COTE : DELMS 006

AUTEUR : Henri Cartan

TITRE : (BOURBAKI) Ensembles
(Rédaction Cartan intiale)

Présenté en décembre 1935
Manuscrit autographe de H. Cartan

FONDS : JEAN DELSARTE

Nombre de pages numérisées 015
Nombre de feuilles prises en compte 009

Manuscrit non retouché, tel qu'il fut présenté à Bourbaki en décembre 35

Ensembles

~~Relation entre les opérations sur les sous-ensembles de $\mathcal{F}$, les opérations sur les fonctions caractéristiques, et la question des fonctions propositionnelles.~~

(Rédaction Cartan initiale)

1 _ Ensembles

Nous admettons la notion d'<u>ensemble</u>. Un ensemble d'objets $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \dots$ est un nouvel objet E, qui est défini lorsque les objets $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \dots$ sont connus, [et qui, inversement, définit ces objets]. On dit que l'ensemble E se compose des objets $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \dots$, et, inversement, que les objets $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \dots$ appartiennent à l'ensemble, ou encore que ce sont des <u>éléments</u> de l'ensemble E. Pour exprimer qu'un objet $\underline{a}$ appartient à un ensemble E, on écrit

$$a \in E .$$

Deux ensembles E et F sont dits <u>égaux</u> ou <u>identiques</u> s'ils se composent des mêmes éléments ; on écrit

$$E = F.$$

L'ensemble E qui se compose des objets $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \dots$ se note parfois

$$E = \{a, b, c, \dots\},$$

l'ordre des lettres étant indifférent (1). Un ensemble composé d'un seul élément $\underline{a}$ se note

$$\{a\}.$$

<u>Exemples d'ensembles</u> : l'ensemble des nombres naturels inférieurs à 10 ; — l'ensemble de tous les nombres naturels ; l'ensemble des nombres naturels impairs ; — l'ensemble des points d'un plan ; — l'ensemble des droites de l'espace à trois dimensions.

---

2 _ Fonctions

Considérons deux ensembles X et Y. Supposons une <u>loi</u> qui associe à chaque élément $\underline{x}$ de X un élément bien déterminé de Y ; ~~soit~~ désignons par

$$y = f(x)$$

cet élément.

On dit que $f(x)$ est une <u>fonction</u> définie sur l'ensemble X, et que cette fonction réalise une <u>application</u> de l'ensemble X <u>dans</u> l'ensemble Y.

---

(1) Cette notation ne suppose même pas qu'il soit possible de ranger tous les éléments de l'ensemble E dans un ordre déterminé.

Argument

$\underline{x}$ s'appelle la variable ; l'élément $y = f(x)$ qui correspond à $\underline{x}$ s'appelle l'image de $\underline{x}$ dans Y par la fonction $f(x)$.

Etant donnée une fonction $f(x)$, on peut, ~~se proposer~~ à chaque élément $\underline{y}$ de Y, faire correspondre les éléments $\underline{x}$ dont il est l'image ; il se peut qu'il n'y ait pas de tels éléments, ou qu'il y en ait un seul. On dit que la fonction $f(x)$ réalise une application biunivoque de X sur Y lorsque chaque élément de Y est l'image d'un élément de X et d'un seul. Dans ce cas, la loi qui, à chaque $\underline{y}$ de Y, fait correspondre le $\underline{x}$ de X dont il est l'image, définit une fonction sur l'ensemble Y ; cette fonction réalise une application biunivoque de Y sur X, et porte le nom de fonction inverse de la fonction $f(x)$; on la note

réciproque

$\overset{-1}{f}$

$$x = f^{-1}(y).$$

On dit aussi que les ensembles X et Y sont en correspondance biunivoque par le moyen des fonctions $y = f(x)$ et $x = f^{-1}(y)$.

Etant donnés deux ensembles quelconques X et Y, il n'est pas toujours possible de les mettre en correspondance biunivoque ; lorsque c'est possible, on dit qu'ils ~~sont équivalents, ou encore qu'ils~~ ont même puissance. L'équivalence se note

$$X \sim Y \quad \text{ou} \quad Y \sim X.$$

Etant donnés trois ensembles X, Y, Z, si l'on a ~~il est clair que les équivalences simultanées~~

$$X \sim Y \quad , \quad Y \sim Z,$$

~~entraînent~~ on a aussi

$$X \sim Z$$

(on dit que la loi d'équivalence est transitive).

Fonction de fonction

Exemples.– Les ensembles équivalents à l'ensembles des nombres naturels (2) $1, 2, \ldots, n$ sont les ensembles de $\underline{n}$ objets. Un ensemble de $\underline{n}$ objets n'est ~~que~~ équivalent à un ensemble de $\underline{n'}$ objets que si $n = n'$. Un ensemble est dit fini s'il existe un nombre naturel $\underline{n}$ tel que l'ensemble contienne $\underline{n}$ objets ; sinon, il est dit infini.

L'exemple le plus simple d'ensemble infini est fourni par l'ensemble de tous les nombres naturels

$$\{1, 2, \ldots, n, \ldots\} \;;$$

tout ensemble équivalent à cet ensemble est dit dénombrable. Nous verrons (§) qu'il existe des ensembles infinis non dénombrables.

