LIVRE VI
INTEGRATION
CHAPITRE VII (ETAT 2)
MESURE DE HAAR

Rédaction n° 198

Nombre de pages : 63

Nombre de feuilles : 63

Livre VI Intégration
Chap VII. Etat 2
Mesure de Haar
198

LIVRE VI

INTÉGRATION

CHAPITRE VII (Etat 2)

MESURE DE HAAR

Sommaire

Commentaire.

Le rédacteur n'a pas suivi les injonctions de La Tribu n°25 (Juin 1951) sur un point important, la convolution des mesures. Après discussion sur le sujet, Godement et lui sont tombés d'accord que ce qu'on peut dire ici de la convolution ne serait jamais qu'un bout de théorie : il faudrait en effet recommencer tout pour les distributions, et les applications les plus importantes seront de toute facon très loin de ce chapitre ; enfin, la notion de convolution des mesures n'a visiblement rien à voir avec la mesure invariante. On propose donc que tout ce qui touche à la convolution soit reporté au Livre (ou aux Livres) qui traitera (ont) de la théorie spectrale sous tous ses aspects (à commencer par les algèbres de Banach).

Quant à la mesure de Haar elle-même, on peut poser la question préjudicielle : est-ce bien sa place dans ce Livre ? Il est bien clair que les cas de beaucoup les plus intéressants à l'heure actuelle sont les groupes de Lie ; on pourrait donc envisager de reporter ce qui a trait à la mesure de Haar, soit aux groupes de Lie, soit avec la représentation des groupes localement compacts en Analyse fonctionnelle. La première solution ne paraît pas raisonnable : il y a tout de même, avec la mesure de Haar, un certain nombre de raisonnements et de théorèmes qui appartiennent à la théorie de l'Intégration et n'ont rien à voir avec les structures de variété différentiable ; ils arriveraient au milieu du Livre sur les groupes de Lie comme une désagréable digression. La seconde solution n'est sujette à ces critiques que dans une moindre mesure ; le gros argument en sa faveur est que la mesure de Haar serait ainsi jointe à l'exposé des théories où on s'en sert, et qu'on pourrait tout de suite donner tous les exemples importants. Toutefois, le rédacteur estime que ce dernier argument n'est pas décisif, et espère avoir montré dans ce chapitre que dans de nombreux et importants cas, on peut déterminer la mesure de Haar sans avoir recours à la structure différentielle (et celà même sur des corps valués comme le corps des séries formelles sur un corps fini). Son opinion personnelle est que le chapitre serait mieux à sa place actuelle, où il vient donner un couronnement à la théorie de l'Intégration et justifier, par de nombreux exemples concrets, tous les longs développements des 6 chapitres antérieurs, qui en manquent singulièrement ! .

Comme innovations de détails par rapport à l'Etat 1, on a cherché à se raccrocher le plus possible aux notions générales déjà développées, notamment à l'image d'une mesure. La démonstration de l'unicité de la mesure de Haar a été faite en suivant une idée de Loomis ; c'est un peu plus long que la démonstration de Kakutani, donnée dans l'Etat 1, mais cela paraît beaucoup plus "naturel", et le principe est plus général, puisqu'il s'applique à un groupe d'homéomorphismes uniformément équicontinu ; enfin, il semble au rédacteur que cette démonstration est plus en harmonie avec la démonstration d'existence que la précédente.

CHAPITRE VII (Etat 2)

MESURE DE HAAR

§ 1. Mesure de Haar.

1. Mesures relativement invariantes.

Soit E un espace localement compact, $\mathcal{M}(E)$ l'espace des mesures (complexes) sur E, que nous munirons de la topologie vague (chap.III, § 2, n°7). Pour tout homéomorphisme σ de E, la mesure image $\sigma(\mu)$ d'une mesure quelconque μ sur E est une mesure sur E définie par $\sigma(\mu)(f)=\mu(f\circ\sigma)$ pour $f \in \mathcal{K}(E)$ (chap.III, § 2, n°2 et chap.V, § 5). On dit qu'une mesure $\mu \neq 0$ sur E est invariante par un groupe d'homéomorphismes Γ de E si μ est invariante par chaque homéomorphisme $\sigma \in \Gamma$ (c'est-à-dire si $\sigma(\mu) = \mu$ pour tout $\sigma \in \Gamma$). On dit que μ est relativement invariante par Γ si, pour tout homéomorphisme $\sigma \in \Gamma$, on a $\sigma(\mu) = r(\sigma)\mu$, où $r(\sigma)$ est un scalaire ; $r(\sigma)$ est dit le multiplicateur de μ pour l'homéomorphisme σ. Il est clair que l'on a $r(\sigma\circ\tau) = r(\tau)r(\sigma)$ pour $\sigma \in \Gamma$ et $\tau \in \Gamma$; en particulier, en remplaçant τ par σ^{-1}, on voit que $r(\sigma) \neq 0$, donc $\sigma \to r(\sigma)$ est une représentation de Γ dans le groupe multiplicatif $\mathbb{C}^*$. (On pourrait montrer ici que $|\mu|$ est relativement invariante de multiplicateur $|r|$; il faudrait, au chap.V, avoir prouvé que $p(|\mu|) = |p(\mu)|$ pour une mesure complexe). Si μ est une mesure réelle, il en est de même de $\sigma(\mu)$; donc $r(\sigma) \in \mathbb{R}^*$; en outre, μ^+ et μ^- sont alors ou bien relativement invariantes avec le même multiplicateur, d'où $r(\sigma) > 0$ pour tout $\sigma \in \Gamma$, ou bien relativement invariantes pour un sous-groupe d'indice 2 de Γ.

PROPOSITION 1.- *Si μ est une mesure relativement invariante sur E, le multiplicateur $\sigma \to r(\sigma)$ est une application continue de Γ dans le* *le groupe multiplicatif* $\mathbb{C}^*$, *quand on munit* Γ *de la topologie de la convergence compacte* (dans E).

Cela résulte aussitôt de ce que, si $\mu(f)\neq 0$, on a $r(\sigma)=\mu(f\circ\sigma)/\mu(f)$, et du lemme général suivant :

Lemme 1.- Pour toute partie bornée B *de* $\mathcal{M}(E)$, *l'application* $(\sigma,\mu)\to\sigma(\mu)$ *de* $\mathcal{G}\times\mathcal{M}(E)$ ($\mathcal{G}$ groupe de tous les homéomorphismes de E) *dans* $\mathcal{M}(E)$ *est continue dans* $\mathcal{G}\times B$ *lorsque* $\mathcal{G}$ *est muni de la topologie de la convergence compacte.*

Il faut prouver que, pour toute fonction $f\in\mathcal{K}(E)$, l'application $(\sigma,\mu)\to\mu(f\circ\sigma)$ est continue en tout point (σ_0,μ_0) de $\mathcal{G}\times B$. Or, on peut écrire $\mu(f\circ\sigma)-\mu_0(f\circ\sigma_0) = \mu(f\circ\sigma - f\circ\sigma_0)+(\mu-\mu_0)(f\circ\sigma_0)$. Par définition de la topologie vague, le second gterme est arbitrairement petit dès que μ est assez voisin de μ_0 dans $\mathcal{M}(E)$. D'autre part, soit K un voisinage compact du support de f dans E ; on peut prendre σ suffisamment voisin de σ_0 dans $\mathcal{G}$ (pour la topologie de la convergence compacte) pour que le support de $f\circ\sigma$ soit contenu dans K et que la différence $f\circ\sigma - f\circ\sigma_0$ soit arbitrairement petite dans K . Il résulte ~~que~~ alors de la prop.8 du chap.III, § 2, que pour $\mu\in B$, $\mu(f\circ\sigma - f\circ\sigma_0)$ est arbitrairement petit, d'où le lemme.

PROPOSITION 2.- *Soit* Γ *un groupe d'homéomorphismes de* E *tel que pour tout couple de points* x,y *de* E *et tout voisinage* W *de* y , *il existe un voisinage* V *de* x *et un* $\sigma\in\Gamma$ *tel que* $\sigma(V)\subset W$. *Alors, toute mesure relativement invariante par* Γ *et* $\neq 0$ *a pour support* E *tout entier.*

En effet, il existe par hypoth`se un point $x\in E$ tel que, pour tout voisinage V de x , il y ait une fonction $f\in\mathcal{K}(E)$ de support contenu dans V et telle que $\mu(f)\neq 0$. On en conclut $\mu(f\circ\sigma)= r(\sigma)\mu(f)\neq 0$, et le support de $f\circ\sigma$ est contenu dans $\sigma^{-1}(V)$. L'hypothèse entraîne donc que tout point de E appartient au support de μ .

Note à l'usage de Bourbaki.- La Tribu n°25 enjoint au rédacteur de démontrer l'unicité de la mesure de Haar par le th. de Lebesgue-Nikodym. La méthode ne serait intéressante que si elle s'étendait aux mesures relativement invariantes, avec des conditions dans le genre de celle de la prop.2 . Mais pour que cela marche, il faudrait établir que, dans ces conditions, une fonction localement intégrable f (pour la mesure relativement invariante μ), telle que pour tout $\sigma \in \Gamma$. $f(\sigma(x)) = f(x)$ presque partout, est une constante ; c'est visiblement un théorème du type ergodique, dont le rédacteur ignore même s'il est vrai dans des conditions assez générales. Bourbaki veut-il sérieusement s'engager dans cette voie ?

2. Existence et unicité de la mesure de Haar.

Soit G un groupe localement compact ; pour tout $s \in G$, soit γ_s la translation à gauche $x \to sx$, δ_s la translation à droite $x \to xs$; on sait que $s \to \gamma_s$ est un isomorphisme (algèbrique) de G sur un groupe d'homéomorphismes de G , $s \to \delta_s$ un isomorphisme (algèbrique) de l'opposé de G sur un groupe d'homéomorphismes de G . Pour toute mesure sur G , on a $\gamma_s(\mu)(f) = \mu(f \circ \gamma_s)$; $\delta_s(\mu)(f) = \mu(f \circ \delta_s)$; on dit que μ est invariante à gauche (resp. à droite) si $\gamma_s(\mu)=\mu$ (resp. $\delta_s(\mu)=\mu$) pour tout $s \in G$. Une mesure positive et invariante à gauche (resp. à droite) et $\neq 0$ s'appelle mesure de Haar à gauche (resp. à droite). Par abus de langage, nous entendrons toujours, par "mesure de Haar", dans ce qui suit, une mesure de Haar à gauche.

THEOREME 1.- Sur tout groupe localement compact G , il existe une mesure de Haar, et toute mesure (complexe) invariante à gauche est un multiple de cette mesure.

1° <u>Existence</u>. Pour tout ensemble A relativement compact dans G , et tout ensemble U dont l'intérieur n'est pas vide, il existe un recouvrement de A par un nombre fini de translatés à gauche $s_i U$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$; le <u>plus petit</u> nombre d'éléments d'un tel recouvrement sera désigné dans ce qui suit par (A:U) ; il est >0 si A est non vide. Si V est un ensemble relativement compact d'intérieur non vide, on a l'inégalité

(1) $$(A:U) \leqslant (A:V)(V:U) \quad .$$

En effet, soit $m=(A:V)$, $n=(V:U)$; il existe donc un recouvrement de A par m ensembles $s_i V$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ et un recouvrement de V par n ensembles $t_j U$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$; il est clair que les mn ensembles $s_i t_j U$ forment un recouvrement de A .

Fixons, pour toute la démonstration, un ensemble ouvert non vide A_0, relativement compact, et pour tout ensemble U d'intérieur non vide et tout ensemble relativement compact A , posons

(2) $$\lambda_U(A) = (A:U)/(A_0:U) \quad .$$

On a les propriétés suivantes (A et B étant relativement compacts)

(I) $0 \leqslant \lambda_U(A) \leqslant (A:A_0)$.

(II) Si $A \subset B$, $\lambda_U(A) \leqslant \lambda_U(B)$.

(III) $\lambda_U(A \cup B) \leqslant \lambda_U(A) + \lambda_U(B)$.

(IV) Si $AU^{-1} \cap BU^{-1} = \emptyset$, on a $\lambda_U(A \cup B) = \lambda_U(A) + \lambda_U(B)$.

(V) Pour tout $s \in G$, $\lambda_U(sA) = \lambda_U(A)$.

En effet, (I) est conséquence de l'inégalité (1) ; (II) et (III) sont immédiates. Si AU^{-1} et BU^{-1} n'ont aucun point commun, un ensemble sU ne peut rencontrer à la fois A et B : sinon on aurait $s \in AU^{-1}$ et $s \in BU^{-1}$. Si $(s_i U)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ est un recouvrement de $A \cup B$ par des translatés à gauche de U , on peut donc supposer que les q premiers de ces ensembles forment un recouvrement de A et les p-q derniers un un recouvrement de B , d'où $p \geqslant (A:U)+(B:U)$, et par suite $\lambda_U(A\cup B) \geqslant \lambda_U(A)+\lambda_U(B)$, ce qui, avec (III), démontre (IV). Enfin, si $(s_iU)_{1\leqslant i\leqslant p}$ est un recouvrement de A , les ensembles $(ss_iU)_{1\leqslant i\leqslant p}$ forment un recouvrement de sA, d'où $\lambda_U(sA)\leqslant \lambda_U(A)$, et comme on a de même $\lambda_U(A) = \lambda_U(s^{-1}sA)\leqslant \lambda_U(sA)$, on en déduit (V).

Soit $\mathfrak{V}$ l'ensemble des voisinages de O dans G, qui est filtrant pour la relation $\supset$; pour tout ensemble relativement compact A dans G , $U \to \lambda_U(A)$ est une application de $\mathfrak{V}$ dans l'intervalle compact $[0,(A:A_0)]$. Si $\mathfrak{U}$ est un ultrafiltre plus fin que le filtre des sections de $\mathfrak{V}$, l'application $U\to\lambda_U(A)$ a donc une <u>limite</u> suivant $\mathfrak{U}$ que nous noterons $\lambda(A)$. On a les propriétés suivantes pour deux ensembles A,B relativement compacts :

(I') $\quad 0 \leqslant \lambda(A) \leqslant (A:A_0)$

(II') $\quad$ Si $A\subset B$, $\quad \lambda(A) \leqslant \lambda(B)$

(III') $\quad \lambda(A\cup B) \leqslant \lambda(A)+ \lambda(B)$

(IV') $\quad$ Si $\bar{A}\cap \bar{B} = \emptyset$, $\quad \lambda(A\cup B) =\lambda(A)+\lambda(B)$

(V') $\quad$ Pour tout $s\in G$, $\quad \lambda(sA) =\lambda(A)$.

Ce sont en effet des conséquences immédiates des propriétés (I) à (V), si l'on remarque que la relation $\bar{A}\cap\bar{B} = \emptyset$ entraîne l'existence d'un voisinage V de O tel que $AV\cap BV = \emptyset$ (<u>Top.gén.</u> R, §8,n°10) et par suite que l'on a $\lambda_U(A\cup B) =\lambda_U(A)+\lambda_U(B)$ pour $U^{-1}\subset V$.

Soit maintenant Φ l'ensemble des parties <u>compactes</u> de G . Pour tout ensemble $A\in\Phi$, posons $\lambda'(A)=\inf \lambda(B)$, où B parcourt l'ensemble des <u>voisinages relativement compacts</u> de A . Montrons que la fonction d'ensemble λ' vérifie les conditions (PM_I),(PM_{II}), (PM_{III}) et (PM_{IV}) du chap.IV, § 4,n°10). C'est évident pour (PM_{IV}) en vertu de la définition de λ';

(PM_I) résulte de la propriété (II') ci-dessus, et (PM_{II}) de (III'). D'autre part, si A et B sont deux ensembles compacts sans point commun, il existe deux voisinages compacts A_1, B_1 de A et B respectivement, sans point commun ; pour tout voisinage relativement compact W de $A\cup B$, $(W\cap A_1)\cup(W\cap B_1)$ est encore un voisinage relativement compact de $A\cup B$, et il résulte donc de (IV') que $\lambda'(A\cup B)\geqslant \lambda'(A)+\lambda'(B)$, ce qui, avec (PM_{II}), démontre (PM_{III}). Nous pouvons donc appliquer le th.5 du chap.IV, § 4, et il existe une <u>mesure positive</u> μ sur G telle que $\mu(A)=\lambda'(A)$ pour tout ensemble compact. Par définition, on a $\lambda_U(A_o)=1$ pour tout $U\in\mathfrak{D}$, donc $\lambda(A_o)=1$ et par suite $\lambda'(\bar{A}_o)\geqslant 1$, ce qui montre que $\mu\neq 0$. Enfin, de la relation (V') il suit que $\lambda'(sA)=\lambda'(A)$ pour tout ensemble compact ; cela signifie que les mesures μ et $\gamma_s(\mu)$ coïncident pour toute partie compacte de G ; elles sont donc identiques(chap.IV, § 4, cor.2 de la prop. 16).

2° <u>Unicité</u>. Soit ν une mesure de Haar à gauche sur G . Nous allons démontrer la proposition suivante :

<u>Pour tout couple</u> (K,L) <u>formé d'un ensemble compact</u> K <u>et d'un ensemble ouvert relativement compact</u> $L\supset K$, <u>on a les inégalités</u>

(3) $$\lambda'(K)/\lambda'(W)\leqslant \nu(L)/\nu(W)$$

(4) $$\nu(K)/\nu(W)\leqslant \lambda(L)/\lambda'(W)$$

<u>dès que</u> W <u>est un voisinage compact symétrique de</u> O <u>suffisamment petit</u>.

Pour démontrer (4), considérons un voisinage ouvert relativement compact W_1 de O tel que $KW_1\subset L$, et pour tout voisinage $U\subset W_1$, soit (s_iU) un recouvrement de L formé de (L:U) ensembles. Soit W un voisinage compact symétrique de O contenu dans W_1 , et supposons U symétrique et tel que $UW\subset W_1$ et $WU\subset W_1$; pour tout $x\in K$, xW est contenu dans la réunion des s_iU , donc le nombre des s_iU qui rencontrent xW est $\geqslant(W:U)$;

on en conclut que x appartient à au moins $(W:U)$ ensembles $s_i W_1$; autrement dit, on a

$$(W:U)\varphi_K(x) \leqslant \sum_{i=1}^{(L:U)} \varphi_{s_i W_1}(x)$$

d'où en intégrant par rapport à ν

$$(W:U)\ \nu(K) \leqslant (L:U)\,\nu(W_1)$$

Divisant les deux membres par $(A_o:U)$ et passant à la limite suivant l'ultrafiltre $\mathfrak{U}$, il vient

$$\lambda(W)\,\nu(K) \leqslant \lambda(L)\,\nu(W_1)$$

D'ailleurs W_1 est un voisinage arbitraire de W, et par suite on peut remplacer W_1 par W dans l'inégalité précédente (chap.IV, § 4, th.4). En outre l'inégalité s'applique aussi bien en y remplacant W par un voisinage compact arbitraire W_2 assez petit de W ; prenant la borne inférieure des deux membres lorsque W_2 parcourt l'ensemble des voisinages compacts de W, il vient (grâce au th.4 du chap.IV, § 4) l'inégalité (4).

