COTE DELBE 010

TEXTE Séries de Fourier
Représentation approchée
Espace de Hilbert

FONDS Jean Delsarte

NOMBRE DE PAGES NUMÉRISÉES 9

NOMBRE DE FEUILLES PRISES EN COMPTE 9

Séries de Fourier. Rapport Mandelbrojt.

Définition de la série de Fourier en posant à priori les coefficie-ents (notation trigonomètrique et not. exponentielle).de Fourier;. Définition des polynomes de Fejer (moyennes arithmétiques), formule intégrale. Démonstration du critère de Lebesgue pour la convergence des polynomes de Fejer, et évaluation de Mandelbrojt pour le reste. Cas par-ticulier : théorème de Fejer. Pour une fonction quelconque, le critère de Lebesgue est vérifié presque partout. Corollaire : théorème de Weier strass (et polynomes de Tchebycheff). Autre corollaire : théorème de Lebesgue sur les coefficients de Fourier des fonctions intégrables. Théo-rème de Parseval : la suite des fonctions est une suite complète ; for-mule de Parseval (produit scalaire de deux fonctions de L^2.)

Séries de Fourier de plusieurs variables.

Intégrale de Poisson. Développement de Fourier d'une fonction à va-leurs réelles considérées comme partie réelle d'une série de Taylor ; expression de la même partie réelle, dans l'intérieur du cercle, (au moyen de l'intégrale de Cauchy) sous forme d'intégrale de Poisson. Inégalité de Jensen. L'intégrale de Poisson tend vers la valeur de la série sur le cer-cle (et fournit la solution du problème de Dirichlet).

Intégrale de Fourier.

OObtention (plausible) à partir de la série de Fourier par passage à la limite. Théorème de Plancherel (méthode Weil). Critères simples de con-vergence ordinaire.

Intégrale de Laplace.

(La commission, vu l'absence de Delsarte, abstient d'émettre une opinion sur les séries de Fourier-Bessel, intégrales de Hankel, etc...)

- ~~Suite~~ -

Espace de Hilbert et séries orthogonales.

Evaluation de la distance de deux fonctions par la distance au sens de L^2 (plus généralement, au sens de L^p). Fonctions auxquelles elle s'applique : fonctions de carré intégralbe. Axiomes topologiques et axiome du triangle.

Meilleure approximation d'une fonction (au sens de L^2) par une combinaison linéaire de fonctions données : orthogonalisation d'une suite finie donnée, meilleure approximation par une combinaison de fonctions orthogonales ; formules de Fourier pour les coefficients. Cas d'une suite dénombrable donnée, inégalité de Bessel, théorème de Parseval comme fournissant la définition d'une suite complète.

Etude de la notion de convergence en moyenne ; elle entraîne la convergence presque partout et est entraînée par la convergence uniforme (réciproques fausses). L'espace L^2 est complet (démonstration de Weyl) ; les fonctions continues y sont partout denses. Application : projection d'un point de L^2 sur la variété définie par la suite orthogonale non complète.

Exemples de suites orthogonales et d'orthodonalisation : suite de la série de Fourier (forme réelle trigonomètrique / forme complexe exponentielle). Polynomes avec poids divers : Tchebicheff, Legendre, Hermite, Laguerre.

Espace de Hilbert

Evaluation de la distance de deux fonctions au sens de L^2 (au sens de L^p).

Inégalité de Minkowski: elle donne l'espace des fonctions de L^p et l'axiome de la distance; L^p comme espace vectoriel.

~~Cas complexe~~ Possibilité d'approximer une fonction dans un L^p (ou simultanément dans tous les L^p) par des fonctions en escalier, continues, etc.

Meilleure approximation d'une fonction (au sens de L^2) par une combinaison linéaire de fonctions données: orthogonalisation d'une suite finie donnée, meilleure approximation par une combinaison linéaire de fonctions orthogonales; formules de Fourier pour les coefficients.