~~Etant donné un ensemble dénombra~~

Notation indicielle.– Soit I un ensemble, et soit $f(i)$ une fonction réalisant une application de I dans un ensemble E. Au lieu de noter $f(i)$ l'élément de E qui correspond à $\underline{i}$, on peut le noter a_i. On donne alors à $\underline{i}$ le nom d'indice (a_i se lit : $\underline{a}$ indice $\underline{i}$).

(2) On admet que le lecteur sait compter.

Par exemple, si I est l'ensemble des nombres naturels, les éléments a_i correspondants constituent ce qu'on appelle une suite ~~illimitée~~ dénombrable

$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$

d'éléments pris dans l'ensemble E.

On peut caractériser les ensembles dénombrables par la condition que leurs éléments puissent être rangés en une suite ~~illimitée~~ dénombrable, chaque élément figurant une fois et une seule dans la suite.

Exemples d'ensembles dénombrables. –

L'ensemble des nombres pairs est dénombrable ; il suffit en effet de les ranger par ordre de grandeur croissante pour ~~mettre~~ en faire une suite ~~illimitée~~ dénombrable. Plus généralement, tout ensemble infini de nombres naturels est dénombrable.

L'ensemble des nombres rationnels (entiers et fractions) est dénombrable. En effet, chaque ~~fract~~ nombre rationnel peut être mis d'une façon et d'une seule sous la forme d'une fraction irréductible. Pour ranger tous les nombres rationnels en une suite ~~illimitée~~ dénombrable, il suffit d'écrire d'abord les fractions irréductibles dont la somme des termes est égale à 2, puis celles dont la somme des termes est égale à 3, et ainsi de suite.

---

3 – Sous-ensembles d'un ensemble fondamental.

Etant donné un ensemble A, on peut être amené à considérer, parmi les éléments de A, ceux qui jouissent d'une certaine propriété ; ces éléments, s'il en existe, constituent un ensemble B qu'on nomme sous-ensemble ou partie de l'ensemble A. Par exemple, ~~les~~ l'ensemble des nombres naturels premiers est un sous-ensemble de l'ensemble de tous les nombres naturels.

~~Un sous-ensemble B d'un ensemble A peut contenir tous les éléments de A~~
~~On convient de considérer l'ensemble A comme l'un de ses sous-ensembles ; il~~

] Il se peut ~~en effet~~ que les éléments de A jouissent tous de la propriété qui sert à définir le sous-ensemble B ; pour cette raison, on convient de regarder A comme sous-ensemble de A lui-même. Si aucun élément de A ne jouit de la propriété envisagée, on convient de parler encore de l'« ensemble » des éléments de A qui jouissent de cette propriété, et on dit que c'est un ensemble vide ; on étend donc ainsi légèrement le sens donné au mot « ensemble ».

Pour exprimer qu'un ensemble B est sous-ensemble de A, on écrit

$$\cancel{B \subset A},$$

~~et, lorsqu'on veut préciser que B n'est pas identique à A,~~

$$B \subset A.$$

Dans certains cas, on est amené à ne considérer que des sous-ensembles d'un même ensemble ; on donne alors à ce dernier ~~l'ensemble fo~~ le nom d'ensemble fondamental.

Soit F un ensemble fondamental ; les sous-ensembles de F peuvent être envisagés comme de nouveaux objets, et ces objets peuvent à leur tour faire partie d'autres ensembles ; un ensemble dont les éléments sont des sous-ensembles de $\mathfrak{F}$ sera souvent dénommé, pour des raisons de phonétique, <u>famille de sous-ensembles</u> (3), ~~et on~~ au lieu de : ensemble de sous-ensembles.

<u>Partage en classes et relation~~s~~ d'équivalence.</u>

Etant donné un ensemble fondamental $\mathfrak{F}$, nous disons que $\mathfrak{F}$ est partagé en <u>classes</u> ~~xxxx~~ lorsqu'on a une famille de sous-ensembles de $\mathfrak{F}$, telle que chaque élément de $\mathfrak{F}$ appartienne à un sous-ensemble de la famille et à un seul. Les sous-ensembles en question prennent alors le nom de <u>classes</u>.

Etant donné un partage en classes de l'ensemble fondamental $\mathfrak{F}$, on peut ~~convenir~~ de dire qu'un élément x de $\mathfrak{F}$ est <u>équivalent</u> à ~~un élément x~~ un élément x' de $\mathfrak{F}$ si ~~deux éléments de $\mathfrak{F}$ sont <u>équivalents</u> s'ils appartiennent~~ x et x' appartiennent à la même classe. ~~On exprime que x et x' sont équi~~ On écrit alors

$$x \sim x'_{*}.$$

~~et on di~~

On remarquera que cette convention satisfait aux trois conditions suivantes :

1°. $x \sim x$ (la loi d'~~l'~~équivalence est réflexive)

2°. si $x^{*} \sim x'$, alors $x' \sim x^{*}$ (la loi d'~~l'~~équivalence est symétrique)

3°. les relations

$$x \sim x' \quad \text{et} \quad x' \sim x''$$

entraînent

$$x \sim x'' \quad \text{(la loi d'équivalence est transitive).}$$

Inversement, donnons-nous <u>a priori</u> une relation d'équivalence entre les éléments de $\mathfrak{F}$, c'est-à-dire une loi réflexive, symétrique et transitive. Appelons alors <u>classe de l'élément x</u> le sous-ensemble des éléments qui sont équivalents à <u>x</u>. Les classes de deux éléments équivalents sont identiques, celles de deux éléments non équivalents n'ont pas d'élément commun. Si nous admettons que l'on a alors le droit de considérer ~~alors~~ l'ensemble de toutes les classes, il s'ensuit que la relation d'équivalence définit un partage en classes.

