

RÉDACTION N° 196

COTE : NBR 098

TITRE : LIVRE I - THÉORIE DES ENSEMBLES
CHAPITRE IV (ÉTAT 9) : STRUCTURES

ASSOCIATION DES COLLABORATEURS DE NICOLAS BOURBAKI

NOMBRE DE PAGES : 43

NOMBRE DE FEUILLES : 43

Amstms
Mars 1954

LIVRE I
 THEORIE DES ENSEMBLES
 CHAPITRE IV (Etat 9)
 STRUCTURES

Sommaire.

- § 1. Structures et isomorphismes. 1. Echelons. 2. Extensions canoniques d'applications. 3. Relations transportables. 4. Espèces de structures. 5. Isomorphismes et transport de structure. 6. Déduction de structures. 7. Espèces de structure équivalentes. 8. Identifications.
2. Morphismes et structures dérivées. 1. Morphismes. 2. Structures plus fines. 3. Structures initiales. 4. Exemples de structures initiales. 5. Structures finales. 6. Exemples de structures finales.
3. Applications universelles. 1. Ensembles et applications universels. 2. Existence d'applications universelles. 3. Exemples d'applications universelles.

Appendice : Critères de transportabilité. 1. Termes transportables. 2. Critères de transportabilité. 3. Exemples de relations et termes transportables. 4. Relations et termes relativement transportables. 5. Critères de transportabilité relative. 6. Applications : déductions de structures et identifications.

Commentaires.

A quelques points de détail près, les Illinois sont d'accord avec les propositions du Congrès d'Octobre relatives aux §§ 2 et 3, et trouvent excellent le travail de mise au point du § 3 fait au Congrès ; ces deux §§ sont donc simplement tirés en 3 exemplaires et seront expédiés à temps pour le Congrès de Mars. Les Illinois se sont aperçus que la

"situation duale" du revêtement universel n'est pas du tout en fait duale des applications universelles ; il semble qu'il y ait quatre possibilités (et non 2), deux à deux duales :

- 1) $E \rightarrow F_0 \rightarrow F$: (application universelle)
- 2) $F_0 \rightarrow F \rightarrow E$ (revêtement universel)
- 3) $F \rightarrow F_0 \rightarrow E$ (dual d'app. universelle)
- 4) $E \rightarrow F \rightarrow F_0$ (dual de rev. universel)

Comme exemple "naturel" de 4), on a la clôture algébrique, avec E=corps, F=extension algébrique ; on ne connaît pas d'exemple naturel de 3) (bien entendu, on peut en fabriquer en prenant des ensembles de fonctions sur une situation du type 1), mais c'est tiré par les cheveux). Cette pénurie d'exemples doit, semble-t-il, inciter à la prudence, et il serait bon pour le moment que ce genre de combinaison soit laissé en exercice.

L'étude du §1 et de l'Appendice a par contre convaincu les Illinois que ces textes n'étaient pas encore au point, notamment en ce qui concerne les relations transportables et les ensembles auxiliaires, et ils se sont aperçu que, ni eux-mêmes, ni le Congrès d'Octobre, n'avaient encore parfaitement compris la question jusqu'ici. Ceci est particulièrement net dans la façon désinvolte avec laquelle le Congrès a pratiquement "balancé" les ensembles auxiliaires, y compris les exemples les plus importants, comme celui des variétés diff. réelles : il faut, avec le système adopté, que la "structure de var. diff. réelle" soit dans un certain échelon, et il est impossible de construire cet échelon sans faire intervenir l'ensemble de base \mathcal{R} , lequel n'est pas une lettre, mais bien un terme de la théorie des ensembles, ne contenant aucune lettre.

Il a donc semblé aux Illinois qu'il fallait prévoir cette possibilité dès le début, au lieu de "raccrocher" subrepticement les ensembles auxiliaires par la suite, et uniquement à propos des isomorphismes. Cela n'apporte d'ailleurs pas de changement sérieux, sauf un certain alourdissement des notations.

Cette première constatation, jointe à l'étude de la notion de relation transportable, a amené Weil à proposer comme guide une analogie, assez lointaine dans le détail, mais qui paraît fort utile comme principe : les "ensembles de base" x_i , non auxiliaires (dits "principaux" dans le texte) sont les "variables indépendantes", les lettres s_j (définissant la "structure générique") sont les "variables dépendantes" et les ensembles auxiliaires les "constantes". On s'aperçoit ainsi que pour fabriquer des relations non transportables, il n'y a pas besoin de recourir à des ζ , donc à des "choix" assez peu naturels, mais qu'il suffit de "lier" des variables indépendantes : p.ex., $x_1 = x_2$, $x_1 \in x_2$ ne sont pas transportables. Le danger d'écrire sans le vouloir des relations non transportables est donc plus grand que l'on n'avait cru jusqu'ici, et cela a convaincu les Illinois qu'il faut revenir à la première idée en ce qui concerne les structures savoir qu'une structure doit être toujours transportable.

Le § 1 a donc été rédigé avec ces deux modifications principales. On a par ailleurs profité des suggestions du Congrès, notamment en ce qui concerne la définition des échelons et des extensions canoniques, où on espère avoir liquidé définitivement tous les canulars : deux schémas distincts peuvent bien entendu donner le même échelon, mais ça n'a aucune importance, l'essentiel étant que l'échelon et les extensions canoniques soient toujours construits suivant le même schéma (on devra donner en exercice le fait que si 2 schémas donnent le même échelon, ils donnent

aussi la même extension canonique, à l'aide du truc Sammy ; mais c'est une curiosité pour l'usage qu'on en fait). On a aussi adopté le point de vue du Congrès pour les "déductions de structure", mais en fait l'état 6 n'était pas suffisant, car il ne tenait pas compte des ensembles auxiliaires ! On n'a pas donné ici la définition des "termes transportables", car les applications qu'on en ferait (déduction de structures, identifications) s'appuient en fait sur la notion de terme transportable relativement à une structure ; plutôt que d'entrer dans de longs laïus à ce sujet, il a paru préférable de dire, dans les 2 cas indiqués, ce que l'on suppose des termes introduits ; les critères permettant de voir que ces conditions sont remplies appartiennent à l'Appendice. Enfin, on a conservé la "structure d'ensemble" rendue vide !! (essentiellement pour pouvoir considérer des bijections comme des isomorphismes).

En ce qui concerne l'Appendice, le rédacteur a eu l'impression que le Congrès en avait marre, et avait regardé ça au pas de charge ! Après mûre réflexion, il est arrivé à 2 conclusions possibles :

1° il n'a pas compris ce que le Congrès avait voulu dire (les indications de La Tribu sont ultra-succinctes) ;

2° l'idée du Congrès est déconnante et n'a pas été sérieusement examinée.

A l'appui de cette dernière opinion, il fait remarquer les points suivants :

a) Il paraît extrêmement peu naturel d'admettre que les x_i et s_j dans la définition d'une relation transportable (ou d'une espèce de structure) puissent être des constantes de \mathcal{C} ; l'idée intuitive est que ces lettres doivent pouvoir être "spécialisées" dans n'importe quelle théorie plus forte, ce qui n'est pas possible si certaines sont constantes !

En outre, dans la définition de "transportable" les x_i et les y_i doivent jouer un rôle parfaitement symétrique (cf. critère CT10 de la nouvelle.

rédaction, absolument essentiel). Si donc un des x_i est une constante, le y_i correspondant ne peut être que cette constante, et le f_i l'application identique ; mais il ne semble pas (voir b)) que cette conclusion soit ce que désirait le Congrès.

b) Le rédacteur présume que le motif derrière la proposition précédente est de faire rentrer la "transportabilité relative" dans la "transportabilité absolue" en "se plaçant dans \mathcal{C}_Σ " comme le dit La Tribu de façon sybilline. C'est là une idée séduisante à première vue, encore faut-il qu'elle soit praticable. Le rédacteur interprète cette idée comme signifiant que, par un élargissement convenable de la définition de "transportable" (admettant les constantes comme lettres x_i, s_j) cette définition devrait donner mécaniquement la transportabilité relative en remplaçant \mathcal{C} par \mathcal{C}_Σ . Le malheur est que ce n'est pas vrai : la différence essentielle entre les deux transportabilités est que, dans l'une, les f_i sont des bijections (arbitraires) et dans l'autre des isomorphismes ; et le rédacteur demande à voir comment un simple changement de théorie transformera la relation " f_i est une bijection" en " f_i est un isomorphisme". D'ailleurs, même en admettant qu'on puisse surmonter cet obstacle, le passage à \mathcal{C}_Σ comme théorie de base conduirait à des difficultés, p.ex. dans le critère CT7 (de la nouvelle rédaction) ; le critère "relatif" correspondant CT'7 ne demande que l'équivalence dans \mathcal{C}_Σ des relations R et R' ; mais on ne pourrait l'obtenir mécaniquement, car dans la démonstration, il est essentiel que les x_i et s_j ne soient pas constantes ; on n'aurait donc qu'un CT'7 affaibli, où il faudrait l'équivalence dans \mathcal{C} , ce qui pratiquement ôterait toute utilité à la "transportabilité relative".

- vi -

La nouvelle rédaction a donc été faite essentiellement suivant le même plan que l'ancienne, en incorporant seulement les ensembles auxiliaires dès le début, et rejetant tout ce qui concerne la transportabilité "relative" à la fin. Le rédacteur s'est en outre aperçu, chemin faisant, que certaines des démonstrations de l'état 8 étaient incomplètes, notamment en ce qui concerne la quantification. Il fait observer à ce propos qu'il ne connaît aucun exemple où R soit transportable, et $(\exists s_j)R$ non transportable : le seul qui semble devoir donner quelque chose est celui où R est $s_j \notin S_j$, mais il se trouve que $(\exists s_j) (s_j \notin S_j)$ est transportable, parce que vraie en théorie des ensembles !! D'un autre côté, il semble douteux qu'on puisse démontrer que $(\exists s_j)R$ est toujours transportable avec R ; la question est assez curieuse ! Il est certain que la lecture de cet Appendice (pour ne rien dire de sa rédaction !) est un redoutable pensum ; mais une fois qu'on s'est engagé à faire un tel ours, il faut le faire à fond et sans tricher ; le rédacteur propose seulement que tout l'Appendice soit mis en petits caractères.

LIVRE I
CHAPITRE IV (Etat 9)

STRUCTURES

§ 1. Structures et isomorphismes.

Le but de ce chapitre est de décrire une fois pour toutes un certain nombre de constructions formatives et de démonstrations (cf. chap. I, § 1, n°3 et § 2, n°2) qui interviennent très fréquemment en mathématique, et fournissent un principe de classification pour les diverses théories mathématiques usuelles.

1. Echelons.

Dans ce qui va suivre, nous utiliserons la notion d'"entier" de la même façon qu'au chap. I, c'est-à-dire au sens métamathématique de repères rangés dans un certain ordre ; cet emploi n'a rien de commun avec la théorie mathématique des entiers, développée au chap. III.

Etant donné un entier n , un schéma de constructions d'échelons sur n termes est une suite c_1, c_2, \dots, c_m de couples d'entiers ≥ 0 ,

$c_i = (a_i, b_i)$, satisfaisant aux conditions suivantes :

- a) Si $a_i = 0$, on a $1 \leq b_i \leq n$.
- b) Si $b_i = 0$, on a $1 \leq a_i \leq i-1$.
- c) Si $a_i \neq 0$ et $b_i \neq 0$, on a $1 \leq a_i \leq i-1$ et $1 \leq b_i \leq i-1$.

