RÉDACTION NON NUMÉROTÉE

COTE DELR 009

TITRE RÉÉDITION DES CHAPITRES I ET II
(TOPOLOGIE GÉNÉRALE)

FONDS JEAN DELSARTE

NOMBRE DE PAGES NUMÉRISÉES 19

NOMBRE DE FEUILLES PRISES EN COMPTE 19

DELR 009

RÉÉDITION DES CHAP. I-II de TOPOLOGIE GÉNÉRALE

PROJET DE MODIFICATIONS

P.12, après l'exemple, ajouter (en proposition ?) :

Pour qu'une application biunivoque f d'un espace topologique E sur un espace topologique E' soit un homéomorphisme, il faut et il suffit que : 1° pour tout $x \in E$ et tout voisinage V de x, $f(V)$ soit un voisinage de $f(x)$; 2° pour tout $x \in E$ et tout voisinage V' de $f(x)$, $\overset{-1}{f}(V')$ soit un voisinage de x (§ 1, prop. 1).

P. 16, mettre la démonstration de la prop. 1 sous forme directe.

P. 19, la démonstration du th. 4 se simplifie considérablement si on utilise la remarque insérée à la p. 12.

P. 22, ajouter au th. 1 le corollaire suivant :

COROLLAIRE.- Soient $\mathfrak{F}$ un filtre sur E, A une partie de E. Pour qu'il existe un filtre $\mathfrak{G}$ tel que $A \in \mathfrak{G}$ et $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{G}$, il faut et il suffit que pour tout $X \in \mathfrak{F}$, $A \cap X$ ne soit pas vide.

Au bas de la p. 37, ajouter le principe de prolongement des identités (en proposition).

P. 44, après le cor. 2, ajouter :

COROLLAIRE 3.- Soient $(E_\iota)_{\iota \in I}$, $(F_\iota)_{\iota \in I}$ deux familles d'espaces topologiques ayant même ensemble d'indices. Pour tout $\iota \in I$, soit f_ι une application de E_ι dans F_ι. Pour que l'application $(x_\iota) \rightarrow (f_\iota(x_\iota))$ de $\prod_{\iota \in I} E_\iota$ dans $\prod_{\iota \in I} F_\iota$ soit continue en un point $a=(a_\iota)$, il faut et il suffit que pour tout $\iota \in I$, f_ι soit continue au point a_ι.

En effet, l'application $(x_\iota) \rightarrow (f_\iota(x_\iota))$ s'écrit $x \rightarrow (f_\iota(pr_\iota(x)))$.

P. 45, avant la prop. 3, dire :

"... ; or, tout ensemble ouvert dans $\{x\} \times E_2$ étant de la forme $\{x\} \times U_2$, où U_2 est ouvert dans E_2 , la projection de $\{x\} \times E_2$ sur E_2 est un homéomorphisme.

P. 53 , après la ligne 4 , rajouter ;

Sauf mention expresse du contraire, quand on considèrera désormais E/R comme un espace topologique, il sera toujours entendu qu'il s'agit de E/R muni de la <u>topologie quotient</u> de E par R .

A partir de p.53, ligne 15, nouvelle rédaction du paragraphe :

En général, si on sature pour R un ensemble ouvert (resp. fermé) de E, on n'obtient pas un ensemble ouvert (resp. fermé) ; autrement dit, l'image canonique d'un ensemble ouvert (resp. fermé) dans E n'est pas toujours un ensemble ouvert (resp. fermé) dans E/R .

DEFINITION 2.- <u>On dit qu'une relation d'équivalence</u> R <u>dans un espace topologique</u> E , <u>est ouverte</u> (resp. <u>fermée</u>) <u>si l'image canonique de tout ensemble ouvert</u> (resp. <u>fermé</u>) <u>dans</u> E <u>est un ensemble ouvert</u> (resp. <u>fermé</u>) <u>dans</u> E/R .

<u>Exemple</u>.- Soit E un espace topologique, Γ un groupe d'homéomor- de E sur lui-même, R la relation d'équivalence "il existe $\sigma \in \Gamma$ tel que $y=\sigma(x)$" (<u>Alg</u>.,chap.I, §7,n°5) ; la relation R est <u>ouverte</u>. En effet, le saturé d'un ensemble $A \subset E$ pour la relation R est la réunion des transformés $\sigma(A)$, où σ parcourt Γ ; si A est ouvert, il en est de même des $\sigma(A)$, et par suite de leur réunion.

