DELBE 011

TEXTE COMMISSION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES [TROIS ÉTAPES]

FONDS JEAN DELSARTE

NOMBRE DE PAGES NUMÉRISÉES 10

NOMBRE DE FEUILLES PRISES EN COMPTE 10

COMMISSION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

On peut étudier les éq. diff. de divers points de vue :

1°) Point de vue <u>algébrique</u> (domine la théorie des éq. linéaires à coefficients constants ; et la question des méthodes élémentaires d'in-tégration, y compris les rapports avec la théorie des groupes, les paquets classiques sur les intégrales premières, les multiplicateurs, etc..). 2°) Point de vue <u>local</u> (cas régulier/cas singuliers). 3°) Point de vue <u>global</u>. 4°) Point de vue <u>mixte</u> intermédiaire entre local et glo-bal : quand on étudie le problème <u>au voisinage</u> d'une solution connue (éq. aux variations) ou <u>au voisinage</u> de certaines valeurs des paramètres (perturbations ; démonstration de Poincaré sur la non-existence d'inté-grales premières du problème des 3 corps ; etc.).

- Il paraît difficile de faire grand'chose si on ne possède pas d'a-bord des théorèmes d'existence. Pour le reste, l'ordre est quelque peu arbitraire.

I. Formulation d'un problème d'équations différentielles (<u>globalement</u>)

II. <u>Point de vue local</u>. (Débuter par des préliminaires sur les famil-les de courbes. Cas régulier. Définition du cas irrégulier. Cas des équa-tions non résolues : méthode de Poincaré. ~~1°~~ <u>Cas régulier</u> : théorème d'existence dans les conditions habituelles pour un système de n équa-tions à n inconnues (montrer qu'on peut toujours s'y ramener) : renvoi à la méthode Leray ; démonstration par les approximations successives (cas réel / cas complexe). Dans le cas complexe, unicité de la solution <u>holomorphe</u> par la considération des coefficients de Taylor.

Dans les ~~deux~~ cas (Lipschitz), <u>stabilité</u> locale par rapport aux petites varia-tions des conditions initiales, ou plus généralement des paramètres : d'où unicité. Forme de la dépendance par rapport aux conditions initiales cas de n équations du 1^er^ ordre ; cas de n équations du 2nd ordre (par deux points, <u>localement</u>, passe une solution et une seule).

....

~~2°~~ Cas singuliers, étude locale. Indice d'un~~e~~ point ~~intégrale~~ singulier~~e~~ Cols, noeuds, foyers (Ordre n à l'étude) cas réel. Cas complexes correspondants. Autres exemples (lieux de rebroussements ; intégrales singulières).

III. Point de vue global, cas réel. Théorème d'existence global, et d'unicité ou plutôt de stabilité sur tout intervalle fini. Exemples d'étude globale directe dans des problèmes du premier ordre : notion de cycle limite, centres. Exemple de problème du second ordre ? Renvoyer à la géomètrie ? Au calcul des variations ?

(N.B. Dans les études globales, 2 types de problèmes bien distincts : 1° problèmes géomètriques, sur une multiplicité donnée, aucune coordonnée n'étant privilégiée ; 2° problèmes où la variable indépendante est le temps, et où on veut l'allure des fonctions inconnues en fonction de t, en particulier pour t très grand, et p. ex. des évaluations asymptotiques : v. plus loin à la suite des éq. linéaires. cf. O et o. Voir Hardy - Borel et Gegenbeispiel).

IV. ~~Méthodes d'intégration et théorie des groupes. Notion d'intégrale première, exemples ; équations de la dynamique. Multiplicateur pour les éq. du 1^er^ ordre ?~~

~~Système d'équations du 1^er^ ordre conçu comme définissant une transformation infinitésimale ; intégration détermination du groupe qu'elle engendre. Notion générale de groupe de transformation (notion de groupe abstrait ? d'isomorphie ?) et de transf. infinitésimale : transf. permutables, finies ou infinitésimales ; crochet de Jacobi. Problème de l'intégration des éq. diff. lorsqu'on connaît un groupe laissant le système invariant ; méthodes élémentaires d'intégration.~~

V. Théorie des équations linéaires. 1° Etude algébrique générale (les th. d'existence étant admis) : nombre de solutions, wronskien (notation matricielle pour n éq. à n inconnues). -

Commission des équations différentielles.

