

**Rédaction N° 154**

**COTE : AWMS 003**

**AUTEUR :**

**TITRE : INTRODUCTION AU LIVRE I. (État 2) (sic)**

Annoté par André Weil

**FONDS : ANDRÉ WEIL**

**Nombre de pages numérisées**

**007**

**Nombre de feuilles prises en compte**

**007**

*mag.*

IL Y A une mathématique, une et indivisible: voilà la raison d'être du présent traité, qui prétend en exposer les éléments à la lumière d'une tradition de vingt-cinq siècles. Or, depuis les Grecs, qui dit mathématique dit démonstration; il est même douteux qu'il existe et qu'il puisse exister des démonstrations en dehors des mathématiques au sens précis et rigoureux que ce mot a reçu des Grecs et qu'on entend lui donner ici. On a le droit de dire que ce sens n'a pas varié, car ce qui constituait une démonstration pour Euclide l'est toujours à nos yeux; et, aux époques où la notion a menacé de s'en perdre et où de ce fait la mathématique s'est trouvée en danger de mort, c'est chez les Grecs qu'on en a recherché les paradigmes. Mais à ce vénérable héritage sont venues s'ajouter depuis un siècle d'importantes conquêtes.

*X*

En effet, l'analyse en quelque sorte grammaticale de textes mathématiques d'abord choisis parmi les plus simples a permis, définitivement sans doute, d'en déterminer la structure, du double point de vue du vocabulaire et de la syntaxe. Il a été ainsi constaté que tout texte mathématique, dès lors qu'il est complètement explicite c'est-à-dire rédigé sans omettre aucun intermédiaire ni rien laisser à faire au lecteur, peut, sans sans logiquement rien perdre de son contenu, être traduit dans une langue conventionnelle ne comportant qu'un petit nombre de mots assemblés suivant une syntaxe qui ne comporte qu'un petit nombre de règles ~~invi-~~ *invi-*olables; un texte ainsi traduit est dit formalisé, et se note en principe par une écriture idéographique comportant pour chaque mot un signe unique. La description d'une partie d'échecs au moyen de la notation usuelle, ~~et~~ ~~max~~ ~~text~~ ~~formalisés~~ une table de logarithmes, sont des textes formalisés; les formules du calcul algébrique ordinaire en seraient aussi si l'on avait complètement codifié les règles gouvernant l'emploi des parenthèses et qu'on s'y conformât strictement, alors qu'en pratique certaines de ces règles ne s'apprennent guère qu'à l'usage et que l'usage autorise d'y faire certaines dérogations.

*← vérification*

En principe, la ~~correction~~ <sup>*chose*</sup> d'un texte formalisé est aisée, ~~à vérifier~~ <sup>*à vérifier*</sup>, puisqu'elle ne demande qu'une attention en quelque sorte mécanique; c'est ainsi qu'un mathématicien fait le plus souvent confiance à un confrère qui lui transmet le résultat d'un calcul algébrique, pour peu qu'il sache que ce calcul n'est pas trop long et a été fait avec soin. Il va de soi, d'ailleurs, que les chances d'erreur augmentent avec la longueur du calcul; du moins n'est-on pas exposé, dans un calcul formalisé, aux fautes de raisonnement que risquent trop souvent d'entraîner, dans un texte mathématique écrit en langage courant, l'usage abusif de l'intuition, l'association d'idées, et les autres sources des pétitions de principes auxquelles est exposé le mathématicien. En fait, il est vrai, le mathématicien qui désire s'assurer de la parfaite correction ou, comme on dit, de la "rigueur" d'une démonstration ou d'une théorie ne recourt guère, sauf dans la discussion des premiers principes qui figure dans certains ouvrages modernes de logique, à l'une des formalisations complètes dont on dispose aujourd'hui, ni même le plus souvent aux formalisations partielles et incomplètes fournies par le calcul algébrique et d'autres similaires; il se contente en général d'amener l'exposé à un point où son expérience et son flair de mathématicien lui enseignent que la traduction en un langage ~~est~~ complètement formalisé ne serait plus ~~qu'un~~ qu'un exercice de patience (sans doute fort pénible); il en est ainsi par exemple des exposés modernes des débuts de l'algèbre dite abstraite, et aussi de la plus grande partie des Eléments d'Euclide. Si, comme il arrive mainte et mainte fois, des doutes viennent à s'élever, c'est en définitive sur la possibilité d'une telle traduction qu'ils portent, soit qu'un même mot soit employé en des sens variables suivant le contexte, soit que les règles de la syntaxe aient été violées par l'emploi inconscient de modes de raisonnement non spécifiquement autorisés par elles, soit encore qu'une erreur ait été commise. Ce dernier cas mis à part, le redressement se fait invariablement, ~~px~~ tôt ou tard, par la rédaction de textes se rappo-

