RÉDACTION N° 199

COTE : NBR 100

TITRE : LIVRE II - ALGÈBRE
CHAPITRE II : ALGÈBRE LINÉAIRE
(DEUXIÈME ÉDITION)

ASSOCIATION DES COLLABORATEURS DE NICOLAS BOURBAKI

NOMBRE DE PAGES : 22

NOMBRE DE FEUILLES : 22

LIVRE II.

ALGÈBRE

CHAPITRE II.

ALGÈBRE LINÉAIRE

(Deuxième édition).

APPENDICE I.

ESPACES AFFINES.

-----

1 - *Définition des espaces affines.*

Définition 1 - Etant donné un espace vectoriel à gauche (resp. à *droite*) T *sur un corps* K, *on appelle espace affine attaché à* T *tout espace homogène* E (chap. I, § 7, n°6) *du groupe additif de* T *tel que* 0 *soit le seul opérateur de* T *laissant invariants tous les éléments de* E. *Dans ces conditions* T *s'appelle l'espace des translations de* E, *et ses éléments s'appellent les translations ou vecteurs libres de* E.

Dans ce qui suit, nous nous bornerons au cas où T est un espace vectoriel à gauche sur K.

La dimension de l'espace des translations T d'un espace affine E s'appelle la *dimension de* E. Un espace affine de dimension un (resp. deux) s'appelle une *droite* (resp. un *plan*) affine.

Dans les conditions de la définition 1, et pour $t \in T$ et $P \in E$, nous noterons $t+P$ le transformé du point P par la translation t. La définition 1 exprime, en particulier, que l'application $t \to t+P$ est une *bijection* de T sur E. Ainsi, étant donnés deux points P et Q de E, il existe une translation t et une seule telle que $Q=t+P$; nous noterons celle ci $Q-P$; on a donc $Q = (Q-P) + P$, $P-P = 0$, $P-Q = -(Q-P)$ et $(R-Q) + (Q-P) = R-P$.

Considérons quatre points P, Q, P', Q' de E tels que $Q-P = Q'-P'$. La formule $Q' = (Q'-Q)+(Q-P) + P = (Q'-P')+(P'-P) + P$ et la commutativité de l'addition dans T montrent que l'on a alors $Q'-Q = P'-P$ ("règle du parallélogramme"). L'on dit alors que les quatre points P, Q, Q', P' (pris dans cet ordre) forment un *parallélogramme*.

Etant donné un point P de E, l'application $Q \longrightarrow Q-P$ est une bijection de E sur T ; quand on identifie E à T par cette application, on dit qu'on considère E comme espace vectoriel obtenu *en prenant* P *pour origine* dans E. Inversement tout espace vectoriel T est canoniquement muni d'une structure d'espace affine attaché à T, à savoir la structure d'espace homogène correspondant au sous groupe (0) de T (Chap.I, § 7, N°6).

Remarque.- Les définitions et résultats donnés dans ce n° s'étendent immédiatement au cas où, au lieu d'un espace vectoriel T, on considère un *groupe abélien* quelconque T.

2 - *Calcul barycentrique*.-

Proposition 1 - Etant données une famille finie $(P_i)_{i\in I}$ de points d'un espace affine E et une famille finie $(a_i)_{i\in I}$ d'éléments du corps de base K telle que $\sum a_i = I$ (resp. $\sum a_i = 0$), ainsi qu'un point Q de E, le point P défini par $P-Q = \sum a_i(P_i-Q)$ (resp. le vecteur libre $\sum a_i(P_i-Q)$) est indépendant du point Q choisi.

En effet, si Q' est un autre point de E, on a $\sum a_i(P_i-Q') = \sum a_i((P_i-Q)+(Q-Q')) = \sum a_i\ (P_i-Q) + (\sum a_i)(Q-Q')$. Quand $\sum a_i = I$ ce vecteur est égal à $(P-Q)+(Q-Q') = P-Q'$, d'où notre assertion. Quand $\sum a_i = 0$, ce vecteur est égal à $\sum a_i(P_i-Q)$, d'où notre seconde assertion.

Dans les conditions de la prop. 1, on note $\sum a_i P_i$ le point P défini par $P-Q = \sum a_i(P_i - Q)$ (resp. le vecteur libre $\sum a_i(P_i-Q)$). Le point P défini par $P-Q = \sum_i a_i(P_i-Q)$ s'appelle le <u>barycentre des points</u> (P_i) <u>affectés des masses</u> (a_i).

<u>Exemples</u> - 1) Etant donnés deux points P et Q de E et un élément $a \neq 1$ de K, le point P' défini par $P'-P = a\,(P'-Q)$ est dit <u>diviser le segment</u> (P,Q) <u>dans le rapport</u> a. C'est le barycentre des points P et Q affectés des masses $(1-a)^{-1}$ et $-a(1-a)^{-1}$, comme on le vérifie aussitôt.

2) Etant donnés m points $P_1, \ldots, P_m$ de E tels que leur nombre m ne soit <u>pas</u> multiple de la caractéristique de K, le point $G = \sum m^{-1} P_i$ s'appelle le <u>centre de gravité</u> des points (P_i). Il est caractérisé par la relation $\sum (P_i - G) = 0$.

