COTE : DELMS 001

AUTEUR : Jean Leray

TITRE : **Théorie des systèmes de *n* équations à *n* inconnues**
Théorie des équations fonctionnelles
(À titre documentaire :
Projet d'exposé des théorèmes d'existence topologiques)

Manuscrit autographe 1935

FONDS : JEAN DELSARTE

Nombre de pages numérisées **006**
Nombre de feuilles prises en compte **006**

A titre documentaire : Projet d'exposé des théorèmes d'existence topologiques, par Leray

Théorie des systèmes de n équations à n inconnues.

Notions utilisées

Différentielle d'une fonction de n variables (définie comme étant la fonction linéaire qui ~~la~~ l'approche le mieux au voisinage d'un point).

~~Approximation simpliciale et deg~~

Degré topologique d'une transformation continue.

Théorème d'existence global.

~~Méthode de continuité.~~

~~Soit~~ Soit x un point d'un domaine $\mathcal{D}$ à n dimensions ; soit $\Phi(x)$ une transformation définie sur $\mathcal{D}$ et sur sa frontière $\mathcal{D}'$ et qui associe à tout point de $\mathcal{D}$ un point du même espace. L'équation $\Phi(x) = b$ possède une solution au moins si le degré de Φ en b diffère de 0. On pourra affirmer que ce degré diffère de 0 chaque fois qu'on pourra réduire continûment la transformation $\Phi(x)$ à une transformation assez simple pour qu'on puisse déterminer son degré ; la transformée de $\mathcal{D}'$ ne devra pas, au cours de cette réduction, franchir le point b.

Exemple : Une transformation continue de la surface d'un cercle en elle-même possède au moins un point double.

Compléments.

Nommons indice d'une solution isolée a de l'équation $\Phi(a) = b$ le degré ~~de Φ~~ en b de Φ envisagé sur la sphère $\|x - a\| < \varepsilon$.

Si toutes les solutions sont isolées, la somme de leurs indices est le degré en b de Φ envisagé sur ~~D~~ D.

On peut déterminer effectivement l'indice d'une solution isolée a ~~par~~ le procédé suivant : soit $\Phi_1(x)$ une transformation simple approchant ~~au voisinage de a~~ $\Phi(x)$ suffisamment pour que l'on ait sur une sphère $\|x-a\|=h$ l'inégalité
$\|\Phi(x)-\Phi_1(x)\| < \|\Phi_1(x)-b\|$; alors les degrés en b de Φ et Φ_1 envisagés sur cette sphère sont égaux.

<u>Exemples:</u> Si $n=2$ et si $\Phi(x)$ est une transformation conforme tous ces indices sont positifs et portent le nom d'ordres de multiplicité —
Si $\Phi(x)$ possède pour $x=a$ un déterminant fonctionnel positif ou négatif, l'indice de a est $+1$ ou -1.

<u>Théorème d'existence local.</u>

Soit une équation $\Phi(x)=b$; soit une solution a ; supposons que le déterminant fonctionnel de $\Phi(x)$ diffère de 0 pour $|x-a|\leq h$.
Le degré de Φ ~~dans~~ sur cette sphère est ± 1.
Soit une seconde équation $\Psi(x)=b$; supposons qu'elle soit "voisine" de la précédente au sens suivant : son déterminant fonctionnel diffère de 0 ~~dans~~ la sphère $\|x-a\|\leq h$; on a

$$\|\Phi(x)-\Psi(x)\| < \|\Phi(x)-b\| \quad \text{pour} \quad \|x-a\|=h.$$

Alors, d'après ce qui précède, la sphère $\|x-a\|\leq h$ contient une ~~seule~~ solution et une seule de l'équation $\Psi(x)=b$.

Cette unicité de la solution a pour conséquence qu'elle varie continûment avec $\Psi(x)$.

~~En d'autres termes:~~
<u>Exemple:</u> Une transformation $y=\Phi(x)$ possède ~~locale~~ une inverse au voisinage d'un point où son déterminant fonctionnel diffère de 0.

