LA TRIBU NON NUMÉROTÉE

COTE HCT 001

TEXTE DÉCISIONS DU 1ER CONGRÈS DE LIFFRÉ
10-18/IX/1943

FONDS HENRI CARTAN

NOMBRE DE PAGES NUMÉRISÉES 15

NOMBRE DE FEUILLES PRISES EN COMPTE 8

DÉCISIONS DU 1er CONGRÈS DE LIFFRÉ (10-18 Septembre 1943)

LIVRE II (Algèbre). <u>Chapitre II</u> (Algèbre linéaire) .Le plan de Clermont est légèrement modifié , le § sur les produits tensoriels et tenseurs étant rejeté au chap.III .

§ 1 : Modules et espaces vectoriels

§ 2 : Fonctions linéaires ; dualité .

§ 3 : Matrices .

§ 4 : Algèbres .

<u>Détail</u> : § 1 : la rédaction faite d'après le plan de Clermont est adoptée dans son ensemble , à de petites modifications de détail près. On y ajoute : 1° une remarque sur l'assimilation de tout groupe à opérateurs abélien à un module , ce qui dispense d'étudier les groupes XXX abéliens à opérateurs généraux ; 2° la proposition que toute somme de sous-modules est isomorphe à un quotient de leur somme directe .

§ 2 : <u>Plan remanié</u> : Fonctions linéaires ; définition , propriétés générales . Cas des espaces vectoriels : rang .Applications linéaires d'un module quotient , d'une somme directe (dans n'importe quel module); en petits caractères , applications linéaires dans unesomme directe . Endomorphismes.

Dualité . Définition d'une forme linéaire , structure de module à droite du dual. Exemples de duals . Forme bilinéaire fondamentale, définition du bidual . Orthogonalité . Dual d'un quotient . Dual d'une somme directe : 1) cas général , isomorphie avec le produit des duals (en particulier formes coordonnées); 2) cas fini , somme directe des sous-modules orthogonaux à la somme de n-1 des sous-modules composants . Bases duales dans le cas d'une base régulière finie , isomorphie avec le bidual .

Dualité dans les espaces vectoriels . Sous-espaces vectoriels maximaux (hyperplans) ; leur caractérisation par les formes linéaires . XXX Th.1 : si un sous-espace a un supplémentaire à p dimensions , son dual est à p dimensions , si un sous-espace a p dimensions,son XXX dual a un supplémentaire à p XX dimensions . Th.2 : application au cas des espaces de dimension finie . Th.3 : tout sous-espace vectoriel est intersection des sous-espaces maximaux qui le contiennent . Th.4: toute forme linéaire qui s'annule sur l'intersection d'un nombre <u>fini</u> d'hyperplans est combinaison linéaire des premiers membres des équations de ces hyperplans (se servir de la prop.: si p formes sont linéairement indépendantes , on peut choisir une base de façon que ce soient des formes coordonnées).

Equations linéaires : on se borne à un nombre fini d'équations scalaires sur un module . Condition nécessaire immédiate : elle est suffisante dans le cas des espaces vectoriels ; dans ce dernier cas, dimension du supplémentaire de l'ensemble des solutions (par la prop. servant au th.4). ~~Restriction~~ Cas où les coefficients et les seconds membres sont dans un sous-corps.

Transposée d'une application linéaire : définitions et propriétés générales, définition de la contragrédiente. Transposée d'une application <u>sur</u>=isomorphisme <u>dans</u> ; réciproque dans le cas des espaces vectoriels ; traduction en équations linéaires . Th.5: le dual de $u(E)$ est isomorphe à $u^*(F')$; en particulier, égalité des rangs de u et u^* dans le cas fini .

Applications semi-linéaires (très bref).

§ 3 : <u>Plan remanié</u> : On ne considère que des modules à <u>droite</u> : quand on tombe sur un module à gauche , on décrète que c'est un module à droite sur l'anneau opposé .

Définition abstraite des matrices sur un anneau : structure de bimodule sur leur ensemble . On se borne ensuite aux anneaux ayant un élément unité . Correspondance entre applications linéaires de $A^{(L)}$ dans $A^{(M)}$ et matrices semi-finies par colonnes : la colonne d'indice λ étant image par l'application linéaire de l'élément e_λ de la base canonique . Produit de deux matrices . Matrices carrées .

Identification d'un vecteur $x=(\xi_{\lambda 1})$ avec l'application linéaire $\alpha \to x\alpha$; la matrice correspondante est la matrice à une colonne $(\xi_{\lambda 1})$ qu'on note x par abus de langage . La matrice à une ligne correspondant à une forme linéaire x' se note x' par un abus de langage analogue : $x'=(\xi'_{1\lambda})$ .La valeur de la forme linéaire $x'(x)$ est le scalaire $x'.x=\sum_\lambda \xi'_{1\lambda}\xi_{\lambda 1}$.