La formation des barycentres est <u>associative</u>. Plus précisément, étant données n familles finies $(P_{ij})_{j \in J_i}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ de points d'un espace affine E, n familles finies $(a_{ij})_{j \in J_i}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ d'éléments de K telles que $\sum_{j \in J_i} a_{ij} = 1$, et n éléments b_i de K tels que $\sum_i b_i = 1$, alors les barycentres $\sum_i b_i(\sum_{j \in J_i} a_{ij} P_{ij})$ et $\sum_{i,j} b_i a_{ij} P_{ji}$ sont confondus.

3 - <u>Variétés linéaires</u>.-

<u>Définition 2</u> - <u>Etant donné un espace affine E, on dit qu'une partie V de E est une variété linéaire</u> (<u>ou une variété linéaire affine</u>), <u>si pour toute famille finie</u> (P_i) <u>de points de V et toute famille</u> (a_i) <u>d'éléments de K tels que</u> $\sum_i a_i = 1$, <u>le barycentre</u> $\sum_i a_i P_i$ <u>appartient à V</u>.

La partie vide est une variété linéaire de E. Etant donnée une partie non vide V de E, prenons un point P de V et considérons l'espace vectoriel obtenu en prenant P pour origine dans E. Dans cette structure vectorielle, l'élément Q combinaison linéaire des éléments P_i munis des coefficients b_i est le barycentre $\sum b_i P_i + (1 - \sum b_i)P$, puisque $Q-P = \sum b_i(P_i - P)$.

Donc, pour que V soit une variété linéaire de E, il faut et il suffit que ce soit un <u>sous espace vectoriel</u> de E pour la structure vectorielle de E obtenue en prenant P pour origine. En particulier, les variétés linéaires affines non vides d'un espace vectoriel T (considéré comme espace affine) ne sont autres que les <u>translatés</u> de sous espaces vectoriels de T.

Etant donné un point P d'une variété linéaire V de l'espace affine E, les vecteurs libres Q-P où $Q \in V$ forment, d'après l'équivalence des relations $Q = \sum b_i P_i + (1 - \sum b_i)P$ et $Q-P = \sum b_i (P_i - P)$, un sous espace vectoriel D de l'espace des translations T de E. Comme $Q-P' = (Q-P)-(P'-P)$ ce sous espace D est indépendant du point P choisi dans V. On l'appelle la <u>direction</u> de V. Et l'ensemble V est canoniquement muni d'une <u>structure d'espace affine</u> attaché à D. En particulier, l'on pourra parler de la <u>dimension</u> de V (qui est celle de D). On appelle <u>codimension</u> de V dans E, la codimension de D dans T; une variété linéaire affine de codimension 1 dans E s'appelle un <u>hyperplan</u> de E. Deux variétés linéaires de même direction sont dites <u>parallèles</u>.

<u>Proposition 2</u> - <u>Etant donnés un système</u> (P_i, x_j) <u>de points</u> P_i <u>et de vecteurs libres</u> x_j <u>d'un espace affine</u> E, <u>l'ensemble</u> V <u>des points de</u> E

de la forme $\sum_i a_i P_i + \sum_j b_j \underline{x}_j$ $(a_i, b_j \in K, \sum_i a_i = 1)$ est une variété linéaire de E.

Si la famille P_i est vide, on a $V = 0$ à cause de la condition $\sum_i a_i = 1$. On peut donc supposer qu'il existe un point P_1, auquel cas notre assertion est évidente en prenant ce point pour origine. On dit que V est engendrée par les points P_i et les vecteurs $\underline{x}_j$.

Avec les notations de la prop.3, pour que la représentation de tout point P de V sous la forme $P = \sum_i a_i P_i + \sum_j b_j \underline{x}_j$ soit unique, il faut et il suffit que le système $(P_i - P_1, \underline{x}_j)_{i \neq 1}$ soit un système libre d'éléments de T. On dit alors que le système $(P_i, \underline{x}_j)$ de points et vecteurs de E est affinement libre. Et l'on dit que la formule que la formule $P = \sum_i a_i P_i + \sum_j b_j \underline{x}_j$ $(\sum_i a_i = 1)$ est une représentation paramétrique de la ~~xix~~ variété linéaire V engendrée par le système $(P_i, \underline{x}_j)$.

Pour que la variété linéaire V engendrée par le système $(P_i, \underline{x}_j)$ soit égale à l'espace affine E tout entier, il faut et il suffit qu'il existe un point P_1 dans la famille (P_i) et que le système $(P_i - P_1, \underline{x}_j)_{i \neq 1}$ soit un système total d'éléments de T. On dit alors que le système $(P_i, \underline{x}_j)$ est affinement total.

Un système $(P_i, \underline{x}_j)$ de points et vecteurs de l'espace affine E qui est à la fois affinement libre et affinement total s'appelle une base affine de E. Si n désigne la dimension de E, une base affine de E contient n+1 éléments (dont au moins un point).

Remarque.- La variété linéaire engendrée par une famille de points d'un espace affine E n'est autre que l'ensemble des barycentres de ces points.

4 - Applications affines.

