LA TRIBU NON NUMÉROTÉE

COTE DELT 003

TEXTE LA TRIBU
(BULLETIN ŒCUMÉNIQUE, APÉRIODIQUE ET BOURBACHIQUE)
COMPTE-RENDU DU CONGRÈS ŒCUMÉNIQUE
DE JUIN 1948

FONDS JEAN DELSARTE

NOMBRE DE PAGES NUMÉRISÉES 37

NOMBRE DE FEUILLES PRISES EN COMPTE 37

M^r Delsarte

DELT 003

2

L A T R I B U

(Bulletin oecuménique, apériodique et bourbachique)

COMPTE-RENDU DU CONGRÈS OECUMÉNIQUE DE JUIN 1948

Présents : Cartan, Chabauty, Delsarte, Dieudonné, Ehresmann (avec intermittences), Godement, Pisot (dans la première moitié), Roger, Samuel, Schwartz, Weil.

Comme prévu, le Congrès tint deux sessions, la première à Paris du 1^er^ au 8 Juin, la seconde à Strasbourg du 15 au 20 ; Cartan n'ayant pas livré en temps voulu le rapport promis sur la Topologie algèbrique, le Congrès se trouva en avance sur l'emploi du temps prévu. Dans la première moitié, l'influence maléfique des noms d'Arens et Kakutani faillit à plusieurs reprises menacer le Congrès d'enlisement irrémédiable ; l'air de Strasbourg, l'Algèbre et les Variétés différentiables parurent ranimer les Congressistes, parfois même d'une façon un peu trop vive pour la bonne marche des débats. On nota que le grand âge de notre Maître se traduit par un déclin très net dans son influence sur les évènements extérieurs : tout au plus fut-il capable de déclancher d'abondantes averses, et quelques contradictions "sans importance" (Ehresmann dixit).

Le Congrès se termina par un Pot, au cours duquel Bourbaki institua la dignité de "membrus honoris causa" et la décerna pour la première fois à Brelot, qu'un télégramme en latin avertit de ce grand honneur.

PLAN GÉNÉRAL 1948. Dieudonné se livre à son numéro habituel de la présentation du plan, lequel comprend cette fois 3 parties :

1ère Partie

I. Ensembles

I^{ère} Partie

I. Ensembles

II. Algèbre

III. Topologie générale

IV. Fonctions d'une variable réelle.

V. Variétés différentiables.

VI. Espaces vectoriels topologiques

VII. Intégration

VIII. Topologie algèbrique.

IX. Fonctions analytiques.

X. Groupes de Lie et géomètrie différentielle

II^{è} Partie

(Analyse algèbrique)

I. Algèbre locale (anneaux locaux, valuations, anneaux noetheriens).

II. Géomètrie algèbrique.

III. Théorie des nombres algèbriques (corps de classes, algèbres sur les corps de nombres algèbriques).

IV. Groupes de transformations (algèbres de Lie, classification des groupes de Lie, représentations linéaires des groupes de Lie, en particulier des groupes classiques, théorie des invariants).

V. Equations différentielles algèbriques (Ritt-Kolchin).

III^{è} Partie

(Analyse fonctionnelle)

I. Algèbres normées.

II. Opérateurs dans les espaces de Hilbert (avec les équations intégrales et les applications aux équations différentielles et aux dérivées partielles).

III. Groupes localement compacts (avec les transformations de Fourier et Laplace).

IV. Distributions.

V. Equations aux dérivées partielles ; potentiel ; calcul des variations.

ALGÈBRE.

Nouveau plan (à partir du chap.VI) :

Chap.VI : Modules de type fini et modules noetheriens (théorie élémentaire).

Chap.VII : Divisibilité.

Chap. VIII : Corps ordonnés.

Chap. IX : Anneaux primitifs.

Chap. X : Formes quadratiques.

CHAp. XI : Géomètries élémentaires.

L'ancien Chap.VI (Divisibilité) est jugé trop disparate et scindé en 3 nouveaux chapitres :

Chap.VI : Modules de type fini : Définition des modules de type fini et des modules et anneaux noetheriens, donner les propositions élémentaires des pp. 63-66 de la rédaction actuelle, et celles des pp.99-102; ajouter le th. de Hilbert pour les anneaux de séries formelles. Il est entendu que la théorie fine des anneaux noetheriens (idéaux primaires et décomposition en idéaux primaires) est jusqu'à nouvel ordre rejetée dans la II^{è} partie de Bourbaki.

Chap. VII : Divisibilité :

1 : Groupes ordonnés multiplicatifs : Il est décidé qu'on fait ~~xxxx~~ dans ce paragraphe uniquement les résultats généraux qui servent pour la Divisibilité, et en notation multiplicative, avec $\prec$ pour la relation d'ordre (on conserve les notations inf et sup ; de toute façon, il faudra traduire en 2 autres notations multiplicatives au moins, pour la divisibilité des éléments (avec le signe $|$) et pour celle des idéaux (avec le signe $\supset$)).

DELT003

5

Au début, dire qu'on traduira en notation additive au chap. VIII. Donner comme exemple la divisibilité dans les rationnels >0, en renvoyant au § 2. Bloquer chacune des prop.1 et 2 avec ses corollaires. Supprimer la définition de semi-groupe, et remplacer la page 6 par une proposition analogue à la prop.3, mais où on suppose seulement vérifié (GP_I) (on suppose donc qu'on est déjà dans un groupe). Remarquer que dans un groupe fini, l'ensemble des éléments $\succcurlyeq 1$ est stable, donc un groupe, et par suite qu'on ne peut avoir de groupe ordonné fini non trivial. Au n°5, dire que $x \rightarrow x^{-1}$ est un isomorphisme de G sur le groupe ordonné opposé. Ne pas parler de groupe filtrant, et énoncer seulement la prop.4 sans cette terminologie. La prop.5 n'a pas besoin de démonstration (isomorphisme $x \rightarrow x^{-1}$) ; en déduire explicitement qu'on ne donnera plus de démonstrations que pour une seule espèce de borne. P. 12, dire qu'on peut toujours translater dans G_+ une partie finie quelconque de G, ce qui explique la démonstration de la prop.6. Enoncer la prop.7 avec la notation $\sup_{x \in A} x$ (au lieu de sup A) ; le cor.2 aura dû être fait aussitôt après la déf. des groupes réticulés. Les monoïdes semi-réticulés sont vidés, ainsi que la prop.8 ; on garde le cor. de cette dernière, qui devient proposition. La prop.9, ses corollaires et tout le n° 8 sont reportés au chap.VIII (groupes ordonnés additifs). Pour la définition d'éléments étrangers (uniquement dans un groupe réticulé), commencer par 2 éléments, puis dire " n éléments étrangers dans leur ensemble". La prop. 12 doit être remontée aussitôt après la formule (8), le cor.1 de la prop.13 après la déf. de 2 éléments étrangers Le lemme d'Euclide devient cor.3 de la prop.13, le cor. de la prop.15 est vidé, ainsi que celui de la prop.16 (reporté aux groupes additifs). Pas de définition formelle pour les éléments minimaux : c'est un abus de langage. On ne définit plus les éléments premiers : les prop. 18 et 19 sont fondues en une seule, relative seulement aux groupes réticulés et caractérisant les éléments minimaux (en remarque le fait que 19 est vraie dans un groupe ordonné quelconque). La déf.9 et la prop.20 sont vidés. Le th.1 doit être énoncé pour un groupe réticulé, et avec la condition (T') (l'équivalence de (T) et (T') aura pu être faite dans le Livre I(?); on ne se servira dans ce chapitre que de (T')). La prop.22 est vidée, le th.2 reporté aux groupes additifs (chap. VIII).

2 : <u>Divisibilité dans un corps</u>. <u>Anneaux factoriels et anneaux principaux</u>. Prendre tout de suite K corps des quotients de A . Rappeler (avec un ☡) la distinction entre "x divise 0" et "x est diviseur de 0" (ne pas utiliser ici cette dernière expression). Le passage en retrait de la p.46 passe en exercice. Signaler la condition pour que K^*/E soit totalement ordonné ; écrire U au lieu de E ; noter l'écriture $y \equiv 0(x)$. On dira "anneaux factoriels" au lieu d'"anneaux arithmétiques" . On conserve la terminologie d'"entiers étrangers" , "premiers entre eux" n'étant mentionné que comme terminologie mauvaise généralement usitée. Démontrer la prop.3 comme conséquence des prop. 5 et 7 ; au lieu du cor. de la prop.3, démontrer qu'un anneau factoriel est "intégralement clos" , à l'aide de la prop.6 . Le n°5 (entiers premiers) doit venir tout entier après la définition des anneaux factoriels ; dire "entier minimal" au lieu d'"entier premier " .

