COTE DELES 003

TEXTE TOPOLOGIE - DÉCISIONS DE L'ESCORIAL
[EN 2 ÉTAPES]

FONDS JEAN DELSARTE

NOMBRE DE PAGES NUMÉRISÉES 13

NOMBRE DE FEUILLES PRISES EN COMPTE 13

TOPOLOGIE. DECISIONS DE L'ESCORIAL.

I. Discours aux mathématiciens.

II. Définition: axiomes des ens.ouverts.

Topologies fortes et faibles.

Ensembles fermés.

Exemple: ensembles ordonnés (avec notation des flèches). Rationnels P.

(Intérieur) (Voisinage) Adhérence. (Frontière, point d'accumulation).

Systèmes fondamentaux de voisinages. Relation entre deux systèmes fondamentaux en un même point dans un même espace.

III. Fonctions continues, comme faites. (Mettre en exercice la définition de de Possel par les adhérences). ~~Inxérxxxix~~ Méthode générale de définition d'une topologie dans E comme la plus faible rendant continues des fonctions en nombre quelconque, définies dans E, prenant leurs valeurs dans des espaces topologiques donnés. Topologie induite (avec ce qui est fait). Topologie produit (nombre fini ou non de facteurs), avec ce qui est fait. Méthode de définition d'une topologie comme la plus forte rendant continues des fonctions prenant leurs valeurs ~~xxx~~ dans E, définies dans des espaces topologiques donnés. Topologie par équivalence; - on peut la retrouver par la première méthode ? Faire tout ce qui est pp 100-103

~~Exemples: P^n, P^2, nombres de Gauss~~

~~IVx~~ (N.B. Après la définition des fonctions continues, limite d'une fonction en un point d'un espace topologique. Axiome de Hausdorff, pour que la limite soit unique, et ses premières conséquences, cf. pp.22-23).

(Comme exemple de topologie induite, espace des entiers; de produit, plan et espaces rationnels; de topologie par équivalence, rationnels modulo 1).

IV. Suites et limites, comme cas particulier de ce qui précède, en considérant une suite comme une fonction sur l'espace topologique

(1,2,...,n,...,infini) et appliquant les résultats généraux de III ~~xxx~~ (p.ex. l'interversion des limites, par les fonctions de fonctions). Ier axiome de dénombrabilité et conséquences, comme fait.

// V. ~~xx~~ Espaces uniformes (A.W. exprimant ses réserves).

Définition: ? . Topologie définie par une structure uniforme. Exemple des rationnels.

Structure uniforme induite; produit d'espaces uniformes.

Fonctions uniformément continues. Exemples x+y, xy, 1/x dans les rationnels.

~~Fonction de Pontrjagin~~

Familles de Cauchy. Equivalence. Espaces complets. ~~Compléter un esp~~ Critère de Cauchy pour l'existence de lim f(p), f étant définie dans un espace quel~~xxxx~~conque et prenant ses valeurs dans un esp.uniforme complet.
Compléter un espace.
Exemple: nombres réels. - Nombres p-adiques. Nombres complexes.

Prolongement d'une fonction uniformément continue ~~(place à modifier éventuellement suivant la définition adoptée)~~.

Exemple: corps des nombres réels, - des nombres p-adiques. ~~xxxx~~ des n[os] complexes T
Espace numérique E^n, continuité des fractions rationnelles.

T montrer que c'est le même corps qu'on adjoignant i aux n. réels

~~Fonction de Pontrjagin~~ (S'il y a lieu, on démontrera dès ce chap. ~~VI x VI~~ qu'un espace uniforme satisfait à Hausdorff).
~~VI x~~

// VI. Nombres réels.

Ordre. Inégalités. Archimède. Valeur~~s~~ absolue.

Intervalles emboîtés. Ens. des nombres réels non dénombrables (truc de Cara).

Borne inf., borne sup. Structure des ouverts, - des fermés. Ens. parfaits discontinus, ens. de Cantor en exercice.