A chaque ~~Une~~ fonction $f(x)$ définie sur l'ensemble fondamental, on peut faire correspondre un partage en classes, en convenant que deux éléments ~~sont sont~~ <u>x</u> et <u>x'</u> sont équivalents si

$$f(x) = f(x').$$

Réciproquement, ~~à~~ chaque partage en classes correspond à une fonction, savoir celle qui, à chaque élément <u>x</u>, associe, dans l'ensemble des classes, la classe de l'élément <u>x</u>.

+ <u>Exemple</u>.. Le cas le plus simple est celui où $\mathfrak{F}$ est partagé en <u>deux</u> classes ; ~~il~~ ce cas correspond aux <u>fonctions à deux valeurs</u> définies sur $\mathfrak{F}$. ~~On ne~~ On ne restreint pas la généralité en supposant que ces valeurs ~~sont~~ ~~sont des nombres, égaux par exemple à~~ <u>zéro</u> et <u>un</u>.

---

(3) Nous verrons plus loin (§) que nous admettons qu'on a le droit de considérer la famille de <u>tous</u> les sous-ensembles d'un ensemble $\mathfrak{F}$ ~~donné~~ supposé donné.

~~restreint pas la généralité~~

Un partage en deux classes est ~~défini~~ ~~caractérisé~~ ~~par~~ défini quand on connaît l'une des classes, (par exemple celle où $f = 1$;) l'autre classe s'ensuit. ~~Inversement,~~ Étant donné arbitrairement ~~un~~ un sous-ensemble E de l'ensemble fondamental, on appelle ~~son~~ sous-ensemble complémentaire, et on note $\complement E$, le sous-ensemble des éléments de $\mathfrak{F}$ qui n'appartiennent pas à E ; on appelle fonction caractéristique de E la fonction égale à un en chacun des éléments de E, à zéro en chacun des éléments de $\complement E$.

---

4 - Opérations sur les sous-ensembles d'un ensemble fondamental

Lorsqu'aucune confusion ne sera possible, nous appellerons ensembles (tout court) les sous-ensembles de l'ensemble fondamental.

Soit $\mathfrak{F}$ un ensemble fondamental, et soit I un ensemble d'indices. Considérons une famille de sous-ensembles A_i de $\mathfrak{F}$ (i parcourant l'ensemble I). Par définition, la réunion de ces sous-ensembles est l'ensemble des éléments de $\mathfrak{F}$ qui appartiennent à l'un au moins des ensembles A_i ; l'intersection de ces sous-ensembles est l'ensemble des éléments qui appartiennent à tous les A_i. La réunion se note

$$\mathfrak{V}_{i\in I} A_i ,$$

et l'intersection

$$\mathfrak{D}_{i\in I} A_i \qquad (\mathfrak{D} \text{ signifie « Durchschnitt »}).$$

Dans le cas de deux ensembles A_1 et A_2, la réunion se note aussi

$$A_1 \dotplus A_2 ,$$

et l'intersection

$$A_1 \cap A_2 .$$

On a donc, par définition

$$(4,1) \begin{cases} A_1 \dotplus A_2 = A_2 \dotplus A_1 \\ A_1 \cap A_2 = A_2 \cap A_1 \ ; \end{cases}$$

ces relations expriment la commutativité de chacune des opérations $\dotplus$ et $\cap$.

La relation

$$A_1 \cap A_2 = 0$$

exprime que l'intersection de A_1 et A_2 est vide, c'est-à-dire que A_1 et A_2 n'ont aucun élément commun. On dit que A_1 et A_2 sont des ensembles disjoints.

étrange ?

Étant donnée une famille d'ensembles A_i disjoints deux à deux (c'est-à-dire tels que $A_i \cap A_j = 0$ quels que soient les indices i et j distincts), on donne le nom de somme à la réunion de ces ensembles. La somme se note

$$\sum_i A_i ,$$

et, dans le cas de deux ensembles A_1 et A_2,

$$A_1 + A_2 .$$

<u>Exemple</u>. – Soient A_i les classes d'un partage en classes de l'ensemble fondamental. On a

$$\mathfrak{F} = \sum_i A_i .$$

<u>Associativité des opérations $\mathcal{V}$ et $\mathcal{D}$</u>. –

Soit toujours I un ensemble d'indices, et une famille de sous-ensembles A_i de l'ensemble $\mathfrak{F}$, $\underline{i}$ parcourant l'ensemble I. Supposons maintenant qu'on ait, dans l'ensemble I, un partage en classes, c'est-à-dire que

$$I = \sum_k I_k ,$$

$\underline{k}$ parcourant un autre ensemble d'indices. A chaque indice $\underline{k}$, faisons correspondre la famille des A_i pour lesquels

$$i \in I_k ,$$

et désignons respectivement par

$$\mathcal{V}_{i \in I_k} A_i \qquad \text{et} \qquad \mathcal{D}_{i \in I_k} A_i$$

la réunion et l'intersection des ensembles de cette famille. ~~La~~ L'<u>associativité</u> des opérations $\mathcal{V}$ et $\mathcal{D}$ s'exprime alors par les relations évidentes

$$(4,2)\begin{cases} \mathcal{V}_k \left(\mathcal{V}_{i \in I_k} A_i \right) = \mathcal{V}_{i \in I} A_i \\ \mathcal{D}_k \left(\mathcal{D}_{i \in I_k} A_i \right) = \mathcal{D}_{i \in I} A_i \end{cases}$$