chant de plus en plus d'un texte formalisé, jusqu'à ce que, de l'avis général des mathématiciens, il soit devenu superflu de pousser ce travail plus loin; autrement dit, c'est par une comparaison, le plus souvent instinctive, avec les règles d'un langage formalisé que se fait l'essai de la correction d'un texte mathématique.

La méthode axiomatique n'est à proprement parler pas autre chose que cet art de rédiger des textes aisément traduisibles en un langage formalisé. Ce n'est pas là une invention nouvelle, bien que les langages formalisés en soient une; mais son emploi systématique comme instrument de découverte est l'un des traits originaux de la mathématique contemporaine. Peu importe en effet, s'il s'agit d'écrire ou de lire un texte formalisé, qu'on attache aux mots ou signes de ce texte telle ou telle signification, ou même qu'on ne leur en attache aucune; seule importe l'observation correcte des règles de la syntaxe. C'est ainsi qu'un même calcul algébrique, ~~peut~~ comme chacun sait, peut servir à résoudre des problèmes portant sur des kilogrammes ou des francs, ~~des pieds ou des dollars~~. Ce même avantage s'attache, et pour les mêmes raisons, à tout texte rédigé suivant la méthode axiomatique: une fois établis les théorèmes de la topologie générale, on peut les appliquer à volonté à l'espace ordinaire, à l'espace de Hilbert, à bien d'autres encore. Cette faculté de donner des contenus multiples aux mots ou notions premières d'une théorie est même une importante source d'enrichissement de l'intuition du mathématicien, qui n'est pas nécessairement de nature spatiale ou sensible comme on le croit parfois mais qui est plutôt la connaissance instinctive du comportement des êtres mathématiques, aidée souvent par des images de nature très variée mais fondée avant tout sur leur fréquentation journalière. De plus, et c'est ce qui nous importe particulièrement en ce traité, la méthode axiomatique permet, ~~lorsqu'on a~~ affaire à des notions mathématiques complexes, d'en dissocier les propriétés ~~mixtes~~ et de les regrouper autour d'un petit nombre d'entre elles qui se rencontrent également ailleurs, ~~et~~ comme c'est-à-dire, pour employer un mot qui sera défini plus loin avec précision, de les classer suivant les structures auxquelles elles appartiennent; c'est ainsi que, parmi les propriétés de la sphère, les unes sont topologiques, ~~les autres~~ ~~autres~~ d'autres sont algébriques, d'autres encore peuvent être considérées comme relevant de la géométrie différentielle ou de la théorie des groupes de Lie. Quelque artificiel que puisse devenir parfois ce principe de classification dès ~~qu'elles~~ que s'enchevêtrent les structures, c'est lui qui est à la base de la répartition en Livres des matières formant l'objet de ce traité.

*Mes des paraboles on des mouvements uniformément accélérés.*

~~De même que l'art de parler correctement une langue préexiste à la grammaire, de même la méthode axiomatique, avons-nous dit, a été pratiquée bien avant l'invention des langages formalisés; mais sa pratique consciente et non plus seulement instinctive ne peut reposer que sur la connaissance d'un tel langage; aussi nous proposons-nous d'en décrire un dans le présent Livre. Nous en décrirons un, disons-nous, et cela suffira; en effet, alors qu'autrefois on a pu croire que chaque branche des mathématiques dépendait d'intuitions particulières qui lui fournissaient ses notions et vérifiés premières, ce qui eût entraîné pour chacune la nécessité d'un langage formalisé qui lui appartint en propre, on ~~sait~~ sait aujourd'hui qu'il est possible, logiquement parlant, de faire dériver toute la mathématique ~~d'une~~ d'une source unique, la théorie des ensembles; c'est là l'une des plus importantes découvertes des cent dernières années, et ce n'est pas l'une des moindres ambitions du présent ~~traité~~ ouvrage que de transformer cette possibilité en réalité. Nous n'aurons donc qu'à exposer les principes d'un seul langage formalisé, à indiquer comment on pourrait rédiger en ce langage la théorie des ensembles, puis à faire voir comment s'insèrent dans celles-ci toutes les branches des mathématiques au fur et à mesure que notre attention se portera sur elles.~~