Déf.3 - Etant donnés deux espaces affines E, E' attachés à deux espaces vectoriels T,T' sur un même corps K, on dit qu'une application u de E dans E' est une application affine si, quels que soient les points P_i de E et les éléments a_i de K de somme 1, on a

$$u\left(\sum_i a_i P_i\right) = \sum_i a_i u(P_i).$$

Soit P un point de E et soit u une application quelconque de E dans E'. Munissons E et E' des structures d'espace vectoriels obtenues en prenant P et P' = u(P) pour origines. L'équivalence des relations $Q-P = \sum_j b_j(Q_j-P)$ et $Q = \sum_j b_j Q_j + (1-\sum_j b_j)P$ (et l'équivalence analogue dans E') montrent que, pour que u soit une application *affine* de E dans E', il faut et il suffit que u soit une application *linéaire* de l'espace vectoriel d'origine P dans l'espace vectoriel d'origine u(P). En particulier, les applications affines d'un espace vectoriel V dans un espace vectoriel V' ne sont autres que les *composées* d'une application linéaire et d'une translation; plus précisément ce sont les applications de la forme $x \longrightarrow f(x)+a'$ $(x \in V,\ a' \in V')$, ou encore de la forme $x \in f(x+a)$ $(x, a \in V)$, où f est une application linéaire de V dans V'.

Une bijection affine de E sur lui-même s'appelle une *transformation affine* de E.

Le corps de base K possède une structure d'espace vectoriel sur K, et donc une structure d'espace affine. Une application affine d'un espace affine E (sur K) dans K s'appelle une *fonction affine* sur E.

Pour tout point P de E une telle fonction affine est de la forme $u = u(P) + u'$, où u' est une forme linéaire sur l'espace vectoriel obtenu en prenant P pour origine; ainsi les fonctions affines sur un espace affine (à gauche) E forment un *espace vectoriel à droite* de dimension dim (E)+1 sur K. Un *hyperplan* de E est défini par l'annulation d'une fonction affine (non nulle) sur E, ou, ce qui revient au même, par une équation de la forme $u(P)-a = 0$, (où u est une fonction affine).

5 - *Orientation* (astérisques, à cause de l'algèbre extérieure).

Soient E un espace affine de dimension n sur un corps *commutatif* K, et T son espace des translations; nous supposerons K *quelconque*. Donnons nous un sous groupe multiplicatif G de K^*. Le groupe G opère sur l'ensemble des éléments non nuls de la puissance extérieure n-ième $\bigwedge^n T$; on appelle *orientation de E par rapport à G* toute classe d'intransitivité de G (pour cette représentation); les orientations de E par rapport à G sont ainsi en correspondance biunivoque (non canonique) avec les éléments de $K^* G$.

Lorsque le groupe G est tel que $-1 \notin G$, on dit que deux orientations $\underline{o}, \underline{o}'$ de E sont *opposées* si $\underline{o}' = (-1)\underline{o}$.

Etant donnée une base affine $(P_1 \ldots, P_m, \underline{x}_{m+1}, \ldots \underline{x}_{n+1}$ de E formée de points et vecteurs, on appelle *orientation de cette base* (par rapport à G) la classe d'intransitivité du n-vecteur

$(P_2-P_1)\wedge \ldots \wedge(P_m-P_1)\wedge \underline{x}_{m+1} \wedge \ldots \wedge \underline{x}_{n+1}$.

Lorsque $m=1$, ce n-vecteur est $\underline{x}_2 \wedge \ldots \wedge \underline{x}_{n+1}$ et ne dépend pas de P_1.

 9

Etant donnée une transformation affine (n^o4) s de E, l'application $t \to sts^{-1}$ est un automorphisme de l'espace des translations T de E; son déterminant s'appelle le <u>déterminant</u> de s et se note D(s). Les transformations affines s de E qui "conservent l'orientation" (c.à.d. qui laissent chaque orientation invariante) ne sont autres que celles telles que $D(s) \in G$.

Si $-1 \notin G$, celles telles que $D(s) \in -G$ changent toute orientation en son opposée.

<u>Exemple</u> - La transformation affine s définie par une permutation π des indices des vecteurs $\underline{x}_i$ d'une base affine $(P, \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n)$ de E conserve l'orientation si la signature ε_π de π est égale à 1. Si $\varepsilon_\pi = -1$, et si $-1 \notin G$, cette transformation change chaque orientation en son opposée. Les bases affines $(P, \underline{x}_i)$ et $(P, \underline{x}_{\pi(i)})$ ont ainsi même orientation si $\varepsilon_\pi = 1$, et des orientations opposées si $\varepsilon_\pi = -1$ et si $-1 \in G$.

Considérons deux variétés linéaires affines E' et E" de E (prises dans cet ordre); notons T', T" leurs espaces de translations, n' et n" leurs dimensions. L'application $(x', x'') \to x' \wedge x''$ de $(\overset{n'}{\wedge} T') \times (\overset{n''}{\wedge} T'')$ dans $\overset{n}{\wedge} T$ définit, par passage aux quotients, une application, notée $(\underline{o}', \underline{o}'') \to \underline{o}' \wedge \underline{o}''$, du produit des ensembles des orientations de E' et E" dans l'ensemble des orientations de E.

Comme, pour $\underline{o}'$ (resp. $\underline{o}''$) fixé, l'application $\underline{o}'' \to \underline{o}' \wedge \underline{o}''$ (resp. $\underline{o}' \to \underline{o}' \wedge \underline{o}''$) est une bijection, la donnée de deux des orientations $\underline{o}, \underline{o}', \underline{o}''$ sur E, E', E" détermine la troisième <u>de façon unique</u> si elles sont as sujetties à la relation $\underline{o} = \underline{o}' \wedge \underline{o}''$.