Transposition (cas fini): on considère les duaux comme modules à droite sur l'anneau opposé . La matrice $\underline{A}(u^*)$ est la transposée de $\underline{A}(u)$, mais ses éléments appartiennent à l'anneau opposé .

Matrices sur un corps : égalité des rangs de deux matrices transposées , condition pour qu'une matrice carrée soit inversible .Condition de compatibilité d'un système d'équations linéaires par le rang des matrices .

Changement de base : matrice de passage , matrice contragrédiente pour la base duale , changement de coordonnées . Matrices équivalentes , cas d'un corps . Matrices semblables .

§ 4 (ancien § 5) : <u>inchangé</u> , à part la suppression des produits tensoriels d'algèbres , reportés au chap.III .

<u>Chapitre III</u> : <u>Algèbre multilinéaire</u> .

Nouveau plan du chapitre :

§ 1 : Produits tensoriels et tenseurs .
§ 2 : Produits tensoriels d'algèbres .
§ 3 : Tenseurs symétriques et tenseurs antisymétriques .
§ 4 : Algèbre extérieure .
§ 5 : Déterminants .
§ 6 : Dualité dans l'algèbre extérieure .

Détail : § 1 : Fonctions multilinéaires sur un produit de n modules qu'on supposera unitaires (sur un anneau A commutatif); formes multilinéaires .

Produit tensoriel de deux modules E et F ; méthode Whitney , 3e édition Cartan : définition par une propriété caractéristique assurant l'unicité à une isomorphie près : c'est un module M tel qu'il existe une application bilinéaire $(x,y) \to x \otimes y$ ou simplement xy ~~telle que toute fonction bi-~~ de $E \times F$ sur une partie de M engendrant M , telle que toute fonction bilinéaire sur $E \times F$ soit de la forme $(x,y) \to g(x \otimes y)$, g linéaire sur M . Existence : on prend la somme directe $E^{(F)}$, et on passe au quotient par un sous-module convenable .

Isomorphie de $E \otimes F$ et de $F \otimes E$; produits $A \otimes E$ et $A \otimes A$. Produits tensoriel de deux sommes directes ; cas des bases régulières , base régulière de $E \otimes F$. Produit $(E/M) \otimes (F/N)$ en petits caractères .

Extension au produit tensoriel de n modules (même méthode). Associativité ; ~~généralisations des th~~ produit de sommes directes (séns démonstration).

Produit tensoriel d'applications linéaires (traduction en matrices) ; composition de deux produits tensoriels d'applications linéaires . Produits tensoriels de formes linéaires , correspondance avec les formes multilinéaires . Dualité pour les bases régulières finies .

Tenseurs . Puissance tensorielle de E : ses éléments sont appelés tenseurs contravariants ; puissance tensorielle du dual E': ses éléments sont appelés tenseurs covariants . Produit tensoriel de ces deux puissances tensorielles : tenseurs mixtes . Structure d'espace tensoriel : tout automorphisme de E définit un automorphisme de l'espace des tenseurs mixtes ; d'où loi de composition externe sur cet espace , en plus de la structure d'espace vectoriel .Sous-espaces tensoriels , applications tensorielles (représentations pour la structure tensorielle); exemples: produit , contraction .Traduction avec les bases .

§ 2 : Produit tensoriel de deux algèbres E et F sur A : le produit $(x \otimes y)(x' \otimes y')$ est $(xx') \otimes (yy')$. Rang de $E \otimes F$ (cas où A est un corps). Produit tensoriel de composées directes . Cas où A est un

~~corps~~

corps et où E et F ont des éléments unités : identification de E et F avec deux sous-algèbres permutables de $E\otimes F$, telles que $E\cap F=A$; identification de $x\otimes y$ avec le produit dans $E\otimes F$; le centre de $E\otimes F$ est le produit tensoriel des centres de E et F .

Application aux bimodules : assimilation à un module sur un produit tensoriel .

Extension de l'anneau d'opérateurs ~~ann~~ A d'une algèbre ~~de~~ E sur A : B étant une extension commutative de A , on définit sur $B\otimes E$ une structure d'algèbre par rapport à B : $t(x\otimes y)=(tx)\otimes y$.

Exemples : produit tensoriel de deux algèbres de matrices ; l'algèbre du produit $S\times T$ de deux monoïdes est le produit tensoriel des algèbres des monoïdes S et T .

§ 3 : Groupe d'automorphismes de la puissance tensorielle n-ème $E^{\textcircled{n}}$ d'un module E , correspondant au groupe des permutations $\mathfrak{S}_n$:

$$\sigma^{-1}(x_1\otimes x_2\cdots\otimes x_n) = x_{\sigma(1)}\otimes x_{\sigma(2)}\otimes\cdots\otimes x_{\sigma(n)}.$$

~~Tenseurs symétriques et antisymétriques~~ C'est un automorphisme de la structure tensorielle . Tenseurs symétriques et tenseurs antisymétriques : ils forment des sous-espaces tensoriels . Généralisation aux tenseurs mixtes : symétrie pour une seule variance ; la contraction conserve la symétrie (pour la même variance).