Démontrons maintenant (3) ; les voisinages U, W et W_1 satisfaisant aux mêmes conditions que ci-dessus, pour tout $x \in L$, il existe au plus $(W_1:U)$ des points s_i qui appartiennent à xW ; sans quoi, en remplaçant les $s_i U$ correspondants par un recouvrement de xW_1 formé de $(W_1:U)$ translatés à gauche de U, les autres $s_i U$ restant inchangés, on aurait encore un recouvrement de L par moins de $(L:U)$ translatés à gauche de U, ce qui est absurde. On voit donc que x appartient à $(W_1:U)$ ensembles $s_i W$ au plus; autrement dit, on a, pour tout $x \in L$

$$\sum_{i=1}^{(L:U)} \varphi_{s_i W}(x) \leqslant (W_1:U) \quad .$$

Soit J l'ensemble des indices i tels que $s_i U$ rencontre K ; comme alors $s_i W \subset L$, on a, pour tout $x \in G$

$$\sum_{i \in J} \varphi_{s_i W}(x) \leqslant (W_1:U)\varphi_L(x) \quad .$$

Le nombre d'éléments de J est d'ailleurs au moins égal à $(K:U)$; d'où, en intégrant par rapport à ν

$$(K:U)\,\nu(W) \leqslant (W_1:U)\,\nu(L)$$

Divisant les deux membres par $(A_o:U)$ et passant à la limite suivant $\mathfrak{U}$, on obtient

$$\lambda(K)\,\nu(W) \leqslant \lambda(W_1)\,\nu(L)$$

Comme W_1 est un voisinage ouvert arbitraire de W et que d'autre part on peut remplacer K par un voisinage compact de K contenu dans L, on a bien l'inégalité (3), en vertu de la définition de λ'.

Soient alors (K_1,L_1), (K_2,L_2) deux couples formés d'un ensemble compact et d'un ensemble ouvert relativement compact, tels que $K_1 \subset L_1$, $K_2 \subset L_2$. De (3) et (4), on déduit aussitôt

$$\lambda'(K_1)/\lambda(L_2) \leqslant \nu(L_1)/\nu(K_2)$$

c'est-à-dire $$\lambda'(K_1)/\nu(L_1) \leqslant \lambda(L_2)/\nu(K_2)\,.$$

Laissant fixe K_1, K_2 et prenant la borne supérieure du premier membre lorsque L_1 parcourt les voisinages ouverts relativement compacts de K_1, la borne inférieure du second membre lorsque L_2 parcourt l'ensemble des voisinages ouverts relativement compacts de K_2, il vient (chap. IV, § 4, th. 4)

$$\lambda'(K_1)/\nu(K_1) \leqslant \lambda'(K_2)/\nu(K_2)$$

et comme K_1 et K_2 sont deux ensembles compacts arbitraires, les deux membres de l'inégalité précédente sont égaux, ce qui achève la démonstration.

<u>Remarque</u>.- Les raisonnements précédents s'étendent lorsque le groupe G est remplacé par un <u>germe de groupe topologique localement compact</u> ; on entend par là un espace localement compact E ; dans lequel on s'est donné un point e, un voisinage compact V_o de e dans E, une application $(x,y) \to xy$ de $V_o \times V_o$ dans E et une application $x \to x^{-1}$

de V_o sur lui-même, ces applications étant continues et satisfaisant aux conditions suivantes :

1) $x(yz)=(xy)z$ chaque fois que les deux membres sont définis ;

2) $ex=xe=x$ pour tout $x\in V_o$, $xx^{-1}=x^{-1}x=e$ pour $x\in V_o$.

On démontre alors aisément, par récurrence, l'existence de voisinages V_n de e , tels que $V_n^{-1}=V_n$ et $V_n^2\subset V_{n-1}$ pour $n\geqslant 1$. La définition de $(A:U)$ et la démonstration des propriétés (I) à (V) se fait alors sans modification, pourvu que A,B et U soient contenus dans V_2 ; de là on déduit comme ci-dessus l'existence d'une mesure positive $\mu\neq 0$ dans V_2, telle que $\mu(sA)=\mu(A)$ pour $s\in V_3$ et $A\subset V_3$. Le raisonnement d'unicité s'applique sans modification pour des ensembles contenus dans V_3, ν étant supposée définie dans V_2 et telle que $\nu(sA)=\nu(A)$ pour $s\in V_3$ et $A\subset V_3$.

Exemple.- Soit $\mathbb{Z}_p$ le groupe abélien compact des entiers p-adiques, complété de $\mathbb{Z}$ pour la valeur absolue p-adique $|x|_p = p^{-v_p(x)}$ (Top.gén., chap.IX, § 3,n°2). Pour tout entier $n>0$, les p^n entiers k tels que $0\leqslant k<p^n$ sont deux à deux incongrus mod.p^n , autrement dit, si h et k sont deux de ces entiers, on a $v_p(h-k)<n$; et tout autre point x de $\mathbb{Z}_p$ est tel que $v_p(x-k)\geqslant n$ pour un entier k et un seul parmi les précédents. Cela peut encore s'exprimer en disant que les boules fermées B_k de centre k et de rayon p^{-n} $(0\leqslant k<p^n)$ forment une partition de $\mathbb{Z}_p$. On a d'ailleurs $B_k=k+B_o$, si bien que, pour la mesure de Haar μ sur $\mathbb{Z}_p$ telle que $\mu(\mathbb{Z}_p)=1$, on a $\mu(B_k)=p^{-n}$ pour $0\leqslant k<p^n$. On en conclut l'expression de l'intégrale par rapport à μ (chap.IV, § 4,prop.16)

$$\int f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} p^{-n}\sum_{k=0}^{p^n-1} f(k)$$

pour toute fonction f continue dans $\mathbb{Z}_p$.

On peut dans cette formule remplacer $f(k)$ par $f(a_k)$, les a_k étant un système de représentants de $\mathbb{Z}_p$ modulo p^n. De là, on déduit l'expression de la mesure de Haar sur le groupe additif p-adique $\mathbb{Q}_p$: pour tout entier n, soit $(a_{kn})_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de représentants de $\mathbb{Q}_p$ mod. p^n ; pour toute fonction $f \in \mathcal{K}(\mathbb{Q}_p)$, on a

$$\int f(t)dt = \lim_{n \to \infty} p^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} f(a_{kn})$$

(somme ayant un sens, car il n'y figure qu'un nombre fini de termes $\neq 0$).

3. Propriétés de la mesure de Haar.

Nous avons déjà vu (prop. 2) que le support d'une mesure de Haar sur un groupe localement compact G est G tout entier. En outre :

PROPOSITION 3.- Soit G un groupe localement compact, μ une mesure de Haar sur G.

a) Pour que G soit discret, il faut et il suffit que $\mu(\{e\}) > 0$.

b) Pour que G soit compact, il faut et il suffit que $\mu(G) < +\infty$.

Si G est discret, $\{e\}$ est ouvert et non vide, et comme le support de μ est G tout entier, on a nécessairement $\mu(\{e\}) > 0$. Réciproquement, si $\mu(\{e\}) = \alpha > 0$, l'invariance de μ par translation montre que la mesure de tout ensemble fini de n points est $n\alpha$, d'où résulte qu'un ensemble infini est de mesure extérieure infinie, et par suite que tout ensemble compact dans G est fini ; mais cela implique que e admet un voisinage fini, donc que G est discret.

Si G est compact, il est clair que $\mu(G) < +\infty$. La réciproque est un cas particulier de la proposition plus précise suivante :

PROPOSITION 4.- Pour qu'une partie E de G soit relativement compacte, il faut et il suffit qu'il existe un ensemble intégrable A de mesure $\mu(A) > 0$, tel que la borne supérieure des mesures des ensembles intégrables contenus dans E.A soit finie.

La condition est nécessaire, car si E est compact, il en est de même de $E.V$ pour tout voisinage compact V de e dans G ; on a $\mu(V) > 0$ et tout ensemble mesurable contenu dans $E.V$ a une mesure $\leqslant \mu(E.V) < +\infty$. La condition est suffisante : en effet, soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des parties B de E telles que la relation $x \neq y$ pour $x \in B$, $y \in B$, entraîne $xA \cap yA = \emptyset$; il est immédiat que $\mathcal{F}$ est inductif pour la relation d'inclusion, donc admet un élément maximal B_o ; mais pour toute partie finie F de B_o, ayant n éléments, on a $\bigcup_{x \in F} xA \subset E.A$ et $\mu(\bigcup_{x \in F} xA) = n.\mu(A)$; on conclut de l'hypothèse que B_o est un ensemble <u>fini</u>. Mais alors, pour tout $z \in E$, zA rencontre au moins l'un des ensembles xA, où $x \in B_o$; cela signifie que les ensembles xAA^{-1} $(x \in B_o)$ forment un recouvrement de E. Mais on peut supposer que A est un ensemble compact (en remplaçant A par un ensemble compact contenu dans A et de mesure arbitrairement voisine de A ; cf. chap.IV, § 4, th.4) ; on voit donc que E est contenu dans une réunion finie d'ensembles compacts, d'où la proposition.

4. Mesures relativement invariantes sur un groupe localement compact. Modules.

PROPOSITION 5.- <u>Pour qu'une mesure</u> $\nu \neq 0$ <u>sur un groupe localement compact</u> G <u>soit relativement invariante pour les translations à gauche</u> (ou, comme on dit encore, <u>relativement invariante à gauche</u>), <u>il faut et il suffit qu'elle soit de la forme</u> $\alpha \chi^{-1}.\mu$, <u>où</u> μ <u>est une mesure de Haar sur</u> G, α <u>une constante et</u> χ <u>une représentation continue de</u> G <u>dans le groupe multiplicatif</u> $\mathbb{C}^*$. <u>On a alors</u> $\gamma_s(\nu) = \chi(s)\nu$ <u>pour tout</u> $s \in G$.

Soit ν une mesure relativement invariante à gauche sur G ; on a donc $\nu(f \circ \gamma_s) = \chi(s)\nu(f)$ pour $s \in G$ et $f \in \mathcal{K}(G)$; en outre, comme l'application $s \to \gamma_s$ de G dans le groupe des homéomorphismes de G est continu

16

quand on munit ce dernier groupe de la topologie de la convergence compacte (<u>Top. gén.</u> R, § 13, n°8), χ est une représentation continue de G dans $\mathbb{C}^*$ (prop. 1). La fonction χf appartient donc à $\mathcal{K}_{\mathbb{C}}(G)$ et on a $(\chi f)\circ\gamma_s = \chi(s)(\chi.(f\circ\gamma_s))$, d'où

$\nu(\chi.(f\circ\gamma_s)) = (\chi(s))^{-1}\nu((\chi f)\circ\gamma_s) = \nu(\chi f)$. L'application $f \to \nu(\chi f)$ est donc une mesure invariante sur G, donc de la forme $\alpha\mu$, où $\alpha\in\mathbb{C}^*$ et μ est une mesure de Haar sur G (th. 1) ; ceci montre que $\nu = \alpha\chi^{-1}.\mu$. Inversement, si $\nu = \alpha\chi^{-1}.\mu$, le calcul précédent, pris en sens inverse, prouve que $\gamma_s(\nu) = \chi(s)\nu$.

Pour toute partie μ-mesurable et relativement compacte A de G, on a $\varphi_{sA} = \varphi_A\circ\gamma_{s^{-1}}$, d'où, pour $\nu = \alpha\chi^{-1}.\mu$,

(5) $$\nu(sA) = \chi(s^{-1})\,\nu(A).$$

<u>Exemples</u>.- 1) Pour tout $\lambda\in\mathbb{C}$, la mesure de densité $e^{\lambda x}$ par rapport à la mesure de Lebesgue est relativement invariante sur $\mathbb{R}$.

2) Sur le groupe multiplicatif $\mathbb{R}_+^*$, la mesure μ induite par la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ est relativement invariante, car pour toute fonction $f\in\mathcal{K}(\mathbb{R}_+^*)$, la formule du changement de variables donne

$$\mu(f\circ\gamma_s) = \int_0^\infty f(st)dt = \frac{1}{s}\int_0^\infty f(t)dt$$

On en déduit que la mesure de Haar sur le groupe $\mathbb{R}_+^*$ est

$$f \longrightarrow \int_0^\infty f(x)dx/x .$$

3) Sur le groupe multiplicatif $\mathbb{Q}_p^*$, la mesure induite par la mesure de Haar du groupe additif $\mathbb{Q}_p$ est de même relativement invariante. En effet, soit $s\in\mathbb{Q}_p^*$ tel que $|s|_p = p_n^h$; si (a_{kn}) est un système de représentants dans $\mathbb{Q}_p$ modulo p^n, (sa_{kn}) est un système de représentants modulo p^{n-h} ; on a donc

$$\int f(st)dt = \lim_{n\to\infty} p^{-n}\sum_{k=0}^{\infty} f(sa_{kn}) = p^{-h}\int f(t)dt = |s|_p^{-1}\int f(t)dt .$$

La mesure de Haar sur le groupe $\mathbb{Q}_p^*$ est par suite

$$f \to \int |x|_p^{-1} f(x)dx \ .$$

COROLLAIRE 1.- Sur un groupe compact G , toute mesure positive relativement invariante à gauche est une mesure de Haar.

En effet, une représentation continue de G dans $\mathbb{R}_+^*$ applique G sur un sous-groupe compact de $\mathbb{R}_+^*$, donc sur 1 .

COROLLAIRE 2.- Si le groupe des commutateurs de G est partout dense dans G , toute mesure relativement invariante à gauche sur G est proportionnelle à une mesure de Haar.

En effet, toute représentation continue de G dans le groupe abélien $\mathbb{C}^*$ est alors égale à 1 dans le groupe des commutateurs de G , donc dans G tout entier.

COROLLAIRE 3.- Deux mesures positives et $\neq 0$ relativement invariantes à gauche sur G sont équivalentes (chap.V, § 4,n°7).

Remarque.- Soient V, V_1, V_2 trois voisinages ouverts symétriques de e dans G tels que $V_1^2 \subset V$, et $V_2^2 \subset V_1$; supposons donnée une mesure ν sur V telle que, pour $s \in V_1$ et $f \in \mathcal{K}(V_1)$, on ait $\nu(f \circ \gamma_s) = \chi(s)\nu(f)$. La prop.1 montre encore que χ est continue dans V_1, et l'on a $\chi(st) = \chi(s)\chi(t)$ pour $s \in V_2$ et $t \in V_2$; cela étant, le raisonnement de la prop.5 et la remarque qui suit le th.1 prouvent que la restriction de ν à V_2 coïncide avec la restriction de la mesure $\alpha\chi^{-1}.\mu$ où μ est une mesure de Haar sur G et α une constante.

PROPOSITION 6.- Soient G,G' deux groupes localement compacts, μ,μ' des mesures de Haar sur G et G', u un isomorphisme local de G à G' . Il existe un nombre $\Delta(u) > 0$ et un voisinage V' de e' dans G' tels que, pour

<u>toute fonction</u> μ'-<u>intégrable</u> f <u>de support contenu dans</u> V', <u>on ait</u> $\mu(f\circ u) = \Delta(u)\mu'(f)$.

Soit U' un voisinage assez petit de e' dans G', tel que u soit un homéomorphisme d'un voisinage U de e dans G sur U' tel que $u(st)=u(s)u(t)$ pour $s\in U$, $t\in U$. Soit V un voisinage de e tel que $V^2\subset U$; pour tout ensemble compact $A\subset V$ et tout $s\in V$, on a $sA\subset U$ et $u(sA)=u(s)u(A)\subset U'$, donc $\mu'(u(sA))=\mu'(u(A))$. La remarque qui suit le th.1 prouve que l'on a nécessairement $\mu'(u(A))= \Delta^{-1}(u)\mu(A)$ pour tout ensemble μ-intégrable $A\subset V$, $\Delta(u)$ étant un nombre >0 ; d'où la proposition. Si u est un <u>isomorphisme</u> de G sur G', on peut prendre $V'=G'$. On dit que $\Delta(u)$ est le <u>module</u> de u (relativement à μ et μ').

Il est clair que si u est un isomorphisme local de G à G', u' un isomorphisme local de G' à G", on a $\Delta(u'\circ u)= \Delta(u)\,\Delta(u')$, et $\Delta(u^{-1})=(\Delta(u))^{-1}$.

COROLLAIRE.- <u>Si</u> G <u>est un groupe compact</u>, <u>on a</u> $\Delta(u)=1$ <u>pour tout automorphisme</u> u <u>de</u> G .

En effet, comme $u(G)=G$, on a $\mu(G)= \Delta(u)^{-1}\mu(G)$.

<u>Exemples</u>.- 1) Comme le tore $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est localement isomorphe à $\mathbb{R}$ et qu'on peut, par un isomorphisme local, identifier $\mathbb{T}$ à l'intervalle $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[$ de $\mathbb{R}$, on peut prendre pour mesure de Haar sur $\mathbb{T}$ la mesure induite sur cet intervalle par la mesure de Lebesgue.

2) L'application $x \to e^x$ de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est un isomorphisme, et on peut donc prendre comme mesure de Haar sur $\mathbb{R}_+^*$ l'image de la mesure de Lebesgue par cet isomorphisme. Comme l'isomorphisme réciproque est une primitive de $1/x$, on obtient ainsi de nouveau comme mesure de Haar sur $\mathbb{R}_+^*$ la forme linéaire $f \to \int_0^\infty f(x)dx/x$ (chap.V, § 5, n°4).