Pour le th.1, commencer par remarquer que tout idéal de type fini est principal ; ensuite, vérifier (T') et non (T). En même temps que la première partie du th.1, faire la prop.12 (qui devient théorème de Bezout). Après la prop.14 (qui devient théorème) faire le cor.2 sous forme de condition de possibilité de la congruence $ax \equiv c \pmod{b}$;

donner aussi le th. chinois. Dans Z , remarquer que les nombres > 0 forment un système de représentants des classes mod.U, ce qui permet de les identifier aux éléments de $\mathcal{T}^*$. Faire la prop.13 en montrant qu'il y a des nombres entiers qui ne sont pas produits de puissances d'un nombre donné de nombres premiers. Rappeler p. 56 que les polynomes de degré 0 sont dits constantes. Bloquer la prop.14 avec son cor.1 en une seule proposition ; le cor. 2 est érigé en proposition. Faire aussi le th.1 pour l'anneau des séries formelles ; réduire la terminologie en supprimant "primitif" (dire "de contenu 1") ; comme énoncé du th.1 prendre celui de la prop.16 ; le passage en petits caractères de la p. 60 passe en exercices.

§ 3 : <u>Modules de type fini sur un anneau principal.</u> La rédaction (calquée sur la démonstrations Chevalley pour les anneaux de Dedekind) est à remanier complètement ; il est possible, dans le cas des anneaux principaux, de la simplifier considérablement. Il doit être possible de condenser les th.1 et 2 en un seul ; Weil est chargé de débrouiller la question. On joindra à ce § la prop.1 de la p.81 (réduction d'une matrice sur un anneau principal).

§ 4 : <u>Réduction d'une matrice carrée sur un corps commutatif.</u>

Remanier les laïus des p. 84-86 de façon à avoir des énoncés précis et utilisables : la question de la similitude (p.86) devrait venir plus tôt, dès qu'on définit le module E_u : le polynome caractéristique devrait venir plus tôt. On vide la partie de la prop.4 concernant les mineurs ; on demande une meilleure notation pour le polynome caractéristique. Essayer de faire directement la prop.6 et son corollaire. P. 92, indiquer quand deux matrices diagonales sont semblables, et rappeler ce que sont les autres coefficients du polynome caractéristique en fonction des valeurs propres. La prop.7 passe en exercice.

Essayer de simplifier la démonstration de la prop.8, en utilisant la décomposition d'une fraction rationnelle. Dans tout le n°4, prendre la matrice sur un corps quelconque, les valeurs propres dans une extension. Godement voudrait qu'on montre que les matrices diagonales forment un sous-anneau commutatif maximal de l'anneau des matrices d'ordre n, et qu'on caractérise les fonctions centrales f sur l'anneau des matrices. Au n°5, faire plus tôt la relation (8) et donner aussi la dérivée de R_λ par rapport à λ. La démonstration d'Artin pour la base normale d'une extension cyclique est conservée à titre de prime au lecteur.

Chap. VIII : Corps ordonnés.

§ 1 : Groupes ordonnés additifs. Traduire additivement tous les résultats du § 1 du chap.VII ; ajouter les notations x^+, x^-, $|x|$. La prop.10 passe en remarque suivant les définitions de x^+ et x^-. Démontrer la prop.9, puis sa traduction en formules (15), la conséquence $|x| \geqslant 0$ et (12) ; les formules (16) et (17) auront été données aussitôt après les définitions de x^+, x^- et $|x|$. Démontrer le cor.1 de la prop.9 en montrant que $x \neq 0$ entraîne $nx \neq 0$ pour $n > 0$, par $nx^+ \geqslant x^+ > 0$, d'où $(nx)^+ > 0$. En déduire le cor.2. Démontrer la prop.11 et ses corollaires, et le th.2 (th. de décomposition).

§ 2 : Corps ordonnés. Le Congrès ajourne l'examen de ce § à la rédaction suivante.

Chap. IX : Anneaux primitifs.

La discussion de l'ancien chap.VII conduit le Congrès à rejeter dans la II^{è} partie tout ce qui concerne les représentations linéaires du groupe symétrique et des groupes classiques, et la théorie des invariants. On considère d'autre part qu'il est impossible de séparer les relations d'orthogonalité de Schur pour les groupes finis et pour

DELT 003

9

les groupes compacts, ce qui conduit à les rejeter avec ces derniers. Par contre, le Congrès décide d'adjoindre au chapitre les généralités algèbriques du rapport Godement, ce qui donne finalement le plan suivant:

§ 1 . Radical d'une algèbre.

§ 2. Anneaux primitifs.

§ 3 . Anneaux d'Artin.

§ 4 . Produits tensoriels d'algèbres primitives.

§ 5 . Isomorphismes d'algèbres primitives.

§ 6 . Représentations linéaires des algèbres et des groupes.

<u>Détail</u> :

§ 1 . <u>Radical d'une algèbre</u>. Il vaut mieux au début considèrer l'anneau $\mathfrak{M}$ des endomorphismes d'un groupe abélien sans opérateur E . Représentation d'un anneau $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{M}$ = structure de $\mathfrak{A}$-module sur E ; représentation irréductible = module simple ; représentations semblables = modules isomorphes. Rattacher de même la notion d'idéal régulier (on demande une autre terminologie) au fait que le $\mathfrak{A}$-module $\mathfrak{A}/\mathfrak{a}$ est monogène (cf. chap.II, § 1) ; renverser l'ordre de la présentation de Godement ; si $\mathfrak{a}$ bilatère régulier, $\mathfrak{A}/\mathfrak{a}$ est un anneau ayant un élément unité, et réciproquement. Noter que si $\mathfrak{a}$ est régulier et $\mathfrak{a}' \supset \mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$ est régulier ; dire que $\mathfrak{a}$(X) est l'annulateur de X (au point de vue des notations, il paraît indiqué d'écrire les éléments de E avec des minuscules grasses, les éléments de $\mathfrak{A}$ avec des minuscules italiques, et les opérateurs (endomorphismes de E) en majuscules italiques).

Il serait bon de n'introduire la notion de représentation irréductible qu'au début du n°2, puisqu'elle équivaut à celle d'idéal régulier maximal au point de vue terminologie, bien préciser le sens de "maximal" (se rapporte uniquement aux épithètes qui précèdent) ; noter qu'à une représentation irréductible sont associés une infinité d'idéaux maximaux Ne faire au n°2 que la première moitié de la prop. 6 .

Au début du n°3, énoncer tout de suite la prop. 7 .

Au n°4, dire "conversible" et "converse" au lieu de "quasi-inversible" et "quasi-inverse" ; ne pas parler de conversible à gauche ou à droite. Dire que $\mathcal{R}$ est le plus grand idéal dont tous les éléments soient conversibles. Le n°6 est provisoirement vidé (en exercices) à moins que la théorie des ~~ddd~~ doubles représentations de Godement ne nécessite qu'on le réintroduise.

§ 2 : Anneaux irréductibles d'endomorphismes. On adopte la terminologie suivante :

Anneau primitif = il existe un A-module simple et fidèle = anneau irréductible d'endomorphismes.

Anneau semi-primitif = il existe un A-module semi-simple et fidèle = composé direct d'anneaux primitifs (en nombre fini !).

Anneau sans radical = anneau de radical 0 (= anneau faiblement semi-simple au sens Godement).

Le § 2 se réduit au lemme de Schur (la prop.11 de Godement en remarque), à la prop.12, et au th. de densité (th.9) ; la prop. 13 n'est autre que la prop.14 du chap.I, § 6 . Le n°9 (intersections d'idéaux réguliers) passe en exercices ; on ne parlera pas du spectre faible.

§ 3 : Anneaux d'Artin. Définir les produits d'idéaux, avec leurs propriétés élémentaires, et démontrer que dans un anneau d'Artin le radical est nilpotent. Théorèmes de Wedderburn, à partir des résultats du § 2, par la méthode Jacobson. Etude élémentaire des anneaux primitifs d'Artin = anneaux d'endomorphismes d'espaces vectoriels de dimension finie. Donner la relation entre décomposition d'un module en somme directe (finie) et la décomposition correspondante de son anneau d'endomorphismes en somme directe d'idéaux à gauche ou à droite (projecteurs), en déduire la correspondance biunivoque entre sous-espaces d'un espace vectoriel E (de dim. finie) et les idéaux de son anneau d'endomorphismes.

§ 4 : Produits tensoriels d'algèbres primitives. On conserve le plan de la rédaction actuelle, et on en ajourne l'examen détaillé à la rédaction état 2 . Donner la notion d'algèbre séparable.

§ 5 : Isomorphismes d'algèbres primitives : donner la caractérisation de tous les automorphismes d'un anneau primitif d'Artin A , et le prolongement d'un isomorphisme d'un sous-anneau simple B de A sur un autre sous-anneau B' , B et B' contenant le centre et les éléments de ce dernier restant invariants (th. de Skolem-Noether ; voir une présentation simple des démonstrations classiques dans l'article de Dieudonné sur la th. de Galois). Applications : tout corps fini est commutatif ; th. de Frobenius sur les corps gauches sur $\mathbb{R}$; corps réflexifs.