*Par exemple, sur la droite numérique $\mathbb{R}$, la relation d'équivalence $x \equiv y$ (mod.1) est définie de cette manière à partir du groupe des translations $x \longrightarrow x+n$ (n entier rationnel) ; c'est donc une relation d'équivalence <u>ouverte</u>, mais on peut montrer qu'elle n'est pas fermée (cf.chap.III, § 1,n°1 et chap.V, 1,prop.1).L'espace quotient de $\mathbb{R}$ par cette relation est appelé <u>tore à une dimension</u>, et se note $\mathbb{T}$. Nous reviendrons au chap. V, § 1 sur cet important exemple. *

2. Fonctions continues dans un espace quotient.

THÉORÈME 1.- Soient E un espace topologique, R une relation d'équivalence dans E, φ l'application canonique de E sur E/R ; pour qu'une application f de l'espace quotient E/R dans un espace topologique F soit continue, il faut et il suffit que l'application composée $f\circ\varphi$ soit continue dans E.

La condition est évidemment nécessaire en vertu du th. des fonctions composées (§ 4, th. 3). Elle est suffisante, car si on pose $g = f\circ\varphi$, et si A est ouvert dans F, $\overset{-1}{g}(A) = \overset{-1}{\varphi}(\overset{-1}{f}(A))$ est ouvert dans E, donc $\overset{-1}{f}(A)$ est ouvert dans E/R, d'après la définition de la topologie quotient.

COROLLAIRE.- Soient E et F deux espaces topologiques, R une relation d'équivalence dans E, S une relation d'équivalence dans F. Soit f une application continue de E dans F, compatible avec les relations d'équivalence R et S (Ens. R, § 5, n°8) ; l'application g de E/R dans F/S, déduite de f par passage aux quotients (Ens. R, § 5, n°8) est alors continue.

En effet, soient φ et ψ les applications canoniques de E sur E/R et de F sur F/S ; on a par définition $g\circ\varphi = \psi\circ f$; par hypothèse $\psi\circ f$ est continue dans E, donc le th. 1 montre que g est continue dans E/R.

Remarque.- En vertu du th. 1, il existe une correspondance biunivoque canonique entre les applications continues de E/R dans F et les applications continues de E dans F, constantes dans toute classe d'équivalence suivant R. *Par exemple, il y a correspondance biunivoque entre les applications continues du tore $\mathbb{T}$ dans un espace F, et les applications continues périodiques, de période 1, de $\mathbb{R}$ dans F (cf. chap. VII, § 1, n°6).

DELROOD 5

3. Décomposition canonique d'une application continue.

Soient f une application continue d'un espace topologique E dans un espace topologique F, R la relation d'équivalence $f(x)=f(y)$ dans E. Considérons la décomposition canonique $f=\psi\circ g\circ\varphi$ de f, où φ désigne l'application canonique de E sur E/R, g une application biunivoque de E/R sur $f(E)$, et ψ l'application canonique du sous-espace $f(E)$ dans F (Ens. R, § 5, n°3). D'après le th. 1, l'application $\psi\circ g$ de E/R dans F, déduite de f par passage au quotient suivant la relation R, est continue ; il en résulte (§ 4, n°3) que l'application g est aussi continue.

En général, l'application biunivoque et continue g n'est pas un homéomorphisme de E/R sur $f(E)$. Pour que g soit un homéomorphisme, il faut et il suffit que l'image par g d'un ensemble ouvert (resp. fermé) dans E/R soit un ensemble ouvert (resp. fermé) dans $f(E)$; autrement dit, il faut et il suffit que l'image par f de tout ensemble ouvert (resp. fermé) saturé (pour la relation R) soit la trace sur $f(E)$ d'un ensemble ouvert (resp. fermé) dans F. La proposition suivante donne une condition suffisante simple pour qu'il en soit ainsi :

PROPOSITION 1.- Soit f une application continue de E sur F, et soit R la relation d'équivalence $f(x)=f(y)$. S'il existe une application continue h de F dans E, telle que $f\circ h$ soit l'application identique de F sur lui-même, alors l'application g déduite de f par passage au quotient suivant R, est un homéomorphisme de E/R sur F.

En effet, les applications continues g et $\varphi\circ h$ sont biunivoques et réciproques l'une de l'autre.