Lorsque l'une au moins des deux dimensions n', n'' est paire, l'on n'a pas à se préoccuper de l'ordre dans lequel E' et E'' sont donnés.

6 - Géométrie affine sur un corps ordonné (astérisques).

Définition 4 - Soient E un espace affine sur un corps ordonné (donc commutatif) K, et $(P_i, \underline{x}_j)$ un système de points et vecteurs de E. On appelle région positive fermée (resp. ouverte) déterminée par ce système, et l'on note $R(P_i, \underline{x}_j)$ (resp. $R^o(P_i, \underline{x}_j)$) l'ensemble des points P de E de la forme

$$\sum_i a_i P_i + \sum_j b_j \underline{x}_j \text{ où } \sum_i a_i = 1,\ a_i \geqslant 0,\ b_j \geqslant 0 \ (\text{resp. } a_i > 0,\ b_j > 0).$$

On remarquera que $R(P_i, \underline{x}_j)$ et $R^o(P_i, \underline{x}_j)$ ne changent pas si l'on remplace chaque vecteur $\underline{x}_j$ par un vecteur de la forme $c_j \underline{x}_j$ où $c_j > 0$.

Exemples de régions positives.

a) Simplèxes. Etant donné un système affinement libre (P_i) de $q+1$ points de E ($q \leqslant \dim(E)$), les régions positives $R(P_i)$ et $R^o(P_i)$ s'appellent le simplexe fermé et le simplexe ouvert de sommets P_i, et l'entier q s'appelle la dimension de ces simplexes. Un simplexe de dimension 1 (resp. 2, 3) s'appelle un segment (resp. triangle, tétraèdre).

b) Demi-droites. Etant donnés un point P et un vecteur $\underline{x} \neq 0$, la région positive $R(P, \underline{x})$ (resp. $R^o(P, \underline{x})$) s'appelle la demi-droite fermée (resp. ouverte) d'origine P; le vecteur $\underline{x}$ s'appelle un vecteur directeur de cette demi-droite. Deux demi-droites parallèles $R(P, \underline{x})$, $R(P', \underline{x}')$ sont dites de même sens s'il existe une translation amenant l'une sur l'autre; il revient au même de dire qu'il existe $a > 0$ tel que $x' = a.\underline{x}$.

c) Demi-espaces.- Etant donnés un hyperplan H et un vecteur $\underline{x}$ non contenu dans la direction de H, prenons pour (P_i) un système affinement total (dans H) de points de H (par exemple la famille de tous les points de H). La région positive $R(P_i, \underline{x})$ (resp. $R^o(P_i, \underline{x})$) s'appelle alors un demi-espace fermé (resp. ouvert) défini par l'hyperplan H.

Proposition 3 - Etant donnés un hyperplan H dans un espace affine E un demi espace fermé (resp. ouvert) D défini par H, et une équation $u(P) = a$ de H (u étant une fonction affine), alors D est défini par l'une des deux relations $u(P) \geq a$ ou $u(P) \leq a$ (resp. $u(P) > a$ ou $u(P) < a$). Inversement, les ensembles définis par ces relations sont des demi-espaces fermés (resp. ouverts) définis par H.

Considérons par exemple le cas où $D = R(P_i, \underline{x})$ est un demi-espace fermé. Tout point Q de E se met, et de facon unique, sous la forme $Q = P + b.\underline{x}$ avec $P \in H$, et ceux de D sont caractérisés par la relation $b \geq 0$. Posons o $\underline{x} = Q_o - P_o$ (avec $P_o \in H$). Comme u est une application affine, on a $u(Q) = u(P+bQ_o-bP_o) = u(P)+bu(Q_o)-bu(P_o)$ d'où $u(Q)-a = b(u(Q_o)-a)$. Donc, pour que b soit positif, il faut et il suffit que $u(Q)-a$ ait le même signe que $u(Q_o)-a$; d'où notre première assertion. La seconde s'en suit, en changeant éventuellement $\underline{x}$ en $-\underline{x}$.

Avec les notations de la prop.3 les demi-espaces définis par $u(P) \geq a$ (ou $u(P) > a$) et $u(P) \geq a$ (ou $u(P) > a$) sont dits opposés. Il résulte de la prop.3 qu'un hyperplan H définit exactement deux demi-espaces fermés (resp. ouverts); un demi-espace fermé défini par H est d'ailleurs le complèmentaire (dans E) du demi espace ouvert opposé.

Deux points P et Q de E sont dits être <u>du même côté</u> (resp. <u>strictement du même côté</u>) de H s'ils appartiennent à un même demi-espace fermé (resp. ouvert) défini par H; par utilisation d'une équation $u(P)=a$ de H. l'on voit aussitôt que, pour que deux points P et Q de E soient strictement du même côté de H, il faut et il suffit que le segment fermé $R(P,Q)$ ne rencontre pas H.

Dans le cas d'un espace affine E sur un corps <u>ordonné</u> K, l'on étudie surtout les orientations de E définies par le sous groupe multiplicatif $G = K_+^*$ des éléments strictement positifs de K (n°5). Il existe alors <u>deux</u> orientations sur E, d'ailleurs <u>opposées</u>.