3) Soit u une transformation linéaire de $\mathbb{R}^n$; nous allons montrer que le module de u (pour la mesure de Lebesgue) est donné par $\Delta(u) = |\det(u)|^{-1}$. Considérons d'abord le cas où la matrice de u (par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^n$) est de la forme $\underline{B}_{ij}(\lambda) = \underline{I}+\lambda\underline{E}_{ij}$ $(i \neq j)$; alors

$$\int f(u(x_1,\ldots,x_n))dx_1\ldots dx_n =$$
$$= \int f(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i+\lambda x_j,x_{i+1},\ldots,x_n)dx_1\ldots dx_n$$
$$= \int f(x_1,\ldots,x_n)dx_1\ldots dx_n$$

en vertu du th. de Lebesgue-Fubini. Comme second cas particulier, supposons que la matrice de u soit de la forme $\underline{D}(\mu)=\underline{I}+(\mu-1)\underline{E}_{nn}$;alors

$$\int f(u(x_1,\ldots,x_n))dx_1\ldots dx_n = \int f(x_1,\ldots,x_{n-1},\mu x_n)dx_1\ldots dx_n$$
$$= |\mu^{-1}| \int f(x_1,\ldots,x_n)dx_1\ldots dx_n$$

de nouveau en appliquant le th. de Lebesgue-Fubini. La formule est donc démontrée dans ces deux cas particuliers ; on l'en déduit dans le cas général, en remarquant qu'une matrice inversible peut se mettre sous forme du produit d'un certain nombre de matrices de la forme $\underline{B}_{ij}(\lambda)$ et d'une matrice $\underline{D}(\mu)$.

4) Le groupe linéaire $GL_n(\mathbb{R})$, muni de la topologie induite par celle de $\mathbb{R}^{n^2}$, est un groupe localement compact (Top.gén.,chap.VI, §1,n°6) ; montrons que la mesure induite sur $GL_n(\mathbb{R})$ par la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^{n^2}$ est relativement invariante. En effet, soit $\underline{U}=(u_{ij})$, $\underline{S}=(s_{ij})$, et calculons l'intégrale

$$\int f(\underline{SU}).\prod_{i,j} du_{ij}$$

en appliquant le th. de Lebesgue-Fubini et intégrant successivement par rapport à chaque "colonne" $(u_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n}$; d'après le résultat de l'exemple précédent, on obtient

$$\int f(\underline{SU}) \prod_{i,j} du_{ij} = \left|\det(\underline{S})\right|^{-n} \int f(\underline{U}) \prod_{i,j} du_{ij}$$

d'où notre assertion. On voit en outre que $\left|\det(\underline{U})\right|^{n} \prod_{i,j} du_{ij}$ est une mesure de Haar sur $GL_n(\mathbb{R})$.

5) Si H est un sous-groupe <u>ouvert</u> d'un groupe localement compact G, l'injection canonique de H dans G est un isomorphisme local, donc la mesure <u>induite</u> sur H par une mesure de Haar sur G est une mesure de Haar sur H .

PROPOSITION 7.- <u>Toute mesure de Haar sur un groupe localement compact G est relativement invariante à droite.</u>

En effet, pour tout $s \in G$, soit u_s l'automorphisme intérieur $x \to s^{-1}xs$ de G ; on a $f(xs)=f(s^{-1}(sx)s)$, autrement dit, $f\circ\delta_s = f\circ u_s\circ\gamma_s$. Si μ est une mesure de Haar sur G , on a donc $\mu(f\circ\delta_s) = \mu(f\circ u_s) =$ $= \Delta(u_s)\mu(f)$ en vertu de la prop.6, d'où la proposition.

On pose $\Delta(u_s)= \Delta(s)$ et on dit que la représentation $s \to \Delta(s)$ de G dans $\mathbb{R}_+^*$ est le <u>module</u> de G ; on a donc $\mu(As) = (\Delta(s))^{-1}\mu(A)$ pour toute partie intégrable A de G . On notera que $\Delta(s)=1$ pour tout élément du <u>centre</u> de G . Si $\Delta(s)=1$ pour tout $s \in G$, on dit que le groupe G est <u>unimodulaire</u>.

Pour toute mesure ν sur G , on désigne par $\check{\nu}$ l'image de ν par la symétrie $x \to x^{-1}$; autrement dit, on a $\check{\nu}(f) = \nu(\check{f}) = \int f(x^{-1})d\nu(x)$ pour tout $f \in \mathcal{K}(G)$ en posant $\check{f}(x) = f(x^{-1})$. Avec ces notations :

COROLLAIRE 1.- <u>Si</u> μ <u>est une mesure de Haar sur</u> G , <u>on a</u> $\check{\mu} = \Delta.\mu$.

En effet, on a $\check{\mu}(f\circ\gamma_s) = \mu(\check{f}\circ\delta_{s^{-1}})=(\Delta(s))^{-1}\mu(\check{f})=(\Delta(s))^{-1}\check{\mu}(f)$ d'où $\mu = \alpha\Delta.\mu$ en vertu de la prop.5, avec $\alpha>0$; on en tire $\mu = \check{\check{\mu}} = \alpha^2\mu$, d'où $\alpha^2=1$ et $\alpha=1$ puisque $\alpha>0$; ceci démontre le corollaire.

On peut encore écrire

$$\int f(x^{-1})d\mu(x) = \int f(x)\,\Delta(x)d\mu(x)$$

pour toute fonction $f \in \mathcal{K}(G)$.

COROLLAIRE 2.- Soit $\nu = \alpha\chi.\mu$ une mesure relativement invariante à gauche sur G ; alors ν est aussi relativement invariante à droite, et on a, de façon précise, $\delta_s(\nu) = (\chi(s))^{-1}\Delta(s)\nu$.

Cela résulte aussitôt de la prop.5, puisque $\chi \circ u_s = \chi$. On notera aussi qu'on a alors $\check{\nu} = \alpha\Delta\chi^{-1}.\mu$.

PROPOSITION 8.- Si, dans G , il existe un voisinage compact V de e invariant par les automorphismes intérieurs de G , G est unimodulaire.

On a en effet $\mu(V)=\mu(s^{-1}Vs)=\mu(Vs)=(\Delta(s))^{-1}\mu(V)$, d'où $\Delta(s)=1$ pour tout $s \in G$.

PROPOSITION 9.- Si un groupe localement compact G est discret, ou compact, ou abélien, ou si son groupe des commutateurs est partout dense, G est unimodulaire.

Pour les groupes discrets, compacts ou abéliens, cela résulte de la prop.8 ; pour les groupes dont le groupe des commutateurs est partout dense, cela résulte du cor.2 de la prop.5 .

5. Propriétés des espaces $L^p(G)$.

Nous fixerons dans toute la fin de ce paragraphe une mesure de Haar μ sur le groupe localement compact G , et nous écrirons $\int f(x)dx$ pour $\mu(f)=\int f\,d\mu$. Les espaces $L^p(G,\mu)$ (resp. $L^p_{\mathbb{C}}(G,\mu)$ se désigneront simplement par $L^p(G)$ et $L^p_{\mathbb{C}}(G)$; nous laissons au lecteur le soin d'étendre aux espaces $L^p_{\mathbb{C}}(G)$ les propriétés des espaces $L^p(G)$ qui suivent (*).

(*) Pour simplifier, on parle dans ce qui suit de "fonctions" au lieu de "classes de fonctions équivalentes" lorsqu'il est question des éléments de $L^p(G)$.

Il est clair que, pour $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, on a, pour tout $f \in L^p(G)$ et tout $s \in G$, $N_p(f \circ \gamma_s) = N_p(f)$; autrement dit, l'application $f \to f \circ \gamma_s$ est une <u>isomètrie</u> de $L^p(G)$. On a de même $N_p(f \circ \delta_s) = (\Delta(s))^{1/p} N_p(f)$ pour $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ (en convenant de prendre $(\Delta(s))^{1/p} = 1$ lorsque $p = +\infty$). En outre :

PROPOSITION 10.- <u>Soit</u> p <u>tel que</u> $1 \leqslant p < +\infty$; <u>pour toute fonction</u> $f \in L^p(G)$, <u>l'application</u> $s \to f \circ \gamma_s$ (resp. $s \to f \circ \delta_s$) <u>de</u> G <u>dans</u> $L^p(G)$ <u>est uniformément continue à droite</u> (resp. <u>à gauche</u>).

On peut se borner au cas où $f \in \mathcal{K}(G)$: en effet, $\mathcal{K}(G)$ étant partout dense dans $L^p(G)$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $g \in \mathcal{K}(G)$ tel que $N_p(f-g) \leqslant \varepsilon$, d'où

$$N_p(f \circ \gamma_s - f \circ \gamma_t) \leqslant N_p(f-g) \circ \gamma_s) + N_p((f-g) \circ \gamma_t) + N_p(g \circ \gamma_s - g \circ \gamma_t)$$
$$= 2N_p(f-g) + N_p(g \circ \gamma_s - g \circ \gamma_t) \leqslant 2\varepsilon + N_p(g \circ \gamma_s - g \circ \gamma_t) .$$

Supposons donc $f \in \mathcal{K}(G)$; comme on peut écrire $f \circ \gamma_s = (f \circ \gamma_{st^{-1}}) \circ \gamma_t$, on a $N(f \circ \gamma_s - f \circ \gamma_t) = N(f \circ \gamma_{st^{-1}} - f)$, et par définition de la structure uniforme droite d'un groupe, tout revient à montrer que $N(f \circ \gamma_s - f)$ est arbitrairement petit lorsque s est suffisamment voisin de e . Soit U un voisinage compact du support de f ; f est donc uniformément continue (à gauche et à droite) dans U, et pour s assez voisin de e, $f \circ \gamma_s$ a son support dans U et on a $|f(sx) - f(x)| \leqslant \varepsilon$ pour tout $x \in G$; on en déduit $N_p(f \circ \gamma_s - f) \leqslant (\mu(U))^{1/p} \varepsilon$, d'où la proposition (le raisonnement étant tout à fait analogue pour $s \to f \circ \delta_s$) .

Si on pose $U_s(f) = f \circ \gamma_s$, on voit donc que l'application $s \to U_{s^{-1}}$ est une <u>représentation continue</u> du groupe G dans le groupe des isomètries de $L^p(G)$, muni de la topologie de la convergence simple (ou ce qui revient au même, de la topologie de la convergence compacte, puisqu'il s'agit d'un groupe équicontinu d'applications linéaires de $L^p(G)$ dans lui-même).

5. Mesure de Haar sur un produit de groupes.

PROPOSITION 11.- Soit $(G_\iota)_{\iota\in I}$ une famille de groupes localement compacts, qui sont compacts sauf pour un nombre fini d'entre eux ; pour tout $\iota\in I$, soit μ_ι une mesure de Haar sur G_ι, choisie telle que $\mu_\iota(G_\iota)=1$ pour les groupes G_ι compacts. Alors, sur le groupe produit $G = \prod_{\iota\in I} G_\iota$, la mesure produit $\mu = \bigotimes_{\iota\in I} \mu_\iota$ est une mesure de Haar.

On se ramène aussitôt à démontrer la proposition pour un produit fini de groupes localement compacts et pour un produit quelconque de groupes compacts. La proposition est immédiate pour un produit fini $G=\prod_{i=1}^{n} G_i$: en effet, pour $f_i\in \mathcal{K}(G_i)$ $(1\leqslant i\leqslant n)$, si on pose $f=f_1\otimes f_2\otimes\dots\otimes f_n$, on a, pour tout $s=(s_1,\dots,s_n)\in G$, $f\circ\gamma_s=(f_1\circ\gamma_{s_1})\otimes\dots\otimes(f_n\circ\gamma_{s_n})$, et par suite $\mu(f\circ\gamma_s)=\mu(f)$, ce qui montre que $\gamma_s(\mu)=\mu$ (chap.III, § 5). Pour un produit infini de groupes compacts, ce qui précède prouve que $\mu(f\circ\gamma_s)=\mu(f)$ pour tout $s\in G$ et toute fonction f ne dépendant que d'un nombre fini de variables, d'où encore la relation $\gamma_s(\mu)=\mu$ (chap.III, §5, n°5)

Pour un produit fini de groupes localement compacts G_i $(1\leqslant i\leqslant n)$, on voit de même que le module de $\mu = \bigotimes_{i=1}^{n} \mu_i$ est la représentation $(s_1,\dots,s_n)\to\prod_{i=1}^{n} \Delta_i(s_i)$, où Δ_i est le module de μ_i.

Exemple.- On sait que le groupe multiplicatif $\mathbb{C}^*$ est isomorphe au groupe produit $\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{U}$ (Top.gén., chap.VIII, § 1, n°3) ; si on pose $z=re^{i\theta}$ avec $-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi$ et $r>0$, la mesure de Haar sur $\mathbb{C}^*$ est donc à un facteur constant près

$$f \to \int_0^{\infty}\int_{-\pi}^{+\pi} f(r,\theta)\,\frac{dr\,d\theta}{r} \quad .$$

Exercices.- 1) Soient G un groupe localement compact, A un ensemble compact quarrable (chap.IV, § 5, exerc.13 d)) pour une mesure de Haar μ sur G telle que $\mu(A_0)=1$. Montrer que pour tout ultrafiltre $\mathfrak{U}$ plus fin que le filtre $\mathfrak{F}$ des sections de l'ensemble des voisinages de e, $\lambda_U(A)$ tend vers $\mu(A)$; en déduire que $\lambda_U(A)$ tend vers $\mu(A)$ suivant le filtre $\mathfrak{F}$ (cf. Top.gén., chap.I, 2° éd., § 5,exerc.9).

2) Soit G un groupe localement compact non discret, dénombrable à l'infini. Montrer que tout voisinage compact V de e contient un sous-groupe distingué H de G , de mesure nulle (pour la mesure de Haar μ sur G) et tel que G/H soit un groupe localement compact polonais. (On pourra procèder de la facon suivante : soit L le sous-groupe ouvert de G engendré par V , b_n $(n=1,2,\ldots)$ des représentants des classes à gauche suivant V . Former une suite décroissante (V_n) de voisinages de e tels que : 1° $V_n^2 \subset V_{n-1}$; 2° $xV_nx^{-1} \subset V_{n-1}$ pour tout $x \in V$; 3° $b_iV_nb_i^{-1} \subset V_{n-1}$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$; 4° $\mu(V_n) \leqslant 1/n$. Prendre alors pour H l'intersection de la suite (V_n)).

Soit (f_n) une suite de fonctions numériques uniformément continues dans G. Montrer qu'on peut en outre supposer que les f_n soient constantes dans toute classe mod.H (dans la construction précédente, prendre V_n tel que l'on ait $|f_i(x)-f_i(y)| \leqslant 1/n$ pour $x^{-1}y \in V_n$ et pour $1 \leqslant i \leqslant n$).

3) Soit K le corps des séries formelles sur un corps fini $\mathbb{F}_q$, muni de la valeur absolue $|z| = q^{-\omega(z)}$, $\omega(z)$ étant l'ordre de la série formelle z ; K est localement compact pour cette valeur absolue. Déterminer la mesure de Haar sur les groupes K , K^*, $GL_n(K)$.

4) Soient G un groupe localement compact, μ et μ' deux mesures positives et invariantes à gauche sur G . Démontrer sans utiliser le th.1 que si A et B sont deux parties compactes de G, on a

$$\mu(A)\mu'(B) \leqslant \mu'(AB)\mu(B^{-1})$$

(remarquer que l'on a $\varphi_A(x)\varphi_B(x^{-1}y) \leqslant \varphi_{AB}(y)\varphi_B(x^{-1}y)$). En déduire que si A, A' sont deux ensembles compacts quelconques, U un voisinage compact de e, on a

$$\mu(A)\mu'(A') \leqslant \mu(A'U^{-1})\mu'(AU)$$

et conclure de là que μ et μ' sont proportionnelles.

4 bis) a) Soit μ une mesure de Haar sur un groupe localement compact, A et B deux parties intégrables de G. Montrer la fonction $x \to \mu(xA \cap B)$ est μ-intégrable et que l'on a

$$\int \mu(xA \cap B)dx = \iint \varphi_A(x^{-1}s)\varphi_B(s)dxds = \mu(A^{-1})\mu(B) .$$

b) Montrer que $x \to \mu(xA \cap B)$ est continue dans G et à support compact si A et B sont relativement compacts (approcher φ_A dans $\mathcal{L}^1$ par une fonction de $\mathcal{K}(G)$).

c) Déduire de b) que pour toute partie intégrable A de G, de mesure $\mu(A) > 0$, AA^{-1} est un voisinage de e dans G.

d) Soient A et B deux ensembles intégrables tels que $\mu(A) \leqslant \mu(B)$. Montrer qu'il existe une partition de A en un ensemble négligeable N et une suite (K_n) d'ensembles compacts, et une partition de B en un ensemble N' et une suite (K'_n) d'ensembles compacts, telles que, pour tout n, on ait $K'_n = s_n K_n$, où $s_n \in G$ (se ramener au cas où A et B sont relativement compacts, et utiliser a) en remarquant que si $xA \cap B$ n'est pas vide, on a $x \in BA^{-1}$).

5) Soient E un espace localement convexe séparé, u une application linéaire continue de E dans E. On pose $v(x)=x-u(x)$ et $u_n(x)=(x+u(x)+\dots+u^{n-1}(x))/n$, et on suppose que la suite (u_n) soit <u>équicontinue</u>.

a) Montrer que pour tout $x \in \overline{v(E)}$, on a $\lim_{n\to\infty} u_n(x)=0$ (le démontrer d'abord pour $x \in v(E)$).

b) Soit $y \in E$ tel que la suite $(u_n(y))$ admette une valeur d'adhérence z pour la topologie affaiblie $\sigma(E,E')$. Montrer que la suite $(u_n(y))$ converge vers z pour la topologie initiale (remarquer d'abord que $v(z)=0$, puis que $x=y-z$ est adhérent à $v(E)$ pour la topologie $\sigma(E,E')$, et utiliser a)).

c) On suppose que $w(x)=\lim\limits_{n\to\infty} u_n(x)$ existe pour tout $x\in E$. Montrer que w est un projecteur continu de E sur un sous-espace fermé de E et que l'on a $w(E)=\overset{-1}{v}(0)$ et $\overline{v(E)} \subset \overset{-1}{w}(0)$.

d) Montrer que pour tout $x \in E$, $(u^k(x)+\dots+u^{n+k-1}(x))/n$ tend uniformément en k vers $w(x)$ si la suite (u^n) est équicontinue et si $u_n(x)$ tend vers $w(x)$ pour tout $x\in E$.