Développement dyadique; $2^{\text{aleph zéro}}$.

Toute fonction continue prend toute valeur intermédiaire entre deux valeurs.

Borel-Lebesgue. Bolzano-Weierstrass. Plus et moins l'infini; calcul sur ces signes. Calcul sur borne sup. et borne inf.

Lim.sup. et lim.inf. dans un espace topologique. Calcul (inégalité de Polya, pour la somme et le produit).

Théorème des fonctions monotones (à valeurs réelles, définies dans un espace ordonné quelconque). Exemple: suites.

Condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction définisse un homéomorphisme entre intervalles. Application: ~~$x^{p/q}$~~, $\sqrt{x}$.

(Pour tout ce qui précède, le rédacteur consultera Cara).

Théorème des groupes abéliens (ordonné, archimédien, complet, racine carrée. Complet au sens d'espace de groupe considéré comme espace uniformê). Toutes les conditions indispensables: pour la racine carré, Gegenbeispiel du groupedes entiers; pour complet, rationnels; pour archimédien, polynomes.

Axiome de saturation.

Droite euclidienne, avec les ax. de Hilbert: isomorphie avec les nombres réels. On a droit à la droite.

Fonctions exponentielles et logarithmiques.

VII. Comme fait, moins ce qui a été enlevé. (Distance des corps p-adiques). Distances équivalentes dans un même espace (i.e., définissant une même structure uniforme).

VIII. Théorie générale des compacts (sans changement, mais si possible ajouter la compac~~x~~ité des produits infinis de compacts).

Premier lemme sur les compacts (uniformes (p. 96-97)). Tout compact est susceptible d'une structure uniforme et d'une seule (pas vrai en général si non compact, ~~xxxpxxxxxxxxxxxxxxxxpx~~ exemples), et toute fonction continue, ~~p~~définie sur un compact, prenant ses valeurs dans un esp.uniforme, est uniformément continue.

Critère de compacité, pour les espaces uniformes quelconques si possible ~~xxxxxxxxxxxxxxmétriquesxxxx~~ (par la fonction de Pontrjagin). (Tout espace ~~xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx~~ compact peut être plongé dans ~~xxxxxxx~~ un ~~tore~~ (produit de segments), par la fonction de Pontrjagin).

Remarques

Au chapitre VIII, immédiatement après la théorie générale des compacts, insérer les localement compacts et le théorème d'Alexandroff, avec applications à E^n. ~~Homéomorphie de E^n complété avec S^n.~~

Au Chapitre VII, comme suit: Espaces métriques comme faits; espaces linéaires; linéaires normés; équivalence d'une norme avec un corps convexe (définition): sphère, cube, octaèdre dans E^n; projection centrale dans E^n; équivalence de tous les convexes; (plus généralement, étoilés). Corps convexe $\sum_1^n x_i^n \leq 1$ (inégalités pour un nombre fini de termes)

$E^n - 0 \cong S^{n-1} \times E^1$ (coordonnées polaires) ; P^{n-1} par identification à partir de E^n-0 et de S^{n-1}.

Projection stéréographique: isomorphie topologique de S^n pointé avec E^n.

Compléter E^n par un point à l'infini. Isomorphie avec S^n Cas du plan de la variable complexe. Transformations homographiques sur la variable complexe. Continuité dans le plan complété.

Insérer dans ce chap.: théorème de Banach (toute variété peut être définie par des équations linéaires); tout corps convexe peut être défini par des inégalités linéaires.

N.B. Dans les espaces linéaires, on aura défini les variétés linéaires à p dimensions dans E^n. Isomorphie topologique avec E^p.

Restent à caser (dans un chap. convenable (IX ?)): isomorphie du groupe des rotations de E^2 avec le cercle; de E^3 avec l'espace projectif P^3. Topologie du groupe des déplacements dans E^3, c'est-à-dire de l'ensemble des positions d'un corps solide. Surfaces de révolution dans E^3 topologie du tore. Espaces de droites et de variétés linéaires ~~à~~ dans E^n.