Etant donné un schéma $S = (c_1, \dots, c_m)$ de construction d'échelons sur n termes, et n termes E_1, \dots, E_n d'une théorie \mathcal{E} plus forte que la théorie des ensembles, on appelle construction d'échelons, de schéma S , sur E_1, \dots, E_n , une suite A_1, \dots, A_m de m termes de \mathcal{E} , définis de proche en proche par les conditions suivantes :

- a) Si $c_i = (0, b_i)$, A_i est le terme E_{b_i} .
- b) Si $c_i = (a_i, 0)$, A_i est le terme $\mathcal{N}(A_{a_i})$.
- c) Si $c_i = (a_i, b_i)$, avec $a_i \neq 0$ et $b_i \neq 0$, A_i est le terme $A_{a_i} \times A_{b_i}$.

Nous dirons que le dernier terme A_m de la construction d'échelons de schéma S sur E_1, \dots, E_n est l'échelon de schéma S sur les ensembles de base E_1, \dots, E_n , et nous le désignerons, dans les raisonnements généraux qui vont suivre, par la notation $S(E_1, \dots, E_n)$.

Exemple. -- Etant donnés deux ensembles E, F , l'ensemble

$\mathcal{P}(\mathcal{P}(E)) \times \mathcal{P}(F)$ est un échelon sur E, F , de schéma
 $(0,1), (0,2), (1,0), (3,0), (2,0), (4,5)$

C'est aussi l'échelon sur E, F de schéma

$(0,2), (0,1), (1,0), (2,0), (4,0), (5,3)$.

Plusieurs schémas distincts peuvent donc donner le même échelon sur les mêmes termes.

2. Extensions canoniques d'applications.

Soit $S=(c_1, \dots, c_m)$ un schéma de constructions d'échelons sur n termes ; soient $E_1, \dots, E_n, E'_1, \dots, E'_n$ $2n$ ensembles (termes de \mathcal{C}) et soient f_1, \dots, f_n n termes de \mathcal{C} tels que les relations " f_i est une application de E_i dans E'_i " soient des théorèmes de \mathcal{C} pour $1 \leq i \leq n$. Soit A_1, \dots, A_m (resp. A'_1, \dots, A'_m) la construction d'échelons de schéma S sur E_1, \dots, E_n (resp. E'_1, \dots, E'_n). On définit de proche en proche une suite de termes $\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_m$ telle que \mathcal{G}_i soit une application de A_i dans A'_i , par les conditions suivantes :

a) Si $c_i=(0, b_i)$, de sorte que $A_i=E_{b_i}^*$, $A'_i=E'_{b_i}$, \mathcal{G}_i est l'application f_{b_i} .

b) Si $c_i=(a_i, 0)$, de sorte que $A_i=\mathcal{P}(A_{a_i})$, $A'_i=\mathcal{P}(A'_{a_i})$, \mathcal{G}_i est l'extension canonique $\hat{\mathcal{G}}_{a_i}$ de \mathcal{G}_{a_i} aux ensembles de parties.

c) Si $c_i=(a_i, b_i)$ avec $a_i \neq 0$ et $b_i \neq 0$, de sorte que $A_i=A_{a_i} \times A_{b_i}$ et $A'_i=A'_{a_i} \times A'_{b_i}$, \mathcal{G}_i est l'extension canonique $\mathcal{G}_{a_i} \times \mathcal{G}_{b_i}$ de \mathcal{G}_{a_i} et \mathcal{G}_{b_i} à $A_{a_i} \times A_{b_i}$.

Nous dirons que le dernier terme g_m de cette suite est l'extension canonique, de schéma S, des applications f_1, \dots, f_n , et nous le désignerons par la notation $\langle f_1, \dots, f_n \rangle^S$.

On vérifie de proche en proche les critères suivants :

CE1. Si f_i est une application de E_i dans E_i' , f_i' une application de E_i' dans E_i'' ($1 \leq i \leq n$), on a, pour tout schéma d'échelons S sur n termes

$$\langle f_1' \circ f_1, f_2' \circ f_2, \dots, f_n' \circ f_n \rangle^S = \langle f_1', \dots, f_n' \rangle^S \circ \langle f_1, \dots, f_n \rangle^S .$$

CE2. Si f_i est injective (resp. surjective) pour $1 \leq i \leq n$,

$\langle f_1, \dots, f_n \rangle^S$ est injective (resp. surjective).

Ce dernier critère résulte des propriétés correspondantes de l'extension \hat{g} (chap. II, § 5, prop. 1) et de l'extension $g \times h$ (chap. II, § 3, n° 7).

CE3. Si f_i est une bijection de E_i sur E_i' , et f_i^{-1} la bijection réciproque, alors $\langle f_1, \dots, f_n \rangle^S$ est une bijection, et $\langle f_1^{-1}, \dots, f_n^{-1} \rangle^S$ la bijection réciproque ; autrement dit, on a

$$(\langle f_1, \dots, f_n \rangle^S)^{-1} = \langle f_1^{-1}, \dots, f_n^{-1} \rangle^S .$$

Cela résulte aussitôt de CE1 et CE2 .

3. Relations transportables.

Soient \mathcal{C} une théorie plus forte que la théorie des ensembles, $x_1, \dots, x_n, s_1, \dots, s_p$ des lettres distinctes entre elles et distinctes des constantes de \mathcal{C} , A_1, \dots, A_m des termes de \mathcal{C} où ne figurent aucune des lettres x_i ($1 \leq i \leq n$), s_j ($1 \leq j \leq p$). Soient S_1, \dots, S_p des schémas de constructions d'échelons sur $n+m$ termes ; nous dirons que la relation

$T\{x_1, \dots, x_n, s_1, \dots, s_p\}$:

" $s_1 \in S_1(x_1, \dots, x_n, A_1, \dots, A_m)$ et $s_2 \in S_2(x_1, \dots, x_n, A_1, \dots, A_m)$ et ...
... et $s_p \in S_p(x_1, \dots, x_n, A_1, \dots, A_m)$ "

est une typification des lettres s_1, \dots, s_p , dans laquelle la lettre s_j est typifiée de type $S_j(x_1, \dots, x_n, A_1, \dots, A_m)^{(*)}$ ($1 \leq j \leq p$).

Soit $R \{x_1, \dots, x_n, s_1, \dots, s_p\}$ une relation de \mathcal{C} , contenant certaines des lettres x_i, s_j (et éventuellement d'autres lettres).

Dire que R est transportable (dans \mathcal{C}) pour la typification T , les x_i ($1 \leq i \leq n$) étant considérés comme ensembles de base principaux et les A_h ($1 \leq h \leq m$) comme ensembles de base auxiliaires, c'est dire que la condition suivante est satisfaite :

Soient $y_1, \dots, y_n, f_1, f_2, \dots, f_n$, des lettres distinctes entre elles, distinctes des x_i ($1 \leq i \leq n$), des s_j ($1 \leq j \leq p$), des constantes de \mathcal{C} et de toutes les lettres figurant dans $R \{x_1, \dots, x_n, s_1, \dots, s_p\}$ ou dans les A_h ($1 \leq h \leq m$). Soit d'autre part I_h ($1 \leq h \leq n$) l'application identique de A_h sur lui-même. Alors, la relation

(1) " $T \{x_1, \dots, x_n, s_1, \dots, s_p\}$ et (f_1 est une bijection de x_1 sur y_1) et ... et (f_n est une bijection de x_n sur y_n)"

entraîne, dans \mathcal{C} , la relation

(2) $R \{x_1, \dots, x_n, s_1, \dots, s_p\} \Leftrightarrow R \{y_1, \dots, y_n, s_1^f, \dots, s_p^f\}$

où on a posé

(3) $s_j^f = \langle f_1, \dots, f_n, I_1, \dots, I_m \rangle^{S_j}(s_j)$ ($1 \leq j \leq p$).

On a une définition analogue, mais plus simple, lorsqu'il n'y a pas d'ensemble de base auxiliaire.

Par exemple, si $n=2, p=2$ et si la typification T est

" $s_1 \in x_1$ et $s_2 \in x_1$ ", la relation $s_1 = s_2$ est transportable. Par

contre, la relation $x_1 = x_2$ ne l'est pas. Nous donnerons dans

(*) Par abus de langage, nous écrirons souvent S_j au lieu de $S_j(x_1, \dots, x_n, A_1, \dots, A_m)$, lorsque cela ne risquera pas d'entraîner de confusions.

- 5 -

l'Appendice des critères permettant de reconnaître aisément, dans les cas usuels, si une relation est transportable.

4. Espèces de structures.

Soit \mathcal{C} une théorie plus forte que la théorie des ensembles. Une espèce de structure dans \mathcal{C} est un texte Σ formé des assemblages suivants :

1° Un certain nombre de lettres distinctes $x_1, \dots, x_n, s_1, \dots, s_p$ distinctes des constantes de \mathcal{C} ; x_1, \dots, x_n sont appelés les ensembles de base principaux de l'espèce de structure Σ .

2° Un certain nombre de termes A_1, \dots, A_m de \mathcal{C} , dans lesquels ne figurent aucune des lettres x_i, s_j , et qui sont appelés les ensembles de base auxiliaires de Σ ; Σ peut éventuellement ne comporter aucun ensemble auxiliaire (mais il doit toujours y avoir au moins un ensemble de base principal).

3° Une typification $T\{x_1, \dots, x_n, s_1, \dots, s_p\}$:
 $s_1 \in S_1(x_1, \dots, x_n, A_1, \dots, A_m)$ et ... et $s_p \in S_p(x_1, \dots, x_n, A_1, \dots, A_m)$
 où les S_j ($1 \leq j \leq p$) sont des schémas de constructions d'échelons sur $n+m$ termes. On dit que $T\{x_1, \dots, x_n, s_1, \dots, s_p\}$ est la caractérisation typique de l'espèce de structure Σ .

4° Une relation $R\{x_1, \dots, x_n, s_1, \dots, s_p\}$ transportable (dans \mathcal{C}) pour la typification T , les x_i étant ensembles de base principaux et les A_n ensembles de base auxiliaires (n°3). On dit que $R\{x_1, \dots, x_n, s_1, \dots, s_p\}$ est l'axiome de l'espèce de structure Σ .

On appelle théorie de l'espèce de structure Σ la théorie \mathcal{C}_Σ ayant les mêmes axiomes et schémas d'axiomes que \mathcal{C} , et en plus l'axiome explicite "T et R" ; les constantes de \mathcal{C}_Σ sont donc les constantes de \mathcal{C} et les lettres figurant dans T ou dans R .

Soit maintenant \mathcal{C}' une théorie plus forte que \mathcal{C} , et soient $E_1, \dots, E_n, U_1, \dots, U_p$ des termes de \mathcal{C}' . On dit que (dans la théorie \mathcal{C}') (U_1, \dots, U_p) est une structure d'espèce Σ sur les ensembles de base principaux E_1, \dots, E_n et les ensembles de base auxiliaires A_1, \dots, A_m si la relation

$$T\{E_1, \dots, E_n, U_1, \dots, U_p\} \text{ et } R\{E_1, \dots, E_n, U_1, \dots, U_p\}$$

est un théorème de \mathcal{C}' . Lorsqu'il en est ainsi, pour tout théorème $B\{x_1, \dots, x_n, s_1, \dots, s_p\}$ de la théorie \mathcal{C}_Σ , la relation $B\{E_1, \dots, E_n, U_1, \dots, U_p\}$ est un théorème de \mathcal{C}' (chap. I, § 2, n° 3).