6) Soit S un espace localement compact, μ une mesure positive sur S. Soit (T_n) une suite d'applications linéaires continues de l'espace $\mathcal{L}^1(S,\mu)$ des fonctions numériques intégrables dans S, dans l'espace $\mathcal{L}(S,\mu)$ des fonctions numériques mesurables dans S, muni de la topologie de la convergence en mesure (chap.IV, §6, exerc.11).

a) On suppose que, pour toute fonction $f\in\mathcal{L}^1$, on a $Vf(t) = \sup\limits_n |T_nf(t)| < +\infty$ dans le complémentaire d'un ensemble négligeable (dépendant de f). Montrer que V est une application continue de $\mathcal{L}^1$ dans $\mathcal{L}$ (si U est un voisinage fermé de 0 dans $\mathcal{L}$, considérer dans $\mathcal{L}^1$, pour tout entier $k>0$, l'ensemble A_k des f telles que $Vf\in k.U$ et utiliser le th. de Baire).

b) On suppose en outre que pour toute fonction f appartenant à un sous-espace partout dense H de $\mathcal{L}^1$, $T_nf(t)$ tende vers une limite dans le complémentaire d'un ensemble négligeable (dépendant de f). Montrer qu'il en est de même pour <u>toute</u> fonction $f\in\mathcal{L}^1$ (pour toute fonction $f\in\mathcal{L}^1$, soit $Wf(t)=\limsup\limits_{n\to\infty} T_nf(t)-\liminf\limits_{n\to\infty} T_nf(t)$.

A 198

Montrer que W est continue dans $\mathcal{L}^1$, en utilisant a)).

7) Soit S un espace localement compact, μ une mesure positive <u>bornée</u> sur S, θ une application μ-propre de S dans S. Pour toute fonction $f \in \mathcal{L}^1(S,\mu)$, soit Tf la fonction $f\circ\theta$.

a) Montrer que T est une application linéaire continue de $\mathcal{L}^1$ dans $\mathcal{L}^1$ (utiliser le th. du graphe fermé).

b) On pose $T_nf = (f+Tf+T^2f+\ldots+T^nf)/n$, et on suppose que pour toute fonction $f \in \mathcal{L}^1$, T_nf converge en moyenne vers une limite Wf.

Par passage aux quotients, W devient un projecteur continu de l'espace de Banach L^1 dans lui-même (exerc.5), et la relation $g \leqslant f$ presque partout entraîne $Wg \leqslant Wf$ presque partout. Soit f une fonction $\geqslant 0$ de $\mathcal{L}^1$; pour tout entier n et tout $\alpha > 0$, soit $A_{n,\alpha}$ l'ensemble des $t \in S$ tels que $\sup\limits_{1\leqslant k\leqslant n} T_kf(t) > \alpha$, $A_\alpha = \bigcup\limits_n A_{n,\alpha}$ (ensemble des $t \in S$ où l'enveloppe supérieure $\tilde{f}$ des T_nf est $> \alpha$) et soit $B_{n,\alpha} = S-A_{n,\alpha}$, $B_\alpha = S-A_\alpha$. On pose, pour un $m > 0$ quelconque, $g(t)=f(t)$ si $t \in A_{m,\alpha}$, $g(t)=\alpha$ dans le cas contraire. Montrer que pour tout entier n

$$\sup_{1\leqslant p\leqslant m} \frac{1}{p}\left(g(\theta^n(t))+g(\theta^{n+1}(t))+\ldots+g(\theta^{n+p-1}(t))\right) \geqslant \alpha$$

pour tout $t \in S$; en déduire que $\liminf\limits_{n\to\infty} T_ng(t) \geqslant \alpha$ pour tout $t \in S$, et que l'on a par suite

$$(1) \qquad \alpha\mu(S) \leqslant N_1(Wg) \leqslant N_1(Wf)+\alpha N_1(W\varphi_{B_{m,\alpha}}) .$$

Soit enfin $A = \bigcap\limits_\alpha A_\alpha$ l'ensemble des $t \in S$ où $\tilde{f}(t) = +\infty$. Montrer que l'on a $\varphi_A\circ\theta = \varphi_A$, et déduire de cette relation et de (1) que A est négligeable.

c) Déduire de b) et de l'exerc.6 que pour toute fonction $f \in \mathcal{L}^1(S,\mu)$, $T_nf(t)$ tend vers une limite dans le complémentaire d'un ensemble négligeable (le démontrer d'abord pour toute fonction de la forme

$f=g-Tg$, où g est une fonction bornée de $\mathcal{L}^1$, puis pour toute fonction de $\mathcal{L}^1$ telle que $Tf(t)=f(t)$ presque partout ; conclure en utilisant l'exerc.5 c)).

8) Soient S un espace compact, θ un homéomorphisme de S sur lui-même.

a) Montrer qu'il existe sur S une mesure positive μ telle que $\mu(S)=1$ et qui soit invariante par θ (appliquer le th. de Markoff-Kakutani à l'ensemble des mesures $\lambda \geqslant 0$ sur S de masse totale égale à 1 ; cf. Esp.vect.top., chap.II,App.).

b) Soit μ une mesure sur S vérifiant les conditions de a) ; montrer que si on pose, pour toute fonction $f\in\mathcal{L}^1(S,\mu)$, $Tf=f\circ\theta$, la suite des fonctions $T_nf=(f+Tf+\dots+T^{n-1}f)/n$ converge en moyenne ("théorème d'ergodicité en moyenne" ; utiliser l'exerc.5b) et l'exerc. du chap.V , §). En déduire que $T_nf(t)$ tend vers une limite dans le complémentaire d'un ensemble négligeable (dépendant de f) ("théorème ergodique individuel" ; utiliser l'exerc.7). Montrer que pour toute fonction $f\in\mathcal{L}^p(S,\mu)$ $(1<p<+\infty)$ T_nf est convergente en moyenne d'ordre p (même méthode que pour p=1, en utilisant la réflexivité de L^p). En déduire que si $f\in\mathcal{L}^p$ $(1\leqslant p<+\infty)$ la suite des fonctions $(T^mf+\dots+T^{n-1}f)/(n-m)$ tend dans $\mathcal{L}^p$ vers la même limite que T_nf lorsque n-m croît indéfiniment.

9) Soient S un espace compact métrisable, θ un homéomorphisme de S sur lui-même, $\mathfrak{K}_\theta$ l'ensemble des mesures positives sur S , de masse totale 1, et invariantes par θ (ensemble convexe compact non vide dans $\mathcal{M}(S)$ pour la topologie vague, en vertu de l'exerc.8 a)). On dira qu'une propriété a lieu presque partout pour $\mathfrak{K}_\theta$ si elle a lieu presque partout pour chacune des mesures de $\mathfrak{K}_\theta$, et qu'un ensemble est $\mathfrak{K}_\theta$-négligeable s'il est μ-négligeable pour toute $\mu\in\mathfrak{K}_\theta$.

a) On dit qu'un point $x \in S$ est quasi-régulier si la suite des mesures $T_n(\varepsilon_x)=(\varepsilon_x+\theta(\varepsilon_x)+\dots+\theta^{n-1}(\varepsilon_x))/n$ converge vaguement vers une mesure ω_x. Montrer que le complémentaire de l'ensemble des points quasi-réguliers est $\mathcal{K}_\theta$-négligeable (utiliser le fait que $\mathcal{C}(S)$ est de type dénombrable et le th. ergodique individuel). Pour tout point quasi-régulier $x \in S$, on a $\omega_x = \theta(\omega_x)=\omega_{\theta(x)}$.

b) Définir un homéomorphisme θ du disque $\mathcal{B}_2$ pour lequel il y a des points qui ne sont pas quasi-réguliers (définir d'abord θ dans l'adhérence de la "spirale" définie par

$$x=(1+t)\cos t/(1+2t), \quad y=(1+t)\sin t/(1+2t), \qquad t \geqslant 0$$

de façon que pour une fonction continue g, égale à 1 dans un voisinage assez petit du point $(\frac{1}{2},0)$, à 0 ailleurs, il existe des points x tels que la suite $(T_n g(x))$ ne soit pas convergente ; prolonger ensuite θ à $\mathcal{B}_2$).

10) Les notations sont celles de l'exerc.9 .

a) Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}(S)$ et toute mesure $\mu \in \mathcal{K}_\theta$, montrer que l'on a

$$d\mu(x)\int\left(\int f(z)d\omega_y(z)-\int f(z)d\omega_x(z)\right)^2 d\omega_x(y)=0$$

(Remarquer, d'après l'exerc.8, que pour tout $\varepsilon>0$, il existe n_0 tel que, pour $n \geqslant n_0$ et $m \geqslant 0$, on ait

$$\int(T_n f-T^m(T_n f))^2 d\mu \leqslant \varepsilon$$

en déduire que dans les mêmes conditions, on a

$$\int(T_n f-T_n(T_m f))^2 d\mu \leqslant \varepsilon$$

puis faire tendre successivement m vers $+\infty$ et ε vers 0).

En déduire que l'on a, pour presque tout $x \in S$ (pour $\mathcal{K}_\theta$)

(1) $$\int f(z)d\omega_y(z) = \int f(z)d\omega_x(z)$$

pour un ensemble de points $y \in S$ dont le complémentaire est ω_x-négligeable.

b) Soit g une fonction bornée mesurable pour toutes les mesures de $\mathfrak{K}_\theta$, et telle que $g \circ \theta = g$; montrer que, pour les $x \in S$ satisfaisant à (1), on a

$$(2) \qquad \int g(y)\,d\omega_x(y) \int f(z)\,d\omega_y(z) = \int f(z)g(z)\,d\omega_x(z)$$

(considèrer $\int f(z)\,d\omega_y(z)$ comme limite de $T_n f(y)$ et utiliser l'invariance de ω_x).

c) On dit qu'une mesure $\mu \in \mathfrak{K}_\theta$ est <u>ergodique</u> s'il n'existe pas dans S d'ensemble invariant par θ, μ-mesurable et de mesure distincte de 0 et de 1. Montrer que, pour prendre tout $x \in S$ (pour $\mathfrak{K}_\theta$), la mesure ω_x est ergodique (utiliser 2)).

11) Les notations sont celles de l'exerc. 9.

a) Montrer que, pour presque tout point quasi-régulier $x \in S$ (pour $\mathfrak{K}_\theta$), x appartient au support de ω_x ; ce dernier est alors l'adhérence dans S de l'"orbite" de x, i.e. de l'ensemble des $\theta^n(x)$. Soit (U_p) une base de la topologie de S, et pour tout couple (p,q) tel que $\overline{U}_p \subset U_q$, soit g_{pq} une application continue de S dans $[0,1]$, égale à 1 dans U_p et à 0 dans $S - U_q$. Soit E_{pq} l'ensemble des points quasi-réguliers x tels que $\int g_{pq}(y)\,d\omega_x(y) = 0$; montrer que E_{pq} est invariant par θ, et que $U_p \cap E_{pq}$ est $\mathfrak{K}_\theta$-négligeable. Considèrer alors l'ensemble des points quasi-réguliers x n'appartenant à aucun des $U_p \cap E_{pq}$).

b) Soit x un point quasi-régulier appartenant au support de ω_x ; montrer que pour tout voisinage V de x, il existe une suite croissante (n_k) d'entiers telle que $n_k = \underline{O}(k)$ et que $\theta^{n_k}(x) \in V$.

c) On dit qu'un point $x \in S$ est <u>régulier</u> s'il est quasi-régulier, si la mesure ω_x est ergodique et si x appartient au support de ω_x ; l'ensemble R des points réguliers est tel que $S-R$ soit $\mathfrak{K}_\theta$ -négligeable. Montrer que pour tout point $a \in S$ et tout voisinage ouvert U de R dans S , on a $\lim\limits_{n \to \infty} T_n \varphi_U(a)=1$. (Considérer une suite partielle (n_k) pour laquelle on aurait $\lim\limits_{k \to \infty} T_{n_k}\varphi_U(a)=1-\gamma$ avec $\gamma > 0$, et considérer une mesure μ (de $\mathfrak{K}_\theta$) adhérente à la suite des mesures $T_{n_k}(\varepsilon_a)$; obtenir une contradiction en remarquant que $\mu(R)=1$).

12) Les notations sont celles des exercices précédents.

a) Soit $\mu \in \mathfrak{K}_\theta$ une mesure ergodique. Montrer qu'il existe dans S un ensemble A tel que $S-A$ est μ-négligeable et que pour toute fonction continue $f \in \mathcal{C}(S)$ et tout $x \in A$, on ait $\lim\limits_{n\to\infty} T_n f(x)=\int f(z)d\mu(z)$ (utiliser le th. ergodique individuel, et remarquer que la fonction $g(x)=\lim\limits_{n\to\infty} T_n f(x)$, définie presque partout, est μ-intégrable et invariante par θ). En déduire qu'il existe $y \in R$ tel que $\mu = \omega_y$.

b) L'application $x \to \omega_x$, définie presque partout pour $\mathfrak{K}_\theta$, est une application mesurable (pour toute mesure $\mu \in \mathfrak{K}_\theta$) de l'espace compact métrisable S dans l'espace compact métrisable $\mathfrak{K}_\theta$; les classes d'équivalence de la relation $\omega_x = \omega_y$ dans R sont appelées les <u>parties ergodiques</u> de R . Montrer que pour toute partie ergodique E et tout $x \in E$, la mesure ω_x est concentrée dans E et que, pour toute mesure $\mu \in \mathfrak{K}_\theta$, on a

$$\int_E f(z)d\mu(z)= \mu(E) \int_E f(z)d\omega_x(z)$$

pour $f \in \mathcal{C}(S)$ et $x \in E$ (calculer $\lim\limits_{n\to\infty} \int_E T_n f(z)d\mu(z))$.

c) Déduire de a) et b) que les mesures ω_x pour $x \in R$ (ou, ce qui revient au même, les mesures ergodiques de $\mathfrak{K}_\theta$) sont les points extrémaux de l'ensemble convexe $\mathfrak{K}_\theta$.

13) Les notations sont celles des exercices précédents. On dit que l'homéomorphisme θ est <u>uniquement ergodique</u> si l'ensemble $\mathfrak{X}_\theta$ est réduit à un point μ_o.

a) Montrer que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}(S)$, la suite $(T_n f(x))$ converge uniformément dans E vers $\int f(z)d\mu_o(z)$ (raisonner par l'absurde). L'ensemble R des points réguliers est alors le support de μ_o.

b) Un ensemble fermé $F \subset S$ invariant par θ est dit <u>minimal</u> s'il ne contient aucun ensemble fermé invariant par θ et distinct de F (ou encore s'il est l'adhérence de l'orbite de chacun de ses points). Déduire de a) que si θ est uniquement ergodique, R est le seul ensemble minimal dans S (utiliser l'exerc. 11 c)).

c) Soit F un ensemble minimal ; montrer que si tout point de F est quasi-régulier, F est une partie ergodique de R (remarquer que si pour $f \in \mathcal{C}(F)$, on pose $f^*(x) = \lim\limits_{n\to\infty} T_n f(x)$, f^* est constante ou discontinue en tout point, et utiliser l'exerc.14 de <u>Top.gén.</u>, chap.IX, § 5). En déduire que si R est minimal, θ est uniquement ergodique.

(Pour plus de détails sur les ensembles ergodiques, cf. Oxtoby, Bull.Amer.M;Soc., 58 (1952), p.114 et Proc.Amer.Math.Soc., 4 (1953), p 982).

14) Soient E un espace localement compact, $\mathcal{U}$ une structure uniforme sur E pour laquelle il existe un entourage V tel que V(x) soit compact pour tout $x \in E$ (cf. <u>Top.gén.</u>, chap.II, 2^{e}éd., § 4, exerc.10). Soit d'autre part Γ un groupe uniformément équicontinu d'homéomorphismes de E (pour la structure uniforme $\mathcal{U}$), tel qu'il existe $a \in E$ pour lequel l'ensemble des $\sigma(a)$ ($\sigma \in \Gamma$, "orbite" de <u>a</u>) soit partout dense dans E. Montrer qu'il existe sur E une mesure positive $\neq 0$ invariante par Γ, et que cette mesure est unique à un facteur constant près (utiliser la démonstration du th.1).

§ 2. Mesures dans les espaces homogènes.

1. Mesures dans les espaces homogènes.

Soient G un groupe localement compact, Γ un sous-groupe fermé (donc localement compact) de G. Soit $H=G/\Gamma$ l'espace homogène des classes à gauche suivant Γ, et soit φ l'application canonique de G sur H, de sorte que $\varphi(x)=x\Gamma$ pour $x\in G$; on écrira aussi $\varphi(x)=\dot{x}$. Nous munirons H de la topologie quotient de celle de G par la relation d'équivalence $x^{-1}y\in\Gamma$; cette relation étant ouverte (Top. gén., R, § 10, n°7) et Γ étant fermé, H est séparé et les images par φ des voisinages d'un point $x\in G$ forment un système fondamental de voisinages de $\varphi(x)$, ce qui prouve que H est un espace localement compact. Pour tout $s\in G$ et tout $\dot{x}=x\Gamma$ dans H, nous poserons $\theta_s(\dot{x})=sx\Gamma=\varphi(sx)$; on sait que l'application $(s,\dot{x})\rightarrow\theta_s(x)$ de $G\times H$ dans H est continue.

Nous désignerons par $f\rightarrow\int f(x)dx$, $g\rightarrow\int g(\xi)d\xi$ des mesures de Haar μ,μ_0 sur G et Γ respectivement, par $\Delta(s)$ et $\Delta_0(\sigma)$ les valeurs pour $s\in G$, $\sigma\in\Gamma$ des modules de G et Γ respectivement. Pour toute fonction $f\in\mathcal{K}(G)$ et tout $x\in G$, la fonction $\xi\rightarrow f(x\xi)$ est continue dans Γ et à support compact (contenu dans $x^{-1}S$, si S est le support de f) ; posons $f'(x)=\int f(x\xi)d\xi$. Pour tout $\sigma\in\Gamma$, on a par définition de la mesure de Haar dans Γ, $f'(x\sigma)=\int f(x\sigma\xi)d\xi=f'(x)$; f' est donc constante sur toute classe à gauche mod. Γ, et on peut écrire $f'=f^\natural\circ\varphi$, où $f^\natural$ est une fonction numérique définie dans H.