On peut étudier les éq.diff. de divers points de vue:

1° Point de vue algébrique (domine la théorie des éq.linéaires à coefficients constants; et la question des méthodes élémentaires d'intégration, y compris les rapports avec la théorie des groupes, les paquets classiques sur les intégrales premières, les multiplicateurs, etc.). 2° Point de vue local (cas régulier/cas singuliers). 3° Point de vue global. 4° Point de vue mixte intermédiaire entre local et global: quand on étudie le problème au voisinage d'une solution connue (éq. aux variations) ou au voisinage de certaines valeurs des paramètres (perturbations; démonstration de Poincaré sur la non-existence d'intégrales premières du problème des 3 corps; etc.).

Il paraît difficile de faire grand'chose si on ne possède pas d'abord des théorèmes d'existence. Pour le reste, l'ordre est quelque peu arbitraire.

I. Point de vue local. (Débuter par des préliminaires sur les familles de courbe ?) 1° Cas régulier: théorème d'existence dans les conditions habituelles pour un système de n équations à n inconnues (montrer qu'on peut toujours s'y ramener): renvoi à la méthode Leray, démonstration par les approximations successives (cas réel / cas complexe). Dans le cas complexe, unicité de la solution holomorphe par la considération des coefficients de Taylor.

Dans les deux cas, stabilité locale par rapport aux petites variations des conditions initiales, ou plus généralement des paramètres: d'où unicité. Forme de la dépendance par rapport aux conditions initiales: cas de n équations du 1er ordre; cas de n équations du 2nd ordre (par deux points, localement, passe une solution et une seule).

2° Cas singuliers, étude locale. Cols noeuds, foyers, centres: cas réel. Cas complexes correspondants. Autres exemples (lieux de rebroussements; lignes de courbure en un ombilic; intégrales singulières).

II. Point de vue global, cas réel. Théorème d'existence global, et d'unicité ou plutôt de stabilité sur tout intervalle fini. Exemples d'étude globale directe dans des problèmes du premier ordre: notion de cycle limite. Un problème ergodique sur le tore ? Exemple de problème du second ordre ?

(N.B. Dans les études globales, 2 types de problèmes bien distincts: 1° problèmes géométriques, sur une multiplicité donnée, aucune coordonnée n'étant privilégiée; 2° problèmes où la variable indépendante est le temps, et où on veut l'allure des fonctions inconnues en fonction de t, en particulier pour t très grand, et p. ex. des évaluations asymptotiques: v. plus loin à la suite des éq. linéaires).

Equations différentielles

~~III.~~ Méthodes d'intégration et théorie des groupes. ~~Notion d'intégrale première, exemples; équations de la dynamique. Multiplicateur pour les éq. du 1er ordre ?~~

~~Ex~~ Système d'équations du 1er ordre conçu comme ~~£~~ définissant une transformation infinitésimale; intégration = détermination du groupe qu'elle engendre. ~~Notion générale de groupe de transformation (notion de groupe abstrait ? d'isomorphie ?)~~ Notion et de transf. infinitésimale; analogie avec le groupe engendré par une transformation finie ~~[illegible]~~ ~~transf.~~ permutables, finies ou infinitésimales; crochet de Jacobi. Problème de l'intégration des éq. diff. lorsqu'on connaît des renseignements ~~un groupe laissant le système invariant~~ invariants (par Cartan); méthodes élémentaires d'intégration.

A plus tard

Cartan

~~IV. Théorie des équations linéaires. Etude locale dans le cas régulier (nombre de solutions, wronskien): notation matricielle dans le cas de n équations à n inconnues.~~

Méthode de Laplace

IV. Théorie des équations linéaires. 1° Etude algébrique générale (les th. d'existence étant admis): nombre de solutions, wronskien (notation matricielle pour n éq. à n inconnues). – Application: théorie complète des équations et systèmes (avec seconds membres) à coefficients constants: théorie ramenée au calcul algébrique avec des expressions en d/dx ; expression des solutions par des intégrales, interprétation (fonction arbitraire considérée comme somme de perturbations instantanées / comme somme d'oscillations simples ? rapports avec l'$\int$ de Fourier ?). Extension aux différences finies.

dû ailleurs dès chap. sur les opérateurs du gr. des translations

2° Equations à coefficients et seconds membres périodiques: exposants caractéristiques, résonance, etc. Equation de Hill.