Nous décrirons donc au Chapitre I les premiers éléments de la grammaire du langage formalisé que nous avons choisi; et, dès ce chapitre, nous indiquerons diverses manières d'abrégier beaucoup les textes écrits

*Practuelle*  
*1875-1880*  
*1880-1885*  
*1885-1890*

De même que l'art de parler correctement une langue préexiste à la grammaire, de même la méthode axiomatique, avons-nous dit, a été pratiquée bien avant l'invention des langages formalisés; mais sa pratique consciente et non plus seulement instinctive ne peut reposer que sur la connaissance de principes généraux gouvernant ces langages et la traduction en ceux-ci des textes mathématiques courants. Nous nous proposons en ce Livre de donner la description complète d'un tel langage, en commençant par l'exposé de principes généraux qui pourraient s'appliquer à beaucoup d'autres semblables. Est-il possible, sans pétition de principe, de faire cette description, ~~du fait~~ que les langages formalisés sont destinés à la mathématique, et qu'en les décrivant on ne peut guère s'empêcher de faire usage de la numération? Si étrange que soit cette question, ~~il faut bien se rappeler que~~ de bons esprits semblent en avoir été embarrassés, comme s'il était absurde que la grammaire d'une langue pût s'écrire ~~soit~~ dans une autre langue, ~~ou~~ ~~soit aussi~~ dans cette langue même. Il est convenu d'appeler métamathématiques les portions de texte, écrits en langage courant, où est faite la description, l'étude et la discussion ~~des~~ d'une langue formalisée; dès notre Chap.I, les passages métamathématiques sont écrits à l'usage de lecteurs sachant quelque peu raisonner au sens où ce mot est entendu vulgairement, sachant compter jusqu'à trois, et sachant aussi faire usage des nombres décimaux en tant que repères, capables de se reporter au n° 15 ou à la p.25; nous ne discuterons pas de la possibilité d'enseigner un langage formalisé à des êtres n'ayant pas ~~atteint~~ atteint à ce degré de développement intellectuel. Mais en fait la métamathématique peut ~~aller~~ aller beaucoup plus loin; en effet, tandis que l'analyse dite scientifique ~~est dissociée~~ d'un texte en langue vulgaire ne peut en définitive être dissociée de l'étude psychologique du sujet parlant ou écrivant, un langage formalisé se prête à des études proprement mathématiques du fait que ses éléments constitutifs sont par hypothèse tous explicites; ~~pourvu~~ pourvu donc qu'on fasse complètement abstraction de toute signification qu'on aura pu à l'origine attribuer aux mots ou phrases d'un texte formalisé, ce texte devient un objet matériel particulièrement simple, assemblage d'objets préalablement donnés dont seul importe ~~l'ordre~~ l'ordre qu'on leur assigne. ~~Est-il légitime~~ ~~de~~ d'appliquer aux objets matériels le raisonnement mathématique? Sur cette question, le mathématicien que nous sommes n'a pas à formuler d'opinion; ~~acceptons~~ acceptons si l'on veut comme un fait ~~d'expérience~~ d'expérience que cette application conduit à des conclusions valables dans certaines conditions qu'enseigne ~~l'expérience~~ l'expérience ~~mathématique~~ mathématique appliquée aux objets ~~formalisés~~ formalisés d'expérience, et par exemple lorsqu'on applique l'arithmétique élémentaire à des questions purement énumératives et combinatoires. On appelle logique mathématique la branche des mathématiques appliquées qui s'occupe d'étudier ainsi les propriétés formelles des textes correctement écrits en langage formalisé, c'est-à-dire qui les étudie en tant qu'objets matériels indépendamment du sens qu'on pourrait y attacher; ~~l'Appendice~~ l'Appendice du Chap.I en fournit un échantillon, ~~particulièrement simple~~.

Halos

ou

par exemple

qui nous donne le droit

Donc, dans le présent Livre, nous décrirons un langage formalisé (1).

(1) Pour des raisons purement techniques, nous avons choisi un langage qui ne se conforme pas strictement à la description aux indications ci-dessus, car il comporte des "liens" qui ne sont pas des mots du langage mais se superposent à ceux-ci; ~~il eût été facile d'en éviter l'emploi~~ il eût été facile d'en éviter l'emploi, au prix de quelques complications supplémentaires. Leur intervention ne change naturellement rien d'essentiel à ce que nous disons ici.