Prenons en particulier trois ensembles A_1, A_2, A_3 ; on aura

$$A_1 \dotplus (A_2 \dotplus A_3) = \mathcal{V}_i A_i \qquad (i \text{ prenant les valeurs } 1, 2, 3),$$

et aussi

$$(A_1 \dotplus A_2) \dotplus A_3 = \mathcal{V}_i A_i ,$$

d'où la relation

$$A_1 \dotplus (A_2 \dotplus A_3) = (A_1 \dotplus A_2) \dotplus A_3 ,$$

qui a la forme ~~de~~ de la relation qui, en arithmétique, exprime l'associativité de l'addition. On aurait des relations analogues avec le symbole $\cap$.

Cela conduit à noter respectivement

$$A_1 \dotplus A_2 \dotplus A_3 \qquad \text{et} \qquad A_1 \cap A_2 \cap A_3$$

la réunion et l'intersection de trois ensembles, et, plus généralement,

$$A_1 \dotplus A_2 \dotplus \dots \dotplus A_n \qquad \text{et} \qquad A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$$

la réunion et l'intersection de $\underline{n}$ ensembles ($\underline{n}$ étant un nombre naturel quelconque). La <u>somme</u> de $\underline{n}$ ensembles disjoints deux à deux se note

$$A_1 + A_2 + \dots + A_n .$$

<u>Distributivité de l'une des opérations par rapport à l'autre.</u>

Elle s'exprime par les relations.

$$(4,3)\begin{cases} A \dotplus \left(\mathcal{D}_i B_i \right) = \mathcal{D}_i \left(A \dotplus B_i \right) \\ A \cap \left(\mathcal{V}_i B_i \right) = \mathcal{V}_i \left(A \cap B_i \right) \end{cases}$$

Démontrons par exemple la première. Le premier membre représente l'ensemble des éléments qui appartiennent soit à A, soit à tous les B_i, soit encore à A et à tous les B_i. Ces éléments appartiennent à chacune des réunions $A \dotplus B_i$, donc à leur intersection, c'est-à-dire au second membre. Réciproquement, si un élément appartient à toutes les réunions $(A \dotplus B_i)$, ou bien il appartient à A, ou bien alors il appartient à tous les B_i.

On démontrerait de même la deuxième relation.

Dualité des opérations.

L'opération qui consiste à prendre le complémentaire d'un ensemble transforme chacune des deux opérations dans l'autre : le complémentaire de la réunion est l'intersection des complémentaires, et vice-versa. Cette double propriété s'écrit

$$(4,4) \qquad \begin{cases} \mathcal{C}(\mathfrak{T}_i\, A_i) = \mathfrak{D}_i\, (\mathcal{C} A_i) \\ \mathcal{C}(\mathfrak{D}_i\, A_i) = \mathfrak{T}_i\, (\mathcal{C} A_i), \end{cases}$$

et elle explique que, ~~à chaque relation entre des inter réunions, correspond une relation entre~~ chaque fois qu'on a une relation, telle que la première relation (4,3), ~~entre des ie~~ où figurent les symboles $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{D}$, on en a une autre en échangeant ces symboles. C'est là le principe de dualité.

Démontrons par exemple la première relation (4,4). ~~Si~~ Dire qu'un élément n'appartient pas à $\mathfrak{T}_i\, A_i$, c'est dire qu'il n'appartient à aucun des A_i ; il appartient donc à tous les $\mathcal{C} A_i$. Réciproquement, si un élément appartient à tous les $\mathcal{C} A_i$, il n'appartient à aucun des A_i, donc il n'appartient pas à $\mathfrak{T}_i\, A_i$.

Différence de deux ensembles.

Nous avons vu que la somme de deux ensembles disjoints ~~et~~ A et A' se note

$$(4,5) \qquad B = A + A',$$

et on a évidemment

$$(4,6) \qquad A \subseteq B.$$

Inversement, étant donnés deux ensembles A et B satisfaisant à (4,5), ~~il existe un ensemble A'~~ la relation (4,5) définit un ensemble A' : ~~celui~~ l'ensemble des éléments qui appartiennent à B sans appartenir à A ; on l'appelle la différence des ensembles B et A, et on le note

$$B - A.$$

L'opération « différence » peut d'ailleurs se ramener aux opérations $\mathcal{C}$ et $\cap$. On a en effet, de toute évidence,

$$(4,7) \qquad B - A = B \cap (\mathcal{C} A)$$

Exercice -- ~~Démontrer~~ En supposant

$$A \subseteq C \quad \text{et} \quad B \subseteq C,$$

démontrer

$$C - (A \cap B) = (C - A) \dotplus (C - B),$$

d'abord directement, ensuite comme conséquence des relations (4,3), (4,4) et (4,7).