<u>Résolution effective.</u>

On utilise à chaque approximation la méthode la plus simple : le flair, le calcul des approximations successives ou la méthode de Newton. On ne cherche pas à procéder suivant une méthode théoriquement convergente. On discutera seulement la question de savoir si la dernière approximation ($x = \alpha$) approche une solution : on cherchera une transformation linéaire $\Phi_1(x)$ s'annulant pour $x = \alpha$, de déterminant non nul et approchant $\Phi(x)$. S'il existe un nombre h tel que

$$\|\Phi(x) - \Phi_1(x)\| < \|\Phi_1(x) - b\| \quad \text{pour } \|x - \alpha\| < h,$$

alors α est distant de moins de h d'une solution de l'équation $\Phi(x) = b$.

Théorie des équations fonctionnelles.

Notions utilisées.

Compacité.

Théorème d'existence global.

<u>Enoncé</u>. Soit l'équation non linéaire $x + F(x) = 0$, x appartenant à un espace abstrait linéaire, complet, normé $F(x)$ étant complètement continue ("vollstetig") et dépendant d'un paramètre k. Supposons que pour $k = 0$, $F(x) \equiv 0$; supposons que l'ensemble des solutions soit borné: $\|x\| < M$. Alors l'équation possède au moins une solution quel que soit k.

<u>Démonstration</u>. On a pour $\|x\| = M$: $\|x + F(x)\| \geq h > 0$.
Soit $F_h(x)$ une fonctionnelle approchant $F(x)$ à h près.
L'équation $x + F_h(x) = 0$ ne possède aucune solution sur l'hypersphère $\|x\| = M$. Or on peut faire en sorte que $F_h(x)$ ait pour champ de valeurs un sous-ensemble linéaire à ~~nombre~~ fini de dimensions n de l'espace abstrait envisagé. D'après la théorie des systèmes de n équations à n inconnues l'équation $x + F_h(x) = 0$ possède au moins une solution quel que soit k. Le théorème énoncé s'obtient en faisant tendre h vers 0.

Résolution effective. (Cf. systèmes de n équations).

Equations linéaires de Fredholm.

Soit l'équation linéaire

(1) $x + k\,\mathcal{C}(x) = b$

Si $x + k\,\mathcal{C}(x) = 0$ possède une ~~seule~~ solution aucune majoration de l'ensemble des solutions n'est possible.

On commence donc par discuter les valeurs singulières de k :

F. Riesz (Acta math, 1918, T41) démontre simplement (th 12 ou 13) qu'elles sont isolées

~~On démontre par l'absurde que la solution reste bornée qu'elles restent bornées quand k varie dans le plan en se déplaçant en suivant un chemin qui évite ces valeurs singulières.~~

On démontre alors par l'absurde que la solution de

(1) $x + k\,\mathcal{C}(x) = b$

reste bornée quand k suit un chemin ~~qui évite~~ du plan complexe qui évite ces valeurs singulières.

Le théorème d'existence global permet d'en déduire que l'équation (1) possède une solution chaque fois que k n'est pas une valeur singulière.

Equations différentielles:

Ecrivons le système: $\dfrac{dx}{P(x,y,\dots)} = \dfrac{dy}{Q(x,y)} = \dots$ sous la forme:

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = P(x,y\dots) \quad ; \quad \dfrac{dY}{dt} = Q(x,y,\dots) \\ x = X \quad ; \quad y = Y \end{cases}$$

($X(t), Y(t), \dots$ sont des fonctionnelles complètement continues de $x(t), y(t), \dots$)

Le théorème d'existence globale montre que la solution du système existe tant qu'on peut la majorer ; on suppose seulement $P, Q, \dots$ continus.

Continuité et dérivabilité par rapport à des paramètres s'obtiennent en considérant $x, \dots X, \dots$ comme étant des fonctions continues, dérivables... de t et de ces paramètres.