X

et cela suffira suffira à notre objet. En effet, alors qu'autrefois on a pu croire que chaque branche des mathématiques dépendait d'intuitions particulières qui lui fournissaient notions et vérités premières, ce qui eût entraîné pour chacune la nécessité d'un langage formalisé qui lui appartint en propre, on sait aujourd'hui qu'il est possible, logiquement parlant, de faire dériver toute la mathématique actuelle d'une source unique, la théorie des ensembles. C'est même là une des plus importantes découvertes des cent dernières années; et ~~il nous est permis de penser~~ notre dessein est de transformer cette possibilité ~~en acte~~ en acte. Nous n'aurons donc qu'à exposer les principes d'un langage formalisé unique, à indiquer comment on pourrait rédiger en ce langage la théorie des ensembles, puis à faire voir comment s'insèrent dans celle-ci toutes les branches des mathématiques au fur et à mesure ~~que~~ que notre attention se portera sur elles. Ce faisant, nous ne prétendons pas légiférer pour l'éternité; il se peut qu'un jour les mathématiciens s'accordent à se permettre des modes de raisonnement non formalisables dans le langage exposé ici; suivant certains, l'évolution récente des théories d'homologie dites axiomatiques donnerait à penser ~~qu'il pourrait bientôt en être ainsi~~ ~~Il~~ Il faudrait alors, sinon changer ~~de~~ complètement de langage, tout au moins élargir les règles de la syntaxe. C'est à l'avenir qu'il appartiendra d'en décider.

Au Chapitre I, nous ~~à~~ donnerons les premiers éléments de la ~~gram~~ grammaire du langage formalisé que nous avons choisi; et, dès ce chapitre, nous indiquerons diverses ~~manières~~ manières d'abrégier beaucoup les textes écrits en ce langage, par l'introduction de mots nouveaux (dits "signes abrégiateurs") et de règles de syntaxe additionnelles (dites "règles dérivées") en assez grand nombre; ce faisant, on obtient des langages beaucoup plus maniables que le langage formalisé proprement dit, ~~et~~ et que le mathématicien n'a aucune peine à retraduire en ce dernier si besoin est, mais dont on n'a déjà plus la certitude qu'ils puissent être ainsi retraduits d'une manière purement mécanique; du moins faudrait-il, pour qu'on en fût assuré, compliquer les règles de syntaxe gouvernant l'emploi des mots nouveaux ~~à~~ à tel point ~~qu'ils~~ que leur utilité deviendrait illusoire; là, comme en calcul algébrique ~~et~~ et dans l'emploi de presque toutes les notations dont se servent ordinairement les mathématiciens, on préfère un instrument maniable à un autre théoriquement plus parfait mais par trop incommode. Au Chapitre II, en nous servant des facilités plus grandes qu'apportent ces premiers "abus de langage", nous compléterons (à un seul "axiome" près, qui n'apparaîtra qu'au Chapitre ) l'énoncé des règles du langage formalisé de la théorie des ensembles; d'autre part, mêlant de plus en plus les textes en langage courant aux textes assez rares écrits en langage formalisé, nous enseignerons au lecteur, par la pratique, l'art de traduire de l'un de ces langages dans l'autre. A partir de ce moment, le langage formalisé tel qu'il a été enseigné tout d'abord ne sera plus employé; le reste de ce ~~et~~ traité sera écrit comme le sont en pratique tous les textes mathématiques, c'est-à-dire en partie en langage courant et en partie au moyen de formules constituant des formalisations partielles, particulières et ~~et~~ incomplètes et dont celles du calcul algébrique fournissent l'exemple le plus connu. Souvent même on se servira du langage courant d'une manière encore bien plus libre que celle que suggérerait ce qui précède, par des abus de langage volontaires, par l'omission pure et simple des passages qu'on présume pouvoir être restitués aisément par un lecteur tant soit peu exercé, par des indications intraduisibles en langage formalisé et destinées à faciliter cette restitution; d'autres passages également intraduisibles ~~constitueront des appels à l'intuition destinés à rendre plus claire la marche des idées~~ ~~et~~ contiendront des commentaires destinés à rendre plus claire la marche des idées, au besoin par un appel à l'intuition du lecteur; l'emploi de toutes les ressources de la rhétorique devient dès lors légitime, pourvu bien entendu que l'ossature logique du texte demeure intacte, Les premiers exemples en seront donnés, dès ce

que ce jour  
n'est pas  
éloigné.