Exemple.- Considérons, dans un produit $E\times F$ de deux espaces topologiques, la relation d'équivalence $pr_1(z) = pr_1(z')$.

Si a est un point de F, l'application $x \to (x,a)$ de E dans $E \times F$ est une application continue h telle que $pr_1 \circ h$ soit l'application identique de E sur lui-même. D'après la prop. 1, l'espace quotient de $E \times F$ par la relation d'équivalence $pr_1(z) = pr_1(z')$ est donc homéomorphe à E.

4. Transitivité de l'espace quotient.

PROPOSITION 2.- Soient R et S deux relations d'équivalence dans un espace topologique E, telles que R entraîne S, et soit S/R la relation d'équivalence quotient dans l'espace E/R (Ens.R, § 5, n°9). L'application canonique f de l'espace quotient E/S sur l'espace quotient $(E/R)/(S/R)$ est un homéomorphisme.

En effet, en composant l'application canonique de E/R sur $(E/R)/(S/R)$, et l'application canonique de E sur E/R, on obtient une application continue g de E sur $(E/R)/(S/R)$, et S n'est autre que la relation d'équivalence $g(x)=g(y)$; l'application f, déduite de g par passage au quotient suivant S, est donc continue. Pour montrer que c'est un homéomorphisme, il reste à vérifier, conformément au critère général (n°3), que si A est un ensemble ouvert dans E, saturé pour S, $g(A)$ est un ensemble ouvert dans $(E/R)/(S/R)$; or A est saturé pour R, donc son image canonique dans E/R est un ensemble ouvert, lequel à son tour est saturé pour S/R, donc $g(A)$ est ouvert dans $(E/R)/(S/R)$.

5. Espace quotient d'un sous-espace.

Soient E un espace topologique, R une relation d'équivalence dans E, A un sous-espace de E. Soit g la restriction à A de l'application canonique f de E sur E/R. La relation d'équivalence $g(x)=g(y)$ dans A n'est autre que la relation R_A induite par R dans A (Ens.R, § 5, n°5). Soit $g = \psi \circ h \circ \varphi$ la décomposition canonique de g (n°3), où φ est l'application canonique de A sur A/R_A et ψ l'application canonique de $g(A)=f(A)$ dans E/R ; h n'est autre que l'application biunivoque canonique (Ens.R, § 5, n°5) de A/R_A sur $f(A)$; les résultats du n°3 montrent donc que :

PROPOSITION 3.- L'application canonique (biunivoque) de l'espace quotient A/R_A sur le sous-espace $f(A)$ de E/R est continue ; pour qu'elle soit un homéomorphisme, il faut et il suffit que tout ensemble ouvert (resp. fermé) dans A et saturé pour R_A, soit la trace sur A d'un ensemble ouvert (resp. fermé) dans E et saturé pour R .

Exemples.- Comme dans la première édition.

COROLLAIRE 1.- Si l'une des conditions suivantes est vérifiée, l'application canonique de A/R_A sur $f(A)$ est un homéomorphisme :

a) A est ouvert et saturé pour R ;

b) A est fermé et saturé pour R ;

c) la relation d'équivalence R est ouverte ou fermée, et A est saturé pour R .

Supposons d'abord que A soit ouvert et saturé pour R . Alors, si $B \subset A$ est ouvert dans A et saturé pour R_A, B est ouvert dans E et saturé pour R . On raisonne de même dans le cas b), en considérant les parties fermées de A , saturées pour R_A . Si R est ouverte (déf.2), A saturé pour R , et si B est un ensemble ouvert dans A et saturé pour R_A , B est la trace sur A d'un ensemble C ouvert dans E ; comme B est saturé pour R_A , B est aussi la trace sur A de l'ensemble U obtenu en saturant C pour R ; l'hypothèse entraîne donc que U est ouvert dans E . On raisonne de même lorsque R est fermée, en considérant les parties fermées de A , saturées pour R_A .

COROLLAIRE 2.- S'il existe une application continue g de E dans A telle que, pour tout $x \in E$, $g(x)$ soit congru à x modulo R , l'application canonique de A/R_A dans E/R est un homéomorphisme de A/R_A sur E/R .

DELR 009

8

En effet, comme toute classe d'équivalence suivant R rencontre A , l'image canonique de A/R_A dans E/R est identique à E/R ; d'autre part, si U est ouvert dans A et saturé pour R_A , $\overset{-1}{g}(U)$ est identique par hypothèse à l'ensemble obtenu en saturant U pour R ; comme g est continue, $\overset{-1}{g}(U)$ est ouvert dans E (§ 4, th. 2).

