COTE DELES 002

TEXTE ENSEMBLES - DÉCISIONS ESCORIALES
PROJET DE LAIUS SCURRILE
[EN 2 ÉTAPES]

FONDS JEAN DELSARTE

NOMBRE DE PAGES NUMÉRISÉES 11

NOMBRE DE FEUILLES PRISES EN COMPTE 11

// Ensembles || Décisions escoriales - Projet de Laïus Scurrile -

Enréalité? type de structure Evt exemples géométrie ou physique

L'objet d'une théorie mathématique est ~~un ensemble d'objets xxxxxxxxxxx d'éléments ayant des propriétés. Les mots "ensemble"~~ une structure organisant un ensemble d'éléments: les mots "structure" "ensemble" "éléments" n'étant pas susceptibles de définition, mais constituant des notions premières communes à tous les mathématiciens Ils s'éclaireront d'eux-mêmes dès qu'on aura eu l'occasion de définir des ~~telles~~ structures, comme il va être fait dès ce chapitre même. Grâce à une ~~xxxxx~~ structure, on a le droit de dire que des éléments ou des parties de l'ensemble considéré dans ~~qui fait l'objet d'~~une théorie ont entre eux certaines relations ou possèdent certaines propriétés: les mots "~~éléments~~", "parties", "relations", "propriétés" ne sont pas susceptibles de définition non plus, et constituent également des notions premières; ~~on acceptera provisoirement, si l'on veut, la signification de ces mots dans le langage vulgaire; ce qui est important, c'est que l'on puisse passer de l'un à l'autre au moyen de ce qui va être dit maintenant. En toute rigueur,~~ Conformément à nos principes, nous devrions énoncer les axiomes auxquels satisfont ces notions: ces axiomes ~~ne seraient autres~~ seraient ceux de la théorie des ensembles et de toute théorie mathématique. Devant les difficultés, jusqu'à ce jour insurmontées, qui s'opposent à ~~xxxx~~ la formulation de tels axiomes, nous ~~adopterons provisoirement~~ attribuerons provisoirement à ces mots la signification qu'ils ont dans le langage vulgaire, et nous allons ~~décrire dans ce qui suit quelques-unes des pro~~ donner dans ce qui suit des règles générales sur leur emploi et la manière de passer de l'un à l'autre.

///

[illegible]L.

A la suite du laius scurrile:

Une propriété définit une partie. Une partie définit une propriété, au moyen de $\in$. Partie composée d'un seul élément, définition du signe = . Partie vide, partie pleine. Négation: complémentaire. (Complémentaire est une relation).

<u>Tout ensemble fondamental est supposé posséder au moins la structure</u> $\in$.

A. <u>Toute partie d'un fondamental peut être considérée comme un fondamental, avec la structure</u> $\in$ <u>induite</u>.

B. <u>L'ensemble des parties d'un fondamental peut être considéré comme un fondamental, avec la structure des quatre</u> U. Relations entre celle-ci et la structure $\in$ dans l'ensemble initial.

<u>Couple</u>, d'où:

C. <u>Le produit de deux fondamentaux est un fondamental</u>.

Relation entre deux éléments = propriétés de couple, et définit une partie du produit. Exemple: $\in$, comme relation entre un élément du fondamental et un sous-ensemble du fondamental.

Soit une relation entre éléments a de A et b de B, ou, ce qui revient au même pour notre objet, une partie M du produit de A par B. A' étant une partie de A, soit B' l'ensemble des b qui sont dans la relation M avec un a de A': on a ainsi une relation entre sous-ensembles A' de A et B' de B. Symétriquement.... Quand M est tel que, chaque fois que A' est réduit à un élément, B' est réduit à un élément, on dit que M définit une fonction, définie dans A, prenant ses valeurs dans B (notation b = f(a)$^{\times}$). Exemples: M quelconque définit les deux fonctions d'ensemble, B' = F(A') (comme on a dit) et symétriquement. Autre exemple: complémentaire. Quand M est tel que..., on dit que M définit une correspondance biunivoque (et deux fonctions).

