COTE DELES 007

TEXTE GÉOMÉTRIE. ESCORIAL
[EN 3 ÉTAPES]

FONDS JEAN DELSARTE

NOMBRE DE PAGES NUMÉRISÉES 14

NOMBRE DE FEUILLES PRISES EN COMPTE 14

GEOMETRIE. ESCORIAL.

I. Théorie locale de l'ensemble des fonctions continument différentiables dans R^n.

Définition de df, f prenant ses valeurs dans un vectoriel arbitraire. Dérivées partielles (non équivalence). Fonctions continument différentiables (équivalence avec les dérivées partielles continues).

Fonctions de fonctions; invariance d'une relation entre différentielles (sans coordonnées).

Cas des fonctions à valeurs numériques: espace vectoriel des différentielles.

Transformation continument différentiables conservant l'origine, dans R^n (localement). La différentielle = transformation linéaire tangente.

La condition nécessaire et suffisante d'homéomorphie locale est que la transformation linéaire tangente soit biunivoque. Moyen d'expression: par l'algèbre extrérieure, et par le jacobien. Les transformations homéomorphes continument différentiables conservan o forment un groupe G. L'ensemble des fonctions continument différentiables est invariant par G, et réciproquement.

Plus généralement, un système de fonctions $f_i(x)$, x dans R^n, $i = 1,2,\ldots,p$; $y = (f_1,f_2,\ldots,f_p)$ décrit dans R^p une variété V; le rang ~~des systèmes~~ du système des df_i = le nombre des f_i indépendantes = la dimension de V.

~~(N)~~
~~II Variétés localement différentiables~~

(N.B. Définition de la différentielle: c'est un élément d'un espace vectoriel, ~~qui en fait~~ correspondant d'une manière biunivoque et homomorphe aux classes de fonctions ne différant que par un o(distance), défini sur l'ensemble des fonctions qui ne diffèrent d'une fonction linéaire que par un o(distance) ("linéarisables"))

II. Variétés localement différentiables.

Définition.

Espace des différentielles; espace linéaire tangent (comme dual du précédent).

Correspondance des V^p dans V^n avec les variétés linéaires dans l'espace tangent.

Structure induite sur une V^p contenue dans V^n.

Construction de l'algèbre linéaire sur l'espace des différentielles et sur l'espace tangent. Element linéaire à p dimensions. ~~Formes diffé~~ Tenseurs sur V^n.

(N.B. Dans les formes de Pfaff, il faut introduire de nouvelles espàces de fonctions comme coefficients).

Systèmes de Pfaff. Variétés intégrales.

Différentielle ("extérieure") d'une forme de Pfaff. Règles de calcul.

Systèmes complètement intégrables (à partir des équations différentielles ordinaires, avec existence par Leray).

III. Groupes de Lie. Espaces homogènes, par le repère mobile.

IV. Espaces de Riemann, de Cartan, de Bourbaki, et tous autres.

Ajouter quelque part : Contact ; variétés k fois différentiables. / Géométrie textile

GEOMETRIE. ESCORIAL.

I. Théorie locale de l'ensemble des fonctions continument différentiables dans R^n.

Définition de df, f prenant ses valeurs dans un vectorial arbitraire. Dérivées partielles (non équivalence). Fonctions continument différentiables (équivalence avec les dérivées partielles continues).

Fonctions de fonctions; invariance d'une relation entre différentielles (sans coordonnées).

Cas des ~~f~~onctions à valeurs numériques: espace vectoriel des différentielles.

Transformation continumen t différentiables conservant l'origine, dans R^n (localement). La différentielle = transformation linéaire tangente.

La condition nécessaire et suffisante d'homéomorphie locale est que la transformation linéaire tangente soit biunivoque. Moyen d'expression: par l'algèbre extrérie~~x~~ure, et par le jacobien. Les transformations homéomorphes continument différentiables conservant o forment un groupe G. L'ensemble des fonctions continument différentiables est invariant par G, et réciproquement.

Plus généralement, un système de fonctions $f_i(x)$, x dans R^n, $i = 1,2,\ldots,p$; $y = (f_1,f_2,\ldots,f_p)$ décrit dans R^p une variété V; le rang ~~desxsystèmes~~ du système des df_i = le nombre des f_i indépendantes = la dimension de V.