Orthogonalisation d'une suite dénombrable-inégalité de Bessel-définition d'une suite complète par l'égalité de Parseval; aucune fonction orthogonale aux fonctions de la suite.

~~Cas réel. Notion de produit scalaire~~

(Au moment où on rencontre le produit scalaire, et à toute occasion naturelle, on insiste sur l'analogie avec la géométrie, en s'aidant du cas réel.)

La convergence uniforme entraîne la convergence en moyenne (réciproque fausse).

Adopté -

L'espace L^2 est complet (démonstration de Zygmund). S'il n'y a aucune fonction orthogonale à une suite, elle est complète

~~Les fonctions continues sont partout denses (par les fonctions étagées).~~

Projection sur une variété linéaire.

Exemples de suites orthogonales et d'orthogonalisation: suite de la série de Fourier (forme réelle trigonométrique; forme complexe exponentielle). Polynomes avec poids divers: Tchebicheff, Legendre, Hermite, Laguerre.

~~Esp~~ Représentation approchée

~~A ajouter~~ à l'espace de Hilbert: Espace de Hilbert et développements.

~~On commence~~ par:

1. Espace des fonctions continues; approximation uniforme. Approximation par des polynomes ordinaires / par des polynomes trigonométriques: ensembles partout denses.

2.3.4. 2. Espaces L^p (comme lignes 1-6 du feuillet "espace de Hilbert"). Ajouter: approximation par des polynomes, et par des polynomes trigonométriques.

* ~~3. Espace de Hilbert~~ (id.). Ajouter: ~~Exprem~~ L'existence d'un produit scalaire caractérise l'espace de H. comme duel à lui-même (cf. espaces vectoriels); en opérant de même sur un L^p on aboutirait non à L^p mais à $L^{p'}$. ~~(Reporter à la fin à partir de *)~~

~~4. Fin de esp de H.~~ (A la suite): 4. La Série de Fourier ~~...~~ converge uniformément et absolument pour toute fonction deux fois dérivable. On retrouve que ~~Conséquence:~~ la suite de Fourier est complète.

5. Série de Fourier pour plusieurs variables. Fonctions quasi-périodiques.

6. Fejèr avec Abschätzung de Mandelbrojt. Conséquence: Weierstrass-Tchebycheff. Théorème de Dirichlet (l'intégrale oscillante étant renvoyée aux O et o).

Poisson: relations entre la série de Fourier et la série de Taylor. Convergence en moyenne de $f_r(\theta)$ vers $f(\theta)$. Convergence de la sommation de Poisson en un point de continuité (uniforme dans un intervalle). Corollaire: donne la solution du problème de Dirichlet. Théorème de Fatou. / 7. Etude de séries de Fourier particulières et phénomène de Gibbs, par des méthodes complexes.

8. Intégrale de Fourier. ~~Théorème~~ Obtention plausible par passage à la limite à partir de la série de Fourier. Théorème de Plancherel (méthode de Weil). Critères de convergence ordinaire: critère grossier (deux dérivées). Théorème de Dirichlet. Intégrale de Fourier de plusieurs variables.

9. Intégrale de Laplace. Droite de convergence (énoncer le cas particulier de la série de Dirichlet). Formule d'inversion de Mellin avec $d\mu$ (incluant le calcul des coefficients de la série de Dirichlet, et

donné comme généralisation des formules de Cauchy pour Taylor) donné avec des contours d'intégration aussi généraux que possible (allant éventuellement à l'infini à gauche) en vue des applications.

(Modification recommandée, mise à l'étude: 2e théorème tabérien avec O, démonstration à la Borel ou à la Mandelbrojt ? En déduire le théorème de Dirichlet pour la série, et pour l'intégrale en donnant préalablement le théorème de Fejer).

Adopté

=

REPRÉSENTATION APPROCHÉE. ESPACE DE HILBERT ET DÉVELOPPEMENTS.