× avec abus de langage: f({a})

T(Notation: f^{-1})

Exemple: l'ensemble desfonctions, définies dans A, prenant leurs valeurs dans B, est en correspondance biunivoque avec une partie de l'ensemble des parties du produit de A par B. Autre exemple: complémentaire (corresp.biunivoque entre ~~les~~ l'ensemble des parties de E et lui-même). Une corresp.biunivoque se transporte à tous les types successifs déduits de l'ensemble étudié.
(Immédiatement après les deux fonctions d'ensemble ~~définies~~

$B' = F(A')$, $A' = G(B')$, ~~donner la notation pour~~ définies par une relation M, donner la notation pour le cas où M définit une fonction $b = f(a)$: on écrit $B' = f(A')$ (par un abus de langage) et $A' = f^{-1}(B')$).

Nous sommes maintenant en état de ~~définir à~~ relier d'une manière précise la notion de structure aux précédentes. On dit qu'on a défini une structure dans un ensemble fondamental quand on s'est donné des propriétés des (ou des relations entre les) éléments de cet ensemble, ou de l'un de ceux qu'on peut en déduire par une combinaison des opérations ci-dessus, et éventuellement d'ensembles fondamentaux auxiliaires préalablement donnés. Plus on s'est donné de propriétés, plus la structure est forte (exemple: la structure la plus faible de toutes est la structure $\in$). ~~Isomorphie~~

Transport de structure: quand deux ensembles sont en correspondance biunivoque et que l'un ~~est porteur d'~~ possède une structure, celle-ci peut être transportée à l'autre : isomorphie. Deux ensembles isomorphes par rapport à une structure peuvent cesser de le devenir p.r. à une structure plus riche.

Relation d'équivalence (relation symétrique et transitive), ~~d'où~~ partage en classes qu'elle définit, ~~fonction~~ d'où:

D. <u>On peut considérer comme fondamental l'ensemble des classes définies par une relation d'équivalence dans un fondamental</u>.

D'où: fonction définie par un partage en classes. Réciproquement, toute fonction définit un tel partage. Exemple: fonction caractér.

Correspondance biuniveque entre sous-ensembles de l'ensemble ~~fon~~ des classes et sommes de classes dans l'ensemble initial. Corresp. biuniveque entre fonctions dans l'ensemble des classes et fonctions dans l'espace initial, constantes sur les classes (N.B. On aura fait en leur lieu les fonctions de fonctions). Formule $(GxH)/(gxh) = (G/g)x(H/h)$. (Terminologie: ensemble quotient, justifiée par cette formule).

Calcul, d'après Chevalley, avec quelques formules en plus.

Produit quelconque: soit E_i une fonction de i, définie dans I, et prenant ses valeurs dans l'ensemble des parties d'un certain ensemble fondamental E; le produit des E_i est par définition l'ensemble des fonctions x_i, définies dans I, prenant leurs valeurs dans E, telles que $x_i \in E_i$ quel que soit i dans I (N.B.: on écrira iota au lieu de i, i étant réservé en principe au cas où I est fini, et n au cas où n est l'ens. des entiers). On observera que le produit de deux facteurs rentre dans cette définition, un couple n'étant pas autre chose qu'une fonction définie sur un ensemble I à deux éléments, pourvu qu'on puisse ajouter les chats et les vérités: ce qu'on peut faire, ~~justement~~ comme on le voit justement par le produit (on peut faire la somme de deux droites, dans le produit droite x droite x ensemble à plus d'un élément, à une isomorphie près, cf. laius sur l'isomorphie).

~~(Si on reste au point de vue dit ontologique, on aura fait après l'isomorphie en loi général~~

~~Rg~~ Règles sur le produit: associativité (à une isomorphie près) pour une décomposition quelconque en classes dans l'ensemble des indices. Projections sur les facteurs et plus généralement sur les produits partiels (les projections sont des fonctions continues):

chaque produit partiel peut être considéré comme un ensemble quotient du produit complet (en identifiant les éléments qui ne diffèrent que par certaines coordonnées). En laissant constantes certaines coordonnées on obtient un ensemble isomorphe à un produit partiel.

(Si on s'en tient au point de vue dit ontologique, on ~~fxxi~~ fait aussitôt après l'isomorphie un laius général, pour dire que dans la théorie qui étudie un type de structures, deux ensembles isomorphes au point de vue de cette structure peuvent être considérés comme identiques et recevoir le même nom, quelles que soient d'ailleurs leurs origines respectives (p.ex. en topologie il est d'usage d'appeler sphère~~xxxmxximpixxxx~~ toute variété simplement connexe, etc.). Application dans ce chapitre même, pour le produit de deux facteurs qui est défini de deux ~~mxixi~~ manières différentes, isomorphes l'une de l'autre. Cf. aussi la question ~~dxxrxmpix~~ de l'extension d'un ensemble, passage des entiers aux rationnels, des rationnels aux irrationnels, etc.)