Symétrisation et antisymétrisation d'un tenseur z : le symétrisé de z est $\sum_\sigma \sigma z$, l'antisymétrisé est $\sum_\sigma \varepsilon_\sigma \sigma z$. On obtient ainsi tous les tenseurs symétriques (resp. antisymétriques) tout au moins lorsque la caractéristique est nulle (sinon il y a des canulars).

Fonctions multilinéaires symétriques et antisymétriques . Dans le cas de la caractéristique 2 , distinguer les fonctions antisymétriques des fonctions alternées (=s'annulant lorsque 2 arguments sont égaux).

Symétrisation et antisymétrisation des fonctions multilinéaires ; dans le cas d'une base régulière , et pour une caractéristique quelconque , les fonctions alternées sont identiques aux antisymétrisées.

§ 4 : Définition de la puissance antisymétrique d'un module E (la puissance symétrique sera définie de la même manière avec les polynomes , au chap.IV) : quotient de $E^{\textcircled{n}}$ par le sous-module où s'annulent les fonctions alternées . Notations : $\bigwedge^n E$ pour la puissance antisymétrique , $x_1\wedge x_2\wedge\cdots\wedge x_n$ pour ~~l'antisymétrisé~~ l'image du tenseur ~~xxx~~ $x_1\otimes x_2\otimes\cdots\otimes x_n$ par l'application canonique ; terminologie : n-vecteur=élément de $\bigwedge^n E$, n-vecteur simple (ou décomposable)=n-vecteur de la forme $x_1\wedge x_2\wedge\cdots\wedge x_n$. Dans le cas ~~dxxx~~ où E a une base régulière , base régulière de $\bigwedge^n E$, nombre d'éléments de la base . Isomorphisme canonique de $\overset{n}{\Lambda}$ E sur le sous-module des tenseurs antisymétrisés (par passage au quotient de $z \to \sum_\sigma \varepsilon_\sigma z$).

Produit d'un p-vecteur z et d'un q-vecteur z' (provient du produit des tenseurs par passage au quotient); notation $z \wedge z'$. Associativité ; les n-vecteurs simples sont des produits ; semi-commutativité .

En petits caractères , l'algèbre extérieure (tous les p-vecteurs réunis dans un même anneau); table de multiplication dans le cas d'une base régulière .

Puissance antisymétrique d'une application linéaire u de E dans F : à $x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n$ correspond $u(x_1) \wedge \ldots \wedge u(x_n)$; notation $\overset{n}{\Lambda} u$; composition des puissances antisymétriques .

§ 5 : On se borne aux modules à base régulière finie de n éléments.

Déterminant d'un endomorphisme u (indépendant de la base) : définition ~~PARXIAXpuis~~ la puissance antisymétrique n-ème de u est une homothétie dont le déterminant de u est le rapport. Propriété multiplicative .

Déterminant d'une matrice carrée = déterminant de l'endomorphisme correspondant . Déterminant de n vecteurs par rapport à une base .

Calcul d'un déterminant (développement n-aire). Le déterminant est forme multilinéaire alternée des lignes et des colonnes ; échange des lignes et des colonnes .

Mineurs d'une matrice quelconque ; coordonnées d'un p-vecteur décomposable . Développement de Laplace .

Applications géométriques de l'algèbre extérieure (sur un corps) : condition pour qu'un p-vecteur soit nul ; rang d'une matrice . Relation entre p-vecteurs simples et sous-espaces de dimension p . Traduction avec les déterminants .

valable pour un anneau (module à base régulière)

Condition de décomposabilité d'un p-vecteur x : il faut et il suffit que les vecteurs y tels que $x \wedge y = 0$ forment un sous-espace à p dimensions ; d'où les relations quadratiques de Grassmann .

§ 6 : Isomorphismes canoniques entre : 1) dual de $\overset{p}{\Lambda}$ E ; 2) ensemble des formes p-linéaires alternées ; 3) $\overset{p}{\Lambda}$ E' (E' dual de E). Formule

(1) $$\langle x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_p ,\ x'_1 \wedge x'_2 \wedge \ldots \wedge x'_p \rangle = \boxed{\langle x_i , x'_j \rangle}$$

Transposée de la puissance antisymétrique d'une application linéaire.

