COTE DELCH 004

TEXTE TOPOLOGIE CHANCAY
1ER CHAPITRE : TÊTE DE PARAGRAPHES

FONDS JEAN DELSARTE

NOMBRE DE PAGES NUMÉRISÉES 7

NOMBRE DE FEUILLES PRISES EN COMPTE 7

Topologie Chaussay

DELCH004

2

1re Chapitre : tête de paragraphes.

§ 1. Définition des espaces topologiques.

On dit qu'on définit dans un ensemble fondamental E une structure topologique, si l'on définit une famille O de parties de E satisfaisant aux axiomes suivants : O_1 toute réunion d'ensembles de O est un ensemble de O ; O_2 toute intersection finie d'ensembles de O est un ensemble de O. Les ensembles de O seront appelés ensembles ouverts de la structure topologique qu'on a définie dans E, E lui-même sera ~~xxx~~ appelé un espace topologique ou simplement un espace et ses éléments seront aussi appelés ses points.

D'après ~~ses~~ Ensembles (références) l'axiome O_1 implique que l'ensemble vide appartient à la famille O. L'axiome O_2 implique de même que l'espace entier E appartient à la famille O. L'axiome O_2 peut aussi être décomposé en deux axiomes comme suit : O_{2a} l'intersection de deux ensembles de O, est un ensemble de O ; O_{2b} l'ensemble ~~de~~ E appartient à O.

Exemple de Mandelbröjt. Homéomorphie.

Suivant les définitions générales (références) on dit qu'on a établi une isomorphie entre deux espaces pourvus de leur structure topologique si l'on a établi entre eux ~~deux~~ une correspondance biunivoque qui transforme la famille des ensembles ouverts sur l'un en la famille des ensembles ouverts sur l'autre. Deux tels ensembles seront appelés topologiquement isomorphes ou par abus de langage quand aucune confusion n'est à craindre, isomorphes.

Sur un même ensemble fondamental on peut définir des ~~xxx~~ structures topologiques différentes au moyen des différentes familles de parties de E qui satisfont aux axiomes O_1, O_2 ; bien entendu les espaces topologiques ainsi définis seront considérés comme différents. De deux structures topologiques définies sur un même ensemble E au moyen de deux familles O_1 O_2

la première sera dite plus ~~forte~~ fine que la seconde si $O_1 \subset O_2$.
Si chacune des deux structures est plus ~~forte~~ fine que l'autre, il est clair qu'elles sont identiques. Exercices comme noté.

Un moyen simple de définir une famille de parties d'un ensemble E satisfaisant à l'axiome O_1 est de partir d'une famille de parties quelconque $\mathcal{B}$ qu'on appellera la base et de prendre pour famille O la famille de toutes les réunions d'ensembles de $\mathcal{B}$. Pour que l'on ait ainsi défini une topologie, il faut et il suffit que cette famille O satisfasse à O_2 ou autrement dit que toute intersection finie de réunions d'ensembles de $\mathcal{B}$ soit une telle réunion. En vertu de l'associativité (ensembles, références) une condition nécessaire et suffisante pour cela est que toute intersection finie d'ensembles de $\mathcal{B}$ soit une réunion d'ensembles de $\mathcal{B}$. Soient $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ deux familles satisfaisant à cette condition ; pour que la topologie définie à partir de $\mathcal{B}_1$ soit plus ~~forte~~ fine que la topologie définie à partir de $\mathcal{B}_2$ il faut et il suffit que tout ensemble de $\mathcal{B}_2$ soit ouvert dans la topologie définie par $\mathcal{B}_1$; si de plus tout ensemble de $\mathcal{B}_1$ est ouvert etc... les deux topologies sont identiques. Exemple des rationnels d'abord sans la base, ensuite avec la base.

§ 2. Ensembles fermés, extérieurs, intérieurs, etc...

Un ensemble F est dit fermé si son complémentaire est un ensemble ouvert. Par passage au complémentaire les axiomes O_1, O_2 se traduisent dans les théorèmes suivants qui leur sont respectivement équivalents : une intersection d'ensembles fermés est un ensemble fermé (en particulier l'espace entier est un ensemble fermé) et toute réunion finie d'ensembles fermés est un ensemble fermé (l'ensemble vide est un ensemble fermé). Remarquons qu'il résulte de ce qui précède que l'ensemble vide et l'espace entier sont à la fois ouverts et fermés S'ils sont les seuls ensembles jouissant de cette propriété, on dit que l'espace est connexe ; c'est une notion que nous aurons à étudier plus tard en détail et dont on mesurera l'importance. Pour qu'un espace soit non-connexe, il faut et il suffit qu'il soit la réunion de deux ensembles fermés non-vides, sans points communs ou ce qui revient au même de deux ensembles ouverts non-vides sans points communs.

X ici insérer le feuillet joint ;

Après la ligne 5 dactylographiée, insérer ce qui suit :

On dit aussi dans ce cas que A est un voisinage de p.