Dans \mathcal{C}_Σ , (s_1, \dots, s_p) est appelée la structure générique d'espèce Σ .

On dit aussi que (dans la théorie \mathcal{C}') les ensembles de base $E_1, \dots, E_n, A_1, \dots, A_m$ sont munis de la structure (U_1, \dots, U_p) ; par abus de langage, on dit souvent que la structure (U_1, \dots, U_p) est définie sur les ensembles de base principaux E_1, \dots, E_n . Il est clair que la structure (U_1, \dots, U_p) est un élément de l'ensemble produit

$$S_1(E_1, \dots, E_n, A_1, \dots, A_m) \times \dots \times S_p(E_1, \dots, E_n, A_1, \dots, A_m).$$

L'ensemble des éléments (V_1, V_2, \dots, V_p) de ce produit qui vérifient la relation $R\{E_1, \dots, E_n, V_1, \dots, V_p\}$ est donc l'ensemble des structures d'espèce Σ sur $E_1, \dots, E_n, A_1, \dots, A_m$.

Exemples. - 1) Prenons pour \mathcal{C} la théorie des ensembles et considérons l'espèce de structure comportant un ensemble de base principal A , aucun ensemble de base auxiliaire, la caractérisation typique $S \in \mathcal{P}(A \times A)$, et l'axiome

$$S \circ S \subset S \quad \text{et} \quad S \cap S^{-1} = \Delta_A$$

(Δ_A diagonale de $A \times A$), qui est une relation transportable pour la typification $S \in \mathcal{P}(A \times A)$ comme on le vérifie aisément.

Il est clair que la théorie de cette espèce de structure n'est autre que la théorie des ensembles ordonnés (chap.III, § 1, n°3) ; aussi dit-on que l'espèce de structure ainsi définie est l'espèce de structure d'ordre sur A . Nous avons rencontré au chap.III de nombreux exemples d'ensembles munis de structures de cette espèce.

2) Prenons pour \mathcal{C} la théorie des ensembles, et considérons l'espèce de structure comportant un ensemble de base principal A , aucun ensemble de base auxiliaire, la caractérisation typique $F \in \mathcal{N}((A \times A) \times A)$ et ayant pour axiome la relation transportable "F est un graphe fonctionnel dont $A \times A$ est l'ensemble de définition" .

Les structures de cette espèce sont des cas particuliers de ce que l'on appelle les structures algébriques, et la fonction de graphe F (application de $A \times A$ dans A) est dite loi de composition interne partout définie d'une telle structure (Alg.,chap.I).

3) \mathcal{C} étant toujours la théorie des ensembles, considérons l'espèce de structure comportant un ensemble de base principal A , aucun ensemble de base auxiliaire, la caractérisation typique $S \in \mathcal{N}(\mathcal{N}(A))$, et ayant pour axiome la relation transportable $(\forall S') (S' \subset S \Rightarrow (\bigcup_{X \in S'} X) \in S)$ et $A \in S$ et $(\forall X)(\forall Y)((X \in S \text{ et } Y \in S) \Rightarrow ((X \cup Y) \in S))$.

Cette espèce de structure est appelée espèce de structure topologique. Une structure de cette espèce est aussi appelée topologie, et la relation $X \in S$ s'exprime en disant que X est ouvert pour la topologie S (Top. gén., chap.I, § 1).

4) Prenons pour \mathcal{C} la théorie de l'espèce de structure de corps, qui comporte entre autres une constante K comme unique ensemble de base (principal). L'espèce de structure d'espace vectoriel à gauche sur K comporte K comme ensemble de base auxiliaire et un ensemble E comme ensemble de base principal, et a pour caractérisation typique la relation

$$S_1 \in \mathcal{N}((E \times E) \times E) \text{ et } S_2 \in \mathcal{N}((K \times E) \times E)$$

*(S_1 étant le graphe de l'addition dans E et S_2 celui de la multiplication par un scalaire ; cf. Alg., chap.II) * ; nous n'énoncerons pas ici l'axiome de cette espèce de structure (cf. Alg., chap.II).

5) Prenons de nouveau pour \mathcal{C} la théorie des ensembles ; dans cette théorie, le corps \mathbb{C} des nombres complexes est un terme, qui ne contient aucune lettre. L'espèce de structure de variété analytique complexe de dimension n comporte \mathbb{C} comme ensemble de base auxiliaire, et un ensemble de base principal V ; nous n'indiquerons pas ici la caractérisation typique ni l'axiome de cette ~~en~~ espèce de structure. Notons seulement que n est une constante dans la théorie correspondante (et " n est un entier" un théorème de cette théorie).

Remarques. - 1) L'axiome $R \{x_1, \dots, x_n, s_1, \dots, s_p\}$ d'une espèce de structure \sum s'écrit le plus souvent comme conjonction de plusieurs relations transportables (comme dans l'exemple 3) ci-dessus) ; on dit que ces relations sont les axiomes de l'espèce \sum .

2) On donne un nom aux espèces de structures les plus fréquemment utilisées en Mathématique, et aux ensembles munis de structures de ces espèces : c'est ainsi qu'un ensemble ordonné (chap.III, § 1) est un ensemble muni d'une structure d'ordre (exemple 1)) ; * nous définissons dans la suite de ce Traité, les notions de groupe, de corps,

d'espace topologique, de variété différentiable, etc., qui toutes désignent des ensembles munis de certaines structures.*

3) Par abus de langage, dans la théorie des ensembles \mathcal{C} , la donnée de n lettres distinctes entre elles x_1, \dots, x_n (sans caractérisation typique ni axiome) est encore considérée comme une espèce de structure \sum_0 , dite espèce de structure d'ensemble sur les n ensembles de base principaux x_1, \dots, x_n .

5. Isomorphismes et transport de structures.

Soit \sum une espèce de structure dans une théorie \mathcal{C} , sur n ensembles de base principaux x_1, \dots, x_n , et m ensembles de base auxiliaires A_1, \dots, A_m ; soient S_1, \dots, S_p les schémas de construction d'échelons sur n+m lettres qui figurent dans la caractérisation typique de \sum , et soit R l'axiome de \sum . Dans une théorie \mathcal{C}' plus forte que \mathcal{C} , soient (U_1, \dots, U_p) une structure d'espèce \sum sur des ensembles E_1, \dots, E_n (comme ensembles de base principaux) et (U'_1, \dots, U'_p) une structure de même espèce \sum sur des ensembles E'_1, \dots, E'_n . Soit enfin (dans \mathcal{C}') f_i ($1 \leq i \leq n$) une bijection de E_i sur E'_i . On dit que $(f_1, \dots, f_n, I_1, \dots, I_m)$ est un isomorphisme des ensembles $E_1, \dots, E_n, A_1, \dots, A_m$ (munie de la structure (U_1, \dots, U_p)) sur les ensembles $E'_1, \dots, E'_n, A_1, \dots, A_m$ (munis de la structure (U'_1, \dots, U'_p)) si, pour chacun des schémas S_j ($1 \leq j \leq p$), on a (dans \mathcal{C}')

(4) $\langle f_1, \dots, f_n, I_1, \dots, I_m \rangle^{S_j} (U_j) = U'_j$.

Par abus de langage, on omet en général de mentionner les ensembles auxiliaires A_h et les applications identiques I_h ($1 \leq h \leq m$) et on dit simplement que (f_1, \dots, f_n) est un isomorphisme de E_1, \dots, E_n sur E'_1, \dots, E'_n .

- 10 -

Soit f_i^{-1} la bijection réciproque de f_i ($1 \leq i \leq n$). Il résulte aussitôt de (4) et du critère CE3 (n°2) que l'on a

$$(5) \quad \langle f_1^{-1}, \dots, f_n^{-1}, I_1, \dots, I_m \rangle^{S_j} (U_j^i) = U_j$$

pour $1 \leq j \leq p$, et par suite que $(f_1^{-1}, \dots, f_n^{-1})$ est un isomorphisme de $E_1^{-1}, \dots, E_n^{-1}$ (munis de (U_1^i, \dots, U_p^i)) sur E_1, \dots, E_n (munis de (U_1, \dots, U_p)); on dit que les isomorphismes (f_1, \dots, f_n) et $(f_1^{-1}, \dots, f_n^{-1})$ sont réciproques l'un de l'autre.

On dit que $E_1^{-1}, \dots, E_n^{-1}$, munis de (U_1^i, \dots, U_p^i) sont isomorphes à E_1, \dots, E_n , munis de (U_1, \dots, U_p) , s'il existe un isomorphisme de E_1, \dots, E_n sur $E_1^{-1}, \dots, E_n^{-1}$; on dit encore dans ce cas que les structures (U_1, \dots, U_p) et (U_1^i, \dots, U_p^i) sont isomorphes.

Les définitions précédentes entraînent, compte-tenu de CE1, le critère suivant :

CE4. Soient (U_1, \dots, U_p) , (U_1^i, \dots, U_p^i) , (U_1^j, \dots, U_p^j) trois structures de même espèce \sum sur des ensembles de base principaux (E_1, \dots, E_n) , $(E_1^{-1}, \dots, E_n^{-1})$, (E_1^j, \dots, E_n^j) respectivement. Soit f_i une bijection de E_i sur E_i^{-1} , g_i une bijection de E_i^{-1} sur E_i^j ($1 \leq i \leq n$). Si (f_1, \dots, f_n) et (g_1, \dots, g_n) sont des isomorphismes, il en est de même de $(g_1 \circ f_1, \dots, g_n \circ f_n)$.

On dit qu'un isomorphisme de (E_1, \dots, E_n) sur (E_1, \dots, E_n) (pour la même structure) est un automorphisme de (E_1, \dots, E_n) . Le composé de deux automorphismes de (E_1, \dots, E_n) est un automorphisme. Il en est de même de l'isomorphisme réciproque d'un automorphisme; * en d'autres termes, les automorphismes de (E_1, E_2, \dots, E_n) forment un groupe.

(Alg., chap. I, § 6). *

Remarques. - 1) Par abus de langage, lorsque f_i est une bijection quelconque de E_i sur E'_i ($1 \leq i \leq n$), on dit que (f_1, \dots, f_n) est un isomorphisme de E_1, \dots, E_n sur E'_1, \dots, E'_n pour l'espèce de structure d'ensemble (n°4, Remarque 3).