~~TOPOLOGIE (Suite).~~

~~Algèbre topologique.~~

// IX. ~~XI.~~ ~~IX.~~ Groupes topologiques. Définition. Complètement régulier (rappel, par fonction de Pontrjagin) et a fortiori Hausdorff. Groupes quotients (simplifier la démonstration en utilisant ~~(G/g)xx(G/g)~~ $(G/g) \times (H/h) = (G \times H)/(g \times h)$). Exemples: nombres réels modulo 1; E^n modulo entiers $= T^n$. Tores infinis. Sous-groupes fermés de E^n (suivre ce qui est fait, en simplifiant la rédaction). (Pour x modulo 1, employer $\tilde{x}$).

(voir papier Connexion)

(Avant les groupes quotients, insérer le théorème: tout groupe connexe est engendré par n'importe quel voisinage de l'unité. En effet le sous-groupe engendré par un tel voisinage est ouvert, ~~xxxxxréunionxd~~ et son complémentaire est une réunion de classes suivant ce sous-groupe donc aussi ouvert. Observer aussi que tout groupe quotient d'un groupe connexe est connexe, d'après les théorèmes généraux).

Théorème sur les groupes à un paramètre. La démonstration se simplifie par la connexité. Examiner si on peut la simplifier aussi au moyen de la fonction de Pontrjagin.

~~X. Algèbre linéaire topologique (Pour mémoire).~~

~~XI. Nombres complexes. Cercle, groupe des rotations. Comme fait (mais on définira le groupe des rotations par z' = az, a de module~~ ~~$a\bar{a} = 1$; dans la géométrie euclidienne on montrera que ce sont bien les rotations au sens élémentaire).~~

Application: angles. Fonctions trigonométriques. Structure du groupe multiplicatif des nombres complexes. Interprétation géométrique de z' = az. Coordonnées polaires dans le plan.

~~CONNEXION~~

Connexion

Définition immédiatement après les ensembles fermés.

Au chapitre III, ensembles connexes après la topologie induite; toute image d'ensemble connexe par une fonction continue est un ensemble connexe. ~~Appl. à l'identification des ev~~

Au chapitre VI, aussitôt après la structure des ensembles ouverts et fermés, connexité de tout intervalle.

Démontrer par la notion de connexe le théorème des valeurs intermédiaires des fonctio ns continues.

Dans la méthode d'identification, observer que si l'espace initial est connexe, l'espace des classes l'est aussi (évident par ce qui précède).

~~chapitre~~

~~Un seul chap. jusqu'aux uniformes, divisé en trois §~~
~~(chap. II, III, IV de ces notes)~~

Remarques- Les chap. II, III, IV deviennent les trois § d'un seul chapitre.

TOPOLOGIE. DÉCISIONS DE L'ESCORIAL.

I. Discours aux mathématiciens.

II. Définition : axiomes des ens. ouverts.

Topologies fortes et faibles.

Ensembles fermés.

Exemple : ensembles ordonnés (avec notation des flèches).

Rationnels. (Intérieur) (Voisinage) Adhérence. (Frontière, point d'accumulation).

Systèmes fondamentaux de voisinages. Relation entre deux systèmes fondamentaux en un même point dans un même espace.

III. Fonctions continues, comme faites. (Mettre en exercice la définition de de Possel par les adhérences). Méthode générale de définition d'une topologie dans E comme la plus faible rendant continues des fonctions en nombre quelconque, définies dans E, prenant leurs valeurs dans des espaces topologiques donnés. Topologie induite (avec ce qui est fait). Topologie produit (nombre fini ou non de facteurs), avec ce qui est fait. Méthode de définition d'une topologie comme la plus forte rendant continues des fonctions prenant leurs valeurs dans E, définies dans des espaces topologiques donnés. Topologie par équivalence ; - on peut la retrouver par la première méthode ? Faire tout ce qui est p. 100-103.