----

1. Espace des fonctions continues ; approximation uniforme. Approximation par des polynomes ordinaires / par des polynomes trigonomètriques : ensembles partout denses.

2. Evaluation de la distance de deux fonctions au sens de L^2 (au sens de L^p).

Inégalité de Minkowski : elle donne l'axiome de la distance L^p et l'espace des fonctions de L^p comme espace vectoriel.

Possibilité d'approximer une fonction dans un L^p (ou simul--tanément dans tous les L^p) par des fonctions en escalier ; continues ; par des polynomes ordinaires ou trigonomètriques : ensembles partout denses dans L^p.

3. Meilleure approximation d'une fonction (au sens de L^2) par une combinaison linéaire de fonctions données : orthogonalisa--tion d'une suite finie donnée, meilleure approximation par une combinaison linéaire de fonctions orthogonales ; formules de Fourier pour les coefficients.

Orthogonalisation d'une suite dénombrable -inégalité de Bessel- définition d'une suite complète par l'égalité de Parseval ; aucune fonction orthogonale aux fonctions de la suite.

(Au moment où on rencontre le produit scalaire, et à toute occasion naturelle, on insiste sur l'analogie avec la géomètrie, en s'aidant du cas réel. L'existence d'un produit scalaire carac--térise l'espace de H comme duel à lui-même (cf. espaces vectoriels) en opérant de même sur un L^p on aboutirait non à L^p mais à $L^{p'}$.)

......

La série de Fourier converge uniformément et absolument pour toute fonction deux fois dérivable. On retrouve que la suite de Fourier est complète.

La convergence uniforme entraîne la convergence en moyenne (réciproque fausse).

L'espace L^2 est complet (démonstration de Zygmund). S'il n'y a aucune fonction orthogonale à une suite, elle est complète.

Projection sur une variété linéaire.

4. Exemples de suites orthogonales et d'orthogonalisation : suite de la série de Fourier (forme réelle trigonométrique ; forme complexe exponentielle). Polynomes avec poids divers : Tchebicheff, Legendre, Hermite, Laguerre. La suite de Fourier est complète. Les suites de polynomes orthogonalisés sur un intervalle fini avec des poids quelconques, aussi ; aussi sur un intervalle infini (démons--tration générale, non seulement pour Laguerre et Hermite ?).

5. Série de Fourier pour plusieurs variables. Fonctions quasi-périodiques.

6. Fejèr avec Abschätzung de Mandelbrojt. Conséquence : Weierstrass-Tchebycheff. Théorème de Dirichlet (l'intégrale oscillante étant renvoyée aux O et o).

Poisson : relations entre la série de Fourier et la série de Taylor. Convergence en moyenne de $f_r(\theta)$ vers $f(\theta)$. Convergence de la sommation de Poisson en un point de continuité (uniforme dans un intervalle). Corollaire : donne la solution du problème de Dirichlet. Théorème de Fatou.

7. Etude de séries de Fourier particulières et phénomène de Gibbs, par des méthodes complexes.

. . . . . .

8. Intégrale de Fourier. Obtention plausible par passage à la limite à partir de la série de Fourier. Théorème de Plancherel (méthode de Weil). Critères de convergence ordinaire : critère grossier (deux dérivées). Théorème de Dirichlet. Intégrale de Fourier de plusieurs variables.

9. Intégrale de Laplace. Droite de convergence (énoncer le cas particulier de la série de Dirichlet). Formule d'inversion de Mellin avec $d\mu$ (incluant le calcul des coefficients de la série de Dirich--let, et donné comme généralisation des formules de Cauchy pour Taylor) donné avec des contours d'intégration aussi généraux que possible (allant éventuellement à l'infini à gauche) en vue des applications.

(Modification recommandée, mise à l'étude : 2$^{\text{è}}$ théorème tabérien avec O, démonstration à la Borel ou à la Mandelbrojt ? En déduire le théorème de Dirichlet pour la série, et pour l'intégrale en donnant préalablement le théorème de Fejer).