolonger par continuité à $P^1 \times P^1$.

Les espaces des variétés linéaires sont vidés complètement .

§ 5 . Topologie du groupe linéaire et du groupe projectif (réel et complexe) : localement compact , localement euclidien , connexion. Groupe orthogonal et groupe unitaire : compacité immédiate par les équations entre éléments des matrices ; localement euclidien par la repr. de Cayley , idem pour la connexion (utiliser la prop.1 du § 11 du chap.I)).

Quaternions ; forment un corps topologique ; le groupe multiplicatif isomorphe à $S^3 \times R_+^*$. Son quotient par R_+^* recouvre deux fois le groupe orthogonal de R^3 , ce dernier est isomorphe à P^3.

Exercices : Torus vulgaris à 2 dimensions . Isomorphisme de P^2 dans R^4 . Propriétés du groupe orthogonal à 4 dimensions (non simple) . Espaces projectifs ~~XX~~ sur le corps des quaternions . Groupe symplectique (laissant invariante une forme hermitienne quaternionique ; voir Ehresmann).

Addendum : méthode Weil pour la convergence de $\prod(1+x_n)$, x_n complexes . Soit P un produit partiel , S la somme partielle correspondante , tous les x_n considérés étant dans un même quadrant (diviser en 4 quadrants); soit S' la somme des valeurs absolues des x_n ; on a $S' \leqslant 2|S|$ et

$$|P-1-S| \leqslant S'^2/(1-S') \quad \text{si } S' < 1$$

Donc d'abord, si la série converge, de même le produit. Réciproque: il résulte des inégalités que, si P-1 est très petit et si $|S| \leqslant 1/4$, S est très petit (du même ordre que P-1). En allant assez loin dans la série, et appliquant successivement aux sommes partielles de 1 terme (nécess. très petites), 2, 3, ... termes, il s'ensuit qu'elles sont toutes petites.

LIVRE V . Devrait pouvoir être publié après une lecture détaillée en Congrès , et une nouvelle rédaction . On suggère les additions suivantes :

Dérivées partielles et interversion des dérivations et des primitives . Dérivation sous le signe $\int$; dérivation d'une série . Au chap.II , un § sur les corps convexes dans R^n . Un appendice sur la fonction Γ d'après le livre d'Artin .

<u>LIVRE VI : Intégration</u> . Delsarte se charge de rédiger les chapitres qui sont au point : intégrale élémentaire , espaces et anneaux de Riesz avec la théorie Weil et le th. de Lebesgue-Nikodym , complétion par rapport à une seule intégrale , intégrales de Radon , mesure de Haar . Le reste demeure confié à Cartan, pour débrouillage des points obscurs . Cartan continue par ailleurs à étudier des horologies .

<u>LIVRES VII ET VIII: Topologie combinatoire et différentielles</u> . Weil poursuit ses méditations sur le sujet .

<u>LIVRE X : Fonctions analytiques</u> . Confié à Ehresmann, pour rédaction de la partie locale , de la Topologie Bourbachica III (retrouvée miraculeusement) et de ses applications (en collaboration avec de Possel).

<u>Post-scriptum</u> . Les fauteurs de désordre qui ont introduit la notation N' dans Bourbaki n'ayant heureusement abouti qu'à un succès nettement localisé (limité aux pp.5, 14, 54, 87, 96 de la Topologie fasc.1) sont colmatés, rejetés à la mer et vomis. La notation est désormais remplacée par Z.