(N.B. Après la définition des fonctions continues, limite d'une fonction en un point d'un espace topologique. Axiome de Hausdorff, pour que la limite soit unique, et ses premières conséquences, cf. pp. 22-23).

....

(Comme exemple de topologie induite, espace des entiers ; de pro-duit, plan et espaces rationnels ; de topologie par équivalence, rationnels modulo 1).

IV. Suites et limites, comme cas particulier de ce qui précède, en considérant une suite comme une fonction sur l'espace topologique (1, 2,..., n, ..., infini) et appliquant les résultats généraux de III (p. ex. l'interversion des limites, par les fonctions de fonc-tions). 1er axiome de dénombrabilité et conséquences, comme fait.

V. Espaces uniformes (A.W. exprimant ses réserves).

Définition : ?. Topologie définie par une structure uniforme.

Exemple des rationnels.

Structure uniforme induite ; produit d'espaces uniformes.

Fonctions uniformément continues. Exemples $x+y$, xy, $1/x$ dans les rationnels.

Familles de Cauchy. Equivalence. Espaces complets. Critère de Cauchy pour l'existence de lim $f(p)$, f étant définie dans un espace quelconque et prenant ses valeurs dans un esp. uniforme complet. Complèter un espace.
Exemple : nombres réels. - Nombres p-adiques.- Nombres complexes.

Prolongement d'une fonction uniformément continue.

Exemple : corps des nombres réels - Espace numérique E^n, continui-té des fractions rationnelles.- des nombres p-adiques - des nombres complexes. Montrer que c'est le même corps qu'en adjoi-gnant i aux nombres réels.

(S'il y a lieu, on démontrera dès ce chap. qu'un espace uniforme satisfait à Hausdorff).

.....

VI. Nombres réels.

Ordre. Inégalités. Archimède. Valeur absolue.

Intervalles emboîtés. Ens. des nombres réels non dénombrables (truc de Cara).

Borne inf., borne sup. Structure des ouverts, - des fermés.

Ens. parfaits discontinus, ens. de Cantor en exercice.

Développement dyadique ; $2^{\text{aleph zéro}}$.

Toute fonction continue prend toute valeur intermédiaire entre deux valeurs.

Borel-Lebesgue. Bolzano-Weierstrass. Plus et moins l'infini ; calcul sur ces signes. Calcul sur borne sup. et borne inf.

Lim. sup. et lim. inf. dans un espace topologique. Calcul (inégalité de Polya, pour la somme et le produit).

Théorème des fonctions monotones (à valeurs réelles, définies dans un espace ordonné quelconque). Exemple : suites.

Condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction défi- -nisse un homéomorphisme entre intervalles. Application : $\sqrt{x}$.

(Pour tout ce qui précède, le rédacteur consultera Cara).

Théorème des groupes abéliens (ordonné, archimédien, complet, racine carrée. Complet au sens d'espace de groupe considéré comme espace uniforme). Toutes les conditions indispensables : pour la racine carré, Gegenbeispiel du groupe des entiers ; pour complet, rationnels ; pour archimédien, polynomes.

Axiome de saturation.

Droite euclidienne, avec les ax. de Hilbert : isomorphie avec les nombres réels. On a droit à la droite.

Fonctions exponentielles et logarithmiques.

.....

VII. Comme fait, moins ce qui a été enlevé. (Distance des corps p-adiques). Distances équivalentes dans un même espace (i.e., définissant une même structure uniforme).

VIII. Théorie générale des compacts (sans changement, mais si possible ajouter la compactité des produits infinis de compacts).
Premier lemme sur les compacts uniformes (p. 96-97). Tout compact est susceptible d'une structure uniforme et d'une seule (pas vrai en général si non compact, exemples), et toute fonction continue, définie sur un compact, prenant ses valeurs dans un esp.uniforme, est uniformément continue.
Critère de compacité, pour les espaces uniformes quelconques si possible (par la fonction de Pontrjagin). (Ttout espace compact peut être plongé dans un produit de segments, par la fonction de Pontrjagin).