3° ~~Eqxxlinéairesx~~ Etude globale complexe des éq. linéaires (d'abord, qq. mots sur l'étude globale des éq. quelconques, points singuliers fixes et mobiles). Notion du groupe de monodromie; cas du point singulier isolé. Retour à l'étude locale pour les singularités du type de Fuchs (ordre quelconque; cf. Whitt.-Wat.). Etude globale des équations classiques (hypergéométriques, etc.). Inversion et fonc. automorphes.

4° Etude globale réelle des éq. linéaires. Solutions asymptotiques. Théorèmes d'oscillation (au moins pour le 2nd ordre). Problèmes de valeurs propres ? Equation de Riccati, équivalence ~~rapports~~ avec l'équation ~~dxxx~~ linéaire du 2nd ordre ~~(cf. Mammana, M.Zeit.25 et 33)~~.

T Exemples p. méthode de Ritz? Au moins les signaler

~~Applications diverses~~ 5° Application:

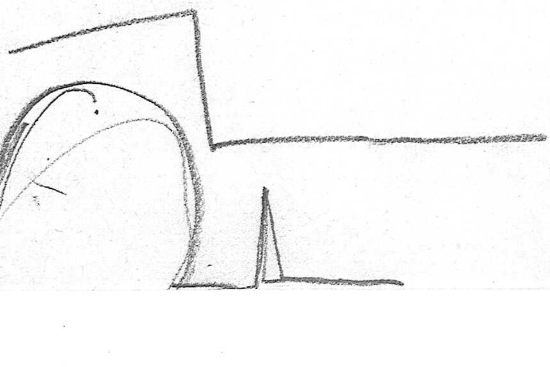
~~IX V. Point de vue mixte. 1°(Etude d'un problème différentiel au voisinage d'une solution connue)~~ Equations aux variations. Application aux problèmes de stabilité; stabilité formelle. ~~solutions voisines d'une solution périodique; théorèmes de Liapounoff.~~ ?

2°(Etude en fonction d'un paramètre). Equations de relaxation (van der Pol, Kryloff-Bogoliuboff, etc.): équations voisines d'équations linéaires du second ordre. ~~- Théorie des perturbations en mécanique céleste ??? (A renvoyer aux équations aux dérivées partielles du 1er ordre: fonction perturbatrice et méthode de Jacobi).~~

Rajouter: méthodes (futures) de Delsarte ? étude d'équations ne rentrant dans aucun des types indiqués (éq. yy" = sin x) ?

V. Divers

1° Etude ~~glob~~ globale réelle (croissance) des équations non linéaires. Th. de Hardy Borel $P(x\,y\,y')=0$. Gegenbeispiel de Vijayaraghavan



__Avant__ les équations ~~linéaires~~ différentielles, un chapitre (sur les opérateurs et les méthodes du calcul opérationnel) où seront fait entre autres:

Théorie des équations et systèmes à coefficients constants avec second membre. Résolution élémentaire par les diviseurs élémentaires. Calcul algébrique avec d/dx. Expression des solutions par des intégrales; interprétation: fonction arbitraire considérée comme somme de perturbations instantanées / comme somme d'oscillations (intégrale de Fourier). Extension aux différences finies ?

Application du critère de Hurwitz

__Après__ les équations différentielles, dans la partie Cartan:

Equations différentielles et théorie des groupes. Système d'équations conçu comme définissant une transformation infinitésimale; intégration = détermination du groupe qu'elle engendre. Notion de transformation infinitésimale; analogie avec le groupe engendré par une transformation finie. Transformations permutables, finies ou infinies; crochet de Jacobi —— Equations canoniques

Tout cela avec l'essentiel de la 1e partie de Carathéodory et des Invariants intégraux (Cartan)

DELBE 011

COMMISSION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

I. Formulation d'un problème d'équations différentielles (localement et globalement) (avec des équations finies en plus).

II. Point de vue local. Point de vue local, aussi sur une variété [(remplacer $f(xyy')=o$ par $f(xyz)=o$, $dy=z\,dx$) ex : méthode de Poincaré.] (Débuter par des préliminaires sur les familles de courbes. Cas régulier. Définition du cas irrégulier. Cas régulier : théorème d'existence dans les conditions habituelles pour un système à n équations à n inconnues (t figurant ou non : 2 points de vue) : renvoi à la méthode Leray ; cara. dans le cas réel, pour cas complexe, cara. (si on peut) - sinon, majorantes. Dans le cas complexe, unicité de la solution holomorphe par la considération des coefficients de Taylor. (Le coefficient est un polynome par rapport aux coefficients des équations données).