PROPOSITION 1.— a) Pour toute fonction $f\in\mathcal{K}(G)$, on a $f^\natural\in\mathcal{K}(H)$; la relation $f\geqslant 0$ entraîne $f^\natural\geqslant 0$ et $f\rightarrow f^\natural$ est une application linéaire de $\mathcal{K}(G)$ sur $\mathcal{K}(H)$.

b) <u>Pour</u> $f \in \mathcal{K}(G)$ <u>et</u> $s \in G$, <u>on a</u> $(f \circ \gamma_s)^\flat = f^\flat \circ \theta_s$.

c) <u>Pour</u> $f \in \mathcal{K}(G)$ <u>et</u> $\sigma \in \Gamma$, <u>on a</u> $(f \circ \delta_\sigma)^\flat = \Delta_o(\sigma) f^\flat$.

d) <u>Pour toute fonction</u> $f \in \mathcal{K}(G)$ <u>et toute fonction numérique</u> g <u>continue dans</u> H , <u>on a</u> $(f.(g \circ \varphi))^\flat = f^\flat . g$.

Les propriétés b),c),d) résultent des calculs suivants :

b) si $h=(f \circ \gamma_s)^\flat$, on a

$$h(\varphi(x)) = \int (f \circ \gamma_s)(x\xi)d\xi = \int f(sx\xi)d\xi = f^\flat(\varphi(sx)) = f^\flat(\theta_s(\varphi(x))).$$

c) Si $h=(f \circ \delta_\sigma)^\flat$, on a

$$h(\varphi(x)) = \int (f \circ \delta_\sigma)(x\xi)d\xi = \int f(x\xi\sigma)d\xi = \Delta_o(\sigma)\int f(x\xi)d\xi = \Delta_o(\sigma)f^\flat(\varphi(x))$$

d) Si $h=(f.(g \circ \varphi))^\flat$, on a

$$h(\varphi(x)) = \int f(x\xi)g(\varphi(x))d\xi = g(\varphi(x))\int f(x\xi)d\xi = f^\flat(\varphi(x))g(x)) .$$

Si S est le support de f , le support de $f^\flat$ est contenu dans l'ensemble compact $\varphi(S)$.

Montrons que $f^\flat$ est continue en tout point $\dot{x} = \varphi(x)$ de H . Soit V_o un voisinage compact de x , de sorte que $\varphi(V_o)$ est un voisinage de $\dot{x}$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage compact V de e tel que $Vx \subset V_o$ et que la relation $yz^{-1} \in V$ entraîne $|f(z)-f(y)| \leqslant \varepsilon$, f étant uniformément continue. Comme $(x\xi)(y\xi)^{-1} \in V$ pour $y \in Vx$, on a $|f(x\xi)-f(y\xi)| \leqslant \varepsilon$ pour tout $\xi \in \Gamma$ et tout $y \in Vx$. En outre, le support de $\xi \rightarrow f(y\xi)$ est contenu dans $\Gamma \cap V_o^{-1}S = K$, partie compacte de Γ . On a donc

$$\left| f^\flat(\varphi(x)) - f^\flat(\varphi(y)) \right| = \left| \int (f(x\xi)-f(y\xi))d\xi \right| \leqslant \varepsilon\mu_o(K)$$

pour tout $y \in Vx$, ce qui démontre notre assertion.

Reste à prouver que $f \rightarrow f^\flat$ applique $\mathcal{K}(G)$ <u>sur</u> $\mathcal{K}(H)$. Soit $g \in \mathcal{K}(H)$, et désignons par T son support. Pour tout $\dot{x} \in T$, il existe un voisinage compact V_x d'un point $x \in \dot{x}$, et $\varphi(V_x)$ est un voisinage de $\dot{x}$;

comme on peut couvrir T par un nombre fini d'ensembles $\varphi(V_{x_i})$, on voit que l'ensemble compact $S = \bigcup_i V_{x_i}$ est tel que $T \subset \varphi(S)$. Soit alors f une fonction de $\mathcal{K}_+(G)$, égale à 1 dans S ; pour tout $x \in S$, on a donc $\int f(x\xi)d\xi > 0$, puisque le support de la mesure de Haar dans Γ est Γ tout entier. Ceci montre que $f^{\flat}$ est >0 dans T , donc aussi dans un voisinage de T , et par suite la fonction égale à $g/f^{\flat}$ dans T , à 0 dans H-T , est continue ; soit alors h la fonction $x \to f(x)g(\varphi(x))/f^{\flat}(\varphi(x))$ qui appartient à $\mathcal{K}(G)$; il résulte de d) que $h^{\flat}(\varphi(x)) = g(\varphi(x))$, ce qui achève la démonstration.

Soit maintenant ν une mesure sur H ; alors $f \to \nu(f^{\flat})$ est une mesure sur G . Il suffit de le montrer lorsque ν est une mesure positive; mais alors pour $f \geqslant 0$ dans $\mathcal{K}(G)$, on a $f^{\flat} \geqslant 0$, donc $\nu(f^{\flat}) \geqslant 0$, autrement dit $f \to \nu(f^{\flat})$ est une forme linéaire positive sur $\mathcal{K}(G)$, d'où notre assertion. On pose $\nu^{\flat}(f) = \nu(f^{\flat})$; l'application $\nu \to \nu^{\flat}$ de l'espace $\mathcal{M}(H)$ des mesures sur H dans l'espace ~~$\mathcal{M}(G)$ des mesures sur H dans l'espace~~ $\mathcal{M}(G)$ des mesures sur G est linéaire et biunivoque, en raison du fait que $f \to f^{\flat}$ applique $\mathcal{K}(G)$ sur $\mathcal{K}(H)$.

Si $f \in \mathcal{K}(G)$ a son support dans un ensemble compact K , $f^{\flat}$ a son support dans $\varphi(K)$; en outre, pour tout $x \in K$, le support de $\xi \to f(x\xi)$ est contenu dans l'ensemble compact $M = \Gamma \cap K^{-1}K$; par suite, pour tout $x \in K$, $\left|\int f(x\xi)d\xi\right| \leqslant \|f\| \cdot \mu_0(M)$, d'où $\|f^{\flat}\| \leqslant \|f\| \cdot \mu_0(M)$. Ceci prouve que $f \to f^{\flat}$ est continue lorsqu'on munit $\mathcal{K}(G)$ (resp. $\mathcal{K}(K)$) de la topologie limite inductive des topologies des espaces de Banach $\mathcal{K}(G,K)$ (resp. $\mathcal{K}(H,L)$, L partie compacte de H) ; $\nu \to \nu^{\flat}$ est alors la transposée de l'application linéaire continue $f \to f^{\flat}$ et est donc vaguement continue.

Par abus de langage, on exprime encore la définition de $\nu^{\natural}$ par la formule

(1) $$\int_G f(x)d\nu^{\natural}(x) = \int_H d\nu(\dot{x})\int_{\Gamma} f(x\xi)d\xi$$

pour toute fonction $f \in \mathcal{K}(G)$.

Nous allons déterminer les mesures sur G qui sont de la forme $\nu^{\natural}$.

PROPOSITION 2.- <u>Soit</u> ρ <u>une mesure positive sur</u> G . <u>Les propriétés suivantes sont équivalentes</u> :

a) <u>Il existe une mesure positive</u> ν <u>sur</u> H <u>telle que</u> $\rho = \nu^{\natural}$.

b) <u>Si</u> $f \in \mathcal{K}(G)$, <u>la relation</u> $f^{\natural}=0$ <u>entraîne</u> $\rho(f)=0$.

c) <u>Si</u> $f \in \mathcal{K}(G)$ <u>et</u> $g \in \mathcal{K}(G)$, <u>on a</u> $\rho(f.(g^{\natural}\circ\varphi)) = \rho((f^{\natural}\circ\varphi).g)$.

d) <u>Pour tout</u> $\sigma \in \Gamma$, $\delta_{\sigma}(\rho) = \Delta_0(\sigma)\rho$.

1°- Montrons que a) entraîne d) ; on a, pour $\rho = \nu^{\natural}$, $\sigma \in \Gamma$, et $f \in \mathcal{K}(G)$,

$$\rho(f\circ\delta_{\sigma}) = \nu((f\circ\delta_{\sigma})^{\natural}) = \Delta_0(\sigma)\nu(f^{\natural}) = \Delta_0(\sigma)\nu^{\natural}(f)$$

en vertu de la prop.1 c).

2°- Montrons que d) entraîne c). En effet, supposons que $\delta_{\sigma}(\rho) = \Delta_0(\sigma)\rho$; pour $f \in \mathcal{K}(G)$ et $g \in \mathcal{K}(G)$, on a , en vertu du th. de Lebesgue-Fubini

$$\rho(f.(g^{\natural}\circ\varphi)) = \int_G f(x)d\rho(x)\int_{\Gamma} g(x\xi)d\xi = \iint_{G\times\Gamma} f(x)g(x\xi)d\rho(x)d\xi$$

puisque la fonction $f(x)g(x\xi)$ est à support compact dans $G \times \Gamma$.

Ceci s'écrit aussi (§ 1,cor.1 de la prop.7)

$$\rho(f.(g^{\natural}\circ\varphi)) = \iint_{G\times\Gamma} f(x)g(x\xi^{-1})\Delta_0(\xi)d\rho(x)d\xi$$
$$= \int_{\Gamma}\Delta_0(\xi)d\xi\int_G f(x)g(x\xi^{-1})d\rho(x) .$$

Mais en raison de l'hypothèse sur ρ , ceci est égal à

$$\int_{\Gamma}\Delta_0(\xi)d\xi\int_G f(x\xi)g(x)\Delta_0(\xi)^{-1}d\rho(x)$$
$$= \int_G g(x)d\rho(x)\int_{\Gamma} f(x\xi)d\xi = \rho(g.(f^{\natural}\circ\varphi)).$$

3° Prouvons maintenant que c) entraîne b). Si c) est satisfaite et si $f^\natural = 0$, on a $\rho(f.(g^\natural \circ \varphi)) = \rho(g.(f^\natural \circ \varphi)) = 0$ quelle que soit $g \in \mathcal{K}(G)$. Comme $f \rightarrow f^\natural$ est une application de $\mathcal{K}(G)$ sur $\mathcal{K}(H)$, il existe une fonction $g \in \mathcal{K}(G)$ telle que $g^\natural$ soit égale à 1 dans l'image canonique du support de f (chap.III, § 2, lemme 1). On en conclut que $f.(g^\natural \circ \varphi) = f$, d'où $\rho(f) = 0$.

4° Reste à montrer que b) entraîne a). Comme la relation $f^\natural = 0$ entraîne $\rho(f) = 0$, et que $f \rightarrow f^\natural$ applique $\mathcal{K}(G)$ sur $\mathcal{K}(H)$, il existe une forme linéaire ν et une seule sur $\mathcal{K}(H)$ telle que $\nu(f^\natural) = \rho(f)$ pour toute fonction $f \in \mathcal{K}(G)$. En outre, comme $f \geqslant 0$ entraîne $f^\natural \geqslant 0$, ν est une forme linéaire positive, donc une mesure positive sur H, et on a $\rho = \nu^\natural$.

<u>Remarque</u>.- Les résultats de la prop.2 subsistent sans modification lorsque H est remplacé par une partie ouverte L de H et G par $\overset{-1}{\varphi}(L)$, ensemble ouvert saturé dans G.

2. <u>Mesures relativement invariantes sur un espace homogène</u>.

Nous dirons qu'une mesure ν sur H est <u>relativement invariante</u> si elle est relativement invariante par les transformations θ_s où $s \in G$ (§ 1, n°1) ; l'application $s \rightarrow \theta_s$ de G dans le groupe $\mathcal{H}$ des homéomorphismes de H, muni de la topologie de la convergence compacte, est continue (<u>Top.gén</u>.R, § 13, n°8) ; par suite dire que ν est relativement invariante signifie que $\theta_s(\nu) = \chi(s)\nu$ pour tout $s \in G$, χ étant une <u>représentation continue</u> de G dans $\mathbb{C}^*$. Comme le groupe des homéomorphismes θ_s $(s \in G)$ de H est transitif, la prop.2 du § 1 montre que le support d'une mesure relativement invariante sur H est H tout entier.

THÉORÈME 1.- *Pour toute mesure relativement invariante* ν *sur* H , *de multiplicateur* χ , $\nu^\flat$ *est une mesure relativement invariante (à gauche) sur* G , *de multiplicateur* χ , *et la restriction de* χ *à* Γ *est la représentation* $\sigma \rightarrow \Delta_0(\sigma)/\Delta(\sigma)$ *de* Γ *dans* $\mathbf{R}_+^*$. *Réciproquement, pour tout prolongement de cette représentation qui est une représentation continue* χ *de* G *dans* $\mathbf{C}^*$, *et toute mesure relativement invariante* ρ *sur* G , *de multiplicateur* χ , *il existe une mesure relativement invariante* ν *et une seule sur* H , *telle que* $\rho = \nu^\flat$.

Supposons en effet que $\theta_s(\nu) = \chi(s)\nu$ pour tout $s \in G$. Pour toute fonction $f \in \mathcal{K}(G)$, on a alors, d'après la prop.1 b)

$$\nu^\flat(f \circ \gamma_s) = \nu((f \circ \gamma_s)^\flat) = \nu(f^\flat \circ \theta_s) = \chi(s)\,\nu(f^\flat) = \chi(s)\,\nu^\flat(f)$$

ce qui montre que $\nu^\flat$ est relativement invariante de multiplicateur χ . En outre, pour $\nu^\flat$, on a, en vertu de la prop.2 d)

$$\nu^\flat(f \circ \delta_\sigma) = \Delta_0(\sigma)\,\nu^\flat(f)$$

Mais d'autre part (§ 1,cor.2 de la prop.7), on a, pour tout $s \in G$

$$\nu^\flat(f \circ \delta_s) = \Delta(s)\,\chi(s)\,\nu^\flat(f)$$, ce qui prouve que, pour $\sigma \in \Gamma$, on a $\quad \Delta(\sigma)\,\chi(\sigma) = \Delta_0(\sigma)$.

Inversement, si cette dernière relation est vérifiée, et si ρ est une mesure relativement invariante sur G , de multiplicateur χ , on a, pour $\sigma \in \Gamma$, $\delta_\sigma(\rho) = \chi(\sigma)\,\Delta(\sigma)\,\rho = \Delta_0(\sigma)\,\rho$; en vertu de la prop.2 d), il existe une mesure ν et une seule sur H telle que $\rho = \nu^\flat$. En outre, pour $f \in \mathcal{K}(G)$ et $s \in G$, on a (prop.1 b))

$$\nu(f^\flat \circ \theta_s) = \nu((f \circ \gamma_s)^\flat) = \rho(f \circ \gamma_s) = \chi(s)\,\rho(f) = \chi(s)\,\nu(f^\flat)$$

et comme $f \rightarrow f^\flat$ applique $\mathcal{K}(G)$ sur $\mathcal{K}(H)$, cela prouve que ν est relativement invariante de multiplicateur χ .

COROLLAIRE 1.- Si Γ est un sous-groupe unimodulaire de G , il existe sur $H=G/\Gamma$ une mesure relativement invariante de multiplicateur $1/\Delta(s)$.

COROLLAIRE 2.- Pour qu'il existe une mesure invariante sur $H=G/\Gamma$ il faut et il suffit que l'on ait $\Delta_0(\sigma)=\Delta(\sigma)$ pour tout $\sigma\in\Gamma$.

COROLLAIRE 3.- Si Γ est un sous-groupe distingué de G , on a $\Delta_0(\sigma)=\Delta(\sigma)$ pour tout $\sigma\in\Gamma$.

Cela résulte du cor.2, puisque la mesure de Haar sur le groupe quotient H est invariante.

On peut donc écrire dans ce cas, pour toute fonction $f\in\mathcal{K}(G)$

$$(2)\qquad \int_G f(x)dx = \int_{G/\Gamma} d\dot{x} \int_\Gamma f(x\xi)d\xi$$

en convenant de noter $\int_{G/\Gamma} h(\dot{x})d\dot{x}$ l'intégrale de h par rapport à la mesure de Haar sur H , image réciproque par $\nu \longrightarrow \nu^{\flat}$ de la mesure de Haar μ considérée sur G .

Remarques.- 1) Si G est un groupe non compact, dont le groupe des commutateurs est partout dense, une mesure relativement invariante sur un espace homogène G/Γ est nécessairement invariante si elle existe, ce qui implique que Γ doit être unimodulaire en vertu du cor.2 (§ 1,cor.2 de la prop.5). Mais il peut exister dans G des sous-groupes fermés qui ne sont pas unimodulaires (cf/ n°3, exemple III) ; pour un tel sous-groupe Γ , il n'y a pas de mesure relativement invariante sur G/Γ .

2) Soit V un voisinage ouvert de e dans G , $U=V\Gamma$ le saturé de V pour la relation $x^{-1}y\in\Gamma$ et $W=\varphi(U)=\varphi(V)$. Soient V_1, V_2 deux voisinages ouverts symétriques de e dans G tels que $V_1^2\subset V$, $V_2^2\subset V_1$. Soit ν une mesure sur W telle que l'on ait

$\nu(f\circ\theta_s) = \chi(s)\,\nu(f)$ pour $s\in V_1$ et $f\in\mathcal{K}(\varphi(V_1))$. Le raisonnement du th.1 prouve alors que $\nu^{\flat}$ est une mesure sur U telle que $\nu^{\flat}(f\circ\gamma_s) = \chi(s)\,\nu^{\flat}(f)$ pour $s\in V_1$ et $f\in\mathcal{K}(V_1)$; par suite (Remarque suivant la prop.5 du § 1), la restriction de $\nu^{\flat}$ à V_2 coïncide avec la restriction de la mesure $\alpha\chi^{-1}.\mu$ (α constante). En outre, si $\sigma\in\Gamma\cap V_1$, on a $\chi(\sigma)\,\Delta(\sigma) = \Delta_0(\sigma)$. La réciproque est immédiate (pour toute mesure ρ sur U satisfaisant à l'une des conditions de la prop.2).

PROPOSITION 3.- *Soient Γ un sous-groupe distingué fermé de G, et u un automorphisme de G tel que $u(\Gamma)=\Gamma$. Si on désigne par u_Γ la restriction de u à Γ, par $\mathring{u}$ l'automorphisme de G/Γ obtenu à partir de u par passage au quotient, on a $\Delta(u) = \Delta(u_\Gamma)\,\Delta(\mathring{u})$.*

En effet, d'après la formule (2), on a

$$\int_G f(u(x))\,dx = \int_{G/\Gamma} d\dot{x}\int_\Gamma f(u(x)u_\Gamma(\xi))\,d\xi = \Delta(u_\Gamma)\int_{G/\Gamma} d\dot{x}\int_\Gamma f(u(x)\xi)\,d\xi$$

Mais on a $\int_\Gamma f(u(x)\xi)\,d\xi = f^{\flat}(\varphi(u(x))) = f^{\flat}(\mathring{u}(\varphi(x)))$ par définition de $\mathring{u}$. On peut donc écrire

$$\int_G f(u(x))\,dx = \Delta(u_\Gamma)\int_{G/\Gamma} f(\mathring{u}(\dot{x}))\,d\dot{x} = \Delta(u_\Gamma)\,\Delta(\mathring{u})\int_{G/\Gamma} f(\dot{x})\,d\dot{x}$$
$$= \Delta(u_\Gamma)\,\Delta(\mathring{u})\int_G f(x)\,dx$$

d'où la proposition.