Produit intérieur d'un p-vecteur et d'une q-forme . Si $p \geq q$, on contracte (q fois) l'antisymétrisé du p-vecteur avec un des tenseurs d'où est issue la q-forme , et ~~on passe au quotient~~ on utilise l'isomorphisme canonique du §4 , ce qui donne un (p-q)-vecteur . Définition analogue si $p \leq q$, qui donne une (q-p)-forme ; si p=q , on retrouve la formule (1) dans les 2 cas . Interprétation géométrique pour les p-vecteurs et q-formes décomposables .

? d'un des facteurs d'où est issu le

Isomorphisme (défini à un facteur scalaire près , dépendant de la base) entre p-vecteurs et(n-p)-formes : soit x un p-vecteur fixe , y un (n-p)-vecteur variable ; $y \wedge x$ est un n-vecteur , qu'on identifie à un scalaire (en utilisant la base) ; alors $y \rightarrow y \wedge x$ est une forme linéaire $\varphi(x)$ sur les (n-p)-vecteurs , donc une (n-p)-forme ; φ est linéaire et biunivoque , donc un isomorphisme <u>sur</u> . Applications diverses .

<u>Chapitre IV</u> : <u>Polynomes</u> .

Le Congrès constate l'état larvaire du chapitre , et remet à une rédaction suivante un examen approfondi. Il se borne à émettre quelques suggestions d'ordre général :

Il y a deux sortes de polynomes : 1° polynomes abstraits (algèbre du monoïde N , ou N^n , ou éventuellement Z (polynomes à exposants entiers quelconques)); 2° fonctions polynomes de degré n sur E^n , E étant un module = fonctions obtenues par identification des n arguments dans une fonction n-linéaire sur E^n. Dans ce second cas , si on prend une base régulière de p éléments dans E , on obtient un polynome de degré n de p variables scalaires, à coefficients vectoriels .

~~Les points de vue se rejoignent~~ Les polynomes abstraits forment un anneau d'opérateurs par rapport à n'importe quelle algèbre sur le même anneau de base (algèbre supposée commutative si le nombre des variables est > 1). D'où les fonctions polynomes sur une algèbre , qui font le raccord avec les fonctions polynomes de la seconde sorte .

~~Transitivité des~~ Composition des fonctions polynomes de la seconde sorte ; en particulier , $f\circ(g_1,g_2,\dots,g_n)$, où f et les g_i sont des polynomes abstraits . Exemple : $f\circ(x+y)$ (dérivée d'un polynome).

La décomposition des fractions rationnelles est renvoyée au chap.V (Divisibilité) ; la formule d'interpolation est conservée ; on remet dans le texte le calcul des différences . Les fonctions symétriques sont reportées au chap.VI (théorie de Galois).

LIVRE III (Topologie générale).

<u>Chapitre VII</u> : <u>Utilisation des nombres réels en Topologie générale</u> (nouveau titre) .

§ 1 : Espaces uniformisables .

§ 2 : Espaces métriques et espaces métrisables .

§ 3 : Groupes et anneaux métriques .

§ 4 : Espaces normaux .

§ 5 : Espaces de Baire .

<u>Détail</u> : § 1 . Définition d'un écart f(x,y) (on n'exclut pas la valeur + ∞ , et on peut avoir $f(x,y)=0$ pour $x\neq y$); exemples. Somme et enveloppe supérieure d'écarts ; inégalité (1) de la p.87 pour un écart fini . Structure uniforme définie par un écart ; équivalence de deux écarts ; on peut se borner au cas des écarts finis. Structure uniforme définie par une famille d'écarts ; familles d'écarts équivalentes ; on peut se borner à une famille contenant le maximum d'un nombre fini d'écarts de la famille . Comparaison des structures définies par 2 telles familles . Condition de séparation . Exemple : structure uniforme la moins fine rendant uniformément continues des fonctions ~~d'une famille de fonc~~ numériques finies .

Tout écart est uniformément continu.

Restriction d'une famille d'écarts à un sous-espace . Prolongement des écarts au complété : ce sont des écarts donnant la structure uniforme de ce dernier . ~~Théorème 1 : tout~~ Th.1 : toute structure uniforme peut être définie par une famille d'écarts . Th.2: caractérisation des espaces topologiques uniformisables par l'axiome (O_{IV}). Définition des complètement réguliers : identité avec les sous-espaces des compacts , et plus particulièrement immersion dans un cube ; raccord avec le th. d'Alexandroff pour les localement compacts (cf. exerc.4,p.100).

Fonctions semi-continues ~~inférieurement~~ dans un uniformisable .

<u>§ 2</u> : Définition d'une <u>distance</u> : écart fini d(x,y) tel que $d(x,y)=0$ entraîne $x=y$. Espace métrique = ensemble muni d'une distance. Structures uniforme et topologique d'un espace métrique ; elles sont séparées . Structure définie par un seul écart : espace métrique associé .

Structure d'espace métrique : Isomorphismes (applications isométriques); système d'entourages ; boules , sphères ; distance de deux ensembles , diamètre ; oscillation d'une fonction à valeurs dans un métrique , d'où condition de continuité . Complété d'un espace métrique .