2) Il peut se faire que deux espèces de structure Σ_1, Σ_2 dans deux théories $\mathcal{C}', \mathcal{C}''$ soient telles que les théories \mathcal{C}'_{Σ_1} et \mathcal{C}''_{Σ_2} soient équivalentes, mais que la répartition des ensembles de base en ensembles principaux et ensembles auxiliaires ne soit pas la même dans Σ_1 et Σ_2 ; la notion d'isomorphisme n'est alors pas la même pour Σ_1 et Σ_2 , en général. Par exemple, soit Σ l'espèce de structure de corps, comportant un seul ensemble de base (principal) K ; dans la théorie \mathcal{C}_{Σ} (où \mathcal{C} est la théorie des ensembles), nous avons indiqué plus haut (n°4, exemple 4) que l'on définit l'espèce Σ_1 de structure d'"espace vectoriel sur K " qui comporte K comme ensemble de base auxiliaire, et un ensemble de base principal E . Considérons d'autre part, dans \mathcal{C} , l'espèce de structure Σ_2 (espèce de structure "d'espace vectoriel") qui a pour ensembles de base principaux K et E qui n'a aucun ensemble de base auxiliaire, et dont la caractérisation typique (resp. l'axiome) est la conjonction des caractérisations typiques (resp. des axiomes) de Σ et Σ_1 ; il est clair que \mathcal{C}_{Σ_2} et $(\mathcal{C}_{\Sigma})_{\Sigma_1}$ sont deux théories équivalentes; * mais les isomorphismes pour Σ_1 sont les applications linéaires bijectives, et les isomorphismes pour Σ_2 les applications semi-linéaires bijectives (cf. Alg., chap. II). *

Supposons toujours que, dans \mathcal{C}' , (U_1, \dots, U_p) soit une structure d'espèce Σ sur E_1, \dots, E_n , et soit f_i une bijection de E_i sur un ensemble E'_i ($1 \leq i \leq n$), les ensembles E'_1, \dots, E'_n n'étant a priori munis d'aucune

structure d'espèce Σ . Montrons qu'il existe sur E_1, \dots, E_n une structure d'espèce Σ et une seule telle que (f_1, \dots, f_n) soit un isomorphisme de E_1, \dots, E_n sur E'_1, \dots, E'_n . En effet, cette structure ne peut être autre que la structure (U_1, \dots, U_p) , où U_j est défini par la relation (4) pour $1 \leq j \leq p$. Reste à vérifier que lorsque les U_j sont définis de cette manière (U_1, \dots, U_p) est effectivement une structure d'espèce Σ , c'est-à-dire que la relation $R_{\Sigma} \{E_1, \dots, E_n, U_1, \dots, U_p\}$ est vraie dans \mathcal{C}' . Or, cela résulte de ce que $R_{\Sigma} \{x_1, \dots, x_n, s_1, \dots, s_p\}$ est transportable, car $R_{\Sigma} \{E_1, \dots, E_n, U_1, \dots, U_p\}$ est équivalente, dans \mathcal{C}' , à $R_{\Sigma} \{E_1, \dots, E_n, U_1, \dots, U_p\}$ (n^03), qui est vraie dans \mathcal{C}' par hypothèse. La structure (U_1, \dots, U_p) est dite obtenue en transportant la structure (U_1, \dots, U_p) aux ensembles E_1, \dots, E_n au moyen des applications bijectives f_1, \dots, f_n . Il revient donc au même de dire que deux structures de même espèce sont isomorphes ou se déduisent l'une de l'autre par transport de structure.

Il peut se faire que deux structures quelconques d'espèce Σ soient nécessairement isomorphes; on dit alors que l'espèce de structure Σ est univalente. * Il en est ainsi de la structure de groupe monogène infini (isomorphe à \mathbb{Z}), de celle de corps premier de caractéristique 0 (isomorphe à \mathbb{Q}), de la structure de corps ordonné archimédien et complet (isomorphe à \mathbb{R}), de la structure de corps connexe, localement compact, commutatif et algébriquement clos (isomorphe à \mathbb{C}), enfin de la structure de corps connexe, localement compact et non commutatif (isomorphe au corps des quaternions K). * On observera que ces structures sont essentiellement celles qui sont à la base de la Mathématique classique. On dit qu'une espèce de structure est multivalente si elle n'est pas

univalente ; * l'espèce de structure de groupe, l'espèce de structure d'ensemble ordonné, l'espèce de structure topologique, sont multivalentes.*

5. Dédution de structures.

Soient, dans une même théorie \mathcal{C} , Σ et \mathcal{M} deux espèces de structure, dont on suppose seulement que les ensembles de base principaux de \mathcal{M} sont certaines des ensembles de base principaux x_1, \dots, x_n de Σ , par exemple x_1, \dots, x_r ($1 \leq r \leq n$). Soient (s_1, \dots, s_p) la structure générique d'espèce Σ , (t_1, \dots, t_q) la structure générique d'espèce \mathcal{M} . On appelle procédé de déduction canonique d'une structure d'espèce \mathcal{M} à partir d'une structure d'espèce Σ un système de q termes

$P_1 \{x_1, \dots, x_n, s_1, \dots, s_p\}, \dots, P_q \{x_1, \dots, x_n, s_1, \dots, s_p\}$ tels que :

1° (P_1, \dots, P_q) soit une structure d'espèce \mathcal{M} sur x_1, \dots, x_r dans la théorie \mathcal{C}_Σ .

2° Si f_i est une bijection de x_i sur y_i ($1 \leq i \leq n$) (les lettres y_i et f_i étant distinctes de toutes les constantes de \mathcal{C}_Σ ou de $\mathcal{C}_{\mathcal{M}}$, et distinctes entre elles), et si (s'_1, \dots, s'_p) est la structure obtenue en transportant (s_1, \dots, s_p) par (f_1, \dots, f_n) , alors

$$(P_1 \{y_1, \dots, y_n, s'_1, \dots, s'_p\}, \dots, P_q \{y_1, \dots, y_n, s'_1, \dots, s'_p\})$$

est égale à la structure obtenue en transportant par (f_1, \dots, f_r) la structure

$$(P_1 \{x_1, \dots, x_n, s_1, \dots, s_p\}, \dots, P_q \{x_1, \dots, x_n, s_1, \dots, s_p\}).$$

Nous verrons dans l'Appendice pourquoi cette seconde condition est toujours vérifiée pour les espèces de structure usuelles.

Soit \mathcal{C}' une théorie plus forte que \mathcal{C} dans \mathcal{C}' , si (U_1, \dots, U_p) est une structure d'espèce Σ sur E_1, \dots, E_n ,

$(P_1 \{E_1, \dots, E_n, U_1, \dots, U_p\}, \dots, P_q \{E_1, \dots, E_n, U_1, \dots, U_p\})$
 sera une structure d'espèce \textcircled{H} sur E_1, \dots, E_r , dite déduite de
 (U_1, \dots, U_p) par le procédé (P_1, \dots, P_q) . On dit souvent qu'une telle
 structure est sous-jacente à la structure (U_1, \dots, U_p) . Si (f_1, \dots, f_n)
 est un isomorphisme de E_1, \dots, E_n , muni d'une structure \mathcal{J} d'espèce Σ ,
 sur E'_1, \dots, E'_n (muni d'une structure \mathcal{J}' de même espèce), (f_1, \dots, f_r)
 est un isomorphisme de E_1, \dots, E_r sur E'_1, \dots, E'_r quand on munit respec-
 tivement ces ensembles des structures d'espèce \textcircled{H} déduites de \mathcal{J} et \mathcal{J}'
 par le procédé (P_1, \dots, P_q) .

Exemples. - 1) *L'espèce de structure de groupe topologique comporte
 un seul ensemble de base principal A ne comporte aucun ensemble de
 base auxiliaire, et la structure générique correspondante comporte
 deux lettres (S_1, S_2) (S_1 étant le graphe de la loi de composition
 sur A et S_2 l'ensemble des ensembles ouverts de la topologie de A ;
 cf. Top.gén., chap.III, § 1). Chacun des termes S_1 et S_2 est un
 procédé de déduction canonique, fournissant respectivement la
structure de groupe et la topologie sous-jacente à la structure de
 groupe topologique (S_1, S_2) .

De même, d'une structure d'anneau on déduit canoniquement une
 structure de groupe abélien et une structure de monoïde (multipli-
 catif) sous-jacentes. D'une structure de variété différentiable
 on déduit une topologie sous-jacente. Etc. *

2) *L'espèce de structure d'espace vectoriel sur \mathbb{C} (resp. \mathbb{R})
 comporte un ensemble de base principal E , un ensemble de base
 auxiliaire égal à \mathbb{C} (resp. \mathbb{R}) et a pour caractérisation typique

$$S_1 \in \mathcal{P}((E \times E) \times E) \text{ et } S_2 \in \mathcal{P}((\mathbb{C} \times E) \times E)$$

(resp. $S_1 \in \mathcal{K}((E \times E) \times E)$ et $S_2 \in \mathcal{K}((R \times E) \times E)$). Les deux termes S_1 et $S_2 \cap ((R \times E) \times E)$ constituent un procédé canonique de déduction d'une structure d'espace vectoriel sur R à partir d'une structure d'espace vectoriel sur C ("restriction à R du corps des scalaires" ; cf. Alg., chap.II).*

3) Supposons que \textcircled{H} ait mêmes ensembles de base (principaux et auxiliaires) que Σ , et même caractérisation typique. Si en outre l'axiome de Σ implique (dans \mathcal{C}) celui de \textcircled{H} , il est clair que s_1, \dots, s_p constituent un procédé de déduction canonique d'une structure d'espèce \textcircled{H} à partir d'une structure d'espèce Σ . On dit alors que \textcircled{H} est moins riche que Σ , ou que Σ est plus riche que \textcircled{H} . Toute structure d'espèce Σ dans une théorie \mathcal{C}' plus forte que \mathcal{C} , est aussi une structure d'espèce \textcircled{H} . Par exemple, l'espèce de structure d'ensemble totallement ordonné (obtenu en prenant comme axiome la conjonction de l'axiome des structures d'ordre et de la relation $S \cup S^{-1} = A \times A$ (cf. n°4, exemple 1)) est plus riche que l'espèce de structure d'ordre. *L'espèce de structure de groupe abélien est plus riche que l'espèce de structure de groupe. L'espèce de structure d'espace compact est plus riche que l'espèce de structure topologique. Etc. *

7. Espèces de structure équivalentes.

Dans une même théorie \mathcal{C} , soient Σ et \textcircled{H} deux espèces de structure ayant les mêmes ensembles de base principaux x_1, \dots, x_n . Soient $(s_1, \dots, s_p), (t_1, \dots, t_q)$ les structures génériques d'espèce Σ et \textcircled{H} . Supposons que les conditions suivantes soient remplies :

- 10 -

1° On a un procédé de déduction canonique

$$P_1 \{x_1, \dots, x_n, s_1, \dots, s_p\}, \dots, P_q \{x_1, \dots, x_n, s_1, \dots, s_p\}$$

d'une structure d'espèce \oplus à partir d'une structure d'espèce Σ .

2° On a un procédé de déduction canonique

$$Q_1 \{x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_q\}, \dots, Q_p \{x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_q\}$$

d'une structure d'espèce Σ à partir d'une structure d'espèce \oplus .

3° Les relations

$Q_j \{x_1, \dots, x_n, P_1 \{x_1, \dots, x_n, s_1, \dots, s_p\}, \dots, P_q \{x_1, \dots, x_n, s_1, \dots, s_p\}\} = s_j$
sont des théorèmes de \mathcal{E}_Σ pour $1 \leq j \leq p$, et les relations

$P_k \{x_1, \dots, x_n, Q_1 \{x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_q\}, \dots, Q_p \{x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_q\}\} = t_k$
sont des théorèmes de \mathcal{E}_{\oplus} pour $1 \leq k \leq q$.

