LA TRIBU N°7

COTE DELT 001

TEXTE La Tribu
(Bulletin œcuménique, apériodique et bourbachique)
15/IV/1944

FONDS Jean Delsarte

NOMBRE DE PAGES NUMÉRISÉES 8

NOMBRE DE FEUILLES PRISES EN COMPTE 8

DELT001

LA TRIBU

(Bulletin oecuménique, apériodique et bourbachique)

n° 7 - 15 Avril 1944

Bien que n'ayant pas déclanché d'évènements sensationnels, le récent Congrès Bourbaki qui s'est tenu à Paris du 6 au 8 Avril 1944 n'en a pas moins réalisé un progrès important et depuis longtemps souhaité par la Rédaction : le démarrage de la Topologie algébrique. Grâce à l'important travail préparatoire accompli depuis 3 mois par Cartan, et à la compétence technique de Charles, le Congrès a pu se faire une première idée d'ensemble des matières à traiter, et dresser un plan assez détaillé des premiers chapitres à rédiger ; la mise en train de cette rédaction est prévue pour le début de la prochaine année scolaire, au plus tard.

I. Plan général. En vue de circonscrire plus nettement le noyau central de la Topologie algébrique qui appartient aux "Structures fondamentales", le Congrès est d'abord amené à faire un vaste inventaire de toutes les branches s'y rattachant plus ou moins directement, et à prendre des décisions (provisoires) concernant certaines d'entre elles :

a) On ne traitera pas la théorie des "courbes" au sens de Menger (compacts à 1 dimension) ; tout au plus y aura-t-il peut-être lieu d'en tirer des exercices ou exemples pathologiques. Même décision au sujet des graphes (complexes à 1 dimension) ; de même (malgré l'insistance de Charles) pour les continus péaniens (compacts connexes et localement connexes), et plus généralement la théorie des continus (compacts connexes), notamment continus irréductibles, continus indécomposables, etc. (voir travaux de l'école polonaise et de l'école américaine de R.L. Moore et Whyburn).

b) On réserve jusqu'à plus ample informé la question de la place éventuelle à donner aux problèmes spéciaux de topologie des R^n, notamment les problèmes de position des compacts plongés dans R^n (accessibilité, caractérisation des frontières, bouts premiers, etc..) Charles est chargé d'un rapport sur ces questions, pour une date qu'il vaut mieux laisser indéterminée.

c) Il n'est pas question de faire un chapitre sur la théorie des noeuds : ceux-ci n'interviendront que comme exemples d'application des théories générales. De même pour les diverses études particulières sur les variétés à plus de deux dimensions.

d) La théorie des groupes d'homotopie supérieurs (Hurewicz) et celle des espaces fibrés apparaissent au Congrès comme pleines d'intérêt et d'avenir, mais leur état présent semble trop larvaire pour pouvoir dès maintenant faire l'objet d'un exposé didactique. Ici encore, on attendra pour prendre une décision plus motivée un rapport détaillé de Charles sur ces théories.

Le terrain étant ainsi déblayé, le Congrès adopte le premier projet suivant de plan général :

Chapitre I . Dualité dans les groupes topologiques.

Chapitre II . Complexes euclidiens et complexes abstraits.

Chapitre III . Groupes d'homologie.

Chapitre IV . Classes d'applications continues et prolongements d'application continues. Théorie de la dimension (1 ou 2 chap.)

Chapitre V . Variétés.

Chapitre VI . Groupe de Poincaré. Revêtements (1 ou 2 chapitres).

II. Détail des chapitres. Chap.I. Ce chapitre préliminaire n'a rien à voir en principe avec la Topologie algébrique ; c'est plutôt un chapitre d'Algèbre topologique, qui pourrait aussi bien se placer à la fin de la Topologie générale. Toutefois, il est décidé de le laisser en tête de la Topologie algébrique, étant donné qu'il renferme les outils essentiels pour la théorie de l'homologie, et qu'il est plus commode pour le lecteur de cette dernière de l'avoir immédiatement sous la main.

Détail : Définition de la limite projective et de la limite inductive d'une famille de groupes topologiques ; étude de leur topologie (la définition à donner est celle du rapport Cartan, tout au moins pour la limite projective ; elle est plus générale que celle du fasc. Weil ; pour la topologie de la limite inductive, confronter le rapport Cartan et le mémoire de Freudenthal (Comp.Math.,t.4), à débrouiller).Définition d'une représentation d'une limite projective (resp. inductive) de G_α dans une limite projective (resp. inductive) de H_α , par des représentations de G_α dans H_α .