~~(NxEx~~
~~IIxxxVariétésxlocalementxdifférentiables~~

(N.B. Définition de la différentielle: c'est un élément d'un espace vectoriel, ~~quixsoxfait~~ correspondant d'une manière biunivoque et homomorphe aux classes de fonctions ne différant que par un o(distance), défini sur l'ensemble des fonctions qui ne diffèrent d'une fonction linéaire que par un o(distance) ("linéarisables")).

Notion de structure locale et principe de globalisation.

I. Soit o un point (dit "origine") dans un espace topologique E. On considère les transformations T, définies dans un voisinage suffisamment petit de o dans E, prenant leurs valeurs dans E, telles que To = o, et topologiques dans un voisinage de o; deux transformations T sont considérées comme égales si elles le sont localement, i.e. si elles sont égales dans un voisinage de o. Les T forment un groupe, le groupe topologique local en o dans E. Soit G un sous-groupe quelconque de ce groupe: G constitue par définition une <u>structure locale</u> de E au voisinage de o (géométrie locale, au sens kleinéen du mot géométrie).

~~II. Soit V un espace quelconque, on suppose qu'on ait fait correspondre à tout point p de V une fonction, définie dans un voisinage de o dans E, et représentant topologiquement celui-ci sur un voisinage de p; et on suppose que si deux~~

III. On suppose à présent que E est un espace E^n (plus généralement, on pourrait prendre un espace de groupe, ou un espace homogène).

Principe de localisation.

On rappelle ce qu'on entend par ~~structure d'un ensemble~~ structure d'un ensemble fondamental E: c'est un sous-ensemble d'un certain ensemble construit par les opérations fondamentales (produit, et ensemble des parties)~~, effe~~ effectuées un nombre fini de fois, à partir de E et de certains ensembles auxiliaires A,B,...,L supposés donnés. Les ensembles ainsi construits s'appelant l'échelle des types sur E, ceux de l'échelle des types sur une partie E' de E peuvent être considérés comme des parties de

ceux de.... l'échelle de E, de sorte ~~qu'~~ qu'une structure de E induit une structure de E'.

Dans un espace topologique E, deux structures de E seront dites localement équivalentes en p s'il y a un voisinage de p sur lequel elles induisent la même structure. ~~(Eventuellement définie~~ Une classe de structures équivalentes au voisinage de p constitue une strucutre locale de E au voisinage de p (on peut en définir éventuellement par un groupe, cf. feuillet ci-joint).

Soit E un espace topologique avec une structure locale S_p en tout point p. Soit f une classe d'homéomorphies de certains ensembles ouverts dans E sur certains ensembles ouverts dans un espace E', satisfaisant aux axiomes: I. Tout point de E' est une valeur d'un f au moins. II. Si on transporte à E' par les f les structures locales S_p, toutes les structures définies en un même point de E sont identiques. (N.B. Le seul cas intéressant est celui où il y a dans E une classe d'applications homéomorphes d'un voisinage de tout point sur un voisinage de tout point, transformant les unes dans les autres les structures S_p).

Méthode de Possel. On donne E, E'; dans E, une classe de transformations homéomorphes de certains ensembles ouverts sur certains ouverts;

famille F
et une ~~classe~~ de représentations homéomorphes de certains sous-ensembles ouverts V' de E' sur des ensembles ouverts V dans E; on suppose que les V' recouvrent E', et que si un point p' de E' appartient à deux V', il existe un voisinage de p dont les images ~~f~~ dans E sont en correspondance par une fonction de la famille F. C'est un procédé pour réaliser ce qui a été énoncé précédemment.

Exemples: variétés localement différentiables, localement analytiques, localement conformes, etc. Examiner à ce point de vue les espaces de Cartan, lorsqu'Ehresmann aura livré ses secrets.

~~Variétés loc~~ glob alement différentiables.

1° On définit en tout point p de R^n une structure locale, en se donnant la famille des fonctions (numériques) continument différentiables dans un voisinage de ce point.

2° Soit F la famille des fonctions définies dans un ensemble ouvert de R^n, à valeurs dans R^n, homéomorphiques, et continument différentiables. Ce sont les fonctions qui transportent de tout point où elles sont définies à son image la structure définie au 1° (et ce sont les seules).