6. Produit de deux espaces quotients.

Soient E et F deux espaces topologiques, R une relation d'équivalence dans E , S une relation d'équivalence dans F ; soient f l'application canonique de E sur E/R , g l'application canonique de F sur F/S ; l'application $h=(f,g)$ de $E\times F$ sur $(E/R)\times(F/S)$ est continue (§ 8, cor. 3 du th. 1). Or, la relation d'équivalence $h(z)=h(z')$ dans $E\times F$ n'est autre que la relation produit $R\times S$ (Ens. R, § 5, n°10) ; l'application canonique (biunivoque) de $(E\times F)/(R\times S)$ sur $(E/R)\times(F/S)$ (loc. cit.) est donc continue en vertu du th. 1 .

PROPOSITION 4.- Si R et S sont des relations d'équivalence ouvertes (déf. 2), l'application canonique de $(E\times F)/(R\times S)$ sur $(E/R)\times(F/S)$ est un homéomorphisme et $R\times S$ est ouverte.

D'après le critère général du n°3 et la déf. 2, nous devons montrer que l'image par $h=(f,g)$ de tout ensemble ouvert U dans $E\times F$ est un ensemble ouvert dans $(E/R)\times(F/S)$. Il suffit de considérer le cas où U est de la forme $A\times B$, A étant ouvert dans E et B ouvert dans F , puisque tout ensemble ouvert dans $E\times F$ est réunion de tels ensembles élémentaires (§ 8, n°1). Or, on a $h(A\times B)=f(A)\times g(B)$ par définition, et f(A) (resp. g(B)) est ouvert dans E/R (resp. F/S) par hypothèse.

Exemple.- Comme dans la première édition.

Si on ne suppose pas que R et S soient ouvertes, l'application canonique de $(E\times F)/(R\times S)$ sur $(E/R)\times(F/S)$ n'est pas nécessairement un homéomorphisme (cf. exerc.).

7. Séparation d'un espace quotient.

Cherchons à quelle condition un espace quotient E/R est séparé. La définition des ensembles ouverts dans E/R (n°1) donne aussitôt la condition suivante : il faut et il suffit que deux classes d'équivalence distinctes quelconques dans E soient respectivement contenues dans deux ensembles ouverts saturés sans point commun. Nous allons donner d'autres conditions plus maniables.

THÉORÈME 2.- Pour que l'espace quotient E/R soit séparé, il faut que, dans $E \times E$, l'ensemble C défini par la relation R soit fermé. Cette condition nécessaire est suffisante lorsque la relation R est ouverte.

En effet, dire que C est fermé signifie que, si $(a,b) \notin C$ (c'est-à-dire si a et b ne sont pas congrus modulo R), il existe un voisinage ouvert U de a et un voisinage ouvert V de b tels que $U \times V$ ne rencontre pas C ; en d'autres termes, aucun point de U n'est congru modulo R à un point de V. Ceci s'exprime encore en disant que les ensembles A et B, obtenus en saturant U et V pour R, n'ont aucun point commun. Il est clair que cette condition est remplie si E/R est séparé : il suffit en effet alors de prendre U et V des voisinages ouverts saturés des classes d'équivalence de a et b. D'autre part, si C est fermé et si la relation R est ouverte les ensembles A et B sont des ensembles ouverts saturés, contenant respectivement les classes d'équivalence de a et b, donc E/R est séparé.

2

Lorsque R n'est pas ouverte, on peut donner des exemples où C est fermé et E/R non séparé (exerc.).

COROLLAIRE.- Si l'espace quotient E/R est séparé, les classes d'équivalence suivant R sont des ensembles fermés.

Pour démontrer que E/R est séparé, on peut aussi faire usage de la proposition suivante :

PROPOSITION 5.- Si, pour tout couple de points distincts a,b d'un espace E, il existe une application continue f d'un sous-espace ouvert A de E, contenant a et b, dans un espace séparé E' telle que $f(a)\neq f(b)$, alors E est séparé.

En effet, soient V', W' deux voisinages sans point commun de f(a) et f(b) respectivement ; $\overset{-1}{f}(V')$ et $\overset{-1}{f}(W')$ sont des voisinages de a et b respectivement et n'ont aucun point commun, d'où la proposition.