COROLLAIRE 1.- *Si Δ_G et $\Delta_{G/\Gamma}$ désignent les modules des groupes G et G/Γ, on a, pour tout $s\in G$, $\Delta_G(s) = \Delta_{G/\Gamma}(\varphi(s))\,\Delta(v_s)$, où v_s désigne l'automorphisme $\xi\rightarrow s\xi s^{-1}$ de Γ.*

COROLLAIRE 2.- *Soit Γ un sous-groupe distingué fermé unimodulaire. Si G/Γ est compact, ou identique à l'adhérence de son groupe des commutateurs, G est unimodulaire.*

En effet (cor.3 du th.1), on a $\Delta(\xi)=1$ pour tout $\xi \in \Gamma$. Par passage au quotient, on déduit donc de Δ une représentation continue de G/Γ dans $\mathbb{R}_+^*$, qui ne peut donc être constante (§ 1, cor.1 et 2 de la prop.5).

On notera qu'il peut se faire que Γ et G/Γ soient unimodulaires, mais non G (n°3, exemple I, 2).

3. Exemples de calculs de mesures de Haar.

I. Produits semi-directs. Soit G un groupe localement compact, ayant les propriétés suivantes :

1) il existe deux sous-groupes fermés H, K de G tel que H soit distingué dans G et que tout $x \in G$ s'écrive d'une seule manière $x=yz$ avec $y \in H$ et $z \in K$;

2) si on pose $y=p(x)$ et $z=q(x)$, p et q sont des applications continues de G dans H et K respectivement (il suffit d'ailleurs que l'une d'elles le soit). Il est immédiat que cela entraîne que l'application $(y,z) \to yz$ de $H \times K$ sur G est un homéomorphisme. Pour $y \in H$, $z \in K$, $y' \in H$, $z' \in K$, on a $yzy'z' = y(zy'z^{-1})zz'$, et comme H est distingué, $zy'z^{-1}=v_z(y')$ appartient à H et on a, en vertu de 1), $p(yzy'z')=p(y)p(v_z(y'))$ et $q(yzy'z')=zz'$; la dernière relation jointe à 2), montre que q est un homomorphisme et par suite que K peut être identifié au groupe quotient (topologique) G/H et q à l'homomorphisme canonique φ de G sur G/H. En outre, pour tout $z \in K$, v_z est un automorphisme du groupe topologique H. Lorsque ces conditions sont remplies, on dit que G est le produit semi-direct des sous-groupes H et K.

Toute fonction f définie sur G peut s'écrire d'une seule manière sous la forme $x \to f_1(p(x),q(x))$, où f_1 est définie sur $H \times K$; et pour que $f \in \mathcal{K}(G)$, il faut et il suffit que $f_1 \in \mathcal{K}(H \times K)$. Avec cette notation et l'identification de K à G/H , la formule (2) donne

$$(3) \qquad \int_G f(x)dx = \int_K dz \int_H f_1(v_z(y),z)dy = \iint_{H\times K} \Delta(v_z)f(yz)dydz \quad ,$$

ce qui permet de calculer la mesure de Haar de G connaissant celles de H et K et la fonction $\Delta(v_z)$. En particulier, si H est compact, on a $\Delta(v_z)=1$ (§ 1,cor. de la prop.6), donc la mesure de Haar sur G est obtenue en transportant sur G la mesure produit des mesures de Haar de H et K, par l'application $(y,z) \to yz$.

En outre, si on désigne par Δ_H, Δ_K et Δ_G les modules de H,K,G le cor.1 de la prop.3 donne la formule

$$(4) \qquad \Delta_G(st) = \Delta_H(s)\,\Delta_K(t)\,\Delta(v_t) \quad .$$

Exemples.- 1) Le groupe G des déplacements euclidiens est produit semi-direct du groupe distingué T des translations, isomorphe au groupe additif $\mathbb{R}^n$, et du groupe O_n^+ des rotations, qui est compact. La mesure produit des mesures de Haar sur T et O_n^+ est donc une mesure de Haar sur G , et G est unimodulaire. Pour $n=2$, O_2^+ est isomorphe au groupe $\mathbb{U}$ des nombres complexes de valeur absolue 1 ; de facon précise, tout déplacement peut s'écrire d'une seule manière sous la forme $t(\xi,\eta)r(\theta)$, où $t(\xi,\eta)$ est la translation $(x,y) \to (x+\xi,y+\eta)$ et $r(\theta)$ la rotation

$$(x,y) \to (x\cos\theta - y\sin\theta,\ x\sin\theta + y\cos\theta) \quad .$$

La mesure produit $d\xi\, d\eta\, d\theta$ est donc une mesure de Haar dans ce cas.

2) Dans $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, considérons la loi de composition

$$(x,y)(x',y') \longrightarrow (xx',xy'+y)$$

On vérifie aisément que c'est une loi de groupe non commutatif ; désignons par G le groupe localement compact ainsi obtenu ; on voit aussitôt que ce groupe est isomorphe au groupe des transformations linéaires affines $z \longrightarrow xz+y$ de $\mathbb{R}$, muni de la topologie de la convergence compacte. En outre, G est produit semi-direct des sous-groupes $H = \{1\} \times \mathbb{R}$ (distingué) et $K = \mathbb{R}^* \times \{0\}$, car on peut écrire d'une seule manière $(x,y)=(1,y)(x,0)$; et pour $t=(x,0)$, et $s=(1,y)$, on a $v_t(s)=tst^{-1}=(1,xy)$, d'où $\Delta(v_t)=|x|^{-1}$. D'après (3) la mesure de Haar sur G est donc

$$f \longrightarrow \iint f(x,y) \frac{dx\,dy}{x^2}$$

et le module de G, donné par la formule (4), est

$$\Delta(x.y) = 1/|x| \ .$$

On déterminerait de même la mesure de Haar et le module du groupe des transformations de la forme $x \longrightarrow tx+v$ dans $\mathbb{R}^n$: on trouve ainsi que la mesure de Haar est

$$f \longrightarrow \iint f(t,v)\,dv\,\frac{dt}{|t|^n}$$

et le module $\Delta(t,v)= 1/|t|^{n-1}$.

II. <u>Groupe des matrices triangulaires</u>. Nous considérerons sur le groupe multiplicatif $GL_n(\mathbb{R})$ (resp. $GL_n(\mathbb{C})$) des matrices inversibles d'ordre n sur $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) la topologie induite par la topologie de l'espace des matrices d'ordre n sur $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) qui est compatible avec la structure de groupe de GL_n et en fait un groupe localement compact (<u>Top.gén.</u>, chap.VI, §1,n°6 et chap.VIII, §4,n°2). Désignons par K le sous-groupe de GL_n formé des matrices triangulaires (x_{ij})

telles que $x_{ij}=0$ pour $i>j$; nous allons déterminer la mesure de Haar et le module du groupe K .

Soit D le sous-groupe de K formé des matrices diagonales, et Z le sous-groupe distingué de K formé des matrices dont la diagonale a tous ses éléments égaux à 1 ; toute matrice $x=(x_{ij})$ de K se met d'une seule manière sous la forme zy , où $z=(z_{ij})\in Z$ et y est la matrice diagonale (x_{ii}) formée des éléments diagonaux de x ; K est donc produit semi-direct des sous-groupes Z et D . Afin d'appliquer la méthode de (I), nous allons d'abord déterminer la mesure de Haar sur Z .

Pour cela, désignons par Z_k le sous-groupe de Z formé des matrices (z_{ij}) telles que $z_{ij}=0$ pour $1\leq i-j\leq k$ $(1\leq k\leq n-2)$. On vérifie aisément que Z_1 est distingué dans Z et Z_{k+1} distingué dans Z_k pour $1\leq k\leq n-2$. En outre, pour que deux matrices z,z' de Z_k appartiennent à la même classe mod.Z_{k+1} , il faut et il suffit que l'on ait $z_{j+k+1,j}=z'_{j+k+1,j}$ pour $1\leq j\leq n-k-1$; le groupe quotient Z_k/Z_{k+1} s'identifie donc (en tant que groupe topologique) au groupe additif $\mathcal{R}^{n-k-1}$ (resp. $\mathcal{C}^{n-k-1}$).

Cela étant, nous allons démontrer, par récurrence descendante sur k , que la mesure de Haar sur Z_k est

$$(5) \qquad f \longrightarrow \int_{\mathcal{R}^m} f(z) \prod_{i-j>k} dz_{ij} \qquad \left(m=\frac{(n-k)(n-k-1)}{2}\right)$$

et que Z_k est unimodulaire. La proposition est évidente pour $k=n-2$, puisqu'alors Z_{n-1} est isomorphe à $\mathcal{R}$ (resp. $\mathcal{C}$). Supposons-la démontrée pour Z_{k+1} ; la formule (2), appliquée à Z_k et Z_{k+1} , donne

$$\int_{Z_k} f(z)dz = \int_{\mathcal{R}^{n-k-1}} dz_{k+2,1}\cdots dz_{n,n-k-1} \int_{Z_{k+1}} f(z\xi)d\xi$$

Or, si $\xi=(\xi_{ij})\in Z_{k+1}$, et si on pose $z\xi=(x_{ij})$, on a

$$x_{j+k+1,j} = z_{j+k+1,j} \qquad (1\leq j\leq n-k-1)$$

45

et, pour $h > k$

$$(6) \qquad x_{j+h+1,j} = z_{j+h+1,j} + \sum_{r=j+k+r}^{j+h-k} z_{j+h+1,r}\xi_{r,j} + \xi_{j+h+1,j}$$

Utilisons alors l'hypothèse de récurrence pour calculer l'intégrale $\int_{Z_{k+1}} f(z\xi)d\xi$. Appliquant le théorème de Lebesgue-Fubini, on intègre successivement par rapport aux $\xi_{i,j}$ pour $i-j=n-1,n-2,\ldots,k+2$, et on obtient, en tenant compte que, dans (6), les $\xi_{r,j}$ autres que $\xi_{j+h+1,j}$ sont tels que $r-j<h+1$

$$\int_{Z_{k+1}} f(z\xi)d\xi = \int f(z) \prod_{i-j>k+1} dz_{ij}$$

d'où la formule (5). En outre, si $z\xi z^{-1} = (y_{ij})$, on constate aisément que $y_{j+h+1,j}$ est somme de $\xi_{j+h+1,j}$ et d'un polynome linéaire par rapport aux $\xi_{r,j}$ tels que $r-j<h+1$; en intégrant de la même manière que ci-dessus dans Z_{k+1}, on voit que $\Delta(v_z)=1$; l'hypothèse de récurrence et le cor.1 de la prop.3 montrent alors que Z_k est unimodulaire.

Il est maintenant facile de déterminer la mesure de Haar et le module du groupe K . Bornons-nous pour simplifier au cas des matrices réelles. Le groupe D est isomorphe au produit de n groupes $\mathbb{R}^*$; d'autre part, si $s=(s_i)$ est une matrice diagonale, $z=(z_{ij})$ une matrice de Z , on a

$$szs^{-1} = (s_i z_{ij} s_j^{-1})$$

d'où, en vertu de ce qui précède

$$\Delta(v_s) = |s_1|^{n-1} |s_2|^{n-3} \ldots |s_n|^{1-n} \quad .$$

Appliquons alors la formule (3) ; pour une matrice $x=(x_{ij})$ de K , écrite sous la forme zs , où $z=(z_{ij}) \in Z$ et $s=(s_i)$ est dans D , on a $s_i=x_{ii}$, $z_{ij}=x_{ij}s_j^{-1} = x_{ij}x_{jj}^{-1}$ pour $i > j$. Intégrant d'abord par rapport aux z_{ij} $(i>j)$ et utilisant la formule du changement de variables dans l'intégrale de Lebesgue, on obtient finalement pour mesure de Haar sur K

$$f \to \int_{\mathbb{R}^{*n}} dx_{11}\cdots dx_{nn} \int_{\mathbb{R}^{n(n-1)/2}} f(x)|x_{11}|^{-1}\cdots|x_{nn}|^{-n} \prod_{i>j} dx_{ij} .$$

En outre, la formule (4) donne pour module du groupe K

$$\Delta(x)=|x_{11}|^{n-1}|x_{22}|^{n-3}\cdots|x_{nn}|^{1-n} .$$

On traite de même le cas du groupe K_1 formé des matrices de K dont le déterminant $x_{11}x_{22}\cdots x_{nn}=1$; il est produit semi-direct de Z et du groupe D_1 des matrices diagonales de déterminant 1 . Ce dernier est isomorphe au produit de n-1 groupes $\mathbb{R}^*$; on en déduit que la mesure de Haar sur K_1 est

$$f \to \int_{\mathbb{R}^{*(n-1)}} dx_{22}\cdots dx_{nn} \int_{\mathbb{R}^{n(n-1)/2}} f(x)|x_{22}|^{-2}\cdots|x_{nn}|^{-n} \prod_{i>j} dx_{ij}$$

et le module est donné par

$$\Delta(x) = |x_{22}|^{-2}\cdots|x_{nn}|^{-2n+2} .$$

Si on transforme K_1 par la transformation linéaire $(x_i) \to (x_{n+1-i})$ K_1 devient le groupe K_1' des matrices $y=(y_{ij})$ telles que $y_{ij}=0$ pour $i>j$, et la mesure de Haar sur K_1' est donc

$$\int_{\mathbb{R}^{*(n-1)}} dx_{11}\cdots dx_{n-1,n-1} \int_{\mathbb{R}^{n(n-1)/2}} f(x)|x_{11}|^{-n} \cdots\cdots|x_{n-1,n-1}|^{2} \prod_{i<j} dx_{ij}$$

III. <u>Groupe linéaire spécial</u>. Cherchons la mesure de Haar dans le groupe $G=SL_n(\mathbb{R})$ des matrices d'ordre n et de déterminant 1 . Considérons dans G , d'une part le sous-groupe Z des matrices (z_{ij}) telles que $z_{ij}=0$ pour $i<j$, $z_{ii}=1$ $(1\leqslant i\leqslant n)$; d'autre part le sous-groupe K_1' des matrices $y=(y_{ij})$ telles que $y_{ij}=0$ pour $i>j$, $\prod_{i=1}^{n} y_{ii}=1$. Soit M l'ensemble des matrices $x=(x_{ij})$ de G qui sont de la forme yz , où $y\in K_1'$ et $z\in Z$. L'équation $x=yz$ équivaut au système de n^2 équations

$$(S_n) \qquad x_{in} = y_{in} \qquad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

$$(S_{n-1}) \qquad \begin{cases} x_{n,n-1} = y_{nn} z_{n,n-1} & \\ x_{i,n-1} = y_{i,n-1} + y_{in} z_{n,n-1} & (1 \leqslant i \leqslant n-1) \end{cases}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(S_{n-k}) \qquad \begin{cases} x_{n,n-k} = y_{nn} z_{n,n-k} & \\ x_{n-1,n-k} = y_{n-1,n-1} z_{n-1,n-k} + y_{n-1,n} z_{n,n-k} & \\ \cdots\cdots\cdots & \\ x_{n-k+1,n-k} = y_{n-k+1,n-k+1} z_{n-k+1,n-k} + \cdots + y_{n-k+1,n} z_{n,n-k} & \\ x_{i,n-k} = y_{i,n-k} + \sum_{h=1}^{k} y_{i,n-k+h} z_{n-k+h,n-k} & (1 \leqslant i \leqslant n-k) \\ \cdots\cdots\cdots & \end{cases}$$

$$(0 \leqslant k \leqslant n-1)$$

Montrons par récurrence sur k que les systèmes $(S_n), \ldots, (S_{n-k})$ déterminent les y_{ij} tels que $j \geqslant n-k$ et les z_{ij} tels que $j \geqslant n-k$ en fonctions rationnelles des x_{ij}, définies pour les x n'annulant pas un certain nombre de polynômes $\psi_h(x)$ par rapport aux x_{ij}. En effet, la proposition est évidente pour $k=0$; les k premières équations du système (S_{n-k}) déterminent les $z_{i,n-k}$ en fonctions rationnelles des x_{ij}, définies pourvu que les numérateurs et dénominateurs de $y_{nn}, y_{n-1,n-1}, \ldots, y_{n-k+1,n-k+1}$ ne soient pas nuls ; les $n-k$ dernières équations de (S_{n-k}) déterminent alors les $y_{i,n-k}$ $(1 \leqslant i \leqslant n-k)$ en fonction rationnelle des x_{ij} dans les mêmes conditions, ce qui montre que la récurrence se poursuit.

L'ensemble des $x \in G$ annulant un des ψ_h étant fermé, son complémentaire $M = K_1^{\dagger} Z$ est donc <u>ouvert</u> dans G et contient l'élément neutre. D'ailleurs, pour tout $x \in M$, l'équation $yz=x$ n'a qu'une solution $y \in K_1^{\dagger}$, $z \in Z$ et les y_{ij} et z_{ij} sont fonctions continues de x dans M ;

l'application $(y,z) \to yz$ est donc un homéomorphisme de $K'_1 \times Z$ sur M. En outre, M est réunion des classes à gauche des éléments de K'_1 modulo le sous-groupe Z ; l'image canonique M' de M dans l'espace homogène G/Z est donc homéomorphe à K'_1 et est une partie ouverte de G/Z (Top.gén.R, § 7, n°22). Cela étant, le groupe G est identique à son groupe des commutateurs (Alg.,...?), donc unimodulaire ; et nous avons vu ci-dessus (II) que Z est aussi unimodulaire ; il existe donc sur G/Z une mesure μ-invariante à gauche par G et une seule à un facteur constant près (th.1). Or, si on identifie M' à K'_1 par l'application canonique de G sur G/Z, la mesure induite par μ sur K'_1 est invariante à gauche par K'_1, donc c'est une mesure de Haar sur K'_1. La formule (1) et la propriété d'unicité locale de la mesure de Haar (§ 1, Remarque suivant le th.1) montrent donc que si on identifie M à $K'_1 \times Z$, la mésure produit des mesures de Haar sur K'_1 et Z est identique à la mesure induite sur M par une mesure de Haar sur G.