§ 6 : Représentations linéaires des algèbres et des groupes : on ne considère que les représentations linéaires sur le corps de base. Définir la trace et la norme. Condition de complète réductibilité. Classes de représentations irréductibles d'algèbres primitives et semi-primitives. Pour les groupes (supposés plongés dans une algèbre) interprétation des résultats précédents. Produit kroneckérien de deux représentations et interprétation du lemme de Schur avec les produits kroneckériens. Th. de Maschke pour les groupes finis. Caractères des groupes abéliens finis. Les relations (de Frobenius) entre les représentations linéaires d'un groupe fini et de ses sous-groupes est rejeté en exercices.

Chap.X : Formes bilinéaires et formes quadratiques.

§ 1. Formes bilinéaires et dualités. Prendre tout de suite le cas où f est définie sur $E \times F$, E A-module à gauche, F A-module à droite ; l'équivalence de la donnée de f et d'une application linéaire de E dans F^* (ou de F dans E^*) a été démontrée au chap.III. Faire ici la matrice, la transformée et le rang (lorsque A est un corps). Passer aux formes sesquilinéaires (forme bilinéaire sur $E_\sigma \times E$), traduction des résultats précédents : il correspond à une telle forme deux applications semi-linéaires de E dans E^*. Application de $T^r(E)$ dans $T^r(E^*) = T_r(E)$ déduite d'une telle forme ; de même pour les puissances extérieures ; cela définit donc une forme sesquilinéaire sur $T^r(E) \times T^r(E)$, et une dans $\overset{r}{\bigwedge} E \times \overset{r}{\bigwedge} E$; leurs valeurs. Eléments conjugués par rapport à une forme sesquilinéaire. Cas d'une forme de rang égal à la dimension de E : dualités ; forme adjointe sur $E^* \times E^*$; abaissement des indices des tenseurs ; adjoint d'un endomorphisme : $\langle u(x),y \rangle = \langle x, \tilde{u}(y) \rangle$, $\langle x,y \rangle$ étant la forme bilinéaire . La prop.1 est vidée, on introduit directement les symétriques, alternées et hermitiennes, en remarquant qu'elles donnent des dualités symétriques.

§ 2. Equivalence des formes quadratiques et alternées. Supprimer le laïus pédantesque du début. Pour le th.1, commencer par le cas des formes de rang égal à la dimension. Traduire pour les bivecteurs et biformes ; rang d'un bivecteur = double du plus grand exposant pour

DELT 003

13

lequel la puissance extérieure de ce bivecteur soit $\neq 0$. Le cor. du th.1 en exercice. Définir le pfaffien par la puissance extérieure $\nu^{\text{ème}}$ de la biforme $(n=2\nu)$, d'où sa propriété d'invariant et le fait que le déterminant en est le carré. Avec la définition de la forme quadratique (resp. hermitienne) donner la formule exprimant le produit scalaire à l'aide de la forme quadratique $(4\langle x,y\rangle = \langle x+y,x+y\rangle - \langle x-y, x-y\rangle + i\langle x+iy, x+iy\rangle - i\langle x-iy , x-iy\rangle$ dans le cas classique) ; pour le cas non commutatif, se limiter aux corps de quaternions généralisés (caractéristique $\neq 2$). Distinguer typographiquement les éléments de K et ceux de K_o. Donner les traductions métricielles des théorèmes de réduction. Faire le discriminant par l'extension de la forme bilinéaire à $\bigwedge^n E \times \bigwedge^n E$; la prop.4 en exercice. Le th.3 pour une seule forme ; on appelle signature le couple (p,q) (p nb. de carrés >0 , q nb. de carrés <0) ; dire "positive" pour "semi-définie positive", "strictement positive" pour "définie positive" (expliquer que c'est un abus de langage). Les hermitiennes antisymétriques sont vidées. Faire l'équation fonctionnelle des formes quadratiques (?) . L'algèbre de Clifford est vidée.

§ 3. <u>Groupes orthogonaux, groupes unitaires, groupes symplectiques</u>. Faire toutes les généralités pour le groupe laissant invariant une forme bilinéaire quelconque (représentation de Cayley, sous-espaces isotropes pour le cas où la dualité est symétrique, sous-groupe laissant invariant un sous-espace non isotrope). Noter qu'un endomorphisme u laissant invariant une forme fondamentale est un automorphisme ; on a $\tilde{u} = u^{-1}$.

Ensuite les choses spéciales à chaque groupe. Groupe symplectique : dire que pour 2 formes de même rang les groupes sont isomorphes ;

le th.2 en exercice ; démontrer son corollaire par le pfaffien. Groupe orthogonal : noter qu'il suffit que la transformation conserve la forme quadratique. Faire le th. de Witt, et les propriétés des variétés isotropes de dimension maxima. Noter que si u est une transformation orthogonale, ${}^t u$ est une transformation orthogonale pour la forme adjointe (avec les généralités). N'écrire les relations (6) et (7) que pour une base orthonormale. Les petites lettres du bas de la p. 835 en exercice. Supprimer le mot "retournement". Le th.1 en exercice, faire le cor.1 par la méthode donnée en petits caractères. Groupe unitaire : n'écrire les formules (12) et (13) que pour une base orthonormale. Supprimer les petites lettres de la p. 843. Faire aussi le groupe unitaire quaternionique. Indiquer comment on passe d'une forme symplectique et d'un automorphisme anti-involutif à une forme hermitienne, et inversement (exerc. 19 et 20) ; la même chose pour les quaternioniques en exercices. Pour les corps ordonnés, dire que toute matrice est produit d'une matrice unitaire et d'une matrice hermitienne $\geqslant 0$.

Les anciens §§ 4 et 5 sont vidés.

§ 4. <u>Réduction d'une forme hermitienne à ses axes</u>. Faire d'abord la prop.2 en considérant un ensemble de transformations deux à deux permutables $\mathcal{E}$, tel que $u \in \mathcal{E}$ entraîne $\tilde{u} \in \mathcal{E}$. Le reste s'en déduit comme cas particuliers.

VARIÉTÉS DIFFÉRENTIABLES.

<u>Plan</u> :

Chap. I : Différentielles.

Chap. II : Variétés différentiables.

Chap.I : Différentielles (cf. chap.I, état 2)

§ 1. Différentielle première. Fonctions définies dans un Banach E, à valeurs dans un Banach F. Fonctions tangentes en un point. Fonction différentiable en un point quand dans la classe des fonctions tangentes à l'accroissement il y a une fonction linéaire ; elle est alors unique, c'est la différentielle (il serait plus correct de l'appeler dérivée) ; notation $h \to U'(x).h$, ou $U'(x)$. Elle est continue, donc dans $\mathcal{L}(E,F)$. Raccord avec le Livre élémentaire ; différentielle d'une constante, d'une application linéaire, de $(x,y) \to x+y$, $(\lambda, x) \longrightarrow \lambda x$, de $x \to x^{-1}$ dans une algèbre normée. Théorème des fonctions composées : si $W=U\circ V$, on a $W'(x)=U'(V(x))\circ V'(x)$; différentielle d'une somme, d'une application bilinéaire ; relations entre les différentielles de 2 homéomorphismes différentiables réciproques. Th. des accroissements finis : $\|U(x+h)-U(x)\| \leqslant \|h\| . \sup_{0\leqslant t \leqslant 1}\|U'(x+th)\|$; toute fonction de différentielle nulle dans un connexe est constante. Fonctions continûment différentiables : $x \to U'(x)$ continue (comme application du Banach E dans le Banach $\mathcal{L}(E,F)$). Condition équivalente à $\lim_{(x,y)\to(x_0,x_0)} \|U(x)-U(y)-U'(x_0).(x-y)\| / \|x-y\| =0$. Différentielles partielles : notations correctes $U'_1(x,y)$ et $U'_2(x,y)$, par abus de langage $U'_x(x,y)$, $U'_y(x,y)$ ou $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$; ne donner le th.3 (de l'état 2) que lorsque les différentielles partielles $(x,y) \to U'_1(x,y)$ et $(x,y) \to U'_2(x,y)$ sont continues toutes deux (le reste est une curiosité). Extension à un produit de n espaces. Cas des espaces de dimension finie : jacobienne.

§ 2: Existence et différentielles des fonctions implicites.