Structures uniformes métrisables . Définition ; th.1: condition pour qu'une structure uniforme soit métrisable .

Structures topologiques métrisables ; définition . Conditions nécessaires de métrisabilité : 1° complètement régulier ; 2° tout fermé est intersection dénombrable d'ouverts ; en particulier , tout point a un système fondamental dénombrable de voisinages .

Emploi des suites dénombrables. Condition pour qu'un point soit adhérent à une partie d'un espace métrisable. Pour qu'un espace métrique soit complet, il faut et il suffit que toute suite de Cauchy converge (conséquence de la condition précédente).

Espaces métriques compacts : condition de précompacité d'un espace métrique ; condition de compacité d'un espace topologique métrisable : il suffit que toute suite ait une valeur d'adhérence (démonstration en 2 temps : 1° l'espace est complet ; 2° il est précompact).

§ 3 : ~~Groupes métrisables~~ Définition ~~d'une~~ de la structure uniforme gauche (resp. droite) par des écarts glissants à gauche ~~(à ga~~ (resp. droite) et symétriques. Groupes métrisables (il suffit que e ait un système fondamental dénombrable de voisinages et que le groupe soit séparé); distance~~s~~ glissante~~s~~ ~~(distances des groupes abéliens)~~ ; cas des groupes abéliens, notation $\|x-y\|$. ~~Le~~ Tout quotient d'un groupe métrisable complet est complet.

Corps valués : valuation $|x| \geqslant 0$, nulle seulement pour 0, telle que $|1| = 1$, $|x-y| \leqslant |x| + |y|$, $|xy| = |x| \cdot |y|$. ~~Complétion~~ Exemples. Complétion. Valuations archimédiennes et th. d'Ostrowski sur la détermination des corps valués archimédiens (?).

Espaces normés sur un corps valué. Définition ; normes équivalentes. Exemples. Complétion. Convergence normale des séries. Condition de continuité des fonctions linéaires et multilinéaires ~~continues~~ dans un normé, à valeurs dans un autre normé. (sans Baire ?)

Anneaux normés = espaces normés munis d'une structure d'anneau compatible avec la topologie; on se ramène au cas où $\|xy\| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$. Dans un anneau complet ayant un élément unité 1, inversion des x tels que $\|x-1\| < 1$. Condition nécessaire et suffisante pour qu'un produit infini $\prod_\alpha (1+u_\alpha)$ soit multipliable : ~~La~~ $\sum_\alpha \|u_\alpha\| < +\infty$.

§ 4 : Définition d'un espace normal : espace séparé vérifiant (O_V) 1^er th. d'Urysohn : équivalence de (O_V) et ~~(O_V)~~ (O'_V). Tout compact est normal ; tout espace métrisable est normal. 2^e th. d'Urysohn : prolongement d'une fonction continue numérique. Raffinement d'un recouvrement ouvert fini (prop.3, p.139) ; partitions continues de l'unité.

§ 5 : On introduit 4 notions topologiques, 2 ayant un caractère relatif, 2 un caractère absolu :

1) Sous-ensemble rare de E = l'adhérence n'a pas de point intérieur.

2) Sous-ensemble maigre de E = réunion dénombrable de sous-ensembles rares.

3) Espace topologique inépuisable = qui n'est pas maigre dans lui-même.

4) Espace de Baire = tout sous-espace ouvert est un espace inépuisable .

Développement : exemples d'ensembles rares et d'ensembles maigres , réunion finie d'ensembles rares , réunion dénombrable d'ensembles maigres . Transitivité des notions de sous-ensemble rare (resp. d'ensemble maigre). Pour qu'un espace soit inépuisable , il faut et il suffit que toute intersection dénombrable d'ouverts partout denses soit non vide . Dans un espace inépuisable , le complémentaire d'un ensemble maigre est un espace inépuisable .

Pour qu'un espace soit de Baire , il faut et il suffit que toute intersection dénombrable d'ouverts partout denses soit partout dense. Dans un espace de Baire , le complémentaire d'un sous-ensemble maigre est un espace de Baire . Remarque : si tout point d'un espace possède un voisinage qui soit un espace de Baire , c'est un espace de Baire .

Théorème de Baire : tout espace métrique complet (resp. localement compact) est un espace de Baire .

Th.2 : Sur un espace inépuisable , si l'enveloppe supérieure d'une famille de fonctions continues numériques est partout finie , elle est bornée dans un ouvert non vide (se déduit de la proposition: dans un espace inépuisable , toute fonction semi-continue inférieurement et partout ~~XXXX~~ finie est bornée dans un ouvert).

en exercice. Dans un espace de Baire , la limite d'une suite simplement convergente de f_n (continues) à valeurs dans un métrique, est continue sauf aux points d'un ensemble maigre .