Pour un espace quotient E R, on utilisera cette proposition de la manière suivante : X et Y étant deux classes d'équivalence suivant R, on formera une application continue f d'un ensemble ouvert $A\subset E$, saturé pour R et contenant X et Y, dans un espace séparé E', de sorte que :

1° f soit constante sur toute classe d'équivalence suivant R, contenue dans A ;

2° f prenne des valeurs distinctes sur X et Y.

Comme A/R_A peut être identifié à un sous-ensemble ouvert de E/R (cor.1 de la prop.3), on pourra appliquer la prop.5 à l'application g de A/R_A dans E' déduite de f par passage au quotient, puisque cette application est continue (th.1).

COROLLAIRE.- Si f est une application continue d'un espace E dans un espace séparé E', et R la relation d'équivalence $f(x)=f(y)$, l'espace quotient E/R est séparé.

PROPOSITION 6.- Soient E un espace régulier, F un ensemble fermé dans E, R la relation d'équivalence obtenue en identifiant entre eux les points de F (autrement dit, la relation d'équivalence dont les classes sont F et les ensembles $\{x\}$, pour $x\in\complement F$). L'espace quotient E/R est séparé.

En effet, soient A et B deux classes d'équivalence distinctes dans E . Si chacune d'elles est réduite à un point, il existe deux voisinages ouverts de A et B sans point commun et ne rencontrant pas F (donc saturés Si $A=F$ et $B=\{b\}$, il existe par hypothèse un voisinage ouvert de F et un voisinage ouvert de b sans point commun, qui sont saturés.

P. 63, nouvelle rédaction du n° sur les espaces quotients d'un espace compact :

PROPOSITION 7.- Soit E un espace compact, R une relation d'équivalence dans E . Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

a) L'ensemble C défini par R dans $E\times E$, est fermé.

b) La relation R est fermée (§9, déf.2).

c) L'espace quotient E/R est séparé.

En outre, lorsque l'une quelconque de ces propriétés est vérifiée l'espace E/R est compact.

La dernière partie de la proposition est une conséquence du th.1, l'application canonique de E sur E/R étant continue. Nous savons d'autre part que c) entraîne a) (§9, th.2). Montrons d'abord que a) entraîne b). Si A est un ensemble fermé dans E , le saturé de A pour R n'est autre que la seconde projection de l'ensemble $C\cap(A\times E)$; comme $C\cap(A\times E)$ est fermé dans $E\times E$, et que $E\times E$ est compact (th.2), la seconde projection de $C\cap(A\times E)$ est fermée (th.1).

Montrons maintenant que b) entraîne c). Soient X et Y deux classes d'équivalence distinctes suivant R ; elles sont fermées dans E . Pour chaque $x\in X$, il existe un voisinage ouvert V_x de x et un voisinage ouvert W_x de Y sans point commun (prop.8, qui devra donc être remontée); comme X est compact, il existe un nombre fini de points x_i de X ($1\leqslant i\leqslant n$) tels que les V_{x_i} forment un recouvrement ouvert de X ; par suite les ensembles $V = \bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i}$ et $W = \bigcap_{i=1}^{n} W_{x_i}$ sont des voisinages ouverts sans point commun de X et Y respectivement. Considérons l'ensemble fermé H , complémentaire de V et soit K l'ensemble saturé de H ; il est *fermé* par hypothèse, donc $\complement K$ est un voisinage *ouvert* et *saturé* de X , contenu dans V ; on démontre de même l'existence d'un voisinage ouvert et saturé de Y , contenu dans W , ce qui achève de prouver que E/R est séparé .

P. 67, avant les exercices, ajouter :

COROLLAIRE.- *Dans un espace localement compact* E , *tout ensemble compact possède un voisinage compact*.

En effet, considérons E comme plongé dans l'espace compact E' obtenu en adjoignant à E un point à l'infini ω . Si A est un ensemble compact dans E , il existe dans E' un voisinage V de A et un voisinage W de ω sans point commun (prop.8) ; comme $\complement W$ est relativement compact il en est de même de V .

Applications propres.

DÉFINITION 5.- *Soient* E *et* E' *deux espaces localement compacts. On dit qu'une application continue* f *de* E *dans* E' , *est propre si, pour tout ensemble compact* $K \subset E'$, $\overset{-1}{f}(K)$ *est compact dans* E .