Commencer par le th. des approximations successives : si $v(x,y)$ est une application continue d'un voisinage $U \times V$ de $(0,0)$ dans $E \times F$, dans l'espace F, telle que l'on ait $\| v(x,y_1)-v(x,y_2)\| \leqslant k \|y_1-y_2\|$ dans $U \times V$, avec $k < 1$, et $v(x,0)$ assez petit dans U, alors l'équation $y=v(x,y)$ admet une seule solution définie et continue dans U. Cas particulier où $E=F$ et $y=x-w(y)$ avec w lipschitzien pour $k < 1$ et $w(0)$ assez ~~pet~~ petit : y est alors un homéomorphisme d'un voisinage de 0 dans E sur un voisinage de 0 dans E (théorème du point fixe). Th. des fonctions implicites : $U(x,y)=0$, U application continument différentiable de $E\times F$ dans G ; si $U'_y(x_0,y_0)$ est inversible et $U(x_0,y_0)=0$, existence et unicité d'une solution différentiable telle que $y(x_0)=y_0$: écrire $U(x,y)=0$ sous la forme $y=y-U'^{-1}_y.U(x,y)$, et appliquer le th. du début pour l'existence et la continuité de y ; pour l'existence de la différentielle de y, donner un accroissement à x et raisonner comme dans § 2, prop.2 de l'état 2. Traduction pour les espaces de dimension finie. Fonctions dépendantes (voir l'état 2).

§ 3. <u>Différentielles successives</u>. Remarquer au début que toute application linéaire continue de E dans $\mathcal{L}(E,F)$ peut s'identifier canoniquement à une application bilinéaire continue de $E\times E$ dans F (résulte trivialement de la condition de continuité des applications multilinéaires donnée au chap.IX de Top.gén.). Définition de U deux fois différentiable : cas où $x \to U'(x)$ (application de E dans $\mathcal{L}(E,F)$) est différentiable ; alors $h \to U''(x).h$ définit une application bilinéaire continue $(h,k) \to (U''(x).h).k = U''(x).(h,k)$. Définition analogue des fonctions p fois différentiables ; raccord avec le cas des fonctions d'une variable réelle. Ne faire ensuite que la symétrie : $U''(x).(h,k)=U''(x).(k,h)$ (cf. état 2, § 3,prop.2 et th.1 avec ses corollaires) ; le reste du § 3 de l'état 2 est vidé (noter seulement que la composée de 2 fonctions p fois différentiables l'est aussi et que l'inverse d'un homéomorphisme p fois différentiable l'est aussi).

§ 4. Equations aux variations. Equations complètement intégrables.

On part d'une équation différentielle $y'=U(x,y,z)$ (x réel, y dans un Banach E, z dans un Banach F) ; soit $u(x,z)$ l'intégrale telle que $u(x_0,z)=y_0$. Si $U'_y(x,y,z)$ et $U'_z(x,y,z)$ sont continues et bornées, alors u est continument différentiable, et u'_z vérifie l'équation linéaire (équation aux variations).

$$\frac{d}{dx}u'_z = U'_y(x,u(x,z),z)\circ u'_z + U'_z(x,u(x,z),z)$$

(u'_z prend ses valeurs dans $\mathcal{L}(F,E)$, comme U'_z, tandis que U'_y prend ses valeurs dans $\mathcal{L}(E,E)$) ; voir la démonstration dans le chap. "Equations différentielles" (état 1) § 2, th. 3. Application : différentiation de l'intégrale d'une équation différentielle par rapport à la valeur initiale.

Equation "aux différentielles totales" $y=U(x,y)$ (x dans un Banach E, y dans un Banach F, U à valeurs dans $\mathcal{L}(E,F)$). Condition d'intégrabilité $U'_x.(h,k)+U'_y.(h,U.k) = U'_x.(k,h)+U'_y.(k,U.h)$

Il semble que la démonstration n'utilise pas l'interversion des dérivations, donc la redonne comme corollaire (ce qui entraînerait la suppression du § 3).

Chap. II : Variétés différentiables.

§ 1. Définition des variétés différentiables. Définition du rapport Schwartz ; remarquer qu'on peut aussi se donner un système partiel de fonctions de classe p, de sorte qu'en chaque point x_0, il y ait n des fonctions du système réalisant un homéomorphisme dans R^n et telles que toute autre fonction du système soit fonction p fois continument différentiable de ces n fonctions au voisinage de 0. Passage aux cartes (atlas complets ou non) : dans la définition par les cartes, ne pas supposer donnée a priori une topologie sur V : elle se déduit de la définition (famille d'ouverts sur V évidente) équivalence de deux atlas.

DELT003
18

Exemples : ouverts dans une variété, $\mathbb{R}^n$, sphères, espaces projectifs. Noter que sur une même variété on peut mettre plusieurs structures différentiables distinctes ; si V est de classe p, elle est aussi de classe q pour $q < p$. Les var. analytiques sont vidées. Applications différentiables : définition, traduction avec les coordonnées locales, transitivité. Partition de l'unité avec des fonctions de classe p ($1 \leq p \leq +\infty$).

§ 2. Prolongements d'une variété différentiable. Différentielle d'une fonction numérique différentiable comme classe de fonctions tangentes, notation $df(x)$ (au point x) ; l'espace vectoriel des différentielles au point x a n dimensions ; expression de la différentielle à l'aide des coordonnées locales. Différentielle d'une somme, d'un produit, d'une fonction composée. Espace des dérivations au point x comme dual de l'espace des différentielles en ce point ; si X est un vecteur de cet espace (appelé aussi espace tangent), pour toute fonction différentiable numérique f on a $Xf = \langle df(x), X \rangle$; dérivation d'une somme, d'un produit d'une fonction composée ; traduction en coordonnées locales. Formation des espaces tensoriels et des puissances extérieures au point x. Définition de la variété $T^r_s(V)$: c'est l'ensemble somme des espaces tensoriels en chacun des points de V, sur lequel on définit de façon évidente un atlas incomplet à partir d'un atlas incomplet de V ; on a ainsi une variété de classe p-1. Définition analogue des espaces $\Lambda(V)$, $\Lambda^*(V)$; terminologie : tenseurs, multivecteurs, covecteurs en un point; identifier les comultivecteurs avec les tenseurs antisymétriques. Projection sur l'espace de base V. Notations : X vecteur, Ω covecteur, T tenseur, π projection. Exemple du cas où V est un ouvert dans $\mathbb{R}^n$: alors $T^1(V)$ est homéomorphe à $V \times \mathbb{R}^n$ et de même pour les autres, signaler que ce n'est pas vrai en général.

DELT003

19

§ 3 : Prolongements d'une application différentiable.

Si φ application de classe k de U dans V , elle définit une application $f \to f \circ \varphi$ de l'ensemble des fonctions numériques différentiables dans V dans l'ensemble des fonctions numériques différentiables dans U , d'où on déduit une application de $T^1(U)$ dans $T^1(V)$ prolongée de φ par la formule $\varphi(X)f = X(f \circ \varphi)$. D'où le prolongement de φ à $T^r(U)$; c'est une application de classe k-1 . Th. des fonctions composées. Applications constantes. Cas particuliers : U ou V égal à $\mathbb{R}$, U et V ouverts dans des $\mathbb{R}^n$ (raccord avec le chap.I). Homéomorphismes différentiables : on peut alors prolonger à tous les $T^r_s(U)$ (transport de structures) ; on note toujours φ le prolongement, φ^r_s s'il y a lieu. Caractérisation des homéomorphismes différentiables par la différentielle inversible (th. des fonctions implicites) ; invariance de la dimension.

§ 4. Champ de tenseurs. Champ de tenseurs de classe k : application θ k fois différentiable de V dans $T^r_s(V)$ telle que $\pi \circ \theta$ soit l'identité. En particulier, champ de vecteurs, champ de covecteurs = forme différentielle (notation θ , ξ , ω). Champ de scalaires = fonction numérique de classe k . Opérations algébriques sur les champs ; expression par les coordonnées locales. Différentielle d'une fonction numérique : c'est une forme. Noter que tout champ, application de V dans $T^r_s(V)$, peut être canoniquement identifié à une application de $T^s_r(V)$ dans $\mathbb{R}$. Image réciproque ${}^t\varphi$ d'un champ de tenseurs covariants sur V par une application différentiable φ de U dans V : par exemple pour une forme ω sur V c'est la forme $X \to \langle \omega(x), \varphi(X) \rangle$ (changement de variables dans une forme) ; cette opération conserve les opérations multilinéaires sur les tenseurs covariants.

Espaces de Fréchet (quelquefois Banach) de champs de tenseurs k fois différentiables (convergence compacte des champs et de toutes leurs dérivées jusqu'à l'ordre k). L'espace des champs q fois différentiables est dense dans celui des champs p fois différentiables pour $p \leqslant q \leqslant +\infty$ (utiliser une partition de l'unité, d'où passage à $\mathbb{R}^n$).

§ 5 : Sous-variétés. Ensemble U dans une variété V tel que dans tout voisinage de $x \in U$, il existe un système de coordonnées locales pour lequel l'intersection de U et du voisinage s'obtienne en annulant n-p de ces coordonnées ; d'où une structure différentiable (unique) sur U , induite par celle de V . L'app. canonique de U dans V est alors différentiable, toute fonction différentiable sur V a sa restriction différentiable sur U et inversement toute fonction différentiable sur U se prolonge en une fonction différentiable sur V . Le prolongement $T^r(U)$ est une sous-variété de $T^r(V)$; restriction à U d'un champ de tenseurs covariants sur V (image réciproque par l'application canonique).