On dit alors que les espèces de structure Σ et \oplus sont équivalentes par l'intermédiaire des procédés de déduction P_k ($1 \leq k \leq q$) et

Q_j ($1 \leq j \leq p$). Il est clair alors que, pour tout théorème

$B \{x_1, \dots, x_n, s_1, \dots, s_p\}$ de la théorie \mathcal{E}_Σ , la relation

$B \{x_1, \dots, x_n, Q_1, \dots, Q_p\}$ est un théorème de la théorie \mathcal{E}_{\oplus} (chap. I, § 2,

n° 4) ; et inversement, pour tout théorème $C \{x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_q\}$ de la

théorie \mathcal{E}_{\oplus} , la relation $C \{x_1, \dots, x_n, P_1, \dots, P_q\}$ est un théorème de

\mathcal{E}_Σ . Il n'y a donc pas de distinction à faire entre les deux théories.

Exemples. - 1)* Soit Σ l'espèce de structure topologique (n° 4, exemple 3), A l'ensemble de base et S la structure générique de Σ .

Considérons la relation

$$x \in A \text{ et } X \subset A \text{ et } (\forall U)((U \in S \text{ et } x \in U) \Rightarrow (X \cap U \neq \emptyset)).$$

Elle admet un graphe $P \subset A \times \mathcal{P}(A)$ par rapport au couple (x, X) ;

$P \{A, S\}$ est un terme que l'on appelle "l'ensemble des couples

(x, X) tels que x soit adhérent à X pour la topologie S ". On

démontre (cf. Top.gén., chap. I, § 1) que les relations suivantes

sont des théorèmes de \mathcal{E}_Σ (\mathcal{E} désignant la théorie des ensembles) :

$$\begin{aligned}
 & P \langle \emptyset \rangle = \emptyset \\
 & (\forall Y)(Y \subset A \Rightarrow Y \subset P \langle Y \rangle) \\
 & (\forall Y)(Y \subset A \Rightarrow P \langle P \langle Y \rangle \rangle = P \langle Y \rangle) \\
 & (\forall Y)(\forall Z)((Y \subset A \text{ et } Z \subset A) \Rightarrow P \langle Y \cup Z \rangle = P \langle Y \rangle \cup P \langle Z \rangle) .
 \end{aligned}$$

Considérons alors l'espèce de structure \textcircled{M} , ayant un seul ensemble de base (principal) A , dont la structure générique comporte une seule lettre T , a pour caractérisation typique $T \in \mathcal{P}(A \times \mathcal{P}(A))$, et pour axiome

$$\begin{aligned}
 & T \langle \emptyset \rangle \text{ et } (\forall Y)(Y \subset A \Rightarrow Y \subset T \langle Y \rangle) \text{ et } (\forall Y)(Y \subset A \Rightarrow T \langle T \langle Y \rangle \rangle = \\
 & T \langle Y \rangle) \text{ et } (\forall Y)(\forall Z)((Y \subset A \text{ et } Z \subset A) \Rightarrow T \langle Y \cup Z \rangle = \\
 & = T \langle Y \rangle \cup T \langle Z \rangle) .
 \end{aligned}$$

Considérons d'autre part la relation

$$U \subset A \text{ et } (\forall x)(x \in U \Rightarrow x \notin T \langle A - U \rangle) .$$

L'ensemble des $U \in \mathcal{P}(A)$ vérifiant cette relation est une partie $Q\{A, T\}$ de $\mathcal{P}(A)$. On démontre alors (loc.cit.) que les relations suivantes sont des théorèmes de $\mathcal{E}_{\textcircled{M}}$:

$$\begin{aligned}
 & A \in Q \\
 & (\forall M)(M \subset Q \Rightarrow (\bigcup_{X \in M} X) \in Q) \\
 & (\forall X)(\forall Y)((X \in Q \text{ et } Y \in Q) \Rightarrow (X \cap Y) \in Q) .
 \end{aligned}$$

Cela prouve que les termes $P\{A, S\}$ et $Q\{A, T\}$ vérifient les conditions 1° et 2° ci-dessus ; on vérifie aussi qu'ils satisfont à la condition 3°. Les espèces de structure Σ et \textcircled{M} sont donc équivalentes ; aussi considère-t-on toute structure d'espèce \textcircled{M} comme une topologie, savoir celle qui lui correspond par le procédé de déduction $Q\{A, T\}$.*

2) Soit Σ une espèce de structure sur les ensembles de base principaux x_1, \dots, x_n , les ensembles de base auxiliaires A_1, \dots, A_m , de structure générique (s_1, \dots, s_n) , de typification

" $s_1 \in S_1$ et ... et $s_p \in S_p$ "

et d'axiome R . Soient d'autre part U l'échelon $S_1 \times \dots \times S_p$.
Considérons l'espèce de structure \textcircled{A} ayant même ensembles de base
que Σ , mais ayant pour typification " $u \in U$ " et pour axiome la
relation

$$R \{ \{ x_1, \dots, x_n, pr_1 u, pr_2 u, \dots, pr_p u \} \} .$$

On vérifie aussitôt que Σ et \textcircled{A} sont équivalentes par l'inter-
médiaire des procédés de déduction (s_1, \dots, s_p) et $pr_1 u, \dots, pr_p u$.
On peut donc toujours se ramener (à une équivalence près) à une
espèce de structure dont la structure générique ne comporte qu'une
seule lettre.

8. Identifications.

Dans une théorie \mathcal{C} , soient E_i, E'_i des ensembles ($1 \leq i \leq n$) et, pour
 $1 \leq i \leq n$, soit f_i une bijection de E_i sur E'_i . Considérons d'autre part
des schémas de construction d'échelons S_1, \dots, S_q sur n lettres, et soient
 C_1, \dots, C_q des termes de \mathcal{C} tels que les relations $C_k \in S_k(E_1, \dots, E_n)$
($1 \leq k \leq q$) soient des théorèmes de \mathcal{C} . Posons $C'_k = \langle f_1, \dots, f_n \rangle^{S_k}(C_k)$
($1 \leq k \leq q$) ; les relations $C'_k \in S_k(E'_1, \dots, E'_n)$ sont vraies dans \mathcal{C} .

Cela étant, la plupart des relations $A \{ \{ x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_q \} \}$ (x_i et z_j
lettres distinctes entre elles, distinctes des constantes de \mathcal{C} et des
lettres figurant dans les E_i, E'_i, f_i et C_j) qui interviennent dans la
théorie \mathcal{C} sont telles que, lorsque $A \{ \{ E_1, \dots, E_n, C_1, \dots, C_q \} \}$ est vraie,
il en est de même de $A \{ \{ E'_1, \dots, E'_n, C'_1, \dots, C'_q \} \}$ (cf. Appendice, n°6) .

En raison de ce fait, on notera souvent par le même symbole abrégiateur
les termes C_k et C'_k (et en particulier E_i et E'_i seront notés par le
même symbole) ; lorsqu'on fait cet abus de langage, on dit qu'on a

identifié les ensembles E_1, \dots, E_n aux ensembles E'_1, \dots, E'_n au moyen des
bijections f_1, \dots, f_n . Ceci s'appliquera en particulier lorsque certains
des C_k , par exemple C_1, \dots, C_r ($1 \leq r \leq q$) seront tels que (C_1, \dots, C_r)
soit une structure d'une certaine espèce Σ sur E_1, \dots, E_n ; (f_1, \dots, f_n)
sera alors un isomorphisme de E_1, \dots, E_n munis de cette structure, sur
 E'_1, \dots, E'_n munis de (C'_1, \dots, C'_r) .

Exemples. - 1) Au chap. II, § 5, on a défini un certain nombre de
bijections, dites canoniques, de certains termes de la théorie des
ensembles sur d'autres termes (cf. Appendice, n°) ; signalons entre
autres l'application canonique de l'ensemble F^E sur l'ensemble

$\mathcal{F}(E, F)$ des applications de E dans F, l'application canonique de
l'ensemble $X_{\alpha}^{\{\alpha\}}$ sur X_{α} , celle de $A \times B$ sur $\prod_{i \in \{1,2\}} X_i$, où $X_1 = A$,
 $X_2 = B$, celle de $\prod_{\lambda \in L} (\prod_{i \in J_{\lambda}} X_i)$ sur $\prod_{i \in I} X_i$, lorsque $(J_{\lambda})_{\lambda \in L}$
est une partition de I. Dans tous ces cas, il est d'usage d'identi-

fier les termes correspondants au moyen de ces correspondances
biunivoques. De même, l'application $G \rightarrow (G, A, B)$ de l'ensemble
 $\mathcal{P}(A \times B)$ sur l'ensemble des correspondances entre A et B est une
bijection ; en raison de ce fait, on identifie très souvent une
correspondance entre A et B (et en particulier une application de
A dans B) avec son graphe.

2) * L'ensemble des entiers naturels \mathcal{N} est identifié à une partie
de l'ensemble \mathcal{Z} des entiers rationnels (ce dernier étant défini
comme un ensemble quotient de l'ensemble $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$ des couples (m, n)
d'entiers naturels). L'ensemble \mathcal{Z} est identifié à une partie de
l'ensemble \mathcal{Q} des nombres rationnels (ce dernier étant défini comme

ensemble quotient d'un ensemble de couples (p,q) d'entiers rationnels. L'ensemble \mathbb{Q} est identifié à une partie de l'ensemble \mathbb{R} des nombres réels (ce dernier étant défini comme ensemble quotient d'un ensemble de filtres sur \mathbb{Q}). Enfin \mathbb{R} est identifié à une partie de l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes (ce dernier étant défini comme ensemble de couples (x,y) de nombres réels).*

Bien entendu, identifier E_i à E_j au moyen des bijections f_i ($1 \leq i \leq n$) ne signifie pas que l'on introduit les relations $E_i = E_j$ comme nouveaux axiomes ; d'ailleurs $E_i \neq E_j$ est souvent un théorème de \mathcal{E} .

Remarque. - La pratique seule peut enseigner dans quelle mesure l'identification de deux ensembles, munis ou non de structures, présente plus d'avantages que d'inconvénients. Il est nécessaire en tout cas, lorsqu'on l'applique, qu'on ne soit pas exposé à écrire des relations non transportables. L'Appendice montrera pourquoi ce risque est le plus souvent minime (* comme exemple de relation non transportable, on verra que, dans l'identification entre \mathcal{N} et une partie de \mathcal{Z} , la relation $y = \tau_x(x \in \mathcal{N})$ n'est pas transportable).*



APPENDICE

Critères de transportabilité.

1. Termes transportables.

Nous nous proposons de donner un certain nombre de critères simples permettant de vérifier que, dans une théorie \mathcal{C} plus forte que la théorie des ensembles, une relation est transportable (§ 1, n°3).

Les notations et les hypothèses, dans les n°s 1 et 2, seront celles du § 1. Rappelons seulement que I_n ($1 \leq n \leq m$) est l'application identique de A_n , et que l'on pose

$$s_j^1 = \langle f_1, \dots, f_n, I_1, \dots, I_m \rangle^{S_j}(s_j) \quad (1 \leq j \leq p).$$

Pour abrégier, nous dirons que la relation

$$T\{x_1, \dots, x_n, s_1, \dots, s_p\} \text{ et } (f_1 \text{ est une bijection de } x_1 \text{ sur } y_1) \text{ et } \dots \text{ et } (f_n \text{ est une bijection de } x_n \text{ sur } y_n)$$

est la relation de transport (relative à la typification T).