Dualité dans les groupes localement compacts abéliens : essentiellement toute la partie de la théorie qui peut se faire sans la mesure de Haar et Peter-Weyl (dual d'un groupe quotient, transposée d'un homomorphisme, dualité des groupes "élémentaires", dual d'un groupe discret, le dual du dual est dans ce cas identique au groupe discret initial). Dualité entre limite projective et limite inductive (débrouiller la question, à l'aide du 1er papier Cartan et du fasc.Weil).

Chap.II. Détail : Ensembles convexes dans un R^n ; définition, exemples; points internes, dimension ; tous les convexes ouverts de même dimension sont homéomorphes, de même tous les convexes compacts de même dimension . Produit de deux ensembles convexes. Enveloppe convexe d'un ensemble : elle est compacte si l'ensemble est compact.

Polyèdre convexe = enveloppe convexe d'un ensemble fini. Sommets faces, hyperplans d'appui, dualité (voir Alexandroff-Hopf, et aussi un article de H.Weyl dans Commentarii, 1932). Simplexe à n dimensions.

Complexe cellulaire euclidien (formé de polyèdres convexes en nombre fini) ; complexe simplicial euclidien (ou <u>polytope</u>). Subdivisòon simpliciale d'un complexe cellulaire (récurrence sur le nombre de dimensions).

Schéma d'un complexe cellulaire (ensemble ordonné fini) ; schéma d'un complexe simplicial (le schéma est déterminé lorsqu'on connait les sommets de chaque simplexe).

Définition d'un complexe simplicial abstrait. Applications simpliciales de complexes abstraits et de complexes euclidiens. Réalisation euclidienne d'un complexe simplicial abstrait de dimension n , dans un R^{2n+1}

Déformation continue d'une application d'un espace topologique dans un polytope. Théorème d'approximation simpliciale d'une application continue d'un polytope dans un autre.

Nerf d'un recouvrement fini (quelconque) : c'est un complexe simplicial. Recouvrement canonique d'un polytope (2è papier Cartan) ; son nerf a même schéma que le polytope. Définition de la dimension d'un espace compact.

Orientation d'un R^n ; applications linéaires affines directes et rétrogrades. Orientation d'un hyperplan déterminée par celle de l'espace ambiant et la donnée d'un des demi-espaces définis par l'hyperplan. Conséquence pour un polyèdre convexe : en associant à l'hyperplan d'une face le demi-espace contenant le polyèdre, on oriente cet hyperplan, et, par récurrence sur le nombre de dimensions des faces, on oriente chacune des variétés linéaires contenant une face ; par cette méthode, une face à $n-2$ dimensions reçoit 2 orientations opposées provenant des faces à $n-1$ dimensions qui la contiennent. Inversement, la donnée d'une suite de faces $(F_k)_{0 \leq k \leq n}$, où F_k est face à k dimensions de F_{k+1}, détermine de proche en proche une orientation de tout l'espace : c'est par définition orienter le polyèdre. Cas du simplexe, traduction dans le schéma simplicial.

Chap.III : Détail : § 1 : Groupes d'homologie d'un complexe abstrait.

Chaînes entières = fonctions définies dans l'ensemble des simplexes orientés, à valeurs dans Z, telles que $f(-\sigma)=-f(\sigma)$ pour tout complexe. Elles forment un Z-module G. Base canonique de G obtenue en choisissant arbitrairement une orientation pour chaque simplexe.

Bord d'un simplexe, bord d'une chaîne ; la fonction "bord" est un endomorphisme φ de G tel que $\varphi\circ\varphi = 0$.

Le Z-module G est isomorphe au Z-module G^* des représentations de G dans Z ("dual" au sens algébrique) ; l'endomorphisme φ de G transposé de φ, c'est-à-dire tel que $\varphi^*\circ x^* = x^*\circ\varphi$, est par définition la fonction "co-bord". Réciprocité de la relation entre G et G^*. Théorie analogue pour les chaînes "modulo un sous-complexe H", en remplaçant φ par la fonction "bord modulo H".