Etant donnée une droite affine D, elle est susceptible de deux structures d'ensemble totalement ordonné (opposées) transportées de celle de K; chacune de ces structures détermine une orientation de D, à savoir la classe des vecteurs P-Q où $P>Q$; en d'autres termes, la donnée d'une demi droite contenue dans D définit une orientation de D, à savoir la classe de n'importe quel vecteur directeur de cette demi-droite. Par conséquent, la donnée d'un des deux demi-espaces (ouverts ou fermés) définis par un hyperplan H définit une orientation sur toute droite supplémentaire de H; il en résulte (n°5) que dans ces conditions, la donnée d'une orientation sur H détermine de facon unique une orientation sur l'espace affine E.

Enfin (<u>"règle du bonhomme d'Ampère"</u>) pour que deux bases affines $(P_0,\ldots,P_n)$ et $(P'_0,\ldots,P'_n)$ de E qui ne diffèrent que par un élément $P_k \neq P'_k$ aient la même orientation, il faut et il suffit que P_k et P'_k soient du même côté de l'hyperplan H engendré par les P_i pour $i \neq k$: en effet, par permutation des indices, l'on peut supposer que $k=n$ (n°5), et l'on est ramené à la propriété précédente.

APPENDICE II.

ESPACES PROJECTIFS.

I - Définition des espaces projectifs.

Définition I - Etant donné un espace vectoriel à gauche (resp. à droite) V sur un corps K, on appelle espace projectif attaché à gauche (~~xx~~ resp. à droite) à V le quotient du complèment V^* de (0) dans V par la relation d'équivalence "il existe $a \neq 0$ dans K tel que $\underline{y} = a.\underline{x}$".

En d'autres termes l'espace projectif P attaché à V est l'ensemble des droites (homogènes) de V privées de l'origine; il s'identifie donc canoniquement à l'ensemble des droites (homogènes) de V.

Lorsque V est de dimension finie n, on appelle dimension de l'espace projectif P attaché à V l'entier $n-1$. Ainsi un espace projectif de dimension -1 est vide, et un espace projectif de dimension 0 est réduit à un point. Un espace projectif de dimension 1 (resp. 2) s'appelle une droite projective (resp. un plan projectif).

Nous ne considérerons désormais que des esp. projectifs à gauche.

2 - Coordonnées homogènes.

Soit P un espace projectif de dimension n , attaché à un espace vectoriel V de dimension $n+1$. Donnons-nous une base $(\underline{e}_o,\ldots,\underline{e}_n)$ de V. Etant donné un point x^o de P et un point $\underline{x} \neq 0$ de V appartenant à la classe d'équivalence x^o, on dit que les coordonnées $(x_o,\ldots,x_n)$ de $\underline{x}$ par rapport à la base $(\underline{e}_i)(\underline{x} = x_i\underline{e}_i)$ constituent un système de coordonnées homogènes de x^o par rapport à la base $(\underline{e}_i)$. Tout système de $n+1$ éléments non tous nuls de K est un système de coordonnées homogènes d'un point de P . Et, pour que deux systèmes (x_i), (y_i) de $n+1$ quantités non toutes nulles de K soient des systèmes de coordonnées homogènes d'un même point de P (par rapport à la base ($\underline{e}_i$) de V), il faut et il suffit qu'il existe un élément $t\neq 0$ de K tel que $x_i=ay_i$ pour $i=0,\ldots,n$.

Etant données deux bases $(\underline{e}_i),(\underline{e}'_j)$ de V, liées par les relations $\underline{e}_i=\sum_j a_{ij}\underline{e}'_j$ et $\underline{e}'_j=\sum_i b_{ji}\underline{e}_i$, deux systèmes de coordonnées homogènes $(x_i),(x'_j)$ d'un même point x^0 de P par rapport aux bases $(\underline{e}_j),(\underline{e}'_j)$ de V sont liés par des relations de la forme

$$tx'_j=\sum_i x_i a_{ij}\ ,\quad ux_i=\sum_j x'_j b_{ji}$$

où u et t sont des éléments non nuls de K. En particulier, si $\underline{e}_i=c_i\underline{e}'_i$ ($c_i\neq 0$) pour tout i, x_j et x'_j sont liés par une relation de la forme $x'_i=vx_ic_i$ où v est un élément non nul de K.

Considérons en particulier une <u>droite projective</u> D attachée à un plan vectoriel V muni d'une base $(\underline{e}_o,\underline{e}_1)$. Les coordonnées homogènes (x_o,x_1) d'un point x^o de D étant déterminées à un facteur à gauche près, leur <u>rapport</u> $x_o^{-1}x_1$ est déterminé de façon unique par x^o, s'il est défini, c'est-à-dire si $x_o\neq 0$. Or il y a un seul point a^o de D dont la première coordonnée homogène est nulle. Nous associerons à tout point $x^o\neq a^o$ de D l'élément $x_o^{-1}x_1$ de K, et au point a^o le symbole ∞. Nous avons ainsi défini une <u>bijection</u> de D sur la réunion du corps K et du symbole ∞ ; on appelle l'ensemble ainsi obtenu le <u>corps projectif</u> associé à K, et on le note K_∞ . Le corps projectif K_∞ est canoniquement muni d'une structure de droite projective.