~~5 – Lemme de décomposition.~~

~~On a souvent besoin du lemme suivant, relatif aux sous-ensembles d'un ensemble fondamental :~~

~~Lemme. – Étant donnés ~~ensembles~~ un nombre fini d'ensembles E_i, on peut trouver un nombre fini d'ensembles F_j, disjoints deux à deux, tels que tout E_i soit somme de certains des ensembles F_j.~~

5 – Produit de deux ensembles

Soient A et B deux ensembles quelconques. Nous ne supposons plus qu'ils fassent partie d'un même ensemble fondamental. L'ensemble constitué par un élément a de A et un élément b de B se nomme un couple et se note

$$(a, b) ;$$

dans la parenthèse, on écrit d'abord l'élément a de A, ensuite l'élément b de B. Nous convenons que deux couples (a, b) et (a', b') sont identiques dans le cas, et dans le cas seulement où les éléments a et a' de A sont identiques, et les éléments b et b' de B aussi. Nous admettrons qu'on a le droit de considérer l'ensemble de tous les couples, correspondant à tous les choix possibles de a dans A, et de b dans B. L'ensemble des couples se nomme le produit de l'ensemble A par l'ensemble B et se note ~~AB~~ $A \times B$.

Le produit $B \times A$ est ~~évidemment~~ équivalent au produit $A \times B$; pour les mettre en correspondance biunivoque, il suffit de faire correspondre, à chaque élément ~~couple~~ (a, b) de $A \times B$, ~~le couple~~ l'élément (b, a) de $B \times A$.

D'autre part, si A' et B' désignent des ensembles respectivement équivalents à A et B, le produit $A' \times B'$ est équivalent au produit $A \times B$.

Exemples. – Si A et B sont des ensembles finis à p et q éléments respectivement, l'ensemble-produit $A \times B$ possède pq éléments (pq désignant le produit des nombres p et q, au sens de l'arithmétique).

Théorème ~~[illegible]~~. – Le produit de deux ensembles dénombrables est dénombrable (pour ranger tous les couples de nombres naturels en une suite dénombrable ~~[illegible]~~, il suffit d'écrire d'abord les couples dont la somme des termes est égale à deux, puis ceux dont la somme des termes est égale à trois, et ainsi de suite.

Carré d'un ensemble : c'est, par définition, le produit de cet ensemble par lui-même.

Par exemple, l'ensemble des points du plan, rapporté à deux axes de coordonnées, est équivalent à l'ensemble des couples de nombres réels, c'est-à-dire au carré de l'ensemble des nombres réels, c'est-à-dire, en définitive, au carré de l'ensemble des points d'une droite.

Projections. –

De même que, en géométrie plane, un point a deux projections sur les axes de coordonnées, de même, dans le cas général du produit E ~~d'~~un ensemble A par un ensemble B, on appelle projection sur A d'un élément (a, b) de E, l'élément a de A qui figure dans le couple (a, b) ; on définit de même la projection d'un élément de E sur ~~[illegible]~~ B. Chaque élément de ~~E~~ E peut être défini ~~est caractérisé~~ ~~d'une façon~~ par ses deux projections, qu'on peut d'ailleurs choisir arbitrairement

Si on désigne par $a = f(e)$ ~~l'élément~~ la projection sur A de l'élément _e_ de E, $f(e)$ est une _fonction_ qui réalise une application de E dans A. De même, soit $b = g(e)$ ~~l'élément~~ la projection sur B de e ; $g(e)$ est une fonction qui réalise une application de E sur B.

Réciproquement, soient trois ensembles A, B, E, et deux fonctions, définies sur E, et réalisant une application de E sur A et sur B respectivement. Supposons de plus que, étant donnés arbitrairement un élément _a_ de A et un élément _b_ de B, il existe, dans E, un élément et un seul admettant respectivement _a_ et _b_ pour images. Alors E est équivalent au produit $A \times B$, ~~puisqu'il est~~ puisqu'on a une correspondance biunivoque entre les éléments de E et les couples (a, b).

Sous-ensembles du produit et fonctions plurivoques.

Considérons une fonction qui réalise une application de A dans B ; soit $b = f(a)$. A cette fonction, associons ~~le~~ l'ensemble des couples $(a, f(a))$; c'est un sous-ensemble F du produit $A \times B$, et chaque élément de A est la projection d'un élément de F et d'un seul.

Réciproquement, soit F un sous-ensemble de $A \times B$, tel que chaque élément de A soit la projection d'un élément de F et d'un seul. A chaque _a_ de A faisons alors correspondre ~~le couple~~ l'élément _b_ de B tel que

$$(a, b) \in F.$$

Nous définissons ainsi une fonction qui réalise une application de A dans B.

Exemple.- A chaque fonction réelle ~~f(x)~~ d'une variable réelle x, on associe, dans le plan (à coordonnées _x_, _y_) le lieu des points

$$y = f(x) \quad \text{(courbe représentative)} ;$$

c'est un ensemble de points du plan qui est coupé en un seul point par ~~toute~~ chaque parallèle à l'axe des _y_.

~~Prenons maintenant un sous-ensemble F qui de A × B qui ne soit assujetti à aucune restriction. Nous allons lui associer une fonction~~

Ce qui précède nous conduit à généraliser la notion de fonction. Prenons en effet un sous-ensemble F de $A \times B$, sans aucune restriction cette fois. A chaque _a_ de A faisons correspondre le sous-ensemble des éléments _b_ de B tels que

pseudo-fonction

$$(a, b) \in F ;$$

nous désignerons ce sous-ensemble (qui peut être vide) par $f(a)$, et nous donnerons le nom de _fonction plurivoque_ à la correspondance ainsi définie.