Dans les deux cas, stabilité locale par rapport aux petites variations des conditions initiales, ou plus généralement des paramètres : d'où unicité. Dérivabilité par rapport à des paramètres et conditions initiales.

Cas de n équations du 1er ordre (par tout point, une solution et une seule) ; cas de n équations de 2nd ordre (par deux points, une solution et une seule) (localement).

III. Point de vue global, cas réel. Théorème d'existence global et d'unicité ou plutôt de stabilité sur tout intervalle fini. Système d'équations du 1er ordre considéré comme définissant un groupe. Distinction suivant le rôle de t. Notion de transformations infinitésimales, intégration = formation du groupe à partir de la transformation infinitésimale. Point fixe (avec t) point singulier (sans t) indice d'un point fixe dans une transformation finie et dans une transformation infinitésimale.

Etude locale d'un point fixe : cols, noeuds, foyers (ordre n à l'étude) : cas réel. Cas complexes correspondants ?

IV. <u>Théorie des équations linéaires</u>. <u>1°</u> Etude algèbrique générale (les th. d'existence étant admis) : nombre de solutions, wronskien (notation matricielle pour n éq. à n inconnues). - Méthode de Laplace.

<u>2°</u> Equations à coefficients et seconds membres périodiques : exposants caractéristiques, résonance, etc. Equation de Hill.

<u>3°</u> <u>Etude globale complexe</u> des éq. linéaires (d'abord, qq. mots sur l'étude globale des éq. quelconques, points singuliers fixes et mobiles). Notion du groupe de monodromie ; cas du point singulier isolé. Retour à l'étude locale pour les singularités du type de Fuchs (ordre quelconque ; cf. Whitt.-Wat.). Etude globale des équations classiques (hypergéométriques, etc.). Inversion et fonctions automor--phes.

<u>4°</u> <u>Etude globale réelle</u> des éq. linéaires. Solutions asymptotiques. Théorèmes d'oscillation (au moins pour le 2nd ordre). <u>Problèmes de valeurs propres</u>. Exemples pour méthode de Ritz ? Au moins les signaler. Equation de Riccati, équivalence avec l'équation linéaire du 2nd ordre.

<u>5°</u> <u>Application</u> : <u>Equations aux variations</u>. Application aux problè--mes de stabilité ; stabilité formelle. Théorème de Liapounoff ?

<u>V</u>. <u>Divers</u> : <u>1°</u> Etude globale réelle (<u>croissance</u>) des équations non linéaires. Th. de Borel : P(xyy') = 0. Gegenbeispiel de Vijayaraghowan. <u>2°</u> (Etude en fonction d'un paramètre). Equations de relaxation (van der Pol, Kryloff-Bogoliuboff, etc.) : équations voisines d'équations linéaires du second ordre.

Rajouter : méthodes (futures) de Delsarte ? étude d'équations ne rentrant dans aucun des types indiqués (éq. yy" = sin x) ?

__Avant__ les équations différentielles un chapitre (sur les opérateurs et les méthodes du calcul opérationnel) où seront fait entre autres :

Théorie des équations et systèmes à coefficients constants avec second membre. Résolution élémentaire par les diviseurs élémentaires. Calcul algèbrique avec d/dx. Expression des solu--tions par des intégrales ; interprétation : fonction arbitraire considérée comme somme de perturbations instantanées / comme somme d'oscillations (intégrale de Fourier). Extension aux différences finies ?

Application du critère de Hurwitz.

__Après__ les équations différentielles, dans la partie Cartan :

Equations différentielles et théorie des groupes. Système d'équations conçu comme définissant une transformation infini--tésimale ; intégration = détermination du groupe qu'elle engendre. Notion de transformation infinitésimale ; analogie avec le groupe engendré par une transformation finie. Trans--formations permutables, finies ou infinies ; crochet de Jacobi. __Equations canoniques__.

Tout cela avec l'essentiel de la 1è partie de Carathéodory et de Cartan, Invariants intégraux.