On peut en outre montrer (Livre ?) que $\complement M$ est négligeable pour toute mesure de Haar sur G, d'où la formule

$$\int_G f(x)dx = \iint_{K'_1 \times Z} f(yz)dy\,dz$$

valable pour toute fonction $f \in \mathcal{K}(G)$.

Pour $n=2$, les équations (S_j) donnent

$$y_{11} = 1/x_{22}\ ,\quad y_{12} = x_{12}\ ,\quad y_{22} = x_{22}\ ,\quad z_{21} = x_{21}/x_{22}$$

d'où la mesure de Haar sur SL_2

$$\frac{dx_{12}\,dx_{21}\,dx_{22}}{x_{22}}$$

On notera que le groupe $SL_n(\mathbb{R})$ est unimodulaire, mais que le sous-groupe K'_1 de $SL_n(\mathbb{R})$ ne l'est pas.

A 198

Si on considère le quotient $PSL_2(\mathbf{R})$ de $SL_2(\mathbf{R})$ par son centre $C \subset K_1'$, comprenant 2 éléments, on voit que ce groupe est unimodulaire. Si on le considère comme le groupe des transformations homographiques $z \rightarrow (\alpha z+\beta)/(\gamma z+\delta)$ avec $\alpha\delta-\beta\gamma = 1$, sur la droite projective $P_1(\mathbf{R})$, K_1'/C est le sous-groupe formé des transformations laissant invariant le point à l'infini $(1,0)$ (transformations $z \rightarrow \alpha^2 z+\beta$). On en conclut qu'il n'existe pas de mesure relativement invariante sur l'espace <u>compact</u> $P_1(\mathbf{R})$, pour le groupe des transformations homographiques.

4. <u>Décomposition des mesures invariantes. Mesures quasi-invariantes.</u>

Soient G un groupe localement compact polonais, E un espace localement compact polonais. Supposons que E soit muni du groupe d'opérateurs G (<u>Alg.</u>, chap.I, § 7, n°2), et que la loi de composition externe $(s,x) \rightarrow sx$ sur E, ayant G comme domaine d'opérateurs, soit une application <u>continue</u> de $G \times E$ dans E. Soit $R\{x,y\}$ la relation d'équivalence dans E : "il existe $s \in G$ tel que $sx=y$", dont les classes d'équivalence sont donc les classes d'intransitivité de G dans E.

Soit alors μ une mesure sur E, <u>relativement invariante</u> par G, de multiplicateur χ (qui est nécessairement une représentation continue de G dans C^* (<u>Top.gén.</u> R, § 13, n°8)). La relation $R\{x,y\}$ n'est pas nécessairement mesurable pour μ (chap.VI, § 3, n°5) (cf. exerc.1) ; elle l'est toutefois lorsque G est <u>compact</u>, car alors le saturé de toute partie compacte K de E pour la relation R est l'image de $G \times K$ par l'application continue $(s,x) \rightarrow sx$, donc est compact ; on en déduit que la relation induite par R sur K est séparée, d'où notre assertion. Le même raisonnement s'applique lorsque $(s,x) \rightarrow sx$ est une application <u>propre</u>.

Supposons désormais que R soit μ-mesurable. Alors (chap.VI, § 3, prop.4) il existe un espace localement compact polonais B et une application μ-mesurable p de E dans B telle que $R\{x,y\}$ soit équivalente à $p(x)=p(y)$. Soit ν une mesure quotient de μ par R, pseudo-image de μ par p, et soit $t \rightarrow \lambda_t$ une désintégration de μ relative à la mesure ν.

PROPOSITION 4.- Si R est une relation μ-mesurable et ν une mesure quotient de μ par R, alors, pour presque tout $t \in B$, la mesure λ_t est relativement invariante, de multiplicateur χ.

En effet, par hypothèse, pour tout $s \in G$ et toute fonction $f \in \mathcal{K}(E)$, on a $\int f(sx)d\mu(x) = \chi(s)\int f(x)d\mu(x)$, ce qui s'écrit

$$\int d\nu(t)\int f(sx)d\lambda_t(x) = \chi(s)\int d\nu(t)\int f(x)d\lambda_t(x) \quad . \tag{7}$$

En vertu du théorème d'unicité de la désintégration d'une mesure (chap.VI, § 3, th.2), il existe un ensemble ν-négligeable N_s dans B tel que pour tout $t \notin N_s$, on ait

$$\int f(sx)d\lambda_t(x) = \chi(s)\int f(x)d\lambda_t(x) \tag{8}$$

pour toute fonction $f \in \mathcal{K}(E)$. Soit (s_n) une suite partout dense dans G, et soit N l'ensemble ν-négligeable réunion des N_{s_n}. Pour tout $t \notin N$ et tout entier n, on a donc

$$\int f(s_n x)d\lambda_t(x) = \chi(s_n)\int f(x)d\lambda_t(x) \tag{9}$$

Or, pour tout $s \in G$, il existe une suite partielle (s_{n_k}) qui converge vers s ; la réunion des supports des fonctions $x \rightarrow f(s_{n_k}x)$ est relativement compacte, et cette suite de fonctions tend uniformément vers $x \rightarrow f(sx)$; passant à la limite dans (9), il vient l'équation (8) pour tout $s \in G$, tout $t \notin N$ et toute fonction $f \in \mathcal{K}(E)$, d'où la proposition.

Changeant de notation, considérons maintenant un groupe localement compact polonais G et un sous-groupe fermé Γ de G. Pour la loi externe $(x,\xi) \longrightarrow x\xi$, le groupe G est muni d'un groupe d'opérateurs opposés à Γ, et la relation $R\{x,y\}$: "il existe $\xi \in \Gamma$ tel que $y=x\xi$" a pour classes d'équivalence les classes à gauche mod. Γ dans G. Appliquons ce qui précède à la mesure invariante à droite $d\mu(x) = \Delta(x^{-1})dx$ sur le groupe G ; la relation $R\{x,y\}$ est mesurable pour cette mesure, étant séparée, et on peut prendre pour espace B l'espace homogène $H=G/\Gamma$; désignons par φ l'application canonique de G sur H. Soient ν une mesure quotient de μ par R, et $t \to \lambda_t$ une désintégration de μ relative à ν ; la prop.4 montre que pour presque tout $t \in H$, λ_t est une mesure <u>invariante</u> par les translations à droite de Γ ; comme elle est concentrée sur $\overset{-1}{\varphi}(t)$, qui est une classe à gauche $a\Gamma$ ($a \in G$) (donc un sous-ensemble fermé de G), la mesure induite par λ_t sur $a\Gamma$ est aussi invariante par les translations à droite de Γ ; elle est donc transportée par la translation à gauche $x \to ax$ d'une mesure invariante à droite sur Γ. Cela étant, pour tout $s \in G$, on a

$$\int f(sx)\,\Delta(x^{-1})dx = \Delta(s^{-1})\int f(x)\,\Delta(x^{-1})dx$$

Désignons par λ'_{st} la mesure $\gamma_s(\lambda_t)$, portée par la classe $st \in H$. On a $\int f(sx)\,\Delta(x^{-1})dx = \int d\nu(t)\int f(sx)d\lambda_t(x) = \int d\nu(t)\int f(x)d\lambda'_{st}(x)$

Mais si on pose $\nu' = \theta_s(\nu)$, et $f'(t) = \int f(x)d\lambda'_t(x)$, on a

$$\int d\nu(t)\int f(x)d\lambda'_{st}(x) = \int f'(st)d\nu(t) = \int f'(t)d\nu'(t)$$

d'où la relation

$$\int f(x)\,\Delta(x^{-1})dx = \int d\nu(t)\int f(x)d\lambda_t(x)$$
$$= \Delta(s)\int d\nu'(t)\int f(x)d\lambda'_t(x) \quad .$$

Comme λ'_t est concentrée sur $\overset{-1}{\varphi}(t)$, le théorème d'unicité de la désintégration d'une mesure (chap.VI, § 3, th.2) prouve que les mesures ν et ν' sur H sont <u>équivalentes</u> ; on dit que ν est une mesure <u>quasi-invariante</u> sur H, par les opérateurs de G ; une telle mesure n'est définie qu'à une équivalence près, mais pour toutes les mesures quasi-invariantes sur H , la notion d'ensemble négligeable est la même, et tout opérateur de G transforme un ensemble négligeable en ensemble négligeable.

Bien entendu, lorsqu'il existe sur H une mesure relativement invariante par les opérateurs de G (n°2), les mesures quasi-invariantes sur H sont simplement les mesures équivalentes à une mesure relativement invariante.

5. Application au calcul de mesures relativement invariantes.

I. Mesure de la boule dans $\mathbb{R}^n$. L'espace $E = \mathbb{R}^n$ peut être considéré comme muni du groupe d'opérateurs $O_n(\mathbb{R})$, groupe orthogonal à n variables sur $\mathbb{R}$, sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$; la loi de composition externe $(\underline{U},x) \to \underline{U}.x$ est évidemment continue dans $O_n \times \mathbb{R}^n$, et les classes d'intransitivité de O_n dans $\mathbb{R}^n$ sont les sphères de centre 0 (et l'ensemble réduit au point 0) ; on sait d'ailleurs que $\mathbb{R}^n_*$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^*_+ \times S_n$ (Top.gén., chap.VI, § 2,prop.3), et par suite l'espace quotient E/R peut être identifié à $\mathbb{R}_+$. Cela étant, nous avons vu que la mesure de Haar $dx = dx_1 \dots dx_n$ sur E est invariante par O_n (§ 1, n°4, exemple 3) ; on peut donc l'écrire $\int \lambda_t d\nu(t)$, où ν est une mesure sur $\mathbb{R}_+$ et λ_t une mesure sur $\mathbb{R}^n$, portée par la sphère $\|x\| = t$ et invariante par O_n . Si on désigne par S(t) la mesure de cette sphère (pour la mesure λ_t), la mesure (de Lebesgue) de la boule $\|x\| \leq a$ est $\int_0^a S(t)d\nu(t)$. La fonction S(t) est donc localement intégrable pour ν (chap.V, § 2, th.1) ; en multipliant la mesure ν par une fonction proportionnelle à S , on peut donc supposer que S(t) est une constante H_{n-1} . La mesure de Lebesgue de la boule de rayon r est alors $H_{n-1}\int_0^r d\nu(t)$; mais on sait (§ 1,n°4, exemple 3) qu'elle est de la forme $k.r^n$, et par suite $d\nu(t)$ est proportionnelle à la mesure de Stieltjes $t^{n-1}dt$; on achève de préciser la constante H_{n-1} en prenant $d\nu(t)=t^{n-1}dt$; la mesure de Lebesgue de la boule unité $\mathcal{B}_n$ est alors $H_{n-1}\int_0^{1} t^{n-1}dt = H_{n-1}/n$. Comme chaque sphère $\|x\| = t$ peut être identifié à un espace homogène du groupe compact $O_n(\mathbb{R})$, et que l'homothétie $x \to tx$ transforme S_{n-1} en la sphère $\|x\| = t$ et permute avec les transformations orthogonales, il résulte de l'unicité de la mesure invariante sur un espace homogène et du choix des λ_t que la mesure λ_t est transportée par $x \to tx$ de la mesure λ_1 portée par la sphère unité S_{n-1} , mesure que nous désignerons par ω_{n-1} . On en conclut que la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n_*$ peut être considérée comme la <u>mesure produit</u> $\omega_{n-1} \otimes \nu$, en d'autres termes, pour toute fonction $f \in \mathcal{K}(E)$, on a

$$(10) \qquad \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \int_{\mathbb{R}_+} t^{n-1}dt \int_{S_{n-1}} f(tz)d\omega_{n-1}(z) \quad .$$

Nous allons calculer la mesure invariante ω_{n-1} . Remarquons pour cela que S_{n-1} peut être considérée comme munie du groupe d'opérateurs O_{n-1}, les classes d'intransitivité étant les intersections de S_{n-1} et des hyperplans $x_n = h$ $(-1 \leq h \leq 1)$; soit L_h cette intersection. Le groupe O_{n-1} étant sous-groupe de O_n , la mesure ω_{n-1} est invariante par O_{n-1} et peut par suite d'écrire $\int \lambda_h d\nu(h)$ où λ_h est une mesure invariante par O_{n-1}, portée par L_h , et ν est une mesure sur l'espace quotient correspondant (qu'on peut identifier à $[-1,+1]$). En outre, pour tout h , l'application $z \to he_n + \sqrt{1-h^2}\,z$ est un homéomorphisme de $L_0 = S_{n-2}$ sur L_h , permutable aux opérateurs de O_{n-1} ; on voit donc comme ci-dessus qu'on peut supposer que λ_h est transportée de ω_{n-2} par l'homéomorphisme précédent ; sur le complémentaire dans S_{n-1} de l'ensemble $\{e_n, -e_n\}$, qui est homéomorphe au produit $S_{n-2} \times [-1,+1]$, la mesure ω_{n-1} est donc la mesure produit $\omega_{n-2} \otimes \nu$; il reste à calculer ν.

Soit K_θ la partie de la sphère S_{n-1} définie par $\sin\theta \leqslant x_n \leqslant 1$, et soit M_θ le "secteur" formé des points tz, avec $0 \leqslant t \leqslant 1$ et $z \in K_\theta$; la mesure de Lebesgue de M_θ est $\frac{1}{n}\,\omega_{n-1}(K_\theta)$ en vertu de la formule (10). D'autre part, M_θ est réunion de la "calotte" P_θ formée des points de $\mathcal{B}_n$ tels que $\sin\theta \leqslant x_n \leqslant 1$, et du "cône" Q_θ formé des $x=tz$, avec $0 \leqslant t < 1$, et z dans l'intersection de $\mathcal{B}_n$ et de l'hyperplan $x_n = \sin\theta$. La mesure de Lebesgue de M_θ est donc somme de celles de P_θ et Q_θ ; en vertu du th. de Lebesgue-Fubini, la mesure de P_θ est

$$\frac{H_{n-2}}{n-1}\int_\theta^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\varphi \, d\varphi$$

et celle de Q_θ est

$$\frac{H_{n-2}}{n(n-1)}\cos^{n-1}\theta \sin\theta \;.$$

Mais en intégrant par parties, on a

$$\int_\theta^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\varphi\,d\varphi = -\cos^{n-1}\theta\sin\theta + (n-1)\int_\theta^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-2}\varphi\sin^2\varphi\,d\varphi$$

$$= -\cos^{n-1}\theta\sin\theta + (n-1)\int_\theta^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-2}\varphi\,d\varphi - (n-1)\int_\theta^{\frac{\pi}{2}}\cos^n\varphi\,d\varphi$$

d'où finalement, pour mesure de M_θ

$$\frac{H_{n-2}}{n}\int_\theta^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-2}\varphi\,d\varphi$$

et $\omega_{n-1}(K_\theta) = H_{n-2}\int_\theta^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-2}\varphi\,d\varphi$. Si on pose $h = \sin\theta$, la mesure de Stieltjes $d\nu(h)$ est donc $\cos^{n-2}\theta\,d\theta$ $(-\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2})$ pour $n \geqslant 3$.

Par récurrence sur n, on voit finalement que la mesure $d\omega_{n-1}$ sur S_{n-1} est

(11) $\qquad \cos^{n-2}\theta_1 \cos^{n-3}\theta_2 \ldots \cos\theta_{n-2}\, d\theta_1 d\theta_2 \ldots d\theta_{n-1}$

où on a posé

$$\begin{aligned} x_1 &= \sin \theta_1 \\ x_2 &= \cos \theta_1 \sin \theta_2 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ x_{n-1} &= \cos \theta_1 \cos \theta_2 \ldots \cos \theta_{n-2} \sin \theta_{n-1} \\ x_n &= \cos \theta_1 \cos \theta_2 \ldots \cos \theta_{n-2} \cos \theta_{n-1} \end{aligned}$$

avec les conditions $-\frac{\pi}{2} \leqslant \theta_i \leqslant \frac{\pi}{2}$ pour $1 \leqslant i \leqslant n-2$, $0 \leqslant \theta_{n-1} < 2\pi$.

Si on remarque que l'on a

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m \varphi \, d\varphi = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{m+1}{2})}{\Gamma(\frac{m+2}{2})}$$

(Fonct.var.rélle, chap.VII, §1, formule (20)), on ~~xxx~~ obtient en particulier la formule

$$\text{(12)} \qquad H_{n-1} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$$

pour la mesure de la sphère S_{n-1} , d'où la mesure de la boule B_n .

II. Mesure de Haar du groupe des rotations $O_3^+(\mathbb{R})$. Toute matrice d'une rotation dans $\mathbb{R}^3$ peut s'écrire d'une seule manière sous la forme

$$\text{(13)} \quad \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\theta & -\cos\varphi\sin\psi - \sin\varphi\cos\psi\cos\theta & \sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi\cos\theta & -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos\theta & -\cos\varphi\sin\theta \\ \sin\psi\sin\theta & \cos\psi\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

avec $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, $0 \leqslant \psi < 2\pi$ ("angles d'Euler"). On en déduit que cette matrice peut s'écrire aussi sous la forme d'un produit de deux matrices de O_3^+ (rotation autour d'un axe orthogonal à e_3 , et rotation autour de e_3)

$$\text{(14)} \quad \begin{pmatrix} 1-2\sin^2\frac{\theta}{2}\sin^2\varphi & 2\sin^2\frac{\theta}{2}\sin\varphi\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi \\ 2\sin^2\frac{\theta}{2}\sin\varphi\cos\varphi & 1-2\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\varphi & -\sin\theta\cos\varphi \\ -\sin\theta\sin\varphi & \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\omega & -\sin\omega & 0 \\ \sin\omega & \cos\omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avec $\omega = \psi+\varphi$, le second facteur appartenant au sous-groupe O_2^+ .
L'espace homogène O_3^+/O_2^+ peut être identifié à la sphère S_2 ; les formules (1) et (11) montrent que la mesure de Haar μ sur O_3^+ est donnée par

$$\int f(\theta,\varphi,\psi)d\mu = \int_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} f(\theta,\varphi,-\varphi+\omega)d\omega$$

$$= \int_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} f(\theta,\varphi,\psi)d\psi$$

III. <u>Mesure invariante par déplacement dans l'ensemble des droites de $\mathbb{R}^3$.</u>

On a vu que le groupe des déplacements euclidiens D dans $\mathbb{R}^3$ est produit semi-direct du groupe $\mathbb{R}^3$ des translations et du groupe des rotations $O_3^+(\mathbb{R})$, tout déplacement pouvant se mettre d'une seule manière sous la forme $t(\xi,\eta,\zeta)r(\varphi,\psi,\theta)$, où t est la translation de vecteur (ξ,η,ζ) et $r(\varphi,\psi,\theta)$ la rotation dont la matrice est (13) ; toute fonction f définie sur D peut donc être considérée comme fonction des 6 variables $\xi,\eta,\zeta,\varphi,\psi,\theta$ et la mesure de Haar sur D est (d'après (II)) $\sin\theta\, d\xi\, d\eta\, d\zeta\, d\varphi\, d\psi\, d\theta$. En outre D est unimodulaire.