(~~plurivoque~~

Par opposition, on ~~donne le no~~ appelle _fonction univoque_ toute fonction au sens adopté jusqu'ici.

+ Inversement, soit donnée une fonction plurivoque, c'est-à-dire une loi qui, à chaque élément de A, associe un sous-ensemble de B, désigné par $f(a)$. Il lui correspond un sous-ensemble F de $A \times B$, savoir celui des couples (a, b) tels que

$$b \in f(a).$$

Une fonction plurivoque est donc caractérisée par un sous-ensemble F de $A \times B$. Mais cet ensemble F définit à son tour dans B une fonction plurivoque ~~dans B~~, à savoir celle qui, à chaque $\underline{b}$ de B, associe le sous-ensemble des $\underline{a}$ de A tels que

$$(a, b) \in F,$$

ou, en d'autres termes, tels que

$$b \in f(a).$$

Cette nouvelle fonction porte le nom de fonction réciproque de la fonction $f(a)$, et se note

$$\overset{-1}{f}(b).$$

En particulier, chaque fonction univoque possède une fonction réciproque, qui est en général plurivoque ; elle n'est univoque que si la fonction donnée réalise une correspondance biunivoque entre A et B ; dans ce cas, la fonction réciproque est la fonction inverse.

Dans le cas général d'une fonction plurivoque $f(a)$, on désigne par

$$f(A') \qquad (\text{où } A' \text{ désigne un sous-ensemble de } A)$$

la réunion des sous-ensembles $f(a)$ lorsque $\underline{a}$ parcourt A'.

Exercices.– 1° Si $A' \subset A''$, alors $f(A') \leq f(A'')$.

2° On a

$$f(\gamma A_i) = \gamma\,(f(A_i))$$

3° Si $\underline{f}$ est univoque, ~~les~~ les ensembles $\overset{-1}{f}(b)$ ~~où b parcourt B,~~ sont disjoints, ~~$B' = f(A')$ et $A' = \overset{-1}{f}(B')$~~ et constituent les classes du partage en classes défini par $\underline{f}$ (Cf § 3). ~~On a~~ Il en résulte que $\overset{-1}{f}(A' - A'') = \overset{-1}{f}(A') - \overset{-1}{f}(A'')$ ~~sont équivalentes. En déduire que~~

4° Si $\underline{f}$ est univoque, on a

$$\overset{-1}{f}\,(\mathfrak{D}_i B_i) = \mathfrak{D}_i\,\overset{-1}{f}(B_i).$$

---

6 – Produit généralisé

Dans le paragraphe précédent, nous avions deux ensembles A et B, et nous considérions les couples (a, b). Analysons de plus près ce qu'est un couple. Donnons-nous ~~On peut dire qu'on avait~~ un ensemble auxiliaire, formé de deux éléments ~~qu'on peut désigner~~ (par exemple les nombres 1 et 2) ; un couple (a, b) s'obtient en substituant, dans cet ensemble auxiliaire, un élément $\underline{a}$ de A à l'élément 1, et un élément $\underline{b}$ de B à l'élément 2. Pour parler un langage plus imagé, l'ensemble auxiliaire se compose de deux cases vides ; dans l'une on met un élément (d'ailleurs quelconque) de A, et dans l'autre un élément de B.

Au lieu d'un ensemble auxiliaire de deux éléments, prenons maintenant un ensemble quelconque I, considéré comme ensemble d'indices. Soient donnés d'autre part une famille d'ensembles A_i (l'indice $\underline{i}$ parcourant I). Si à chaque

$\underline{i}$ de I nous associons un élément a_i pris (arbitrairement) dans l'ensemble A_i correspondant à $\underline{i}$, nous définissons ce que nous appellerons un <u>groupement</u> suivant l'ensemble I. En langage imagé, I est un ensemble de cases vides ; à chaque case est attaché un ensemble Ai ; un groupement s'obtient en mettant, dans chaque case, un élément de l'ensemble attaché à cette case.

Admettons maintenant qu'on ait le droit de considérer l'<u>ensemble de tous les groupements</u> correspondant à tous les choix possibles. Cet ensemble prend le nom de <u>produit ~~généralisé~~ des ensembles A_i suivant l'ensemble I</u>, et se note

$$\prod_{i \in I} A_i .$$

Si on remplace les ensembles A_i par des ensembles respectivement ~~isomorphes~~ équivalents aux A_i, et l'ensemble I par un ensemble ~~isomorphe~~ équivalent à I, on obtient comme produit un ensemble équivalent au précédent.

<u>Exemple</u> : si I a un nombre fini $\underline{n}$ d'éléments, on obtient le produit de $\underline{n}$ ensembles $A_1, A_2, \ldots, A_n$, produit qui se note aussi

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n .$$

~~Cas particulier important~~

<u>Exponentielle de base A et d'exposant I</u>. – Supposons que tous les ensembles A_i soient égaux à un ~~même~~ même ensemble A. Le produit

$$\prod_{i \in I} A_i$$

prend le nom d'exponentielle de base A et d'exposant I, et se note

$$A^I .$$

Par exemple, si A a un nombre fini $\underline{n}$ d'éléments, et I un nombre fini $\underline{p}$ d'éléments, l'exponentielle A^I possède n^p éléments.