3 - <u>Variétés linéaires projectives.</u> Le complément de (0) dans un sous espace vectoriel W d'un espace vectoriel E est saturé par rapport à la relation d'équivalence "il existe $a\neq 0$ dans K tel que

$y = a.x$"; l'image canonique^L d'un tel ensemble dans l'espace projectif P attaché à V est appelée une <u>variété linéaire projective</u> (ou une <u>variété linéaire</u> lorsqu'aucune confusion n'est à craindre) de P. La variété linéaire L est munie d'une structure d'espace projectif; c'est l'espace projectif attaché à W. Une variété linéaire de dimension n-1 d'un espace projectif P de dimension n s'appelle un <u>hyperplan</u> de P.

Soient P l'espace projectif attaché à un espace vectoriel V, et L une variété linéaire de P.

$(\underline{e}_i)$ une base de V. L'algèbre linéaire (§ , n°) montre aussitôt que les points de L sont ceux dont les coordonnées homogènes (x_i) satisfont à un système $(\sum_i x_i a_{ij} = 0)$ d'équations homogènes à coefficients dans K; un tel système s'appelle un <u>système d'équations homogènes de L</u> (par rapport à la base $(\underline{e}_i)$ de V). Un hyperplan peut être défini par <u>une seule</u> équation.

Il est clair que toute <u>intersection</u> de variétés linéaires d'un espace projectif P est une variété linéaire de P. Donc, étant donnée une partie quelconque A de P, il existe une plus petite variété linéaire L contenant A, à savoir l'intersection de toutes les variétés linéaires de P contenant A; on dit que L est la <u>variété linéaire engendrée</u> par A. Ces notions correspondent aux notions analogues dans l'espace vectoriel V auquel P est attaché. En particulier, on déduit de § n° , que si L et L' sont deux variétés linéaires de P et si M est la variété linéaire engendrée par L L', on a

(1) $\dim (L) + \dim (L') = \dim (M) + \dim (L \cap L')$.

<u>Remarque</u> - Si $\dim (L) + \dim (L') \geqslant \dim (P)$, on déduit de (1) que l'intersection de L et L' est non vide.

Considérons maintenant une famille $(\overline{x}^{(j)})$ de points de P, et choisissons dans chaque classe d'équivalence $\overline{x}^{(j)} \in V$ un vecteur $\underline{x}^{(j)} \in V$. Le sous espace vectoriel W engendré par les $\underline{x}^{(j)}$ est indépendant du choix de ceux-ci dans les classes $\overline{x}^{(j)}$. Et la variété linéaire L engendrée par les points $(\overline{x}^{(j)})$ dans P est l'image canonique de W dans P. En particulier L est l'ensemble des images canoniques des vecteurs de la forme $\sum_j a_j \underline{x}^{(j)}$. Si $(x_i^{(j)})$ est un système de coordonnées homogènes du point $\overline{x}^{(j)}$ (par rapport à une base de V), les points de L sont donc ceux dont les systèmes de coordonnées homogènes sont de la forme

$$(2) \qquad y_i = \left(\sum_j a_j x_i^{(j)}\right)$$

(où les a_j sont des éléments presque tous nuls de K tels que les quantités (2) ne soient pas toutes nulles).

Avec les notations ci-dessus la relation "$x^{(j)}$ est linéairement libre (resp. liée)" est compatible avec la relation d'équivalence "il existe $a \neq 0$ dans K tel que $\underline{y} = a.x$". Elle définit donc une relation entre les images canoniques $\overline{x}^{(j)}$ des $(\underline{x}^{(j)})$ dans P; cette relation s'énonce "la famille $(\overline{x}^{(j)})$ est projectivement libre (resp. liée)". Lorsque la famille $(\overline{x}^{(j)})$ de points de P est projectivement libre, les coefficients a_j des formules (2) sont déterminés de façon unique à un facteur non nul près (à gauche) par la donnée du point de coordonnées homogènes (y_i); et ces coefficients peuvent prendre des valeurs arbitraires, pourvu qu'elles ne soient pas toutes nulles; on dit alors que les formules (2) constituent une représentation paramétrique de la variété linéaire L engendrée par la famille projectivement libre $(\overline{x}^{(j)})$.

17

Pour que la variété linéaire L engendrée par la famille $(\overline{x}^{(j)})$ de points de P soit égale à P tout entier, il faut et il suffit que, si $\underline{x}^{(j)}$ désigne un vecteur appartenant à la classe d'équivalence $\overline{x}^{(j)}$, la famille $(\underline{x}^{(j)})$ soit totale dans l'espace vectoriel V. On dit alors que la famille $(\overline{x}^{(j)})$ est <u>projectivement totale</u> dans l'espace projectif P.