Exemple : n-p équations $f_i=0$ $(1 \leqslant i \leqslant n-p)$, où les f_i sont de classe k et ont une jacobienne de rang maximum n-p , définissent dans V une sous-variété de classe k (fonctions implicites).

§ 6 : Différentiation extérieure ; transformations infinitésimales.

Une introduction heuristique de la différentiation extérieure (?) : par exemple, condition d'intégrabilité de $df=\omega$ donne $d\omega=0$, puis condition d'intégrabilité de $d\omega = \omega_1$, etc. (?) ; en exercice, montrer que dans $\mathbb{R}^n$, la seule application linéaire covariante (pour les changements de variables différentiables) d'un espace de champ de tenseurs dans un autre est la différentiation extérieure. Définition axiomatique par les axiomes (D_I), (D_{II}), (D_{III}) de Schwartz et la forme affaiblie de (D_{IV}) : $d(f\omega)=df \wedge \omega + f.d\omega$: unicité et existence par passage aux coordonnées locales. Propriété (D_{IV}) forte ; covariance : ${}^t\varphi(d\omega)=d({}^t\varphi(\omega))$.

Définition d'une transformation infinitésimale : champ de vecteurs ξ de classe 1 , opère par déf; sur les fonctions numériques ; on pose $(\xi \,\square\, f)(x) = \xi(x)f$. On peut étendre aux formes df par $\xi \,\square\, df = d(\xi \,\square\, f)$, puis à toutes les formes de degré 1 par $\xi \,\square\, (f.dg) = (\xi \,\square\, f)dg + f.(\xi \,\square\, dg)$, et ensuite à tous les tenseurs par les deux dernières formules (30) de Schwartz ; ou bien donner la déf. directe de Schwartz (Redactor demerdetur !!). Formules en coordonnées locales, formules (30), formules (31) écrites : $\varphi(\xi \,\square\, \theta) = \varphi(\xi) \,\square\, \varphi(\theta)$, ${}^t\varphi(\varphi(\xi) \,\square\, \omega) = \xi \,\square\, {}^t\varphi(\omega)$, permutabilité avec la différentiation extérieure des formes différentielles. Continuité de $(\xi, \theta) \longrightarrow \xi \,\square\, \theta$ dans les espaces de Fréchet de champs de tenseurs. Crochet de deux transf. infinitésimales.

§ 7: <u>Produits de variétés différentiables</u>. Définition, par cartes locales, ou famille des combinaisons linéaires de fonctions $f(x)g(y)$. Projections pr_U , pr_V sont différentiables ; pour que φ application de W dans $U \times V$, soit différentiable, il faut et il suffit que $pr_U \circ \varphi$ et $pr_V \circ \varphi$ le soient. Sous-variétés $\{x_0\} \times V$, $U \times \{y_0\}$; fonctions partielles. Dans l'espace des fonctions de classe p (numériques), les combinaisons linéaires finies de $f(x)g(y)$ sont partout denses. $T_1(U \times V)$ est isomorphe au produit de $T_1(U)$ et $T_1(V)$, de même pour $T^1(U \times V)$; pour les tenseurs, c'est plus compliqué (voir exerc. 7 du § 5 de l'Alg., chap. III) : les combinaisons linéaires de produits tensoriels $\omega(x) \otimes \bar{\omega}(y)$ de formes différentielles sont partout denses dans l'espace des formes différentielles.

Etant donné une forme différentielle ω sur $U \times V$, l'application $X \longrightarrow \langle \omega(x,y), X \otimes Y \rangle$ est une forme différentielle $\omega_{(y,Y)}$ sur U ; $d_U\omega$ est la forme différentielle telle que $\langle X \otimes Y, d_U\,(x,y) \rangle = \langle X, d\omega_{(y,Y)}(x) \rangle$; propriété $d(\omega \otimes \bar{\omega}) = (d\omega) \otimes \bar{\omega}$ qui la caractérise ;

définition analogue de d_V , avec un facteur $(-1)^r$, de sorte qu'on ait $d_U d_V = -d_V d_U$, et par suite $d=d_U+d_V$ sur $U\times V$. Produit de 2 transformations infinitésimales définies sur U et V respectivement.

§ 8 : Formule de l'homotopie. Formule fondamentale de l'homotopie ; application : primitive extérieure d'une forme fermée dans $\mathbb{R}^n$; passage à la formule (32). Application : formule donnant la dualité entre la différentiation et le crochet :

$$\xi \,\square \langle \omega,\eta\rangle - \eta \,\square \langle \omega, \xi\rangle = \langle d\omega, \xi \wedge \eta\rangle - \langle \omega, \xi \,\square\, \eta\rangle$$

Expression en coordonnées locales (formules (41) et (42)).

§ 9 : Equations différentielles et équations complètement intégrables sur une variété différentiable. Traduction pour les équations différentielles des théorèmes généraux. Intégration d'une transformation infinitésimale = noyaux de groupes à un paramètre. Noter qu'une courbe intégrale n'est pas toujours une sous-variété. Invariants intégraux.

Th. de Frobenius (traduction des th. du chap.I) sous les deux aspects, ponctuel et tangentiel, correspondant à la même donnée géométrique. Essayer de rédiger la question du système caractéristique d'un système de Pfaff (voir E. Cartan, Systèmes différentiels extérieurs)

La question des éléments de contact et des prolongements d'ordre supérieur d'une variété est réservée jusqu'à lecture du rapport qu'Ehresmann doit rédiger sur ce sujet.

ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES.

Nouveau plan :

Chap.I : Espaces vectoriels topologiques sur un corps valué complet.

Chap.II: Ensembles convexes dans les espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$.

Chap.III : Espaces localement convexes.

DELT003 23

Chap. IV : Espaces de Banach.

Chap. V : Espaces hilbertiens.

<u>Détail</u> : CHAP.I : Définition d'un espace v.top. sur un corps K valué complet : continuité de $x+y$ et de λx . Conséquences pour les voisinages de 0. Isomorphie. Complétion. Sous-espaces vectoriels et variétés linéaires, espaces quotients, produits d'espaces v.top. ; produits tensoriels (?) .

Ensembles bornés ; réunion finie, adhérence, produit, image par une application linéaire continue. Tout ensemble précompact est borné.

Adhérence d'une variété linéaire. Tout hyperplan fermé est défini par une forme linéaire continue. Tout espace de dimension finie est isomorphe à K^n . Tout espace localement précompact est de dimension finie. Si V est fermé et de codimension finie dans E , E est isomorphe au produit de V et d'un supplémentaire.

Topologies sur l'ensemble des applications linéaires continues d'un esp.v.top. dans un autre ; condition pour qu'on obtienne un esp. v.top. Dual d'un esp.v.top.: topologie faible sur le dual (convergence simple). Dual d'un quotient, dual d'un produit fini. Transposée d'une application linéaire continue u : elle est (faiblement) continue ; pour que u soit biunivoque, il faut et il suffit que ${}^tu(F')$ soit partout dense dans E' . Si u est un homomorphisme, ${}^tu(F')$ est fermé dans E' . Ensemble libre, ensemble total.

CHAP.II : Définition des ensembles convexes. Exemples. Centre de gravité. Image d'un convexe par application linéaire affine. Produit d'ensembles convexes ; intersection d'ensembles convexes, enveloppe convexe d'un ensemble. Cônes convexes ; cône convexe engendré par un ensemble convexe A , de sommet 0 . Points internes ; si x est interne, $y \in A$ (ou est extrémité d'un segment contenu dans A) tout point $\neq y$

DELT003
24

du segment d'extrémités x,y est interne ; corollaire : l'ensemble des points internes est convexe et a tous ses points internes (par rapport à lui-même).

Fonctions numériques convexes : se ramènent aux fonctions convexes dans un segment, donc aux fonctions convexes d'une variable. Semi-normes (fonctions convexes positivement homogènes) ; définition des ensembles convexes par les semi-~~xxx~~ normes.

Théorème de Hahn-Banach ; forme géométrique : si A est un convexe n'ayant que des points internes, V une variété linéaire ne rencontrant pas A , il existe un hyperplan contenant V et ne rencontrant pas A (2 démonstrations, récurrence sur la dimension ou cone maximal) (en exercice, démonstration dans $\mathbb{R}^n$ par compacité de la sphère). Application : séparation de 2 ensembles convexes par un hyperplan, lorsque l'un contient des points internes (former A-B) ; forme analytique de Hahn-Banach. Facettes, variétés d'appui.

Structure complexe : définition, passage de la structure complexe à une structure réelle et vice-versa ; caractérisation d'une forme linéaire complexe par sa partie réelle. Ensembles convexes cerclés, semi-normes pour la structure complexe. Forme analytique du th. de Hahn-Banach pour la structure complexe.