Soit S un schéma de construction d'échelons sur $n+n$ lettres. Nous dirons que, dans \mathcal{C} , un terme $U\{x_1, \dots, x_n, s_1, \dots, s_p\}$ est transportable de type $S(x_1, \dots, x_n, A_1, \dots, A_m)$ pour la typification T (x_1, \dots, x_n étant ensembles de base principaux et A_1, \dots, A_m ensembles de base auxiliaires)

si les deux conditions suivantes sont remplies :

1° La relation $T\{x_1, \dots, x_n, s_1, \dots, s_p\}$ entraîne (dans \mathcal{C}) la relation $U\{x_1, \dots, x_n, s_1, \dots, s_p\} \in S(x_1, \dots, x_n, A_1, \dots, A_m)$.

2° La relation de transport (pour la typification T) entraîne, dans \mathcal{C} , la relation

$$(1) \langle f_1, \dots, f_n, I_1, \dots, I_m \rangle^S (U\{x_1, \dots, x_n, s_1, \dots, s_p\}) = U\{y_1, \dots, y_n, s_1, \dots, s_p^1\}.$$

On dit souvent que le premier membre de (1) est le transporté du terme $U \{x_1, \dots, x_n, s_1, \dots, s_p\}$ par les bijections f_1, \dots, f_n .

Les définitions précédentes et la plupart des critères qui vont être donnés s'appliquent sans modification essentielle au cas où on ne se donne aucune typification ; il faut naturellement supprimer alors tout ce qui se rapporte aux lettres s_i . Nous laissons au lecteur le soin d'explicitier les changements à apporter dans ce cas à chacun des critères qui suivent.

2. Critères de transportabilité.

Dans les critères ci-dessous, lorsqu'il sera question (dans un même critère) de plusieurs relations ou termes transportables, il sera toujours sous-entendu que ces termes ou relations se rapportent tous à la même typification.

CT1. Pour la typification

" $s_1 \in S_1(x_1, \dots, x_n, A_1, \dots, A_m)$ et .. et $s_p \in S_p(x_1, \dots, x_n, A_1, \dots, A_m)$ "
 s_j est un terme transportable de type $S_j(x_1, \dots, x_n, A_1, \dots, A_m)$, x_i un terme transportable de type $\mathcal{N}(x_i)$ et A_h un terme transportable de type $\mathcal{N}(A_h)$ ($1 \leq i \leq n, 1 \leq h \leq m, 1 \leq j \leq p$).

CT2. Si U_1 et U_2 sont des termes transportables de même type, la relation $U_1 = U_2$ est transportable.

CT3. Si U et V sont des termes transportables de types S et $\mathcal{N}(S)$, la relation $U \in V$ est transportable.

CT4. Si U et V sont des termes transportables de type $\mathcal{N}(S)$, la relation $U \subset V$ est transportable.

CT5. Si U et U' sont des termes transportables de types S et S' respectivement, (U, U') est un terme transportable de type $S \times S'$, et $\mathcal{N}(U)$ est un terme transportable de type $\mathcal{N}(S)$. Si U et U' sont des

termes transportables de types $\mathcal{P}(S)$ et $\mathcal{P}(S')$, $U \times U'$ est un terme transportable de type $\mathcal{P}(S \times S')$.

Nous laissons au lecteur les démonstrations de ces critères, qui découlent immédiatement des définitions et des propriétés des bijections (§ 1, critère CE2 et chap.II, § 3, n°7). On notera qu'il résulte de CT5, appliqué de proche en proche, que si U_1, U_2, \dots, U_q sont des termes transportables, tout échelon sur ces termes (§ 1, n°1) est un terme transportable

CT6. Si R et R' sont des relations transportables, il en est de même des relations "non R ", " R ou R' ", " R et R' ", " $R \Rightarrow R'$ ", " $R \Leftrightarrow R'$ ".

C'est une conséquence immédiate des critères du chap.I, § 3.

CT7. Si R est une relation transportable, et si R' est une relation équivalente à R (dans \mathcal{C}), alors R' est transportable.

En effet, comme

$$R \{ x_1, \dots, x_n, s_1, \dots, s_p \} \Leftrightarrow R' \{ x_1, \dots, x_n, s_1, \dots, s_p \}$$

est un théorème de \mathcal{C} , il en est de même de

$$R \{ y_1, y_2, \dots, y_n, s_1, \dots, s_p \} \Leftrightarrow R' \{ y_1, \dots, y_n, s_1, \dots, s_p \}$$

puisque les lettres x_i et s_j sont distinctes des constantes de \mathcal{C} (chap.I, § 2, critère C3). Le critère s'en déduit aussitôt.

CT8. Soit R une relation transportable pour une typification T , dans laquelle la lettre s est typifiée de type S ; alors, si U est un terme transportable de type S , la relation $(U|s)R$ est transportable.

Supposons par exemple que s soit la lettre s_1 , de type S_1 , et soit

$R_1 \{ x_1, \dots, x_n, s_1, \dots, s_p \}$ la relation

$$R \{ x_1, \dots, x_n, U x_1, \dots, x_n, s_1, \dots, s_p, s_2, \dots, s_p \}$$

Plaçons-nous dans la théorie \mathcal{C}' obtenue en adjoignant aux axiomes de \mathcal{C} la relation de transport. Il faut prouver que les relations

$R_1 \{x_1, \dots, x_n, s_1, \dots, s_p\}$ et $R_2 \{y_1, \dots, y_n, s_1, \dots, s_p\}$ sont équivalentes.

Or, en vertu de (1), le transformé

$U \{x_1, \dots, x_n, s_1, \dots, s_p\}$ de $U \{x_1, \dots, x_n, s_1, \dots, s_p\}$ est égal à $U \{y_1, \dots, y_n, s_1, \dots, s_p\}$. Par suite (chap. I, § 5, schéma S6), la relation

$R_1 \{y_1, \dots, y_n, s_1, \dots, s_p\}$ est équivalente à $R_2 \{y_1, \dots, y_n, U, s_1, \dots, s_p\}$.

Le critère résulte alors du critère C2 (chap. I, § 2, n°3), puisque $U \in S_1$ est un théorème de \mathcal{C}' .

CT9. Soit U un terme transportable pour une typification T, dans laquelle la lettre s est typifiée de type S; si V est un terme transportable de type S, (V/s)U est un terme transportable de même type que U.

Si U est de type S' , T entraîne la relation $U \in S'(x_1, \dots, x_n, A_1, \dots, A_m)$; comme $V \in S(x_1, \dots, x_n, A_1, \dots, A_m)$ est entraînée par T, il en est de même de

$$(V/s)U \in S'(x_1, \dots, x_n, A_1, \dots, A_m)$$

comme il résulte du critère C2 (chap. I, § 2, n°3). Nous laissons au lecteur la fin de la démonstration, qui se fait de façon tout à fait analogue à celle de CT8, en remplaçant le schéma S6 par le critère C44 (chap. I, § 6, n°2).

CT10. Soit $R \{x_1, \dots, x_n, s_1, \dots, s_p\}$ une relation telle que la relation de transport entraîne, dans \mathcal{C} , la relation

$$R \{x_1, \dots, x_n, s_1, \dots, s_p\} \Rightarrow R \{y_1, \dots, y_n, s_1, \dots, s_p\}$$

Alors R est transportable.

Soit \mathcal{C}' la théorie obtenue en adjoignant aux axiomes de \mathcal{C} la relation de transport; désignons cette dernière par

$P \{x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, f_1, \dots, f_n, s_1, \dots, s_p\}$. Dans \mathcal{C}' , f_i^{-1} est une bijection de y_i sur x_i , et on a

$$(2) \quad s_j = \langle f_1^{-1}, \dots, f_n^{-1}, I_1, \dots, I_m \rangle^{S_j} (s_j) \quad (1 \leq j \leq p).$$

La relation

$$P\{y_1, \dots, y_n, x_1, \dots, x_n, f_1^{-1}, \dots, f_n^{-1}, s_1, \dots, s_p\}$$

est donc un théorème de \mathcal{C}' . Soient u_i ($1 \leq i \leq n$), v_i ($1 \leq i \leq n$), ε_i ($1 \leq i \leq n$), t_j ($1 \leq j \leq p$) des lettres distinctes entre elles et distinctes des constantes de \mathcal{C}' et des lettres figurant dans R . La relation

$$P\{u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, t_1, \dots, t_p\}$$

entraîne par hypothèse, dans \mathcal{C} ,

$$R\{u_1, \dots, u_n, t_1, \dots, t_p\} \Rightarrow R\{v_1, \dots, v_n, t_1, \dots, t_p\}$$

avec $t_j = \langle \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, I_1, \dots, I_m \rangle_{S_j}^j(t_j)$ ($1 \leq j \leq p$).

Vu le choix des lettres $u_i, v_i, \varepsilon_i, t_j$, il résulte de ce qui précède (en vertu du critère C3) que la relation

$$R\{y_1, \dots, y_n, s_1, \dots, s_p\} \Rightarrow R\{x_1, \dots, x_n, s_1, \dots, s_p\}$$

est un théorème de \mathcal{C}' .

CT11. Soient z une lettre distincte des constantes de \mathcal{C} et des lettres figurant dans la typification $T\{x_1, \dots, x_n, s_1, \dots, s_p\}$. Soit

$S(x_1, \dots, x_n, A_1, \dots, A_m)$ un échelon sur $x_1, \dots, x_n, A_1, \dots, A_m$, et soit $T'\{x_1, \dots, x_n, s_1, \dots, s_p, z\}$ la typification " $T\{x_1, \dots, x_n, s_1, \dots, s_p\}$ et $z \in S(x_1, \dots, x_n, A_1, \dots, A_m)^n$.

Supposons que la relation T entraîne (dans \mathcal{C}) la relation $S(x_1, \dots, x_n, A_1, \dots, A_m) \neq \emptyset$. Alors, si une relation R est transportable pour la typification T' et ne contient pas z , elle est transportable pour la typification T .

Cela résulte aussitôt de la méthode de la constante auxiliaire (chap. I, § 3, n°3 et § 4, n°1).

Le critère précédent s'appliquera en particulier lorsque l'échelon $S(x_1, \dots, x_n, A_1, \dots, A_m)$ sera de la forme $\mathcal{N}(X)$, ou lorsqu'il sera

identique à un des échelons $S_j(x_1, \dots, x_n, A_1, \dots, A_m)$ intervenant dans la typification T .

CT12. Soit $U \{x_1, \dots, x_n, s_1, \dots, s_p\}$ un terme tel que la relation

$T \{x_1, \dots, x_n, s_1, \dots, s_p\}$ entraîne la relation

$$U \{x_1, \dots, x_n, s_1, \dots, s_p\} \in S(x_1, \dots, x_n, A_1, \dots, A_m)$$

(S étant un schéma de construction d'échelons sur n+m lettres).

Pour que U soit un terme transportable de type S pour la typification T , il faut et il suffit que la relation z=U soit transportable pour la typification " $T \{x_1, \dots, x_n, s_1, \dots, s_p\}$ et $z \in S(x_1, \dots, x_n, A_1, \dots, A_m)$ "

(z étant une lettre distincte des constantes de \mathcal{C} et des lettres figurant dans T ou dans U).

Soit T' la typification "T et $z \in S$ " ; il est clair que la relation de transport pour la typification T' entraîne la relation

$$(z = U) \Rightarrow (\langle f_1, \dots, f_n, I_1, \dots, I_m \rangle^S(U) = \langle f_1, \dots, f_n, I_1, \dots, I_m \rangle^S(z))$$

On conclut aussitôt de là que si U est transportable (de type S) pour la typification T , z=U est transportable pour la typification T'.