Si E est compact, toute application continue de E dans un espace localement compact E' est propre. Si E' est compact, il n'existe d'application propre d'un espace localement compact E dans E' que si E est compact puisque, pour une telle application f , $\overset{-1}{f}(E')=E$ doit être compact.

PROPOSITION 12.- *Soient* E *et* E' *deux espaces localement compacts et non compacts,* F *et* F' *les espaces compacts obtenus en adjoignant à* E *et* E' *respectivement les points à l'infini* ω *et* ω' . *Pour qu'une application continue* f *de* E *dans* E' *soit propre, il faut et il suffit que* f(x) *tende vers* ω' *lorsque* x *tend vers* ω *en restant dans* E .

En effet, si f est propre, pour tout ensemble compact $K \subset E'$, $\overset{-1}{f}(\complement K) = \complement \overset{-1}{f}(K)$ est le complémentaire d'un ensemble compact dans E' ; par définition des voisinages de ω et ω' dans F et F', f(x) tend vers ω' lorsque x tend vers ω ; la réciproque se démontre de même.

PROPOSITION 13.- Si f est une application propre d'un espace localement compact E dans un espace localement compact E', l'image par f de tout ensemble fermé dans E est un ensemble fermé dans E'.

La proposition n'est autre que le th.1 lorsque E est compact. On peut donc se borner au cas où E et E' sont non compacts. Avec les notations de la prop.12, pour tout ensemble fermé A dans E, $A \cup \{\omega\}$ est compact dans F ; f pouvant être prolongée en une application continue $\overline{f}$ de F dans F', $\overline{f}(A) \cup \overline{f}(\omega) = f(A) \cup \{\omega'\}$ est compact dans F', donc f(A) est fermé dans E'.

Espaces quotients d'un espace localement compact.

Un espace quotient d'un espace localement compact n'est pas nécessairement localement compact, même s'il est séparé (exerc.). On a toutefois la proposition suivante :

PROPOSITION 14.- Soient E un espace localement compact, et R une relation d'équivalence dans R telle que le saturé pour R de tout ensemble compact dans E soit un ensemble compact. Dans ces conditions l'espace quotient E/R est localement compact, et l'application canonique de E sur E/R est propre.

Montrons d'abord que R est fermée ; il suffit de prouver que si A est fermé dans E, la trace du saturé B de A sur tout ensemble compact $K \subset E$ est un ensemble compact ; or, si H est le saturé de K, qui est compact par hypothèse, la trace de B sur H est le saturé de $A \cap K$, qui est compact ; a fortiori $B \cap K = (B \cap H) \cap K$ est compact.

Considérons E comme sous-espace de l'espace compact E' obtenu en adjoignant à E un point à l'infini ω . Soit R' la relation d'équivalence dans E' dont les classes d'équivalence sont les classes suivant R et l'ensemble $\{\omega\}$; d'après ce qui précède, la relation R' est fermée dans l'espace compact E' , donc (prop.7) E'/R' est compact. Or la relation R est induite par R' sur E , et E est un ensemble ouvert dans E' , saturé pour R' . Par suite (§ 9, cor.1 de la prop.3), E/R est isomorphe à l'image de E dans E'/R' , par l'application canonique φ de E' sur E'/R' ; or, $\varphi(E)$ est un ensemble ouvert dans l'espace compact E'/R' , et son complémentaire est réduit à un point $\varphi(\omega)$. E/R est donc localement compact, et la prop.11 montre que φ est une application propre de E sur $\varphi(E)$.

COROLLAIRE.- <u>Soient</u> E <u>et</u> F <u>deux espaces localement compacts,</u> f <u>une application propre de</u> E <u>dans</u> F , R <u>la relation d'équivalence</u> $f(x)=f(y)$ <u>dans</u> E . <u>L'application canonique</u> g <u>de</u> E/R <u>sur</u> $f(E)$, <u>déduite de</u> f <u>par décomposition canonique</u> (§ 9,n°3) <u>est un homéomorphisme</u>.

En effet, si φ est l'application canonique de E sur E/R , pour tout ensemble fermé $A \subset E/R$, $\overset{-1}{\varphi}(A)$ est fermé dans E , donc (prop.13), $f(\overset{-1}{\varphi}(A))=g(A)$ est fermé dans $f(E)$, ce qui démontre le corollaire.