Chapitre VIII : ~~Espaces fonctionnels~~ Topologies d'espaces fonctionnels .

§ 1 : Structures uniformes sur les espaces fonctionnels.

§ 2 : Familles également continues .

§ 3 : Groupes d'homéomorphismes .

§ 4 : Espaces de fonctions continues numériques .

Appendice : Dualité dans les groupes localement compacts élémentaires.

Détail : § 1 : Soit E espace topologique , F espace uniforme . On définit une structure uniforme sur l'ensemble $\mathfrak{F}(E,F)$ de toutes les applications de E dans F (on en a besoin , notamment pour les fonctions continues par morceaux); d'une façon précise : structure de la convergence uniforme sur une famille $\mathfrak{S}$ de parties de E . Exemples : convergence simple , convergence uniforme , convergence compacte (uniforme sur tout compact) , convergence sur les boules dans les métriques . Comparaison de structures de ce type.

$\mathfrak{F}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ est séparé si F l'est et si tout point (de E) appartient à un ensemble de $\mathfrak{S}$. $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ est en outre complet si F est complet . Pour qu'un filtre de Cauchy sur $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ converge , il faut et il suffit qu'il converge simplement .

Sous-espace $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ de $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ formé des fonctions continues dans E ; il est fermé (donc complet) si tout point de E ~~est~~ intérieur à un ensemble de $\mathfrak{S}$. Si un filtre de fonctions continues converge uniformément sur un ensemble partout dense de E , il converge uniformément sur E .

Convergence uniforme locale d'un filtre Φ , formé de fonctions continues en un point x_0 de E : condition nécessaire et suffisante pour que l'application $(x,X) \to X(x)$ ait une limite suivant le filtre produit de Φ et du filtre des voisinages de x_0 . Conséquence: continuité de $(x,X) \to X(x)$, pour $x \in E$, $X \in \mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(E,F)$, si tout point de E est intérieur à un ensemble de $\mathfrak{S}$. Cas où E localement compact: pour qu'un filtre Φ sur $\mathcal{C}(E,F)$ soit localement uniformément convergent en tout point , il faut (et il suffit) qu'il soit convergent pour la convergence compacte ; corollaire : la topologie de la convergence compacte est la moins fine rendant continue X(x) par rapport à l'ensemble des variables ; elle est donc indépendante de la structure uniforme de F .

Eventuellement , définition de l'homotopie (connexion dans un espace $\mathcal{C}(A,E)$).

§ 2 : Définition d'une famille également continue , amenée par la recherche des ensembles compacts de $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(E,F)$. Propriétés : 1) si H est également continue , la structure uniforme de la convergence simple et celle de la convergence compacte sont identiques ; 2) le complété de H pour ~~l'une ou l'autre de ces structures uniformes est~~ la structure de la convergence simple est une famille également continue ; 3) pour que H soit précompacte , il faut et il suffit que H(x) soit précompact pour tout x (th. d'Arzela). Conséquences lorsque F est compact , et E localement compact .

§ 3 : Etude de la continuité de $X \circ Y$ au voisinage de (X_0, Y_0) , dans un espace $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(E,F)$; divers cas . Etude de la continuité de $\overset{-1}{X}$ au voisinage de X_0 , dans le sous-espace des $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(E,E)$ formé des homéomorphismes de E : divers cas . Cas intéressants : 1) groupe d'homéomorphismes d'un compact ; 2) groupe également continu d'homéomorphismes (ex: groupes d'isométries , groupes linéaires du chap.V). Les structures uniformes droite et gauche d'un groupe d'homéomorphismes ne sont pas nécessairement identiques à celle induite par $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(E,E)$; ex: $GL_n(R)$.

Groupe~~s~~ discontinu~~s~~ d'homéomorphismes (pour une structure induite par $\mathcal{C}_\sigma$ (E,E)): discret pour cette structure . Groupe proprement discontinu : ~~discret et~~ dont le complété pour cette structure) est discret ; si le groupe est également continu et ~~proprement discontinu~~ (si l'ensemble des transformés d'un point n'a pas de point adhérent , le groupe est proprement discontinu (sic!!).

§ 4 : (En vrac) Définition de la norme sur ~~un~~ l'espace desfonctions continues numériques bornées sur un espace E ; ~~il est complet~~ c'est un anneau normé complet . Th. de Weierstrass sur l'approximation des fonctions continues sur [0,1] (démonstration de S.Bernstein); généralisation de Stone ; application aux polynomes trigonométriques .Approximation d'une ~~fonctio~~ fonction continue sur un produit de compacts (en nombre fini ou infini) par une somme de produits. Th. de Dini (limite d'un filtrant décroissant de fonctions continues (ou semi-continues supérieurement) sur un compact , ~~qui~~ qui convergent simplement vers 0 : la limite est uniforme). Application aux fonctions semi-continues sur un compact ~~(EM.5 de~~ (prop.5 de la p.141) . Familles également continues de fonctions numériques (p.169-171) .