Chaque groupement (de l'ensemble A^I) s'obtient en mettant, dans chaque case de l'ensemble I, un élément arbitraire de A. L'ensemble des groupements est donc équivalent à l'ensemble des <u>fonctions</u> définies dans I ~~et~~ et réalisant une application de I dans A.

~~Si E désigne l'ensemble des nombres réels, et I un ensemble de $\underline{p}$ éléments, l'ensemble E^I est~~ Si E désigne l'ensemble des nombres réels, et I un ensemble de $\underline{p}$ éléments, l'ensemble E^I est ~~équivalent~~ à l'ensemble des points de l'espace à $\underline{p}$ dimensions. Si I est dénombrable, E^I est ~~équivalent~~ à l'espace à une infinité dénombrable de dimensions.

~~Exemples. – Désignons pour un instant par~~ Si E désigne l'ensemble des nombres réels, ~~Si l'ensemble I a $\underline{n}$ éléments, l'ensemble E^I est isomorphe~~ l'ensemble E^E ~~désigne et~~ est équivalent à l'ensemble des fonctions réelles d'une variable réelle.

Si A est un ensemble à 2 éléments, l'ensemble A^I est équivalent à l'ensemble des fonctions à deux valeurs définies dans I, c'est-à-dire à <u>l'ensemble des parties de I</u>.

7 – Lemme de décomposition

On a ~~sou~~ parfois besoin du lemme suivant :

Lemme. – Etant donné un ensemble fondamental, et une famille de sous-ensembles E_i, on peut trouver une famille de sous-ensembles F_j disjoints deux à deux, tels que chaque E_i soit la somme de certains des F_j. Si les E_i sont en nombre fini, les F_j sont en nombre fini.

~~Ha~~ Procédé de form. des F_j.

La 1re partie de l'énoncé ~~est triviale~~. La 2e ne l'est pas.

$\varphi_i(x)$ fonct. caract. de E_i.

$A = \{0, 1\}$

~~On~~ On définit dans $\mathfrak{F}$ une fonction $\Phi(x)$, en prenant, pour chaque x, l'ensemble des valeurs des $\varphi_i(x)$, qui est un élément de A^I.

$\Phi(x)$ définit un partage en classes ; – –

Si I est fini, A^I est fini.

Démonstration. – Soit la famille de sous-ensembles E_i, i parcourant un ensemble I d'indices. A chaque i de I, associons un ensemble A_i, ~~à deux élé~~ savoir l'ensemble des deux sous-ensembles E_i et $\complement E_i$. Considérons alors le produit

$$\prod_{i \in I} A_i \quad ;$$

~~l~~ chaque élément j de ce produit est, par définition, un groupement, suivant l'ensemble I, d'éléments pris dans les ensembles A_i ; ~~c'est-à-dire un groupement~~ autrement dit, pour chaque j, ~~la~~ ~~l'indice~~ la case i est remplie soit avec E_i soit avec $\complement E_i$. Pour chaque groupement j, ~~f~~ prenons l'intersection de tous les ensembles (E_i ou $\complement E_i$) qui figurent dans les cases ; c'est un sous-ensemble F_j de l'ensemble fondamental.

† Les ensembles F_j (j parcourant le produit $\prod_{i \in I} A_i$) sont disjoints deux à deux ; en effet, étant donnés j et j' ($j \neq j'$), il existe au moins une case i ~~telle~~ qui est remplie avec E_i dans l'un des groupements j et j', et avec $\complement E_i$ dans l'autre. Donc on a par exemple

$$F_j \subseteq E_i \quad , \qquad F_{j'} \subseteq \complement E_i ,$$

ce qui prouve que F_j et $F_{j'}$ sont disjoints.

Montrons que chaque E_i est une somme d'ensembles F_j. L'indice i étant donné, considérons les groupements j pour lesquels la ~~##~~ case i est remplie avec E_i ; la somme $\sum_j F_j$, étendue à l'ensemble de ces groupements, est égale à E_i, comme le lecteur s'en assurera facilement.

Si l'ensemble I est fini, l'ensemble $\prod_{i \in I} A_i$ est fini, ce qui achève de démontrer le lemme.

---

8 – Somme d'ensembles. ~~Ensembles abstraits~~

Jusqu'ici nous avons défini la somme de deux ensembles dans le cas où ces ensembles sont des sous-ensembles disjoints d'un même ensemble dit fondamental. Etant donnés deux ensembles A et B qui ne font pas partie d'un même ensemble, comment définir leur somme ? Ces deux ensembles vont être considérés, par ~~définition,~~ convention, comme n'ayant pas d'élément commun. D'une façon précise :

<u>Définition.- On appelle somme de deux ensembles A et B, et on note</u>

$$A+B,$$

<u>un ensemble S</u> (dont l'existence est admise par postulat) <u>qui peut se mettre sous la forme de la somme de deux sous-ensembles disjoints, respectivement équivalents à A et B.</u>

D'après cette définition, tout ensemble équivalent à S doit encore être considéré comme la somme des ensembles A et B ; d'ailleurs, si on remplace A et B par des ensembles respectivement équivalents, leur somme ne change pas (à une équivalence près).