Une famille $(\overline{x}^{(j)}$ de points d'un espace projectif P qui est à la fois projectivement libre et projectivement totale s'appelle une <u>base projective</u> de P. Lorsque P est de dimension n, toute base projective de P contient n+1 éléments. La donnée d'une base projective $(\overline{x}^{(j)})$ de P ne détermine <u>pas</u> de facon unique (même à un facteur à gauche près) les coordonnées homogènes d'un point y de Ppar rapport à un système tel que celles de $\overline{x}^{(j)}$ soient (δ_{ij}). Plus précisément considérons deux vecteurs $\underline{x}^{(j)}$, $\underline{x}'^{(j)}$ de la classe d'équivalence $\overline{x}^{(j)}$, et posons $x^{(j)} = c_j.\underline{x}'^{(j)}$ $(c_j \in K^*)$; si (a_j) est un système de coordonnées homogènes d'un point $\overline{\underline{a}}$ de P par rapport à la base $(\underline{x}^{(j)})$ de V, les systèmes de coordonnées homogènes de $\overline{\underline{a}}$ par rapport à la base $(x'^{(j)})$ seront de la forme (ta_jc_j) $(t \in K^*)$ (n°2). Pour déterminer sans ambiguité (à un facteur près) les coordonnées homogènes de tout point $\overline{y}$ de P par rapport à un tel système, il faudra de plus connaître le point $\overline{u}$ dont toutes les coordonnées ("point unité") sont égales à 1; alors, si $(\underline{x}^{(j)})$ est une base de V répondant à la question, (c'est-à-dire admettant les $\overline{x}^{(j)}$ pour points bases et $\overline{u}$ pour point unité), les bases $(c_j\underline{x}^{(j)})$ admettant $\overline{u}$ pour point unité sont celles pour lesquelles il existe $t \neq 0$ dans K tel que $c_j = t$; dans ces conditions, si (a_j) est un système de coordonnées homogènes d'un point $\overline{a}$ de P par rapport à une base de V admettant les $\bar{x}^{(j)}$ pour point bases et $\bar{u}$ pour point unité, les coordonnées homogènes de $\bar{a}$ par rapport à une autre base de même nature seront de la forme $(sa_j t)$. En particulier, lorsque K est <u>commutatif</u>, ces coordonnées homogènes sont déterminées à un facteur près; donc, dans ce cas, la donnée des points bases et du point unité détermine de facon unique (à un facteur près) les coordonnées homogènes de tout point de P.

Etant donnée une base projective $(\bar{x}^{(j)})$ de P, on peut choisir arbitraitement le point unité $\bar{u}$ en dehors de la réunion des hyperplans de coordonnées H_j (H_j étant engendré par les $\bar{x}^{(i)}$ pour $i \neq j$).

4 - <u>Applications projectives</u>.-

Etant donnés deux espaces vectoriels V,V' sur un même corps K, une application linéaire f de V dans V' définit une application du complèment du noyau $N = \overset{-1}{f}(0)$ de f dans l'espace projectif P' attaché à V', et cette application est compatible avec la relation d'équivalence "il existe $t \neq 0$ dans K tel que $\underline{y} = t.\underline{x}$" entre éléments de V. Ainsi f définit une application g de P-L dans P', P désignant l'espace projectif attaché à V et L la variété linéaire de P correspondant au noyau N de f. Une application telle que g est appelée une <u>application projective</u>, ou une <u>projection</u>. Bien que g soit définie sur P-L, et non sur P tout entier, on dira par abus de langage que g est une application projective (ou une projection) de P dans P'. La variété linéaire L (où g n'est pas définie) s'appelle le <u>centre</u> de g.

On remarquera que lorsque g est partout définie (c.à.d. pour que L = 0 , c'est une <u>injection</u> de P dans P'.

Lorsque des bases sont données dans P et P', une projection g de P dans P' fait correspondre à un point de P de coordonnées homogènes (x_i) un point de P' admettant un système de coordonnées homogènes (y_j) de la forme

$$(3)\quad y_j = \sum_i x_i a_{ij} \quad (a_{ij} \in K).$$

Le centre de g est la variété linéaire définie par les équations $\sum_i x_i a_{ij} = 0)$.

Il est clair que l'image par une projection g d'une variété linéaire M de P (ou plutôt de $M - (M \cap C)$, C désignant le centre de g) est une variété linéaire de P' , qu'on désigne par g(M). Une formule analogue relative aux espaces vectoriels (référence) montre qu'on a

$$(4)\quad \dim(g(M)) = \dim(M) - \dim(M \cap C) - 1.$$

Comme les valeurs prises par une application linéaire peuvent être arbitraitement données sur la base d'un espace vectoriel, il existe une application projective g de P dans P' prenant des valeurs arbitrairement données sur une base projective $(\overline{x}^{(j)})$ de P. Ceci ne détermine pas g de facon unique, mais détermine en tous cas la variété linéaire g(P) de P' (qui est la variété linéaire engendrée par les points $g(\overline{x}^{(j)})$). Mais si, lorsque K est commutatif, on se donne de plus un point unité (n°3) $\overline{u}$ dans P et son image $g(\overline{u})$ dans P', alors g est entièrement déterminée (puisque la donnée des $(\overline{x}^{(j)})$ et de $\overline{u}$ détermine, comme on l'a vu (n°3) à une homothétie près, une base $(\underline{x}^{(j)})$ de l'espace vectoriel V auquel P est attaché).

On remarquera que l'on peut choisir arbitrairement le point $g(\overline{u})$ dans la variété linéaire g(P) pourvu qu'il soit en dehors de la réunion des variétés linéaires L'_j (L'_j étant engendrée par les points $g(\overline{x}^{(i)})$ pour $i \neq j$).