En exercices : généralisations du th. de Weierstrass , de l'approximation sur un produit de compacts , et du th. de Stone , pour les fonctions à valeurs dans le corps p-adique.

Appendice . Dualité pour les groupes R^n, Z^n, T^n et leurs produits.

LIVRE IV (Fonctions d'une variable réelle (théorie élémentaire)).

Chapitre I : Dérivées , primitives , intégrales .

§ 1 : Dérivées . Fonctions définies dans R , à valeurs dans un vectoriel normé sur R ~~(en petites lettres, généralisa~~ (la plupart des propriétés s'étendent aux fonctions définies dans C ,à valeurs dans un normé sur C ; en petites lettres , on remarque que le calcul formel s'étend plus généralement à des fonctions définies dans un corps commutatif valué , à valeurs dans un vectoriel topologique sur ce corps). Pour les espaces vectoriels , on adopte la notation à droite . Définition de la dérivée ; calcul formel (somme , produit (au sens de fonction bilinéaire),fonction composée~~)~~ ,fonction réciproque d'un homéomorphisme quand la dérivée est $\neq 0$). Dérivées à droite et à gauche : notations f'_d ,f'_s : généralisation du calcul formel (sans démonstrations , mais ~~répr~~ donner des énoncés explicites pour la fonction composée et la fonction réciproque). Théorème de la moyenne (en 2 étapes : 1° $\|f'_d\| \leq M$ entraîne $\|f(y)-f(x)\| \leq M\|y-x\|$; 2° $\|f'_d\| \leq g'_d$, g continue et croissante , entraîne $\|f(y)-f(x)\| \leq M(g(y)-g(x))$; se ramener au cas où $g'_d > 0$ en remplaçant g par $g+\varepsilon x$, puis au 1° par un changement de variable). Conséquences : limite à droite (ou à gauche) d'une dérivée à droite ; fonction continûment dérivable en un point .

Cas des fonctions à valeurs réelles : ~~la~~ inégalité stricte de la moyenne pour les fonctions non linéaires; dérivées infinies ; variation des fonctions .

? f

§ 2 : <u>Primitives et intégrales</u> . Problème A : recherche ~~de~~ d'une fonction admettant une dérivée donnée f ; s'il ~~[illegible]~~ a une solution , elle est aussi solution du problème B : recherche d'une fonction continue admettant f comme dérivée <u>à droite</u> . Inversement , si B est possible , il n'y a qu'une solution à une constante près ; la solution de B ne sera ~~solution de~~ pas toujours solution de A . On étudie le problème B en se restreignant à certaines catégories simples de fonctions . Primitive = solution du problème B . Th.: ~~le sous-es~~ dans l'espace des fonctions bornées sur [a,b] , le sous-espace des fonctions admettant une primitive est <u>fermé</u> . Conséquences : 1° primitive d'une fonction continue (par les polynomes);2° primitive d'une limite uniforme de fonctions en escalier continues à droite ; ~~les~~ ces limites uniformes ne sont autres que les fonctions continues à droite et ayant en tout point une limite à gauche (en particulier fonctions réelles monotones,fonctions continues par morceaux). Notation intégrale : traduction des propriétés des dérivées en langage intégral .Intégrale impropre = intégrale sur un intervalle <u>quelconque</u> I d'une fonction qui , sur tout intervalle <u>compact</u> contenu dans I , appartient à la classe ci-dessus .Extension des propriétés des intégrales.. Cas des fonctions positives ; principe de comparaison ; application aux séries (Cauchy-Maclaurin). Intégrales absolument convergentes ; th. de la moyenne.

§ 3 : <u>Dérivées d'ordre supérieur</u> . Définition et calcul formel ; intégration par parties générale . Formule de Taylor (utiliser le th. de la moyenne sous la forme du § 1 pour avoir le meilleur reste); mettre le reste sous forme intégrale quand c'est possible .

§ 4 : <u>Dérivées et intégrales de fonctions dépendant d'un paramètre</u>. Le paramètre est à valeurs dans un espace filtré . Convergence uniforme des dérivées , des intégrales propres et des intégrales impropres ; dans ce dernier cas , intégrales uniformément convergentes , intégrales normalement convergentes . ~~Continuité~~ Pour la cas d'un paramètre réel ou complexe , dérivation et intégration sous le signe somme .

 HCT001 14

Chapitre II : Fonctions convexes ; fonctions élémentaires .

§ 1 : Fonctions convexes . Définition , sous forme géométrique et analytique ; fonctions strictement convexes . Propriétés des familles de fonctions convexes (convergance , ~~II~~ enveloppe supérieure). Continuité ; premier critère de convexité . Dérivabilité ; 2e critère de convexité. Droite d'appui ; variation des fonctions convexes. .