Inversement, si z=U est transportable pour T', la relation de transport pour T' entraîne la relation (1). Mais cette dernière ne contient pas z ; d'autre part, la relation T entraîne $U \in S$, donc $S \neq \emptyset$; la méthode de la constante auxiliaire (chap.I, § 3, n°3 et § 4, n°1) montre que la relation de transport pour T entraîne (1), autrement dit que U est transportable pour T .

CT13. Soit R une relation transportable pour la typification T .

Chacune des relations

$$(\exists s_j)(s_j \in S_j(x_1, \dots, x_n, A_1, \dots, A_m) \text{ et } R)$$

$$(\forall s_j)((s_j \in S_j(x_1, \dots, x_n, A_1, \dots, A_m)) \Rightarrow R)$$

est alors transportable pour T (1 ≤ j ≤ p).

Démontrons par exemple le critère pour j=1,. Il résulte du critère C39 (chap.I, § 4, n°4) que la relation de transport pour T entraîne la relation

$$(\exists s_1)(s_1 \in S_1(x_1, \dots, x_n, A_1, \dots, A_m) \text{ et } R \{x_1, \dots, x_n, s_1, \dots, s_p\}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\exists s_1)(s_1 \in S_1(x_1, \dots, x_n, A_1, \dots, A_m) \text{ et } R \{y_1, \dots, y_n, s_1, \dots, s_p\}).$$

Autrement dit, la relation précédente est vraie dans la théorie C' obtenue en adjoignant aux axiomes de C la relation de transport. D'autre part, dans C', la relation s1 ∈ S1(x1, ..., xn, A1, ..., Am) entraîne s1 ∈ S1(y1, ..., yn, A1, ..., Am). Enfin, la relation

$$s_1 \in S_1(y_1, \dots, y_n, A_1, \dots, A_m) \text{ et } R \{y_1, \dots, y_n, s_1, \dots, s_p\}$$

entraîne

$$(\exists t)(t \in S_1(y_1, \dots, y_n, A_1, \dots, A_m) \text{ et } R \{y_1, \dots, y_n, t, s_2, \dots, s_p\}).$$

(t étant une lettre distincte de toutes celles utilisées antérieurement).

Or, cette dernière relation ne contient plus s1. Si on désigne par

R' {x1, ..., xn, s2, ..., sp} la relation

$$(\exists s_1)(s_1 \in S_1(x_1, \dots, x_n, A_1, \dots, A_m) \text{ et } R \{x_1, \dots, x_n, s_1, s_2, \dots, s_p\})$$

on voit (en appliquant de nouveau C39) que, dans C', la relation

R' {x1, ..., xn, s2, ..., sp} entraîne la relation

$$R \{y_1, \dots, y_n, s_2, \dots, s_p\} \text{ et } (\exists s_1)(s_1 \in S_1(x_1, \dots, x_n, A_1, \dots, A_m)).$$

Mais dans C', (∃ s1)(s1 ∈ S1(x1, ..., xn, A1, ..., Am)) est un théorème donc

R' {x1, ..., xn, s2, ..., sp} ⇒ R' {y1, ..., yn, s2, ..., sp} est aussi un théorème

Compte-tenu de CT10, la première partie du critère est établie. La

seconde résulte de la première et de CT6.

- 28 -

CT14. Soient R une relation transportable et X un terme transportable de type $\mathcal{P}(S_j)$ pour la typification T . Chacune des relations

$$(\exists s_j)(s_j \in X \text{ et } R)$$

$$(\forall s_j)((s_j \in X) \Rightarrow R)$$

est transportable pour T .

Supposons $j=1$; soit \mathcal{E}' la théorie obtenue en adjoignant aux axiomes de \mathcal{E} la relation de transport, et soit t une lettre ne figurant pas dans R ni dans les axiomes de \mathcal{E}' . Par hypothèse, dans \mathcal{E}' , $t \in X$ entraîne

$t \in S_1(x_1, \dots, x_n, A_1, \dots, A_m)$; par conséquent,

$(t \in X \text{ et } R \{x_1, \dots, x_n, t, s_2, \dots, s_p\})$ est équivalente (dans \mathcal{E}') à

$(t \in S_1 \text{ et } (t \in X \text{ et } R \{x_1, \dots, x_n, t, s_2, \dots, s_p\}))$; comme t n'est pas une

constante de \mathcal{E}' , on en conclut que, dans \mathcal{E}' ,

$(\exists t)(t \in X \text{ et } R \{x_1, \dots, x_n, t, s_2, \dots, s_p\})$ est équivalente à

$(\exists t)(t \in S_1 \text{ et } B \{x_1, \dots, x_n, t, s_2, \dots, s_p\})$, où B est la relation

$$t \in X \text{ et } R \{x_1, \dots, x_n, t, s_2, \dots, s_p\} .$$

Posons $X' = \langle f_1, \dots, f_n, e_1, \dots, e_m \rangle^{S_1} \langle X \rangle$; comme, d'après CT3, la relation $X \in \mathcal{P}(S_1)$ est transportable pour T , la relation $t \in X'$ entraîne,

dans \mathcal{E}' , la relation $t \in S_1(y_1, \dots, y_n, A_1, \dots, A_m)$; on en conclut comme ci-dessus que, dans \mathcal{E}' , la relation

$$(\exists t)(t \in X' \text{ et } R \{y_1, \dots, y_n, t, s'_2, \dots, s'_p\})$$

est équivalente à

$$(\exists t)(t \in S_1(y_1, \dots, y_n, A_1, \dots, A_m) \text{ et } B \{y_1, \dots, y_n, t, s'_2, \dots, s'_p\})$$

Or il résulte de CT3 et CT6 que $B \{x_1, \dots, x_n, s_1, \dots, s_p\}$ est transportable pour T ; le critère CT13 prouve alors que, dans \mathcal{E}' , les relations

$(\exists t)(t \in S_1(x_1, \dots, x_n, A_1, \dots, A_m) \text{ et } B \{x_1, \dots, x_n, t, s_2, \dots, s_p\})$ et

$(\exists t)(t \in S_1(y_1, \dots, y_n, A_1, \dots, A_m) \text{ et } B \{y_1, \dots, y_n, t, s'_2, \dots, s'_p\})$

sont équivalentes. Il en est donc de même de

$$(\exists t)(t \in X \text{ et } R(x_1, \dots, x_n, t, s_2, \dots, s_p))$$

et $(\exists t)(t \in X' \text{ et } R(y_1, \dots, y_n, t, s_2', \dots, s_p'))$

ce qui établit la première partie du critère. La seconde s'en déduit, compte-tenu de CT6.

CT15. Soit R une relation transportable pour la typification T. Si (dans C) la relation " $s_j \in S_j(x_1, \dots, x_n, A_1, \dots, A_m)$ " et $R(x_1, \dots, x_n, s_1, \dots, s_p)$ est fonctionnelle en s_j , le terme $\tau_{s_j}(s_j \in S_j \text{ et } R)$ est un terme transportable de type S_j .

Notons ce terme par U, et soit z une lettre distincte des constantes de et des lettres figurant dans R ou dans T. La relation $z=U$ est équivalente à

$$"z_j \in S_j(x_1, \dots, x_n, A_1, \dots, A_m) \text{ et } (z|s_j)R"$$

(chap. I, § 5, critère C46). Or, cette dernière est transportable pour la typification "T et $z \in S_j(x_1, \dots, x_n, A_1, \dots, A_m)$ " en vertu des critères CT3 et CT6 ; donc il en est de même de $z=U$, d'après CT7. Par ailleurs, comme " $s_j \in S_j \text{ et } R$ " entraîne $s_j \in S_j$, la relation $U \in S_j$ est entraînée par T, ce qui achève de prouver que U est transportable pour T (critère CT12)

Par contre, même si R est une relation transportable contenant s_j , le terme $\tau_{s_j}(R)$ n'est pas en général un terme transportable. Prenons par exemple pour typification et pour relation R la relation $s_1 \in x_1$. Si $\tau_{s_1}(R)$ était transportable, la relation de transport entraînerait l'égalité

$$f_1(\tau_{s_1}(s_1 \in x_1)) = \tau_t(t \in f_1(x_1))$$

Or, substituant dans cette relation à x_1 un ensemble E ayant plus d'un élément, on en conclurait que l'image de l'élément $\tau_s(s \in E)$

de E par toute bijection f de E sur un ensemble F serait un élément de F indépendant de f, alors qu'il existe des bijections de E sur F transformant un élément donné de E en un élément arbitraire de F.

CT16. Soit R une relation transportable pour la typification T.

Le terme "l'ensemble des $s_j \in S_j(x_1, \dots, x_n, A_1, \dots, A_m)$ tels que R" est alors un terme transportable de type $\mathcal{N}(S_j)$.

En effet, soit X une lettre distincte des constantes de \mathcal{C} et des lettres figurant dans R ou dans T; le terme considéré est $\tau_X(R')$ où R' est la relation

$$(\forall s_j)((s_j \in X) \Leftrightarrow (s_j \in S_j(x_1, \dots, x_n, A_1, \dots, A_m) \text{ et } R))$$

(chap. II, § 1, n° 4). Il résulte d'abord de CT3, CT6 et CT14 que R' est transportable pour la typification pour la typification "T et $X \in \mathcal{N}(S_j)$ ", typification que nous désignerons par T'. D'autre part, dans \mathcal{C} , R' est fonctionnelle en X (chap. II, § 1, n° 6), et entraîne $X \in \mathcal{N}(S_j)$; dans \mathcal{C} , R' est donc équivalente à "R' et $X \in \mathcal{N}(S_j)$ ", et $\tau_X(R') \in \mathcal{N}(S_j)$ est un théorème de \mathcal{C} . Il résulte alors de CT15 que le terme $\tau_X(R')$ est transportable pour la typification T'; d'autre part, T entraîne la relation $\tau_X(R') \in \mathcal{N}(S_j)$, et $\tau_X(R')$ ne contient pas X; ce terme est donc un terme transportable de type $\mathcal{N}(S_j)$ pour la typification T, en vertu de CT11 et CT12.

CT17. Soient U un terme transportable de type S, et X un terme transportable de type $\mathcal{N}(S_j)$ pour la typification T. Alors le terme

"l'ensemble des objets de la forme U pour $s_j \in X$ " (chap. II, § 1, n° 6) est un terme transportable de type $\mathcal{N}(S)$.

En effet, soit z une lettre distincte des constantes de \mathcal{C} et des lettres figurant dans T, U ou X. Le terme considéré est l'ensemble V des $z \in S(x_1, \dots, x_n, A_1, \dots, A_m)$ tels que

- 31 -

$$(\exists s_j)(s_j \in X \text{ et } z = U)$$

(chap. II, § 1, n°6). En vertu de CT2, CT14 et CT16, V est un terme transportable pour la typification " T et $z \in S$ "; mais dans \mathcal{E} , T entraîne $U \in S$ par hypothèse (et par suite entraîne $S \neq \emptyset$), donc T entraîne $V \in \mathcal{P}(S)$; comme le terme V ne contient pas z , il est transportable pour la typification T en vertu de CT11 et CT12.