CHAP. III : Deux définitions équivalentes (voisinages convexes, semi-normes). Exemples. Complétion ; sous-espaces, produits, quotients d'espaces localement convexes. Comparaison de topologies localement convexes, continuité d'une application linéaire d'un localement convexe dans un autre. Adhérence d'un convexe, intérieur d'un convexe, corps convexes. L'enveloppe convexe d'un précompact est précompacte.

Th. de Hahn-Banach dans les localement convexes : a) A ouvert convexe non vide, V variété linéaire fermée ne rencontrant pas A , il existe un hyperplan fermé H contenant V et ne rencontrant pas A ; b) A convexe fermé, $x_0 \notin A$, il existe un hyperplan fermé séparant x_0 et A ; conséquences : tout convexe fermé est intersection de demi-espaces fermés, toute variété linéaire fermée intersection d'hyperplans fermés ; c) séparation de deux convexes fermés sans point commun par un hyperplan fermé (lorsque l'un au moins a un point intérieur) ; d) forme analytique ; prolongement d'une forme linéaire continue définie dans un sous-espace vectoriel : e) forme de Krein : prolongement d'une forme linéaire définie dans un sous-espace V , positive dans $V \cap C$, où C est un cône convexe ayant un point intérieur.

Th. de Krein-Milman : tout compact convexe est l'enveloppe fermée convexe de ses points extrémaux (existence d'hyperplans d'appui parallèles à toute direction, l'ensemble est intersection des demi-espaces déterminés par ces hyperplans ; on montre que tout hyperplan d'appui contient un point extrémal, par Zorn appliqué aux variétés d'appui fermées, avec la relation). Contre-exemple de Godement montrant que l'ensemble des points extrémaux n'est pas fermé (double cône dans $\mathbb{R}^3$).

Dual E' d'un espace localement convexe E : E est le dual de E' pour la topologie faible sur E' , d'où topologie faible sur E ; identité des ensembles convexes fortement et faiblement fermés. Dual d'un ensemble convexe dans E (resp. E') ; K^{oo} est l'enveloppe fermée convexe de K . Si U voisinage de 0 dans E , U^o faiblement compact dans E' . Dual d'un sous-espace de E .

Propriétés des ensembles convexes dans $\mathbb{R}^n$: dimension, identité des points intérieurs et internes pour la dimension n , homéomorphie de tout ensemble convexe borné fermé et de la boule fermée, dualité.

DELT003

26

CHAP. IV : Espaces de Fréchet (? , trouver un meilleur nom) : localement convexes, métrisables et complets. Caractérisation des parties équicontinues de $\mathcal{L}(E,F)$, E espace de Fréchet, F espace localement convexe quelconque ; conséquence : lemme de Gelfand. Convergence d'un filtre borné sur $\mathcal{L}(E,F)$, cas particulier d'une suite convergente (simplement) d'app. linéaires continues : la limite est continue. Si E et F sont des espaces de Fréchet, une application linéaire continue de E <u>sur</u> F est un homomorphisme. Conséquences : a) si f est application linéaire de E dans F et si son graphe est fermé dans $E \times F$, f est continue ; b) si $E=V+W$, $V \cap W = \{0\}$, V et W fermés, E est isomorphe à $V \times W$.

Dual d'un espace de Fréchet E (théorie de Schwartz) : topologie forte sur E' : convergence uniforme dans les ensembles bornés de E . Tout ensemble borné dans E' est relativement faiblement compact, et la topologie faible sur un tel ensemble est celle de la convergence simple sur une partie partout dense de E . Bidual E" de E (dual de E' , avec encore la topologie de la convergence uniforme sur les bornés) : E est canoniquement plongé dans E" (en raison du th. de Baire) ; pour que E"=E , faut et suffit que toute partie bornée de E soit faiblement relativement compacte (en exercice, espace de Montel = espace de Fréchet dans lequel toute partie faiblement compacte est aussi fortement compacte : alors dans E' toute partie faiblement compacte est aussi fortement compacte). Dans E' , tout faiblement borné est fortement borné ; conséquence : si E localement convexe quelconque, tout faiblement borné dans E est fortement borné (prendre la topologie définie par une seule semi-norme). Toute application linéaire faiblement continue de E dans F est aussi fortement continue. Dual fort d'un espace quotient et d'un sous-espace de E .

(Pratiquement, toute la théorie de la dualité dans les Banach s'étend aux espaces de Fréchet ; reste spécial aux Banach : la continuité de $\langle x,x' \rangle$ par rapport aux 2 variables, probablement la caractérisation des variétés linéaires faiblement fermées dans E', qu'on ne fera pas dans le texte, et la théorie de Riesz pour les complètement continues). On ne parlera pas en général des espaces uniformément convexes, les propriétés spéciales à ces espaces étant faites uniquement pour un espace hilbertien.

Applications complètement continues. Donner au début des exemples, et la génération des complètement continues comme limite uniforme d'applications de rang fini. Remarquer qu'un filtre faiblement convergent et borné a pour image un filtre fortement convergent. Ensuite, comme dans la rédaction état 2 , en mettant dans le th.1 le fait que $H=H_1$ est de dimension finie, et en énonçant le th.3 avec la notion de codimension. Ajouter la définition des valeurs propres ($u(x)=\lambda x$) le fait qu'elles forment un ensemble dénombrable ayant 0 comme seul point d'accumulation. Orthogonalité pour 2 valeurs propres distinctes.

CHAP. V : Dès le début, dire que l'on a une géométrie hermitienne sur tout sous-espace de dimension 2 ; rappeler l'identité $4\langle x,y\rangle=\langle x+y, x+y\rangle +\ldots$, déjà vue en Algèbre ; remarque 2 (p.154-155) en gros caractères ; faire aussi le passage d'une structure réelle à une structure complexe. Dire ici que l'espace de Hilbert est uniformément convexe (dire géomètriquement ce que çà signifie), et la projection d'un point sur un convexe : elle est caractérisée non plus par l'orthogonalité, mais l'angle obtus (remplacer $=0$ par $\leqslant 0$ dans (5)). Puis tout de suite les variétés orthogonales, seulement après l'application aux hyperplans (formes linéaires continues) ; dans le th.1 , expliciter l'anti-isomorphisme. Faire les produits tensoriels d'espaces de Hilbert (finis, peut-être infinis ?) .

Au § 2, noter qu'une famille orthogonale est toujours linéairement indépendante (au sens topologique). Renforcer le th.4 en imposant à la famille totale de contenir une famille orthogonale donnée. La notion d'isomorphisme de 2 espaces hilbertiens aura dû être faite au § 1 . P. 167-168, remplacer Mazur-Ulam par un raisonnement direct. Les familles biorthogonales sont vidées.

INTÉGRATION.

<u>Nouveau plan</u> :

Chap.I : Espaces de Riesz.

Chap.II : Intégrales de Radon.

Chap.III: Prolongement d'une intégrale de Radon.

Chap.IV : Fonctions sommables.

Chap. V : Les espaces L^p .

Chap. VI: Intégrales de Haar.

Chap.VII: Théorie ergodique (?) .

Chap.VIII : Calcul des probabilités.

<u>Détail</u> :

<u>Chap.I</u> : <u>Espaces de Riesz</u>.

§ 1 : Définition ; exemples (ajouter : espace des fonctions linéaires affines restreintes à un intervalle compact de $\mathbb{R}$). Traduction des propriétés des groupes ordonnés (vues en Algèbre). Engendrement d'un espace de Riesz par un ensemble d'éléments pris comme $\geqslant 0$ (exemples : fonctions convexes dans un intervalle). Sous-espace de Riesz H d'un espace de Riesz : un ☡ pour le cas où sup et inf ne sont pas les mêmes que dans le grand espace (ex. des fonctions linéaires donné ci-dessus) : pour que ce soient les mêmes, il faut et il suffit que pour tout $x \in H$ on ait $|x| \in H$.

§ 2 : Espaces de Riesz absolument réticulés (remplace : cohérent) Suffit que tout ensemble filtrant croissant majoré ait une borne supérieure. Exemples (ex. de $3^{è}$ espèce : fonctions harmoniques). Définition d'une bande ; prop.1 et 2 en exercices, ne garder que le cor. de la prop.2 ; puis faire le th. de Riesz (th.1).

§ 3 : Faire ici la prop.1 de l'ancien chap.I, § 2 . Définir tout de suite les rel. bornées. Fondre en 1 seul th. la caractérisation des rel. bornées et le fait qu'elles forment un absolument réticulé : tout revient à montrer que $L^{+}(x) = \sup_{0 \leqslant y \leqslant x} L(y)$ est additive (par le lemme de décomposition). Donner la formule $\inf(L,M)(x) = \inf_{x=y+z} (L(y)+M(z))$, d'où la condition pour que L et M soient étrangères. Une fois qu'on a ce résultat, les fonctions continues positivement homogènes de formes relativement bornées se définissent par le th. de Stone (approximation par les polynomes latticiels) ; il ne reste de l'ancienne rédaction que le th.3 et la prop.6 (p. 68-70) ; exemple de $3^{è}$ espèce : longueur d'une courbe.