X

en ce langage, par l'introduction de mots nouveaux (dits "signes abrégés" et de règles de syntaxe additionnelles (dites "règles formales") en assez grand nombre; ce faisant, on obtient des langages beaucoup plus maniables que le langage formalisé proprement dit, et que le mathématicien n'a aucune peine à retraduire en ce dernier langage si besoin est, mais dont on n'a plus la certitude qu'ils puissent être ainsi retraduits d'une manière purement mécanique; du moins faudrait-il, pour qu'on en fût assuré, compliquer les règles de syntaxe gouvernant l'emploi des mots nouveaux à tel point qu'ils en deviendraient presque inutilisables; là, comme en calcul algébrique et dans l'emploi de presque toutes les notations dont se servent ordinairement les mathématiciens, on préfère un instrument maniable à un autre théoriquement plus parfait mais ~~maximement~~ mais par trop incommode. Au Chapitre II, en nous servant des facilités plus grandes qu'apportent ces premiers "abus de langage", nous compléterons l'énoncé des règles du langage formalisé de la théorie des ensembles; d'autre part, mêlant de plus en plus les textes en langage courant aux textes assez rares écrits en langage formalisé, nous enseignerons au lecteur, par la pratique, les principes de la traduction de l'un de ces langages dans l'autre. A partir de ce moment, le langage formalisé tel qu'il a été enseigné tout d'abord ne sera plus employé; le reste de ce traité sera écrit comme le sont en pratique tous les textes mathématiques, c'est-à-dire en partie en langage courant et en partie au moyen de formules qui constituent des formalisations partielles, particulières et incomplètes et dont celles du calcul algébrique fournissent l'exemple le plus connu. Souvent même on se servira du langage courant d'une manière encore bien plus libre que celle que suggérerait ce qui précède, soit par des abus de langage volontaires, soit par l'omission pure et simple des passages qu'on présume pouvoir être aisément restitués par un lecteur tant soit peu exercé, soit encore par des indications de nature très variable destinées à faciliter la restitution des passages ainsi omis. Les premiers exemples en seront donnés, dès ce Livre, au Chapitre III, qui expose ~~ainsi~~ la ~~théorie~~ théorie des entiers, des ordinaux et des cardinaux, et au Chapitre IV qui expose la théorie de la structure d'ordre, la plus simple de toutes les structures; au Chapitre V sera précisée la notion ~~générale~~ de structure ainsi que les notions générales qui s'y rattachent.

Rédigé suivant la méthode axiomatique, et conservant toujours présente, comme une sorte d'horizon, la possibilité d'une traduction ~~exacte~~ en la langue formalisée, notre traité prétend donc à une rigueur parfaite, prétention que ne démentent point les feuillets d'errata au moyen desquels nous avons corrigé et nous continuerons à corriger les erreurs ~~aux~~ qui s'y glissent de temps à autre. ~~En~~ Du fait justement que nous nous tenons constamment aussi près d'un texte formalisé qu'il semble possible sans longueurs insupportables, la vérification, en principe, est aisée, et les erreurs (inévitables dans une aussi vaste entreprise) peuvent être localisées sans excessive perte de temps. C'est dans le même esprit réaliste que nous envisageons ici la question de non-contradiction, ~~l'une~~ l'une de celles qui ont le plus préoccupé les logiciens modernes et qui sont justement à l'origine de la création des langages formalisés. On dit qu'une théorie ~~mathématique~~ mathématique est contradictoire si l'on y a démontré à la fois un théorème et sa négation; des règles de raisonnement usuelles, qui sont à la base des règles de la syntaxe des langages formalisés, il résulte alors que tout théorème est à la fois vrai et faux dans cette théorie, qui perd donc tout intérêt. Par suite, comme nous le verrons plus en détail au Chapitre I, dès qu'on se donne le droit d'utiliser dans une théorie un théorème qui est faux dans cette théorie, on se trouve virtuellement à l'intérieur d'une théorie contradictoire, et on peut s'attendre à s'en apercevoir effectivement en démontrant à la fois un théorème et sa négation. Pratiqué consciemment, ce procédé est une méthode de démonstration bien connue, dite "par l'absurde"; si au contraire on a abouti involontairement à une contradiction, on ne peut la laisser subsister sans que soit frappée de stérilité la

langage formalisé  
 développer?  
 la compréhension par son aspect de l'écriture du langage  
 bien entendu ces aspects à l'écriture du langage  
 doit être ~~représentés~~ dans un ~~certains~~ langage.