Réduction du module G à une forme canonique relative à l'endomorphisme φ (diviseurs élémentaires) ; séparation des chaînes des diverses dimensions ; réduction correspondante de G^*. Théorie analogue pour les chaînes modulo H.

Groupe de chaînes à coefficients dans un groupe abélien topologique g (tel que toute représentation continue d'un g^m dans un g^n soit un homomorphisme ; on pratique, on se limitera à Z, Z/(2), R et T).

DELT 001

7

On définit G_g comme le groupe des représentations continues de G^* (discret) dans g , topologisé par la structure de la convergence simple ; la fonction bord φ_g est par définition $\varphi_g(x) = x \circ \varphi^*$. Définition duale de G^*_g . Si g et g' sont en dualité, G_g et $G_{g'}$ sont en dualité.

Cycles (tels que $\varphi_g(x)=0$) ; cocycles (tels que $\varphi^*_g(x)=0$). Cycles et cocycles homologues à 0 ; groupes d'homologie et de cohomologie. Relation entre ces groupes lorsque g et g' sont en dualité.

Théorie parallèle pour les chaînes modulo H . Représentations canoniques et théorèmes d'isomorphisme (1er papier Cartan, p.1 et 2 compléter en considérant plus généralement 3 complexes K,H,L tels que $K \supset H \supset L$, le cas du papier Cartan est le cas où L est vide). Le 4è th. d'isomorphisme correspond au cas où le groupe des chaînes G (modulo H) est somme directe de groupes G_i tels que $\varphi(G_i) \subset G_i$.

Représentation des groupes d'homologie et cohomologie définie par une application simpliciale f (on a $f \circ \varphi = \varphi \circ f$, $f \circ \varphi^* = \varphi^* \circ f$). Transitivité. Si 2 applications simpliciales sont telles que les transformés d'un même simplexe par les 2 applications appartiennent à un même simplexe, elles définissent la même représentation des groupes d'homologie.

§ 2. Groupes d'homologie et de cohomologie des espaces compacts.

Suivre le papier Cartan (p.5-16). En plus, définition des groupes de cohomologie comme limite inductive des groupes de cohomologie des nerfs des complexes K_α ; voir comment s'étendent aux groupes de cohomologie tous les théorèmes sur les groupes d'homologie. Définir aussi le groupe de Lefschetz en un point, et éventuellement les groupes d'homologie et de cohomologie des espaces localement compacts (rapport Cartan, p.28-31).

Débrouiller la question des groupes d'homologie et cohomologie d'un espace produit (th. de Künneth).

§ 3. Groupes d'homologie des complexes cellulaires.

Groupes d'homologie de B_n et S_n (mais non de leurs sous-ensembles). Questions d'orientation (isomorphismes canoniques). Calcul des groupes d'homologie d'un complexe cellulaire (papier Cartan, p.22-25). Nombreux exemples (en particulier $P_n(R)$, $P_n(C)$, T^n , produits de sphères, "Linsenraüme", etc..).

§ 4. Topologie des surfaces. Triangulabilité des surfaces (th. de Rado, Acta Szeged , t.2,p.101). Classification des surfaces par leur groupe d'homologie.

§ 5. Invariance du domaine. Voir papier Cartan, p.17-20 ; interprèter avec la notion de groupe de Lefschetz en un point.

Chap. IV. Voir les 2è et 3è papiers Cartan, ainsi que les mémoires de Hopf , Freudenthal, Borsuk et Eilenberg.

Chap. V. Les questions devant figurer dans ce chapitre ne sont pas encore au point. Il s'agit essentiellement d'arriver au th. de dualité d'Alexander-Pontrjagin. Cartan se propose de débrouiller prochainement la question, en vue d'arriver à une démonstration pour les variétés non triangulables (cf. les mémoires de Cech et Flexner, qui feraient la dualité dans ce cas). Cartan se propose aussi de voir si le th. ne s'étendrait pas aux "multiplicités cantoriennes" d'Urysohn.

Dans ce chapitre figurera également la théorie du degré topologique (application des résultats de la théorie de l'homologie), et celle des points fixes.

Chap.VI. Le groupe de Poincaré sera défini en principe comme les groupes d'homologie, c'est-à-dire d'abord pour un complexe abstrait, puis par passage à la limite projective. Il faudra raccorder ensuite à tout ce qui précède le projet Bourbaki sur les revêtements.