Ensuite (autre rédacteur):

Entiers. Y compris une étude particulière de ~~ixxix~~ l'associativité.
Ordinaux. Récurrence transfinie. Wohlordnung.
Puissances. Théorème de comparaison, démonstration directe (deman-~~Théorèmexdexxxxxxx~~ der à H.Cartan). Toute puissance est un aleph.
Puissance de l'ensemble des parties. Dénombrable, continu (hypothèse du continu). Hypothèse du continu généralisée.

ENSEMBLES. DECISIONS ESCORIALES - PROJET DE LAIUS SCURRILE -

L'objet d'une théorie mathématique est une structure organi--sant un ensemble d'éléments : les mots "structure", "ensemble" "éléments" n'étant pas susceptibles de définition, mais constituant des notions premières communes à tous les mathématiciens. Ils s'éclaireront d'eux-mêmes dès qu'on aura eu l'occasion de définir des structures, comme il va être fait dès ce chapitre même. Grâce à une structure, on a le droit de dire que des éléments ou des parties de l'ensemble considéré dans une thèorie ont entre eux certaines relations ou possèdent certaines propriétés : les mots "parties", "relations", "propriétés" ne sont pas susceptibles de définition non plus, et constituent également des notions premières . Conformément à nos principes, nous devrions énoncer les axiomes auxquels satisfont ces notions : ces axiomes seraient ceux de la théorie des ensembles et de toute théorie mathématique. Devant les difficultés, jusqu'à ce jour insurmontées, qui s'oppo--sent à la formulation de tels axiomes, nous attribuerons provi--soirement à ces mots la signification qu'ils ont dans le langage vulgaire, et nous allons donner dans ce qui suit des règles générales sur leur emploi et la manière de passer de l'un à l'autre.

A la suite du laïus scurrile :

Une propriété définit une partie. Une partie définit une propriété, au moyen de $\in$. Partie composée d'un seul élément, définition du signe = . Partie vide, partie pleine. Négation : complémentaire. (Complémentaire est une relation).

<u>Tout ensemble fondamental est supposé posséder au moins la structure</u> $\in$.

A. <u>Toute partie d'un fondamental peut être considéré comme un fondamental, avec la structure</u> $\in$ <u>induite</u>.

.....

B. <u>L'ensemble des parties d'un fondamental peut être considéré comme un fondamental, avec la structure des quatre</u> U. Relations entre celle-ci et la structure $\in$ dans l'ensemble initial.

<u>Couple</u>, d'où :

C. <u>Le produit de deux fondamentaux est un fondamental</u>.

Relation entre deux éléments = propriétés de couple, et définit une partie du produit. Exemple : $\in$, comme relation entre un élément du fondamental et un sous-ensemble du fondamental.

Soit une relation entre éléments a de A et b de B, ou, ce qui revient au même pour notre objet, une partie M du produit de A par B.

A' étant une partie de A, soit B' l'ensemble des b qui sont dans la relation M avec un a de A' : on a ainsi une relation entre sous-ensembles A' de A et B' de B. Symétriquement .... Quand M est tel que, chaque fois que A' est réduit à un élément, B' est réduit à un élément, on dit que M définit une fonction, définie dans A, prenant ses valeurs dans B (notation b = f(a) avec abus de langage : $f(\{a\})$). Exemples : M quelconque définit les deux fonctions d'ensemble, B' = F(A') (comme on a dit) et symétriquement (notation : $\overset{-1}{f}$). Autre exemple : complémentaire. Quand M est tel que ..., on dit que M définit une correspondance biunivoque (et deux fonctions).

Exemple : l'ensemble des fonctions, définies dans A, prenant leurs valeurs dans B, est en correspondance biunivoque avec une partie de l'ensemble des parties du produit de A par B. Autre exemple : complémentaire (corresp. biunivoque entre l'ensemble des parties de E et lui-même). Une corresp. biunivoque se transporte à tous les types successifs déduits de l'ensemble étudié. (Immédiatement après les deux fonctions d'ensemble B' = F(A'), A' = G(B') , définies par une relation M, donner la notation pour le cas où M définit une fonction b = f(a) : on écrit B' = f(A') (par un abus de langage) et A' = $\overset{-1}{f}$ (B')).