théorie où elle s'insère, et il importe de remonter à sa source pour la faire disparaître. Le plus souvent, remontant de proche en proche, le mathématicien finira par s'apercevoir d'une erreur commise; c'est même là un des plus sûrs moyens dont on dispose pour s'en apercevoir. Sinon, c'est que la contradiction observée est inhérente aux principes mêmes qu'on a mis à la base de la mathématique; c'est ceux-ci donc qu'il faut modifier, ~~autant que possible sans compromettre les parties de la mathématique auxquelles on tient le plus, et si est clair qu'on y arrivera d'autant~~ plus facilement si possible les parties de la mathématique auxquelles on tient le plus; ~~en~~ il est clair qu'on y parviendra d'autant plus facilement que l'usage de la méthode axiomatique et d'un langage formalisé aura permis de formuler ces principes ~~plus distinctement~~ plus distinctement et d'en séparer plus nettement les conséquences. C'est ce qui s'est passé à date récente, lorsqu'on a éliminé les paradoxes de la théorie des ensembles par l'adoption d'un langage formalisé essentiellement équivalent à celui que nous décrirons ici; et c'est une révision semblable qu'il faudrait entreprendre si ce dernier à son tour se révélait contradictoire. A vrai dire, de l'avis des logiciens modernes, cela ne semble guère probable. Peut-on espérer aller plus loin, et acquérir la certitude que cela n'arrivera jamais? Sans ~~entrer~~ entrer à ce propos dans un débat peut-être futile, et en tout cas hors de notre compétence, ~~sur~~ sur la notion même de certitude, observons que la logique mathématique permet d'examiner les problèmes de non-contradiction par les méthodes propres du mathématicien. Qu'une théorie soit contradictoire revient en effet à dire ~~qu'elle peut se traduire en un texte formalisé correct aboutissant à la conclusion  $\emptyset \neq \emptyset$ , ou plutôt à la formule qui s'écrit ainsi en abrégé au moyen des conventions exposées plus loin; il n'y a alors rien d'absurde à imaginer qu'on puisse~~ "démontrer" l'impossibilité d'un tel texte. En fait, on a donné de telles "démonstrations" pour certains langages formalisés partiels, moins riches que celui que nous nous proposons d'introduire mais assez riches pour qu'on puisse y écrire une bonne partie de la mathématique classique. On peut se demander, il est vrai, ce qu'on a "démonstré" ainsi; car, si la mathématique était contradictoire, son application aux objets matériels, donc en particulier aux textes formalisés, deviendrait illusoire; il faudrait, pour échapper à ce dilemme, que la non-contradiction d'un langage formalisé pût être "démonstrée" par des raisonnements formalisables dans un langage moins riche et partant plus digne de confiance; or un théorème célèbre de Gödel dit que cela est impossible pour peu que le langage en question soit adéquat aux besoins relativement modestes de l'arithmétique. En revanche, dans les démonstrations de non-contradiction "relaxative", on ne fait usage que de raisonnements combinatoires très simples, qui se traduisent en un langage formalisé assez pauvre, et qu'il ne semble guère possible de mettre en doute sans renoncer à tout emploi rationnel de nos facultés intellectuelles: par exemple, puisque dans ce traité nous définirons sous le nom de "point", "droite", "plan" des notions satisfaisant à tous les axiomes de la géométrie élémentaire, il s'ensuivra que toute contradiction déduite de ces derniers donnerait lieu à une contradiction dans notre théorie des ensembles; c'est en ce sens que tout ce qui s'est fait en mathématique jusqu'à ce jour est apte à étayer notre confiance dans les fondements de notre science. Autrement dit, si nous croyons que notre mathématique est destinée à survivre, qu'on ne verra jamais les parties essentielles de ce majestueux édifice s'écrouler du fait d'une contradiction soudain manifestée, nous ne prétendons pas que cette opinion repose sur autre chose que l'expérience renforcée par le raisonnement. C'est peu, diront certains. Mais voilà vingt-cinq siècles que les mathématiciens ont pris l'habitude de corriger leurs erreurs et d'en voir leur science enrichie, non appauvrie; cela leur donne le droit d'envisager l'avenir avec sérénité.

(Note du rédacteur) Au lieu de "sachant compter... ou à la p.25", lire "et sachant lire, écrire et compter" ? (cf. Etat 6, Chap. I, p.9 !)