3° Soit V^n ~~une variété~~ ~~un ensemble~~ un espace topologique (supposé donné); on suppose qu'on s'est donné une classe de correspondances ~~biunivoques~~ homéomorphes entre des ensembles ouverts W de R^n et des sous-ensembles ~~de~~ ouverts W' de V^n, de telle sorte que V^n soit la réunion des W' et que la structure locale (i.e. la famille de fonctions) définie en tout point de V^n par transport à partir de celle de R^n soit toujours ~~indépendante de~~ la même pour deux W' quelconques recouvrant le point. On dit alors que V^n est définie comme variété localement différentiable, et que la famille de fonctions définies (d'une manière unique par hypothèse) au voisinage de chaque point de V^n est la famille des fonctions continument différentiables au voisinage de ce point sur V^n.

Moyen technique pour vérifier que deux W' recouvrant un même point y définissent la même structure: la famille F du 2°.

Interprétation de la variété localement différentiable par un système de coordonnées local(défini à une transformation F près).

II. Variétés localement différentiables.

Définition.

Espace des différentielles; espace linéaire tangent (comme dual du précédent).

Correspondance des V^p dans V^n avec les variétés linéaires dan l'espace tangent.

Structure induite sur une V^p contenue dans V^n.

Construction de l'algèbre linéaire sur l'eppace des différentielles et sur l'espace tangent. Element linéaire à p dimensions. ~~Formes diffé~~ Tenseurs sur V^n.

(N.B. Dans les formes de Pfaff, il faut introduire de nouvelles espèces de fonctions comme coefficients).

Systèmes de Pfaff. Variétés intégrales.

Différentielle ("extérieure") d'une forme de Pfaff. Règles de calcul.

Systèmes complètement intégrables (à partir des équations différentielles ordinaires, avec existence par Leray).

III. Groupes de Lie. Espaces homogènes, par le repère mobile.

IV. Espaces de Riemann, de Cartan, de Bourbaki, et tous autres.

Ajouter quelque part : Contact; ~~géométrie k fois~~ variétés k fois différentiables. / Géométrie textile

GEOMETRIE. ESCORIAL.

I. Théorie locale de l'ensemble des fonctions continument différentiables dans R^n.

Définition de df, f prenant ses valeurs dans un vectoriel arbitraire. Dérivées partielles (non équivalence). Fonctions continument différentiables (équivalence avec les dérivées partielles continues).
Fonctions de fonctions ; invariance d'une relation entre différentielles (sans coordonnées).

Cas des fonctions à valeurs numériques : espace vectoriel des différentielles.

Transformation continument différentiables conservant l'origine, dans R^n (localement). La différentielle = trans-formation linéaire tangente.

La condition nécessaire et suffisante d'homéomorphie locale est que la transformation linéaire tangente soit biunivoque. Moyen d'expression : par l'algèbre extérieure, et par le jacobien. Les transformations homéomorphes conti-nument différentiables conservant o forment un groupe G. L'ensemble des fonctions continument différentiables est invariant par G, et réciproquement.

Plus généralement, un système de fonctions $f_i(x)$, x dans R^n, $i = 1,2,\ldots,p$; $y = (f_1,f_2,\ldots,f_p)$ décrit dans R^p une variété V ; le rang du système des df_i = le nombre des f_i indépendantes = la dimension de V.

(N.B. Définition de la différentielle : c'est un élément d'un espace vectoriel, correspondant d'une manière biunivoque et homomorphe aux classes de fonctions ne différant que par un o(distance), défini sur l'ensemble des fonctions qui ne diffèrent d'une fonction linéaire que par un o(distance) ("linéarisables")).

Principe de globalisation.

On rappelle ce qu'on entend par structure d'un ensemble fondamental E : c'est un sous-ensemble d'un certain ensemble construit par les opérations fondamentales (produit, et ensemble des parties) effectuées un nombre fini de fois, à partir de E et de certains ensembles auxiliaires A, B,..., L supposés donnés. Les ensembles ainsi construits s'appelant l'échelle des types sur E, ceux de l'échelle des types sur une partie E' de E peuvent être considérés comme des parties de ceux de l'échelle de E, de sorte qu'une structure de E induit une structure de E'.

Dans un espace topologique E, deux structures de E seront dites localement équivalentes en p s'il y a un voisinage de p sur lequel elles induisent la même structure. Une classe de structures équivalentes au voisinage de p constitue une structure locale de E au voisinage de p (on peut en définir éventuellement par un groupe, cf. feuillet ci-joint).