<u>Espaces quasi-compacts</u>. (Toute cette tératologie gâterait fâcheusement l'élégance de ce paragraphe si elle s'y mélangeait à tout bout de champ ; je propose donc que ce soit bloqué en un n° en petits caractères, à la fin du paragraphe, ou mieux, que ce soit rejeté en Appendice).

On dit qu'un espace topologique E est <u>quasi-compact</u> s'il satisfait à l'axiome (C) mais n'<u>est pas nécessairement séparé</u> ; un espace compact est donc un espace <u>quasi-compact séparé</u>.

Les démonstrations données au n°1 pour l'équivalence des axiomes (C) (C'), (C"), (C"') ne font pas intervenir l'hypothèse que l'espace est séparé. De même, la démonstration de la prop.1 montre que si un filtre sur un espace quasi-compact a un seul point adhérent, il converge vers ce point.

On dit qu'une partie A d'un espace topologique E est un <u>ensemble quasi-compact</u> si le sous-espace A de E est un espace quasi-compact.

Pour que A soit ~~xxx~~ quasi-compact, il faut et il suffit que tout recouvrement ouvert de A dans E contienne un recouvrement fini de A .

Un ensemble compact (et a fortiori un ensemble quasi-compact) dans un espace topologique <u>non séparé</u> n'est pas nécessairement fermé (exerc.); mais la démonstration de la prop.4 prouve que dans un espace quasi-compact, tout ensemble fermé est quasi-compact.

On dit qu'une partie A d'un espace topologique E est un ensemble <u>relativement quasi-compact</u> si son adhérence $\overline{A}$ dans E est un ensemble quasi-compact. Dans un espace non séparé, un ensemble compact (et a fortiori un ensemble quasi-compact) n'est pas toujours relativement quasi-compact (exerc.). La proposition 5 est encore valable quand on y remplace "compact" par "quasi-compact". La démonstration de la prop.6 montre encore que la réunion de deux ensembles quasi-compacts est un ensemble quasi-compact.

Si E est un espace quasi-compact, E' un espace topologique quelconque, f une application continue de E dans E' , f(E) est un ensemble quasi-compact, comme le montre la démonstration du th.1. On notera par contre que si f est une application biunivoque et continue d'un espace quasi-compact E sur un espace topologique E' n'est pas nécessairement un homéomorphisme (exerc.).

Tout produit d'espaces quasi-compacts est un espace quasi-compact ; c'est ce que montre la démonstration du th.2 (en notant que le th.1 du §8 s'applique à des espaces topologiques quelconques (séparés ou non)).

Tout espace quotient d'un espace quasi-compact est quasi-compact.

Soit E un espace topologique quelconque, $\mathfrak{G}$ le filtre des complémentaires des ensembles relativement quasi-compacts dans E . Le raisonnement du th.3 montre que tout filtre sans point adhérent dans E est plus fin que $\mathfrak{G}$, et qu'on peut adjoindre à E un "point à l'infini" ω de sorte que l'espace $E'=E\cup\{\omega\}$ soit quasi-compact et que E soit ouvert dans E' .

P. 71, remplacer la prop.3 (qui passe en exercice) par :

PROPOSITION 3.- Soit A une partie d'un espace E . Si B est une partie connexe de E qui rencontre A et son complémentaire $\complement A$, B rencontre la frontière de A .

En effet, dans le cas contraire, les intersections de B avec l'intérieur et l'extérieur de A seraient deux ensembles ouverts par rapport à B , formant une partition de B , contrairement à l'hypothèse.

P. 73, après la prop.7, ajouter :

PROPOSITION 8.- Soient E un espace topologique, R une relation d'équivalence dans E . Si l'espace quotient E/R est connexe, et si chaque classe d'équivalence modulo R est connexe, E est connexe.

Raisonnons par l'absurde, et supposons qu'il existe une partition de E en deux ensembles ouverts non vides A et B . Les ensembles A et B sont saturés pour R ; en effet, si $x\in A$, la classe X de x modulo R ne peut rencontrer B , car $A\cap X$ et $B\cap X$ formeraient une partition de X en deux ensembles ouverts par rapport à X , ce qui est contraire à l'hypothè

Les images canoniques de A et B sont alors des ensembles ouverts non vides dans E/R , et forment une partition de E/R , ce qui est absurde.

P. 74, supprimer la prop.8, qui passe en exercice.

P.103, il serait bon de faire passer le lemme en Proposition (on s'en sert ailleurs par la suite).