Ici s'insère le laïus dactylographié depuis une structure topologique, jusqu'à, contienne au moins un point de A

La frontière et la fermeture sont des ensembles fermés ; la fermeture d'une réunion finie est la réunion des fermetures. Exercices sur la fermeture des intersections. Ensembles denses par rapport à un autre. Ensembles partout denses. Transitivité.

§ 3. Systèmes fondamentaux de voisinages - comme dans Weil, pages 14 et 15.

Si à chaque point d'un espace on attache un système fondamental de voisinages, une condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble Ω soit ouvert est que pour tout point p de Ω il existe un voisinage du système fondamental attaché à ce point (qui soit) contenu dans Ω.

Réciproquement, supposons que dans un ensemble fondamental E on ait attaché à chaque point p un système de parties de E ; considérons la famille O de tous les ~~points~~ ensembles Ω telle que si $p \in \Omega$ il y ait un ensemble du système attaché à p qui soit contenu dans Ω. Cette famille O satisfait évidemment à l'axiome O_1. Nous allons donner les conditions pour qu'elle satisfasse aussi à l'axiome O_2 et que dans la structure topologique qu'elle définit les ensembles du système attachés à chaque point, soient des voisinages de ce point. (donc un système fondamental pour p)

Tout d'abord pour que d'autres systèmes attachés de même aux points de E définissent la même famille O, il faut et il suffit qu'en tout point de E les conditions suivantes soient vérifiées ; etc... S'il en est ainsi en un point p les deux systèmes seront dits équivalents au point p. Etc...

§ 4. Fonctions continues. Comme dans Weil, après la définition des fonctions continues dans tout l'espace, insérer premier exemple : si deux espaces topologiques E_1, E_2 sont définis à partir d'un même ensemble fondamental au moyen de deux familles d'ensembles ouverts O_1, O_2 la condition nécessaire et suffisante pour que la fonction identique considérée comme définie dans E_1 prenant ses valeurs dans E_2 soit continue est que la topologie de E_1 soit plus ~~faible~~ fine que celle de E_2; pour que les deux topologies soient identiques, il faut et il suffit donc que la fonction soit continue dans les deux sens. Cas plus général de l'homéomorphie entre deux espaces.

§ 5. Diverses manières de définir des topologies. Voir l'archétype et feuillets dactylographiés.

§ 6. Limites et suites

~~Laïus sur fermeture en frontière, à insérer dans ce qui précède.~~

x
feuillet à insérer

Une structure topologique définie dans un ensemble fondamental E, permet d'attacher à toute partie de E un certain nombre d'ensembles dont les définitions suivent :

1) On appelle point intérieur de A tout point p tel qu'il existe un ensemble ouvert contenu dans A et contenant p.

La réunion des points intérieurs de A est un ensemble ouvert qui peut être défini comme le plus grand ensemble ouvert contenu dans A. On l'appelle l'intérieur de A.

Remarque : l'intérieur d'un ensemble peut être vide.

2) Un point intérieur au complémentaire de A est dit point extérieur à A.

Ces points peuvent être caractérisés par les propriétés suivantes : il existe un ensemble ouvert contenant le point et ne contenant aucun point de A.

3) Les points qui ne sont ni intérieurs ni extérieurs à A, sont dits points frontières de A et leur ensemble s'appelle la frontière de A. C'est aussi la frontière du complémentaire de A.

Pour qu'un point appartienne à la frontière de A, il faut et il suffit que tout ensemble ouvert contenant le point contienne au moins un point de A et un point de son complémentaire.

Toute partie A de E définit une décomposition de E en trois ensembles deux à deux sans points communs : l'intérieur de A, l'extérieur de A et la frontière de A.

4) On appelle fermeture de A la réunion de son intérieur et de sa frontière ; on la note par $\bar{A}$. Pour qu'un point appartienne à $\bar{A}$ il faut et il suffit que tout ensemble contenant ce point contienne au moins un point de A.

~~Il peut se présenter deux cas : ou bien tout ensemble ouvert contenant p contient un point de A distinct de p,~~

dans ce cas p est dit point d'accumulation de A; ou bien il existe un ensemble ouvert contenant p et ne contenant aucun point de A diffèrent de p , dans ce cas p appartient à A et est dit point isolé de A .

Ainsi $\bar{A}$ est la rèunion de l'ensemble des points d'accumulation ~~ou~~ de A et de l'ensemble de ses points isolés.

L'ensemble des points d'accumulation de A est appelé ensemble dèrivé de A .

Un ensemble identique à son dèrivé est dit parfait .

La frontière et la fermeture sont des ensembles ~~xxxxxxxxx~~ fermés.

La fermeture des réunions et la réunion des fermetures.

Exercice sur la fermeture des intersections

Exercice : tout ensemble ~~fermé~~ parfait est fermé.

Ensemble dense par rapport à un autre ; ensemble partout dense ; transitivité.