Soit E un espace topologique avec une structure locale S_p en tout point p. Soit f une classe d'homéomorphies de certains ensembles ouverts dans E sur certains ensembles ouverts dans un espace E', satisfaisant aux axiomes :

I. Tout point de E' est une valeur d'un f au moins.

II. Si on transporte à E' par les f les structures locales S_p, toutes les structures définies en un même point de E sont identiques. (N.B. Le seul cas intéressant est celui où il y a dans E une classe d'applications homéomorphes d'un voisinage de tout point sur un voisinage de tout point, transformant les unes dans les autres les structures S_p).

Méthode de Possel. On donne E, E' ; dans E, une classe de transformations homéomorphes de certains ensembles ouverts sur certains ouverts ; et une famille F de représentations homéomorphes de certains sous-ensembles ouverts V' de E' sur des ensembles ouverts V dans E ; on suppose que les V' recouvrent E', et que si un point p' de E' appartient à deux V', il existe un voisinage de p dont les images dans E sont en correspondance par une fonction de la famille F. C'est un procédé pour réaliser ce qui a été énoncé précédemment.

Exemples : variétés localement différentiables, localement analytiques, localement conformes, etc. Examiner à ce point de vue les espaces de Cartan, lorsqu'Ehresmann aura livré ses secrets.

<u>Notion de structure locale et principe de globalisation</u>.

I. Soit o un point (dit "origine") dans un espace topologique E. On considère les transformations T, définies dans un voisinage suffisamment petit de o dans E, prenant leurs valeurs dans E, telles que To = o, et topologiques dans un voisinage de o ; deux transformations T sont considérées comme égales si elles le sont localement, i.e. si elles sont égales dans un voisinage de o. Les T forment un groupe, le groupe topologique local en o dans E. Soit G un sous-groupe quelconque de ce groupe : G constitue par définition une <u>structure locale</u> de E au voisinage de o (géomètrie locale, au sens kleinéen du mot géomètrie).

<u>Variétés localement différentiables</u>.

1°- On définit en tout point p de R^n une structure locale, en se donnant la famille des fonctions (numériques) continuement différentiables dans un voisinage de ce point.

.....

2° - Soit F la famille des fonctions définies dans un ensemble ouvert de R^n, à valeurs dans R^n, homéomorphiques, et continu-ment différentiables. Ce sont les fonctions qui transportent de tout point où elles sont définies à son image la structure définie au 1° (et ce sont les seules).

3° - Soit V^n un espace topologique (supposé donné) ; on suppose qu'on s'est donné une classe de correspondances homéomorphes entre des ensembles ouverts W de R^n et des sous-ensembles ouverts W' de V^n, de telle sorte que V^n soit la réunion des W' et que la structure locale (i. e. la famille de fonctions) définie en tout point de V^n par transport à partir de celle de R^n soit toujours la même pour deux W' quelconques recouvrant le point. On dit alors que V^n est définie comme variété localement différentiable, et que la famille de fonctions définies (d'une manière unique par hypothèse) au voisinage de chaque point de V^n est la famille des fonctions continument différentiables au voisinage de ce point sur V^n.

Moyen technique pour vérifier que deux W' recouvrant un même point y définissent la même structure : la famille F du 2°. Interprétation de la variété localement différentiable par un système de coordonnées local (défini à une transforma-tion F près).

II. <u>Variétés localement différentiables</u>.

Définition.

Espace des différentielles ; espace linéaire tangent (comme dual du précédent).

Correspondance des V^p dans V^n avec les variétés linéaires dans l'espace tangent.

Structure induite sur une V^p contenue dans V^n.

Construction de l'algèbre linéaire sur l'espace des différen-tielles et sur l'espace tangent. Elément linéaire à p dimensions. Tenseurs sur V^n.

(N.B. Dans les formes de Pfaff, il faut introduire de nouvelles espèces de fonctions comme coefficients).

Systèmes de Pfaff. Variétés intégrales.

Différentielle ("extérieure") d'une forme de Pfaff. Règles de calcul.

Systèmes complètement intégrables (à partir des équations différentielles ordinaires, avec existence par Leray).

III. Groupes de Lie. Espaces homogènes, par le repère mobile.

IV. Espaces de Riemann, de Cartan, de Bourbaki, et tous autres.

Ajouter quelque part : Contact ; variétés k fois différentiables. - Géomètrie textile.