P. 109, après la démonstration du th.1, ajouter :

<u>Remarque</u>.- A tout <u>recouvrement ouvert fini</u> $\mathcal{R} = (U_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de l'espace compact E , faisons correspondre, dans $E \times E$, le voisinage $V_{\mathcal{R}} = \bigcup_{i=1}^{n} (U_i \times U_i)$ de la diagonale Δ . Les ensembles $V_{\mathcal{R}}$ forment un <u>système fondamental d'entourages</u> de la structure uniforme de E ; en effet, si V est un voisinage quelconque de Δ dans $E \times E$, pour tout $x \in E$, il existe un voisinage ouvert U_x de x dans E tel que $U_x \times U_x \subset V$. Comme Δ est compact, il existe un nombre fini de points x_i tels que les $U_{x_i} \times U_{x_i}$ forment un recouvrement de Δ contenu dans V ; comme les U_{x_i} forment évidemment un recouvrement de E , notre assertion est démontrée. En raison de cette propriété, on dit souvent que l'unique structure uniforme de E est la <u>structure uniforme des recouvrements ouverts finis</u>.

P. 110, ajouter à la déf.2 :

<u>On dit qu'une partie</u> A <u>d'un espace uniforme</u> E <u>est un ensemble précompact si le sous-espace uniforme</u> A <u>de</u> E <u>est précompact</u>.

<u>Remarque</u>.- Dans un espace uniforme E , un ensemble <u>relativement compact</u> A est <u>précompact</u>, puisque $\bar{A}$ est compact, donc complet, et A partout dense dans $\bar{A}$, ce qui montre (§ 3,prop.8) que $\bar{A}$ est isomorphe

au complété du sous-espace A . Par contre, un ensemble précompact n'est pas nécessairement relativement compact, comme le montre le cas où E lui-même est précompact, mais non compact.

P. 111, faire passer la prop.2 en prop.1, et remplacer la prop.1 par un Corollaire, avec la démonstration suivante :

En effet, soit U un voisinage ouvert quelconque de A ; l'ensemble $B = \complement U$ est fermé et ne rencontre pas A ; d'après la prop.1, il existe un entourage V de E tel que $V(A) \cap V(B) = \emptyset$, et a fortiori $V(A) \subset U$, ce qui démontre le corollaire.

P. 113, après la prop.4, ajouter les corollaires suivants :

COROLLAIRE 1.- Soit E un espace localement compact totalement discontinu. Pour tout $x \in E$, l'ensemble des voisinages à la fois ouverts et fermés de x forme un système fondamental de voisinages de x .

En effet, soit V un voisinage ouvert relativement compact de x , et supposons V non fermé ; alors la frontière F de V est un ensemble compact non vide. Si un voisinage ouvert et fermé U de x ne rencontre pas F , $U \cap V$ est ouvert et fermé, car il est égal à $U \cap \overline{V}$. Supposons donc que tous les voisinages ouverts et fermés de x dans E rencontrent F ; leurs intersections avec F forment alors une base de filtre d'ensembles fermés ces ensembles auraient donc un point commun appartenant à F , alors que, dans l'espace compact $\overline{V}$, l'intersection des ensembles ouverts et fermés contenant x doit se réduire à x en vertu de la prop.4 ; nous obtenons donc une contradiction, ce qui établit le corollaire.

COROLLAIRE 2.- <u>Soit</u> E <u>un espace compact</u>, R <u>la relation d'équivalence dans</u> E <u>dont les classes sont les composantes connexes de</u> E . <u>L'espace quotient</u> E/R <u>est compact et totalement discontinu</u>.

On sait déjà (chap.I, § 11) que E/R est totalement discontinu ; tout revient à voir que E/R est <u>séparé</u> (chap.I, § 10, prop.7). Or, soient A et B deux composantes connexes distinctes de E ; d'après la prop.4, il existe un entourage U de E tel qu'un point quelconque de A et un point quelconque de B ne puissent être joints par une U-chaîne. Or, l'ensemble V (resp. W) des points de E qui peuvent être joints à un point de A (resp. B) par une U-chaîne, est à la fois ouvert et fermé (prop.3), donc saturé pour R ; V et W sont donc des voisinages ouverts de A et B respectivement, saturés pour R et ne se rencontrant pas, ce qui prouve le corollaire.