<u>Chap.II</u> : <u>Intégrales de Radon</u>.

§ 1 : Définition d'une intégrale de Radon sur un compact (forme linéaire continue sur l'espace des f. continues) ; remarquer qu'il suffit de la connaître sur un ensemble partout dense. Exemples ; norme d'une intégrale ; décomposition en différence de 2 intégrales positives. Intégrale de Radon sur un localement compact ; définition : continue pour toutes les topologies où les vois. de 0 sont formées des fonctions g telles que $|g| \leqslant a.f$, f fonction continue $\geqslant 0$ à support compact = formes relativement bornées au sens du chap.I. Deux intégrales localement identiques sont identiques. Image d'une intégrale par application continue (avec des hypothèses convenables lorsque E est localement compact) .

§ 2 : Intégrale produit : on la définit pour les $\sum_i f_i(x)g_i(y)$ et on montre que c'est indépendant de la représentation d'une telle fonction par une somme de cette nature ; $\varphi(x) = \int f(x,y)dy$ est continue en x , et $\iint f(x,y)\,dx\,dy = \int \varphi(x)dx$. Exemples en partant de l'intégrale de Cauchy ou des mesures ponctuelles. Produits infinis d'intégrales (sur des compacts).

§ 3 : Intégrale d'une fonction continue à valeurs dans un localement convexe, f(E) étant contenu dans un convexe <u>complet</u> (exemple : f à valeurs dans le dual d'un Banach). On prend la limite de $\sum_i f(x_i) \int \varphi_i d\mu$, suivant le filtrant des partitions continues de l'unité (φ_i). Propriétés à examiner (limite de l'intégrale d'une suite uniformément convergente, Lebesgue-Fubini, etc..).

<u>Chap.III : Prolongement d'une intégrale de Radon.</u>

§ 1 : Intégration supérieure d'une semi-continue inf^t $\geqslant 0$ (finie ou non) ; définition. Propriétés : croissante, limite d'un ordonné filtrant croissant (au moyen du th. de Dini), additive et linéaire (pour les scalaires $\geqslant 0$). Intégrale supérieure d'une fonction $\geqslant 0$ quelconque ; définition. Propriétés : croissante, multiplication par $\lambda \geqslant 0$, convexité pour 2 , convexité dénombrable.

§ 2 : Fonctions négligeables, ensembles négligeables. Propriétés : pour qu'une f soit négligeable, il faut et il suffit que l'ensemble des points où elle est $\neq 0$ soit négligeable. Définition de "R presque partout". Toute fonction d'intégrale supérieure finie est finie presque partout.

§ 3 : Espace des fonctions numériques finies telles que $U^*(|f|) < +\infty$; c'est un espace vectoriel avec la semi-norme $U^*(|f|)$; passage au quotient : classes de fonctions égales presque partout. Espace L^1 adhérence du sous-espace des classes de f.continues ;

DELT003

31

$U(|f|)=0$ entraîne $U(f)=0$ pour f continue, d'où passage au quotient pour U et prolongement à L^1. Définition d'une fonction sommable comme égale p.p. à une fonction appartenant à une classe de L^1 ; définition de U(f) pour une fonction sommable. Propriétés : somme, produit par une constante, si f sommable $|f|$ aussi, d'où pour que f sommable, nécessaire et suffisant que f^+ et f^- le soient ; $U^*(f)=U(f)$ pour f sommable et $\geqslant 0$. Les semi-continues d'intégrale supérieure finie sont sommables. Si f sommable $\geqslant 0$, $(\varphi-g)^+ \leqslant f \leqslant \varphi+g$, φ continue à support compact, g semi-continue inférieurement $\geqslant 0$, U(g) arbitrairement petit ; réciproque.

§4 : Traduction pour les ensembles. Mesure extérieure et ses propriétés. Ensembles mesurables = ensembles de f .caractéristique sommable ; forment un clan. Additivité simple de la mesure. Ouverts et compacts mesurables ; noyau de la mesure. Pour que A mesurable, il faut et suffit qu'il existe un compact K et un ouvert U tels que $K \subset A \subset U$ et que $\mu(U \cap \complement K)$ soit arbitrairement petit.

Ici pourrait se placer l'intégrale forte (int. de Bochner) des fonctions à valeurs dans un Banach, sur laquelle aucune décision ferme n'a été prise ; même méthode de prolongement. Le rédacteur est laissé libre de la mettre où il voudra ; au cas où elle serait définie ici, toutes les propriétés faites au chap.IV pouvent alors être aussitôt étendues à l'intégrale forte ou mieux être rassemblées à la fin du chap.IV en un § spécial.

<u>Chap.IV : Fonctions sommables</u>.

§ 1 : Somme d'une série de f.sommables f_n telle que $\sum_n U(|f_n|) < +\infty$ est sommable et la série converge dans L^1 ; d'où L^1 complet ; de toute suite de Cauchy on peut extraire une suite convergeant vers la limite presque partout ; corollaires (p. 23). Limite d'une suite croissante de f.sommables (th.2, p.25). Th. de Lebesgue sur le passage à la limite (th.3, p.26, et ses corollaires ; ne pas appliquer le th. à un filtre). Traduction pour les ensembles mesurables. Ne pas oublier de faire dans ce § le raccord avec l'intégrale élémentaire (fonctions règlées).

§ 2 : Th. de Lusin pour les fonctions sommables. Définition d'une fonction mesurable sur tout compact, à valeurs dans un espace topologique : par le fait qu'elle satisfait au th. de Lusin. Si $f_1,\ldots,f_n$ mesurables, φ continue numérique, $\varphi(f_1,\ldots,f_n)$ mesurable. Pour que $f \geqslant 0$ soit sommable, faut et suffit que f soit mesurable et d'intégrale supérieure finie ; conséquence : si f_i sommables, continue, $U^*(|\varphi(f_1,\ldots,f_n)|) < +\infty$, $\varphi(f_1,\ldots,f_n)$ sommable ; cas particulier : produit, puissances. Si $f \geqslant 0$ est mesurable, dans un compact $\inf(f,n)$ est sommable pour tout n et réciproquement. D'où toute limite croissante de f.mesurables $\geqslant 0$ est mesurable ; on en déduit que toute limite simple de f.mesurables est mesurable. Ensembles mesurables sur tout compact ; pour que $f \geqslant 0$ mesurable sur tout compact il faut et il suffit que $\overset{-1}{f}(y > \alpha)$ soit mesurable sur tout compact pour tout $\alpha > 0$; toute $f \geqslant 0$ mesurable est limite d'une suite croissante de fonctions étagées mesurables.

Mesure et intégrale induites.

§ 3 : Th. de Lebesgue-Fubini : d'abord pour les semi-continues inférieurement, puis pour les fonctions négligeables, les fonctions sommables et les fonctions mesurables $\geqslant 0$. Traduction pour les ensembles. Si $f(x) \geqslant 0$ et $g(y) \geqslant 0$ sont sommables, $f(x)g(y)$ est sommable ; application aux ensembles. Associativité du produit de mesures. Produits infinis ; les th. de Jessen sont vidés.

Le procédé de calcul de Riemann, l'image continue d'une mesure et la reconstitution de l'intégrale à partir d'une mesure donnée sont vidés : en particulier, on ne saura pas d'une fonction croissante définit une mesure sur $\mathbb{R}$, ou bien il faudra le faire spécialement pour ce cas.

Chap.V : Les espaces L^p .

L'ordre des matières n'est pas déterminé : redactor demerdetur !

Th. de convexité : D convexe fermé dans un Banach, mesure μ telle que $\int d\mu=1$, si $f(E)\subset D$, $\int f\, d\mu \in D$ (application triviale de Hahn-Banach, D est le lieu des $\int f\, d\mu$ quand μ varie, s'il est l'enveloppe convexe fermée de f(E). Lorsque $D\subset \mathbb{R}^n$, cas limites avec les facettes. Applications : Hölder, Minkowski (avec les cas d'égalité), inégalité de la moyenne géométrique (?) .

Définition des L^p : $f\in L^p$ si $\operatorname{sgn} f.|f|^p\in L^1$ (avec l'analogue pour f complexe). Th. de Mazur : $f \to \operatorname{sgn} f.|f|^p$ est une application uniformément continue dans toute boule, la réciproque $f \to \operatorname{sgn} f.|f|^{1/p}$ est uniformément continue dans L^1 ; d'où le fait que les L^p $(p<+\infty)$ sont tous complets. Définition de L^∞ ; il est complet.

Inégalités de Marcel Riesz (voir la thèse de Thorin, récemment parue).