Soit E l'espace des droites de $\mathbb{R}^3$; on peut le considérer, algèbriquement, comme espace homogène D/H , où H est le sous-groupe fermé de D laissant invariante une droite, par exemple l'axe $\mathbb{R}e_3$; il est immédiat que H est le groupe produit du groupe des translations $t(0,0,\zeta)$ isomorphe à $\mathbb{R}$, et du groupe des rotations $r(\omega,0,0)$ isomorphe à U ; ce groupe étant, comme D , unimodulaire, il existe donc sur E , muni de la topologie quotient de D par H , une mesure <u>invariante</u> par D , que nous allons déterminer.

Soit E_1 le sous-espace ouvert de E , formé des droites non orthogonales à e_3 ; une telle droite peut être déterminée par sa trace sur le plan $\mathbb{R}e_1+\mathbb{R}e_2$, donnée par ses coordonnées (ξ',η') et les coordonnées $(\sin\varphi\sin\theta, -\sin\theta\cos\varphi , \cos\theta)$ d'un vecteur directeur .

Il est immédiat que le déplacement $t(\xi', \eta', 0)r(\varphi, -\varphi, \theta)$ transforme l'axe $\mathbb{R}e_3$ en cette droite, et on en déduit que, topologiquement, E_1 peut être identifié au produit de $\mathbb{R}^2$, de $\mathbb{T}$ et du complémentaire de $\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ dans $[0, \pi]$. En outre, toute transformation de D appartenant à l'image réciproque de E_1 par l'application canonique, peut se mettre d'une seule manière sous la forme

$$t(\xi', \eta', 0)r(\varphi, -\varphi, \theta)t(0, 0, \zeta')r(\omega, 0, 0)$$

Un calcul immédiat montre que cette dernière transformation peut s'écrire $t(\xi, \eta, \zeta)r(\varphi, \omega-\varphi, \theta)$ avec

$$\begin{aligned} \xi &= \xi' + \zeta' \sin\theta \sin\varphi \\ \eta &= \eta' - \zeta' \sin\theta \cos\varphi \\ \zeta &= \zeta' \cos\theta \end{aligned}$$

d'où

$$\int f(\xi, \eta, \zeta, \varphi, \psi, \theta) \sin\theta \, d\xi \, d\eta \, d\zeta \, d\varphi \, d\psi \, d\theta =$$
$$= \int \sin\theta \cos\theta \, d\xi' \, d\eta' \, d\varphi \, d\theta \, .$$
$$\int f(\xi' + \zeta' \sin\theta \sin\varphi, \eta' - \zeta' \sin\theta \cos\varphi, \zeta' \cos\theta, \varphi, \omega-\varphi, \theta) d\zeta' d\omega$$

En vertu de la formule (1), on voit donc que la mesure invariante sur E_1 est donnée par

$$\sin\theta \, |\cos\theta| \, d\xi' \, d\eta' \, d\varphi \, d\theta \, .$$

Exercices.- 1) Soient φ l'application canonique de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$; θ étant un nombre irrationnel, on considère $\mathbb{T}$ comme muni du groupe d'opérateurs $\mathbb{Z}$ de la façon suivante : pour tout $n \in \mathbb{Z}$, θ_n est l'opérateur qui, à tout $x \in \mathbb{T}$, fait correspondre $x + \varphi(n\theta)$. La mesure de Haar sur $\mathbb{T}$ est donc invariante par $\mathbb{Z}$; montrer que la relation d'équivalence dans $\mathbb{T}$, dont les classes d'équivalence sont les classes d'intransitivité de $\mathbb{Z}$, n'est pas mesurable pour la mesure de Lebesgue (remarquer que le saturé de tout ensemble compact est partout dense).

2) Soit G un groupe localement compact, $\Delta(s)$ le module sur G ; montrer que le noyau de Δ est le plus grand sous-groupe distingué unimodulaire de G .

3) Soient G un groupe localement compact non discret et dénombrable à l'infini, E un espace localement compact polonais, muni du groupe d'opérateurs G , la loi de composition externe $(s,x) \rightarrow sx$ étant continue dans $G \times E$. Montrer qu'il existe un sous-groupe distingué fermé H de G tel que $sx=x$ pour tout $s \in H$ et tout $x \in E$, et que G/H soit un groupe localement compact polonais (considérer une base (U_n) de la topologie de E , formée d'ensembles ouverts relativement compacts, et pour tout couple (m,n) tel que $\overline{U}_m \subset U_n$, soit V_{mn} le voisinage de e dans G formé des $s \in G$ tels que $s.U_m \subset U_n$; procéder alors comme dans l'exerc.2 du § 1). En déduire que la prop.4 est encore valable sous les hypothèses faites ci-dessus.

4) Soient G un groupe localement compact, G',G" deux sous-groupes fermés de G tels que $G'' \subset G'$; soient Δ, Δ', Δ'' les modules de G,G',G". On suppose que $\Delta'(s)= \Delta''(s)$ pour tout $s \in G''$; il existe par suite sur G'/G" une mesure μ invariante par G'. Pour toute fonction $f \in \mathcal{K}(G/G'')$ et tout $x \in G$, soit $f'(x)=\int_{G'/G''} f(x\xi)d\mu(\xi)$; on a $f'(xx')=f'(x)$ pour tout $x' \in G'$ et on peut donc écrire $f'=f^{\natural} \circ \varphi$, en désignant par φ l'application canonique de G sur G/G', et par $f^{\natural}$ une fonction numérique définie dans G/G' .

a) Généraliser la prop.1 à l'application $f \rightarrow f^{\natural}$.

b) Pour toute mesure ν sur G/G', $f \rightarrow \nu(f^{\natural})$ est une mesure sur G/G", qu'on note $\nu^{\natural}$. Si ν est une mesure relativement invariante sur G/G', de multiplicateur χ (ce qui exige $\chi(s')\Delta(s')= \Delta'(s')$ pour tout $s' \in G'$), $\nu^{\natural}$ est une mesure relativement invariante sur G/G", de même multiplicateur.

c) On suppose G, G', G' unimodulaires ; soit d'autre part Γ un sous-groupe fermé unimodulaire de G tel que $G'' \subset \Gamma$, et supposons que l'espace homogène G'/G'' ait une mesure totale finie (pour sa mesure invariante par G') ; montrer que si λ, μ, ν sont des mesures invariantes dans G/G', G/Γ, Γ/G'' on a, pour toute fonction $f \in \mathcal{K}(G\, G')$, en désignant par φ l'application canonique de G/G'' sur G/G'

$$a.\int_{G/G'} f(x)d\lambda(x) = \int_{G/\Gamma} d\mu(\dot{y}) \int_{\Gamma/G''} f(\varphi(y\dot{\xi}))d\nu(\dot{\xi})$$

où a est une constante.

5) Soit G le groupe unimodulaire $SL_n(\mathbf{R})$, Γ le sous-groupe discret de G formé des matrices de déterminant 1, à coefficients entiers. Montrer, par récurrence sur n, que la mesure invariante μ sur l'espace homogène G/Γ est finie et que, pour toute fonction $f \in \mathcal{K}(\mathbf{R}^n)$, on a, en choisissant convenablement μ

$$(1) \qquad \int_{\mathbf{R}^n} f(x)dx = \int_{G/\Gamma} \Big(\sum_{z \in Z^n,\, z \neq 0} f(X.z)\Big)d\mu(\dot{X}) \ .$$

(Utiliser les résultats de l'exerc.4, en prenant pour G' le sous-groupe de G laissant invariant le vecteur de base e_1, de sorte que G/G' peut être identifié à $\mathbf{R}^n$, et pour G'' le sous-groupe $G' \cap \Gamma$. Soit d'autre part H le sous-groupe des matrices $\begin{pmatrix} 1 & w \\ 0 & \underline{Y} \end{pmatrix}$ de G' pour lesquelles $\underline{Y}$ a ses éléments entiers ; utiliser l'hypothèse de récurrence pour montrer que G'/H et H/G'' ont une mesure totale finie, puis déduire de l'exerc.4 qu'il en est de même de G'/G''. Appliquer alors l'exerc. 4c), en utilisant l'exerc. 20 b) d'Alg., chap.VII, § 4 ; pour montrer que la mesure de G/Γ est finie, appliquer (1) en remplaçant f par la fonction $t \to \varepsilon^n f(\varepsilon t)$, f étant $\geqslant 0$; faire tendre ε vers 0 et en déduire que toute partie compacte de G/Γ a une mesure $\leqslant 1$).

6) Soient G un groupe localement compact, Γ et Γ' deux sous-groupes fermés de G. On dit que Γ' est <u>propre sur</u> G/Γ si, pour tout $z \in G/\Gamma$, l'application $s \to sz$ de Γ' dans G/Γ est propre (<u>Top.gén.</u>,chap.I, 2$^{\text{e}}$ éd., § 10,n°9).

a) Montrer que chacune des conditions suivantes est nécessaire et suffisante pour que Γ' soit propre sur G/Γ : 1° pour tout $s \in G$ et toute partie compacte $K \subset G$, $\Gamma' \cap (K\Gamma s)$ est compact (utiliser l'exerc.14 de <u>Top.gén.</u>,chap.III, § 2) ; 2° pour tout $s \in G$ l'application $(\sigma, \sigma') \to \sigma s \sigma'$ de $\Gamma \times \Gamma'$ dans G est propre.

b) Montrer que, pour que Γ' soit propre sur G/Γ, il faut et il suffit que Γ soit propre sur G/Γ'.

c) Soient E un espace localement compact, Γ un groupe localement compact d'homéomorphismes de E, tel que pour tout $x \in E$, l'application $\sigma \to \sigma(x)$ soit propre, et qu'il existe sur E une mesure μ invariante par Γ et pour laquelle E soit de masse totale finie. Montrer que dans ces conditions Γ est compact (utiliser l'exerc.17 du chap.IV, § 4 pour montrer que toute suite (σ_n) de points de E est relativement compacte ; appliquer ensuite l'exerc.2 de <u>Top.gén.</u>,chap.II, 2$^{\text{e}}$ éd., § 4).

d) On suppose que G et Γ soient unimodulaires et que G/Γ soit de masse totale finie pour la mesure invariante par G. Montrer que, pour que Γ' soit propre sur G/Γ (ou ce qui revient au même, pour que Γ soit propre sur G/Γ') il faut et il suffit que Γ' soit compact (utiliser c)).

7) Dans R^n, soit $\mathfrak{K}_m$ l'ensemble des cubes fermés de côté $1/m$, ayant pour centre un point dont les coordonnées sont multiples entiers de $1/m$.

a) Pour tout ensemble ouvert relativement compact U, soit U_m la réunion des ensembles de $\mathfrak{K}_m$ contenus dans U ; montrer que $\mu(U_m)$ tend vers $\mu(U)$ pour toute mesure de Radon μ sur $\mathbf{R}^n$, lorsque m tend vers $+\infty$.

b) Soit μ la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^n$. Pour tout ensemble ouvert relativement compact U et tout nombre λ tel que $0 < \lambda < 1$, montrer qu'il existe un nombre fini de boules ouvertes $B_k \subset U$ $(1 \leqslant k \leqslant m)$ deux à deux sans point commun, et dont la réunion a une mesure $\geqslant \lambda\,\mu(U)$ (utiliser a)). En déduire que U est réunion d'une suite de boules ouvertes deux à deux disjointes et d'un ensemble de mesure nulle.

c) Soit f une application continue de U dans $\mathbf{R}^n$ telle que $\|f(x)-f(y)\| \leqslant k\,\|x-y\|$; montrer que f(U) est intégrable et que l'on a $\mu(f(U)) \leqslant k^n \mu(U)$. (Prouver d'abord que l'image d'un ensemble négligeable N par f est négligeable en recouvrant N par des ensembles de $\mathfrak{K}_m$; puis utiliser b)).

8) Soit K une partie compacte de $\mathbf{R}^n$, λ un nombre tel que $0 < \lambda < 1$.

a) Pour tout $x \in K$, soit K_x l'ensemble des points $z \in K$ tels que $\|x - z\| = d(x, K)$, et $K_{\lambda,x}$ l'ensemble des points $x + \lambda(z - x)$, où $z \in K_x$. Montrer que si x et y sont deux points quelconques de $\mathbf{R}^n$ et si $v \in K_x$, $v \in K_y$, on a $(y - x | v - v) \geqslant 0$, et en déduire que si $x' \in K_{\lambda,x}$, $y' \in K_{\lambda,y}$, on a $\lambda^2 \|y - x\|^2 \leqslant \|y' - x'\|^2$.

b) Pour tout couple de nombres a, b tels que $b > a \geqslant 0$, soit K(a,b) l'ensemble des $x \in \mathbf{R}^n$ tels que $a < d(x, K) \leqslant b$. Déduire de a) qu'il existe une partie L de $K(\lambda a, \lambda b)$ et une application continue f de L sur K(a,b) telle que l'on ait

$$\|f(x)-f(y)\| \leqslant \lambda^{-1} \|x-y\|.$$

En conclure que l'on a

$$\mu(K(\lambda a,\lambda b)) \geqslant \lambda^n \mu(K(a,b))$$

(utiliser l'exerc. 7 c)).

c) On appelle <u>aire minkowskienne</u> de K le nombre

$\alpha(K) = \limsup_{h \to 0} \mu(K(0,h))/h$. Déduire de b) que, pour tout $h > 0$, on a $\alpha(K(0,h)) \leqslant \frac{n}{h}\mu(K(0,h))$.

9) Soient E un ensemble, G un groupe de permutations de E . On dit que deux parties A,B de E sont <u>G-équivalentes</u> s'il existe deux partitions $(A_k),(B_k)$ de A et B respectivement en un même nombre n de parties, et des éléments $\sigma_k \in G$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ tels que $\sigma_k(A_k)=B_k$.

a) Montrer que la relation "A et B sont G-équivalents" est une relation d'équivalence, et que si A et B sont G-équivalents, pour toute partie A' de A , il existe une partie B' de B G équivalente à A'

b) Montrer que si A est G-équivalent à une partie de B et B G-équivalent à une partie de A , A et B sont G-équivalents (cf. <u>Ens.</u>, chap.III, § 3,exerc.1).

c) On suppose que G contienne deux éléments σ , τ qui engendrent un sous-groupe <u>libre</u> H de G , c'est-à-dire que tout élément α de H peut se mettre d'une seule manière sous la forme

$$\sigma^{u_1}\tau^{v_1}\sigma^{u_2}\tau^{v_2}\dots\sigma^{u_n}\tau^{v_n}$$

où n est un entier $\geqslant 1$ (dépendant de α) et les u_i,v_i sont des entiers rationnels tous $\neq 0$, sauf éventuellement u_1 et v_n ; on désigne par H_o l'ensemble des éléments de H pour lesquels $u_1=0$ ou $u_1 \geqslant 3$. On suppose en outre qu'il n'existe aucun élément de E invariant par une transformation de H distincte de l'identité. Soit alors F un système de représentants des classes d'intransitivité de H ; montrer que les ensembles $A=H_o(F)$, $B=\sigma H_o(F)$, $C=\sigma^2 H_o(F)$ forment une partition de E en trois ensembles G-équivalents, tels que A soit G-équivalent à $B \cup C$ (utiliser b)).

10) a) Montrer que, dans le groupe unimodulaire $SL_2(\mathbf{R})$, il n'existe aucune relation de la forme

(1) $$\sigma^{u_1}\tau^{v_1}\sigma^{u_2}\tau^{v_2}\dots\sigma^{u_n}\tau^{v_n} = 1$$

vérifiée par <u>tout</u> couple (σ, τ) d'éléments de $SL_2(\mathbf{R})$ (soient $s = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; montrer qu'aucune relation (1) ne peut être vérifiée par $\sigma = tst$ et $\tau = t^2st^2$) .

b) Déduire de a) que dans chacun des groupes $SL_n(\mathbf{R})$ $(n \geqslant 2)$, $O_n^+(\mathbf{R})$ $(n \geqslant 3)$ il existe des sous-groupes libres engendrés par 2 éléments (remarquer que $O_3^+(\mathbf{R})$ est isomorphe à un sous-groupe de $SL_2(\mathbf{C})$, cf. <u>Alg</u>., chap.IX)) .

c) Montrer qu'il existe une partition de la sphère S_2 formée d'un ensemble dénombrable N et de trois ensembles A,B,C, tels que A,B,C soient deux à deux O_3^+-équivalents et que A soit O_3^+-équivalent à $B \cup C$ ("paradoxe de Hasdorff").

11) a) Soit G le groupe des déplacements euclidiens dans $\mathbf{R}^3$. Soit B une boule fermée, B' la réunion d'un nombre fini de boules fermées B_k $(1 \leqslant k \leqslant m)$ de même rayon que B, deux à deux sans point commun. Montrer que B et B' sont G-équivalents (en utilisant l'exerc.9 b), se ramener à prouver que B' est G-équivalent à une partie de B, et utiliser pour cela l'exerc. 10 c) et notamment le fait que N est <u>dénombrable</u>).

b) Déduire de a) que si M et N sont deux parties bornées de $\mathbf{R}^3$, ayant chacune au moins un point intérieur, elles sont G-équivalentes ("paradoxe de Banach-Tarski" ; si B est une boule fermée contenue dans N, recouvrir M par un nombre fini de boules de même rayon que B, et utiliser l'exerc. 9b).

c) Etendre le résultat de b) à $\mathbf{R}^n$ pour $n > 3$, en raisonnant par récurrence sur n (noter qu'on peut transformer par rotation un cylindre de génératrices parallèles à e_n en un cylindre de génératrices perpendiculaires à e_n) .