Nous sommes maintenant en état de relier d'une manière précise la notion de structure aux précédentes. On dit qu'on a défini une structure dans un ensemble fondamental quand on s'est donné des propriétés des (ou des relations entre les) éléments de cet ensemble, ou de l'un de ceux qu'on peut en déduire par une combi-naison des opérations ci-dessus, et éventuellement d'ensembles fondamentaux auxiliaires préalablement donnés. Plus on s'est donné de propriétés, plus la structure est forte (exemple : la structure la plus faible de toutes est la structure $\in$). Transport de structure : quand deux ensembles sont en correspondance biunivoque et que l'un possède une structure, celle-ci peut être transportée à l'autre : isomorphie. Deux ensembles isomorphes par rapport à une structure peuvent cesser de la devenir p. r. à une structure plus riche.

Relation d'équivalence (relation symétrique et transitive), partage en classes qu'elle définit, d'où :

D. <u>On peut considérer comme fondamental l'ensemble des classes définies par une relation d'équivalence dans un fondamental</u>.
D'où : fonction définie par un partage en classes. Réciproquement, toute fonction définit un tel partage. Exemple : fonction caractér. Correspondance biunivoque entre sous-ensembles de l'ensemble des classes et sommes de classes dans l'ensemble initial. Corresp. biunivoque entre fonctions dans l'ensemble des classes et fonctions dans l'espace initial, constantes sur les classes (N.B. On aura fait en leur lieu les fonctions de fonctions). Formule $(G\times H)/(g\times h) = (G/g)\times(H/h)$. (Terminologie : ensemble quotient, justifiée par cette formule).

Calcul, d'après Chevalley, avec quelques formules en plus.

.....

Produit quelconque : soit E_i une fonction de i, définie dans I, et prenant ses valeurs dans l'ensemble des parties d'un certain ensemble fondamental E ; le produit des E_i est par définition l'ensemble des fonctions x_i, définies dans I, prenant leurs valeurs dans E, telles que $x_i \in E_i$ quelque soit i dans I (N.B. : on écrira iota au lieu de i, i étant réservé en principe au cas où I est fini, et n au cas où n est l'ens. des entiers). On observera que le produit de deux facteurs rentre dans cette définition, un couple n'étant pas autre chose qu'une fonction définie sur un ensemble I à deux éléments, pourvu qu'on puisse ajouter les chats et les vérités : ce qu'on peut faire, comme on le voit justement par le produit (on peut faire la somme de deux droites, dans le produit droite x droite x ensemble à plus d'un élément, à une isomorphie près, cf. laius sur l'isomorphie).

Règles sur le produit : associativité (à une isomorphie près) pour une décomposition quelconque en classes dans l'ensemble des indices. Projections sur les facteurs et plus généralement sur les produits partiels, chaque produit partiel peut être considéré comme un ensemble quotient du produit complet (en identifiant les éléments qui ne diffèrent que par certaines coordonnées). En laissant constantes certaines coordonnées on obtient un ensemble isomorphe à un produit partiel.

(Si on s'en tient au point de vue dit ontologique, on fait aussitôt après l'isomorphie un laius général, pour dire que dans la théorie qui étudie un type de structures, deux ensembles isomorphes au point de vue de cette structure peuvent être considérés comme identiques et recevoir le même nom, quelles que soient d'ailleurs leurs origines respectives (p. ex. en topologie il est d'usage d'appeler sphère toute variété simplement connexe,etc..).

Application dans ce chapitre même, pour le produit de deux facteurs qui est défini de deux manières différentes, isomor-phes l'une de l'autre. Cf. aussi la question de l'extension d'un ensemble, passage des entiers aux rationnels, des rationnels aux irrationnels, etc.)

Ensuite (autre rédacteur) :

Entiers. Y compris une étude particulière de l'associativité.
Ordinaux. Récurrence transfinie. Wohlordnung.
Puissances. Théorème de comparaison, démonstration directe (demander à H. Cartan). Toute puissance est un aleph. Puissance de l'ensemble des parties. Dénombrable, continu (hypothèse du continu). Hypothèse du continu généralisée.