5 - Birapport.-

Nous supposerons ici que le corps de base K est commutatif.

Etant donnés trois points distincts a,b,c, d'une droite projective D et trois points distincts a',b',c' d'une droite projective D', il résulte de ce que nous venons de voir qu'il existe une bijection projective f de D sur D' telle que f(a)=a',f(b)=b' et f(c)=c'. Il n'y a donc pas d'invariant projectif de trois points alignés.

Par contre, étant donnés quatre points a,b,c,d d'une droite projective D dont les trois premiers sont distincts, prenons a et b pour points bases et c pour point unité, et considérons le rapport r des coordonnées homogènes de d dans le système de coordonnées homogènes ainsi défini (n°3); ce rapport est un élément du corps projectif K_∞ ; on a r=0 quand d=a, $r=\infty$ quand d=b et r=1 quand d=c.

NB.- Le lecteur attentif, voyant que r=0 quand d=a (et non quand d=b), pourra prévoir que nous allons tomber sur le birapport Italien, et non sur celui de la tradition taupinale. La raison de ce choix est la suivante: quand ils passent des coordonnées homogènes (qu'ils numérotent $(x_0,\ldots,x_n)$) aux coordonnées non homogènes(qu'ils numérotent $y_1,\ldots y_n$), la présence du 0 ou du 1 en indice permettant de voir aussitôt à quel genre de coordonnées on a affaire), les "gens sérieux" divisent par la première coordonnée x_0 (et non par la dernière comme les taupins). D'où la définition de la coordonnée non homogène x_1/x_0 donnée à la fin du n°2. Comme le premier point d'une base projective doit avoir $(1,0,\ldots,0)$ pour coordonnées, le premier point base de D est

(1,0), et il serait invraisemblable que ce ne fût pas le point a. Donc $a=(1,0)$, $b=(0,1)$ et le birapport doit être Italien. Démission si on l'inverse!

On appelle r le birapport des quatre points a,b,c,d, (pris dans cet ordre et on le note $(a,b;c,d)$.

Proposition 1 - Pour qu'une bijection f d'une droite projective D sur une droite projective D' (sur le même corps commutatif K) soit une application projective, il faut que, quels que soient les points distincts a,b,c, de D et le point d de D, on ait $(a,b;c,d,) = (f(a),f(b);f(c),f(d))$,- et il suffit qu'il existe trois points distincts a,b,c, de D tels que, pour tout $d \in D$, on ait $(a,b;c,d) = (f(a),f(b);f(c),f(d))$.

Il suffit en effet de prendre a,b (resp. f(a),f(b)) pour points bases sur D (resp. D') et c(resp. f(c)) pour point unité sur D (resp. D'); ceci définit des bijections h,h' de D,D' sur K_∞ (n°2), et les conditions énoncées équivalent à $h = h' \circ f$; d'où nos assertions.

En particulier considérons quatre éléments a,b,c,d du corps projectif K_∞ tels que a,b,c soient distincts. Comme K_∞ a une structure de droite projective (n°2), le birapport des quatre points a,b, c,d, est défini; on l'appelle le birapport des quatre nombres a,b,c,d, et on le note $(a,b;c,d)$. Pour le calculer, remarquons que 0 et ∞ sont points bases et 1 point unité pour le système de coordonnées usuel de K_∞ considéré comme droite projective; on passe au système de coordonnées utilisé dans la définition du birapport au moyen de la bijection projective f de K sur lui même définie par

$f(a)=0, f(b)=\infty, f(c)=1$. Or une telle bijection projective est de la forme $x \to (xw+t)^{-1}(xu+v)$. D'où, après un petit calcul, $f(x) = (c-b)(x-b)^{-1}(x-a)(c-a)^{-1}$. Comme $(a,b;c,d) = f(d)$, on a donc

(5) $(a,b;c,d) = (c-d)(d-b)^{-1}(d-a)(c-a)^{-1}$.

Il résulte de la prop.1 que cette expression est invariante par les applications $x \to (xw+t)^{-1}(xu+v)$.

Etudions maintenant l'effet sur $t = (a;b;c,d)$ des <u>permutations</u> des 4 nombres a,b,c,d. Quatre des 24 permutations, à savoir (a,b,c,d), (b,a,d,c,),(d,c,b,a) et (c,d,a,b), laissent t invariant, et ce sont les seules; elles forment un sous-groupe abélien (isomorphe à $Z/(2) \times Z/(2)$), et évidemment invariant, du groupe symétrique $\mathcal{S}_4$. Le groupe quotient est isomorphe au groupe symétrique $\mathcal{S}_3$, et transforme t en t, $1-t$, $1/t$, $t/t-1$, $t-1/t$ et $1/1-t$.

Certaines valeurs du birapport t sont égales à l'une de leurs 5 transformées. Ce sont : 0 et ses transformées 1 et ∞; -1 et ses transformées 2 et $\frac{1}{2}$; * les racines de X^2-X+1, qui sont transformées l'une de l'autre * . Dans le premier cas deux des quatre nombres sont confondus ; dans le second cas on dit qu'on a affaire à une <u>division harmonique</u> ; dans le troisième cas on dit qu'on a affaire à une <u>division équianharmonique</u>. Les deux premiers cas se confondent en caractéristique 2 .