§ 2 : ~~Dérivée~~ Fonctions exponentielles ; fonctions circulaires . Dérivée de a^x par la convexité ; nombre e . Dérivée de e(x) par la concavité de sin x ; nombre π . Fonctions circulaires réciproques. Homomorphismes de C sur C^* : définition de e^z par la condition $\lim_{z \to 0}(e^z-1)/z=1$ ~~pm~~ ; dérivée de e^{ax} (a complexe , x réel). Fonction réciproque de e^z dans une bande de largeur 2π ~~ion~~ ; dérivée de log z (c'est la fonction réciproque d'un homéomorphisme , cf.ch.I, § 1).Primitives des fractions rationnelles (sans calcul pratique , rejeté au Calcul numérique).

§ 3 : Développements des fonctions exponentielles et circulaires et des fonctions qui s'y rattachent . Principe général : on donne le développement de Taylor des fonctions considérées avec la forme intégrale du reste ; on majore ce reste grossièrement , de manière à avoir l'intervalle de convergence exact des séries de Taylor (la majoration du reste par le calcul de la série est reportéeau Calcul numérique) . Application de ce principe à e^x , sin x , cos x , ~~log(1+x)~~, $(1+x)^m$, log(1+x) , Arc tg x ; Arc sin x .

Chapitre III : Etude locale des fonctions .

Le Congrès constate la déficience de Delsarte , qui n'a pas rédigé ce chapitre contrairement à ses promesses . Jusqu'à nouvelle discussion , le plan de 1942 reste valable .

De même pour les 2 Appendices (Corps de Hardy ; fonction gamma).

ETAT DES LIVRES ET CHAPITRES NON DISCUTES AU CONGRES .

LIVRE I : On constate la regrettable disparition du monstre logique de Dieudonné , mais il semble avoir fait des petits , sous forme d'un récent article de Cartan , où ce dernier retrouve et perfectionne l'essentiel dudit monstre (le perfectionnement consistant à appliquer l'idée des éléments et fonctions "explicites" à la théorie de Fraenkel-Zermelo désontologisée , ce qui élimine les tabous de la théorie des types). Dans l'enthousiasme de cette découverte , Cartan propose de fournir dans le courant de l'année des petits papiers (ä fournissant un squelette possible pour les chap.I et II du Livre I . Le plan général des chapitres suivants ne parait pas devoir être modifié .

LIVRE II. Le chapitre VII est rédigé et sera prochainement distribué . Dieudonné compte rédiger en cours d'année le chap. VIII (formes bilinéaires quadratiques , hermitiennes , groupes orthogonal , unitaire , symplectique, etc.)

LIVRE III . Conformément à ses habitudes , Charles n'a pas livré le chap. IX (revêtements) dans les délais prévus .

LIVRE V (Topologie combinatoire) : inexistant .

LIVRE VI (Espaces vectoriels topologiques) : en sommeil .

LIVRE VII (Différentielles) : la rédaction du chap. I sera prochainement achevée , les autres chapitres suivront dans le courant de l'année .

LIVRE VIII (Intégration) : le chap. I est terminé et sera prochainement distribué ; les autres chapitres suivront au fur et à mesure .

LIVRE IX : Cartan s'engage à rédiger , dans le courant de l'année , une larve comprenant : théorie générale des séries entières à un nombre quelconque de variables sur un corps valué complet ; intégrale de Cauchy et ses conséquences classiques ; variétés abstraites à structure analytique ; dans le cas d'une variable , représentation conforme ; étude locale des fonctions analytiques de n variables : anneau des fonctions holomorphes en un point , idéaux , variétés irréductibles et autres , etc.. Cette offre extraordinaire (et , espérons-le , honnête) provient d'un renouveau d'intérêt de Cartan pour ces questions , à la suite d'importantes découvertes faites par lui cet été sur ~~la question~~ les idéaux de fonctions holomorphes (étude globale !) , qui lui ont permis de résoudre des ~~questions~~ problèmes posés par André : soient f_k holomorphes dans A ouvert dans C^n , telles que l'ensemble B où $|f_k(x)|\leq 1$ $(1\leq k\leq p)$ soit compact ; B étant identifié à la variété $y_k=f_k(x)$ du polycylindre $|x_i|\leq M$ $(1\leq i\leq n)$, $|y_k|\leq 1$, toute fonction holomorphe sur B est la trace d'une fonction holomorphe sur le polycylindre (parce que la variété peut être définie par des équations holomorphes sur le polycylindre); en outre , si des $g_j(x)$ sont holomorphes sur la "face" $|f_1(x)|=1$ de B , et n'ont pas de zéro commun, il existe des $h_j(x)$ holomorphes sur cette face , telles que $\sum_j h_j g_j=1$.