Th. de Lebesgue-Nikodym : 1) sur un compact, si μ et ν sont deux mesures $\geqslant 0$ telles que $\nu \leqslant \mu$, on a $d\nu = f\, d\mu$, f sommable. ; 2) sur un compact, ν absolument continue par rapport à μ , on a $\nu = \sup_n (\inf(\nu, n\mu))$ d'où par passage à la limite, $d\nu = f\, d\mu$; condition d'absolue continuité : $\mu A=0$ entraîne $\nu A=0$; 3) décomposition générale $d\nu = f\, d\mu + d\sigma$, par le th. de Riesz. Passage aux réunions dénombrables d'ensembles de mesure finie. Pour démontrer 1), 2 méthodes : passage par L^2 autodual, ou décomposition spectrale, en utilisant le fait que l'espace des mesures de Radon est absolument réticulé. Application à la dualité des L^p (autre démonstration de Schwartz pour $p>1$).

Le Congrès reporte l'étude des chap.VI, VII et VIII à une session ultérieure. En dehors de ces 3 chapitres spéciaux, reste à caser dans la partie générale(5 premiers chap.) :

1) Topologie vague sur l'espace des mesures de Radon (cas compact et cas localement compact) ; $\int f\, d\mu$ est fonction continue de μ si f est continue, semi-continue inf^t si f est semi-continue inf^t. Relation avec les topologies faibles des L^p.

2) Mesure quotient (à débrouiller par Cartan et Godement).

3) Intégrale faible (n'est pas absolument indispensable pour la mesure quotient, mais bien pour le problème inverse : intégrer des mesures de Radon données sur les fibres, par rapport à une mesure de Radon donnée sur l'espace quotient (Kryloff-Bogoliouboff, applications à la théorie ergodique)) ; il faudrait donc, au minimum, savoir intégrer une fonction à valeurs dans une boule d'un dual F' d'un Banach F, c-à-d. essentiellement savoir (th. de Dunford) que son intégrale faible prend ses valeurs dans la même boule ; çà peut se faire indépendamment des prolongements, en définissant f faiblement sommable si chaque fonction numérique $\langle f,a \rangle$ (a constant dans F) est sommable.

4) Question de l'intégration par rapport à une mesure à valeurs dans un espace de Riesz (ex.: décomposition spectrale des opérateurs).

On vide les mesures k-dimensionnelles, la caractérisation des mesures de Radon comme fonctions additives d'ensembles définies sur certains clans (théorie de Cartan), la dérivation des fonctions d'ensemble par des familles dérivantes (th. de Vitali) ; on ne dira donc pas que l'intégrale d'une fonction sommable a presque partout une dérivée égale à la fonction.

TOPOLOGIE ALGÉBRIQUE.

On envisage 3 rapports : un sur l'homologie, un sur la théorie élémentaire de l'homotopie, un sur les espaces fibrés et feuilletés. Pour le rapport sur l'homologie, on adopte le plan provisoire suivant :

I. Complexes simpliciaux : définition, isomorphisme, réalisation topologique (une topologie et une structure affine), subdivision barycentrique ; recouvrements ouverts d'un compact et complexes simplicaux.

II. Théorie algèbrique des groupes abéliens avec opérateurs différentiels : endomorphisme d de carré nul, avec la condition $d.p_n=p_{n+1}.d$ pour les opérateurs de projection s'il y a une structure graduée ; groupes $Z(G)=\overset{-1}{d}(0)$, $B(G)=d(G)$, $H(G)=Z(G)/B(G)$. Sous-groupes stables (pour tous les opérateurs) homomorphismes. Exemples : chaines (ordonnées ou orientées), formes différentielles. Relativisation. Suites exactes. Homologie relative dans un complexe simplicial : nombres de Betti, torsion, polynome de Poincaré. Dualité (cochaines). Produits tensoriels ; th. de Künneth, coefficients universels. Produit dual (?). Opérateurs d'homotopie. Théorie de Bockstein (?) ; cohomologie des groupes et des algèbres (?). Introduction des anneaux (par la diagonale (?)).

III. Homologie singulière. Simplexe singulier : image continue d'un simplexe euclidien ordonné, à une affinité près dans l'espace euclidien. Bord $\partial(a_0,a_1,\ldots,a_p)=(a_1,\ldots,a_p)-(a_0,a_2,\ldots,a_p)+\ldots$, on a $\partial\partial=0$, d'où groupe abélien gradué avec opérateur différentiel. Cochaines, cohomologie singulière. Le groupe d'homologie singulière d'un espace associé à un complexe abstrait est isomorphe au groupe d'homologie de ce dernier. Homologie des boules et sphères. Relation entre l'homotopie géomètrique et la chain-homotopy.

Cohomologie de Čech : fonctions d'un nombre fini de points de l'espace, on identifie deux f qui prennent les mêmes valeurs dans un voisinage. Bord $\partial f(a_0,a_1,\ldots,a_p)=f(a_1,a_2,\ldots,a_p)-f(a_0,a_2,\ldots,a_p)+\ldots$

IV : Théorie des faisceaux de Cartan. Théorème d'unicité, qui donne : le th. de de Rham, la dualité des variétés (dualité entre le groupe de cohomologie de Cech de A et le groupe d'homologie singulière de E/(E-A)), les intersections, l'identité de la cohomologie singulière et de la cohomologie de Cech pour les "bons espaces", et l'intégration des formes différentielles (th. de Stokes).

ENGAGEMENTS DU CONGRÈS :

<u>Cartan</u> : rédige, pour Février 1949 au plus tard, le rapport sur l'homologie (essentiellement son cours de Harvard).

<u>Chabauty</u> : fait un rapport sur le Livre des fonctions analytiques.

<u>Chevalley</u> : rédige un chapitre sur les anneaux locaux, valuations et anneaux noethériens.

<u>Delsarte</u> : rédige l'état 2 du Fascicule de résultats de Topologie générale.

<u>Dieudonné</u> : rédige l'état 4 des chap.I et II des Ensembles, l'état 3 des Espaces vectoriels topologiques, l'état 2 du chap. sur les formes bilinéaires et quadratiques, et la fin de l'Intégration.

<u>Ehresmann</u> : rédige, pour Janvier, un rapport sur les espaces fibrés et feuilletés, et un autre rapport sur les éléments de contact (d'ordre 1 et d'ordre supérieur) dans les variétés différentiables.

<u>Eilenberg</u> : prépare, en collaboration avec Weil, un rapport sur l'homotopie élémentaire.

<u>Godement</u> : rédige, pour Janvier, les chap.I-IV de l'Intégration état 4 , et le chap. V pour Juin .

Pisot : rédige un rapport sur le Calcul des probabilités.

Roger : rédige l'état 1 des Variétés différentiables (pour Avril).

Samuel : rédige l'état 2 du chap. sur les anneaux primitifs (pour Décembre 1948).

Schwartz : prépare, pour la fin de l'année scolaire 1948-49, un rapport sur les groupes de Lie.

Weil : Rédige l'Introduction des Ensembles et l'état 3 de la Divisibilité, et collabore avec Eilenberg pour un rapport sur l'homotopie élémentaire.

PROCHAINS CONGRÈS .

1) Congrès d'Octobre (5 jours, fin Octobre 1948 à Nancy). Programme : lecture des Séries formelles (Appendice au chap.IV d'Algèbre) et des Corps commutatifs (chap.V, état 4) en vue des rédactions définitives. Lecture des 2 premiers §§ du chap.IV (O et o) et du chap.V (Equations différentielles) du Livre élémentaire, en vue de rédaction définitive.

2) Congrès de Février (5 jours début Février 1949, à Nancy). Programme : lecture de la Divisibilité état 3 (rédaction Weil), des Anneaux primitifs état 2 (rédaction Samuel) et du Fascicule de résultats de Top.gén. (rédaction Delsarte).

3) Congrès oecuménique de Pâques 1949 : se tiendra en principe pendant toutes les vacances de Pâques, du 10 au 24 Avril, dans un endroit à la campagne, à déterminer (de préférence dans un climat pas trop froid). Programme : Ensembles (Introduction et chap. I-II, état 4, en vue de rédaction définitive) ; Espaces vectoriels topologiques (état 3) ; Intégration chap. I-IV (état 4 , en vue de rédaction définitive) ; Topologie algèbrique (rapports Cartan et Eilenberg-Weil) .

ETAT DES PUBLICATIONS :

Le fasc. IX (Livre élémentaire, chap. I-II-III) est sous presse. Le fasc. X (Top.gén.,chap.X et Dictionnaire) sera envoyé à Freymann avant la fin Août. Le fasc. XI (chap.IV et V d'Algèbre) devrait être remis à l'impression vers la fin de l'année, après la dernière lecture du Congrès d'Octobre. On prévoit ensuite : fasc. XII : fin du Livre élémentaire ; fasc. XIII : fascicule de résultats de Top. gén.

A tous, salut et bénédiction.