~~Nous avons là l'exemple d'un ensemble qui n'est défini qu'à une équivalence près. C'est ce que nous appellerons un ensemble abstrait. Par définition, tout ensemble (au sens ordinaire du mot) définit un ensemble abstrait, étant entendu que tout ensemble équivalent définit le même ensemble abstrait. Étudier les propriétés des ensembles abstraits, c'est étudier les propriétés des ensembles qui ne changent pas lorsqu'on remplace les ensembles par des ensembles équivalents ; ~~ou~~ c'est-à-dire, pour employer une image, les propriétés qui ne dépendent pas de la nature des objets constituant les ensembles considérés.~~

~~La définition donnée plus haut est donc, en réalité, celle de la somme de deux ensembles abstraits ; cette somme est aussi un ensemble abstrait.~~

Plus généralement, soit une famille quelconque d'ensembles abstraits A_i (i parcourant un ensemble I). On appelle <u>somme</u> de ces ensembles, et on note

$$\sum_{i \in I} A_i ,$$

un ensemble ~~abstrait~~ S (dont l'existence est admise par postulat) qui peut se mettre sous la forme ~~de la~~ d'une somme $\sum_i$ A'_i, les A'_i étant des sous-ensembles ~~disjoints~~ de S, disjoints deux à deux et respectivement équivalents aux A_i.

<u>Cas particulier.</u>- Si tous les A_i sont ~~identiques~~ équivalents à un même ~~ensemble~~ ~~(abstrait)~~ A, ~~la so~~ le produit $A \times I$ est équivalent à la somme

$$\sum_{i \in I} A_i ;$$

~~ou encore : considéré comme ensemble abstrait, le produit $A \times I$ est identique à la somme $\sum_i A_i$~~. En effet, chaque élément de

$$S = \sum_i A'_i$$

est caractérisé par ~~un~~ l'indice i ~~pris dans I, et l'élément de A qui correspond~~ de l'ensemble A'_i auquel il appartient, et l'élément de A qui correspond à l'élément envisagé de A'_i. Donc S est équivalent à l'ensemble des couples d'éléments pris respectivement dans I et dans A.

C. Q. F. D.

<u>Exemple.</u>- Si I a <u>n</u> éléments, la somme de <u>n</u> ensembles égaux à A est égale au produit ~~E~~ de l'ensemble A par l'ensemble à <u>n</u> éléments.

Autre exemple. — Si A et I sont dénombrables, la somme

$$\sum_{i\in I} A_i$$

est égale au produit de deux ensembles dénombrables. C'est donc un ensemble dénombrable (Cf § 5)

---

9 — Nombres cardinaux
Comparaison des puissances

~~puissance~~ ?

On convient d'attacher à chaque ensemble ~~abstrait~~ un symbole, appelé nombre cardinal (ou ~~puissance~~). Deux nombres cardinaux sont, par définition, égaux si les ensembles ~~abstraits~~ correspondants sont ~~égaux~~ équivalents ~~(ou, comme l'on dit aussi, ont même puissance)~~. ~~Le nombre cardinal est donc ce qui caractérise un ensemble abstrait.~~ Pour un ensemble fini, on prend pour nombre cardinal le nombre naturel qui indique combien il y a d'éléments dans l'ensemble. Le nombre cardinal d'un ensemble dénombrable se note $\aleph_0$ (alef zéro ; alef est la première lettre de l'alphabet hébreu).

Opérations sur les nombres cardinaux —

~~La somme de deux~~

à enlever

On définit la somme de deux nombres cardinaux $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$, en prenant deux ensembles A et B admettant respectivement pour nombre cardinal $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$; ~~et~~ le nombre cardinal de la ~~en faisant~~ somme A + B ~~; le nombre cardinal de cette somme~~ est, par définition, ~~égal à~~ la somme de $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$, et se note $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$. L'addition est commutative. (On définit de même une somme quelconque

$$\sum_{i\in I}\mathfrak{a}_i,$$

i parcourant un ensemble I d'indices ; l'addition est associative (Cf § 4)

~~L'addition est commutative et associative~~

On définit le produit de deux nombres cardinaux $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$, en prenant deux ensembles A et B admettant respectivement pour nombre cardinal $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$; le nombre cardinal du produit $A\times B$ est, par définition, le produit de $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$, et se note $\mathfrak{a}.\mathfrak{b}$. La multiplication des nombres cardinaux est commutative. On définit de même le produit ~~d~~

$$\prod_{i\in I}\mathfrak{a}_i$$

d'un ensemble quelconque de nombres cardinaux ; la multiplication est associative.

Exercice. — Si les $\mathfrak{a}_i$ sont tous égaux à $\mathfrak{a}$, et que $\mathfrak{i}$ est le nombre cardinal de I, on a $\sum_{i\in I}\mathfrak{a}_i = \mathfrak{a}.\mathfrak{i}$.

Exercice. — Démontrer que la multiplication est distributive par rapport à l'addition :

$$\mathfrak{b}.\left(\sum_i \mathfrak{a}_i\right) = \sum_i\left(\mathfrak{b}.\mathfrak{a}_i\right)$$

Exponentielle. — Le nombre $\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}}$ est, par définition, le nombre cardinal de l'ensemble A^B, A et B désignant des ensembles ~~ayant~~ de nombres cardinaux respectifs $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$.

Exemple : $2^{\aleph_0} = \aleph$ est le nombre cardinal de l'ensemble des suites ~~illimitées~~ dénombrables de chiffres 0 et 1. On verra plus loin que $\aleph \neq \aleph_0$.