Remarques.- Au chapitre VIII, immédiatement après la théorie générale des compacts, insérer les localement compacts et le théorème d'Alexandroff, avec applications à E^n.

Au chapitre VII, comme suit : Espaces métriques comme faits ; espaces linéaires ; linéaires normés ; équivalence d'une norme avec un corps convexe (définition) : sphère, cube, octaèdre dans E^n ; projection centrale dans E^n ; équivalence de tous les convexes ; (plus généralement, étoilés). Corps convexe $\sum x_i^p \leqslant 1$ (inégalités pour un nombre fini de termes)

$E^n - 0 = S^{n-1} \times E^1$ (coordonnées polaires) ; P^{n-1} par identi--fication à partir de $E^n - 0$ et de S^{n-1}.

.....

Projection stéréographique : isomorphie topologique de S^n pointé avec E^n.

Compléter E^n par un point à l'infini. Isomorphie avec S^n. Cas du plan de la variable complexe. Transformations homographiques sur la variable complexe. Continuité dans le plan complété.

Insérer dans ce chap. : théorème de Banach (toute variété peut être définie par des équations linéaires) ; tout corps convexe peut être définie par des inégalités linéaires.

N.B. Dans les espaces linéaires, on aura défini les variétés linéaires à p dimensions dans E^n. Isomorphie topologique avec E^p.

Restent à caser dans un chap. convenable (IX ?) : isomorphie du groupe des rotations de E^2 avec le cercle ; de E^3 avec l'espace projectif P^3. Topologie du groupe des déplacements dans E^3, c'est-à-dire de l'ensemble des positions d'un corps solide. Surfaces de révolution dans E^3 topologie du tore. Espaces de droites et de variétés linéaires dans E^n.

IX. Groupes topologiques. Définition. Complètement régulier (rappel, par fonction de Pontrjagin) et à fortiori Hausdorff. Groupes quotients (simplifier la démonstration en utilisant $(G/g)\times(H/h) = (G\times H)/(g\times h)$). Exemples : nombres réels modulo 1 ; E^n modulo entiers $= T^n$. Tores infinis. Sous-groupes fermés de E^n (suivre ce qui est fait, en simplifiant la rédaction). (Pour x modulo 1, employer $\tilde{x}$).

(Avant les groupes quotients, insérer le théorème : tout groupe connexe est engendré par n'importe quel voisinage de l'unité .

(voir papier connexion)

En effet le sous-groupe engendré par un tel voisinage est ouvert, et son complémentaire est une réunion de classes suivant ce sous-groupe donc aussi ouvert. Observer aussi que tout groupe quotient d'un groupe connexe est connexe, d'après les théorèmes généraux). Théorème sur les groupes à un paramètre. La démonstration se simplifie par la connexité. Examiner si on peut la simplifier aussi au moyen de la fonction de Pontrjagin.

Application : angles. Fonctions trigonomètriques. Structure du groupe multiplicatif des nombres complexes. Interprétation géomè-trique de $z' = az$. Coordonnées polaires dans le plan.

<u>Connexion</u> : Définition immédiatement après les ensembles fermés. Au chapitre III, ensembles connexes après la topologie induite ; toute image d'ensemble connexe par une fonction continue est un ensemble connexe.

Au chapitre VI, aussitôt après la structure des ensembles ouverts et fermés, connexité de tout intervalle.

Démontrer par la notion de connexe le théorème des valeurs intermédiaires des fonctions continues.

Dans la méthode d'identification, observer que si l'espace initial est connexe, l'espace des classes l'est aussi (évident par ce qui précède).

<u>Remarque</u> - Les chap. II, III, IV deviennent les trois § d'un seul chapitre.