CT18. Soit X un terme transportable de type $\mathcal{P}(\mathcal{P}(S))$; les termes
 $\bigcup_{Y \in X} Y$ et $\bigcap_{Y \in X} Y$ sont des termes transportables de type $\mathcal{P}(S)$.

CT19. Si X est un terme transportable de type $\mathcal{P}(S)$, il en est de même de $S-X$.

Ces deux critères résultent de CT6, CT13 et CT16.

Dans ce qui suit, nous identifierons, pour la commodité des énoncés, toute correspondance entre deux ensembles E, F avec son graphe (partie de $E \times F$) (§ 1, n°8).

CT20. Soient X et Y deux termes transportables de types $\mathcal{P}(S)$ et $\mathcal{P}(S')$, pour une typification T dans laquelle la lettre s est typifiée de type $\mathcal{P}(S \times S')$. Alors les relations

" s est une correspondance entre X et Y "

" s est une application de X dans Y "

" s est une surjection de X dans Y "

" s est une injection de X dans Y "

" s est une bijection de X dans Y "

sont des relations transportables.

C'est évident pour la première, qui n'est autre que $s \subset X \times Y$, en vertu de CT4 et CT5. La seconde est la conjonction de la première et des deux relations

- 32 -

$$(\forall x)(\forall y)(\forall y')((x \in X \text{ et } y \in Y \text{ et } y' \in Y \text{ et } (x,y) \in s \text{ et } (x,y') \in s) \Rightarrow (y=y')) \\ (\forall x)((x \in X) \Rightarrow (\exists y)(y \in Y \text{ et } (x,y) \in s)) .$$

En vertu des critères précédents (et notamment de CT14), ces relations sont transportables pour la typification "T et $x \in S$ et $y \in S'$ et $y' \in S'$ "; comme elles ne contiennent ni x , ni y , ni y' , et que T entraîne $S \times S' \neq \emptyset$, elles sont aussi transportables pour la typification T, d'après CT11. Vérification analogue pour les autres relations.

Soient X, Y, G des termes transportables de types $\mathcal{P}(S)$, $\mathcal{P}(S')$ et $\mathcal{P}(S \times S')$ respectivement. Si la relation "G est une correspondance entre X et Y" est vraie dans \mathcal{C} , on dit que G est une correspondance transportable. On définit de même les notions d'application transportable, de surjection, injection ou bijection transportable. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier les critères suivants :

CT21. Si une relation transportable admet un graphe par rapport à deux lettres s_j, s_k , ce graphe est une correspondance transportable entre S_j et S_k .

CT22. La composée de deux correspondances transportables et la réciproque d'une correspondance transportable sont des correspondances transportables.

CT23. Soient X et Y des termes transportables de types $\mathcal{P}(S)$ et $\mathcal{P}(S')$, et G une correspondance transportable entre X et Y. Si U est un terme transportable de type $\mathcal{P}(S)$, tel que la typification T entraîne $U \subset X$, $\forall \lambda \in \mathcal{A}$, alors $G \langle U \rangle$ est un terme transportable de type $\mathcal{P}(S')$.

CT24. Soient X et Y des termes transportables, f une application transportable de X dans Y ; si U est un terme transportable tel que la typification T entraîne $U \in X$, f(U) est un terme transportable.

CT25. La restriction d'une application transportable à un terme transportable est une application transportable.

CT26. Si X est un terme transportable, R une relation d'équivalence transportable dans X, alors l'ensemble quotient X/R est un terme transportable, et l'application canonique de X sur X/R est une application transportable.

CT27. L'extension canonique d'une correspondance transportable aux ensembles de parties est une application transportable ; l'extension canonique de deux applications transportables aux ensembles produits est une application transportable.

3. Exemples de relations et termes transportables.

1) Donnons d'abord des exemples de relations et termes transportables sans typification (n^0). La relation " x_1 et x_2 sont équipotents" est transportable (lorsque x_1 et x_2 sont ensembles de base principaux) comme on le voit directement, ou par application de CT20 et CT11. Les relations " x est un ensemble infini", " $n \in \mathcal{N}$ et x est un ensemble à n éléments" sont transportables, x étant le seul ensemble de base principal. Par contre, dans les mêmes conditions, on ne peut dire que $\text{Card}(x)$ soit un terme transportable, car il faudrait pour cela connaître un échelon $S(x)$ tel que la relation $\text{Card}(x) \in S(x)$ soit vraie dans la théorie des ensembles, et l'on n'en connaît pas actuellement. Pour la même raison, on ignore si les termes tels que $1, 2, \mathcal{N}$ transportables pour une typification quelconque ; mais le terme \emptyset est transportable pour toute typification.

Les termes "l'ensemble des suites infinies d'éléments de x ",
* "l'ensemble des fonctions numériques définies dans x " * sont transportables lorsque x est pris comme ensemble de base principal, les termes

N^* et R_* comme ensembles de base auxiliaires ; cela résulte entre autres de CT20, CT16 et CT11.

Le lecteur s'assurera sans peine que chacune des applications dites "canoniques" définies au chap.II est transportable pour des ensembles de base et une typification convenables dans chaque cas.

2) La définition d'une espèce de structure Σ (§ 1) nécessite dans chaque cas la vérification que l'axiome de Σ est une relation transportable pour la caractérisation typique de Σ ; pour toutes les espèces de structure usuelles, cette vérification découle trivialement des critères donnés ci-dessus, et est le plus souvent omise.

Indiquons par exemple comment elle se fait pour l'espèce de structure de groupe (Alg., chap.I, § 6) ; cette espèce de structure comporte un seul ensemble de base G , la caractérisation typique

$p \in \mathcal{P}((G \times G) \times G)$, et l'axiome R :

p est une application de $G \times G$ dans G

et $(\forall x)(\forall y)(\forall z)((x \in G \text{ et } y \in G \text{ et } z \in G) \Rightarrow (p(p(x,y),z)=p(x,p(y,z)))$

et $(\exists u)(u \in G \text{ et } (\forall x)((x \in G) \Rightarrow (p(u,x)=x \text{ et } p(x,u)=x))$

et $(\forall x)((x \in G) \Rightarrow (\exists y)(y \in G \text{ et } p(x,y)=u \text{ et } p(y,x)=u))$.

Cette relation ne contient que les lettres p et G ; pour voir qu'elle est transportable pour la caractérisation typique, on montre d'abord qu'elle est transportable pour la typification

" $p \in \mathcal{P}((G \times G) \times G)$ et $x \in G$ et $y \in G$ et $z \in G$ et $u \in G$ "

ce qui résulte immédiatement des critères du n°2 (notamment de CT24, CT20 et CT13). Le critère CT11 ne suffit pas tout à fait ici à conclure, car la typification $p \in \mathcal{P}((G \times G) \times G)$ n'entraîne pas $G \neq \emptyset$; mais on peut appliquer la méthode de disjonction des cas, en adjoignant successivement les axiomes $G \neq \emptyset$ et $G = \emptyset$; dans le second cas,

la relation $R_{\{G, p\}}$ est fausse, et s'il existe une bijection de G sur G' , on a $G' = \emptyset$, donc la relation $R_{\{G', p'\}}$ est fausse, et par suite équivalente à $R_{\{G, p\}}$.

4. Relations et termes relativement transportables.

Soit Σ une espèce de structure dans une théorie \mathcal{C} , ayant pour ensembles de base principaux x_1, \dots, x_n , pour ensembles de base auxiliaires A_1, \dots, A_m , pour structure générique (s_1, \dots, s_p) ; soit $R_{\{x_1, \dots, x_n, s_1, \dots, s_p\}}$ son axiome,

" $s_1 \in S_1(x_1, \dots, x_n, A_1, \dots, A_m)$ et ... et $s_p \in S_p(x_1, \dots, x_n, A_1, \dots, A_m)$ " sa caractérisation typique, que nous désignerons par $T_{\{x_1, \dots, x_n, s_1, \dots, s_p\}}$.

Soient $y_1, \dots, y_n, t_1, \dots, t_p$ $n+p$ lettres distinctes des x_i, s_j et des constantes de \mathcal{C}_Σ , et distinctes entre elles. Soit \mathcal{C}_1 la théorie obtenue en adjoignant aux axiomes de \mathcal{C} l'axiome " $T_{\{x_1, \dots, x_n, s_1, \dots, s_p\}}$ " et $R_{\{x_1, \dots, x_n, s_1, \dots, s_p\}}$ et $T_{\{y_1, \dots, y_n, t_1, \dots, t_p\}}$ et $R_{\{y_1, \dots, y_n, t_1, \dots, t_p\}}$ ". Soient B_1, \dots, B_r des termes de \mathcal{C} ne contenant aucune des lettres x_i, y_i, s_j, t_j ; soient u_1, \dots, u_q des lettres distinctes entre elles et distinctes de toutes les précédentes, et soit

$T_1_{\{x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_q\}}$ une typification

" $u_1 \in S_{p+1}(x_1, \dots, x_n, A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_r)$ et ... et

et $u_q \in S_{p+q}(x_1, \dots, x_n, A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_r)$ ".

Soit $P_{\{x_1, \dots, x_n, s_1, \dots, s_p, u_1, \dots, u_q\}}$ une relation de \mathcal{C} contenant certaines des lettres x_i, s_j, u_k et éventuellement d'autres lettres (mais aucune des lettres y_i, t_j). Dire que P est transportable (dans \mathcal{C})

relativement à Σ , pour la typification T_1 (les x_i ($1 \leq i \leq n$) étant ensembles de base principaux, les A_h et B_ℓ ($1 \leq h \leq m, 1 \leq \ell \leq r$) ensembles de base auxiliaires), c'est dire que la condition suivante est satisfaite :

Soient f_1, \dots, f_n des lettres distinctes de toutes les précédentes et distinctes entre elles ; soit I_h ($1 \leq h \leq m$) l'application identique de A_h sur lui-même, I_{m+l} ($1 \leq l \leq r$) l'application identique de B_l sur lui-même. Appelons relation de transport (pour Σ et T_1) la relation suivante :

" $T_1 \{ \{ x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_q \} \}$ et (f_1, \dots, f_n) est un isomorphisme de x_1, \dots, x_n , munis de (s_1, \dots, s_p) , sur y_1, \dots, y_n , munis de (t_1, \dots, t_p) ".

Alors, dans \mathcal{C}_1 , la relation de transport entraîne la relation

$$(3) \quad P \{ \{ x_1, \dots, x_n, s_1, \dots, s_p, u_1, \dots, u_q \} \} \iff P \{ \{ y_1, \dots, y_n, t_1, \dots, t_p, u_1, \dots, u_q \} \}$$

où on a posé

$$(4) \quad u_k^i = \langle f_1, \dots, f_n, I_1, \dots, I_{m+r} \rangle^{S_{p+k}}(u_k) \quad (1 \leq k \leq q).$$

De même, dire qu'un terme $U \{ \{ x_1, \dots, x_n, s_1, \dots, s_p, u_1, \dots, u_q \} \}$ ne contenant pas les y_i ni les t_j est transportable de type

$S(x_1, \dots, x_n, A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_r)$ relativement à Σ , pour la typification T_1 , c'est dire que les deux conditions suivantes sont remplies :

1° La relation $T_1 \{ \{ x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_q \} \}$ entraîne, dans \mathcal{C}_1 , la relation $U \{ \{ x_1, \dots, x_n, s_1, \dots, s_p, u_1, \dots, u_q \} \} \in S(x_1, \dots, x_n, A_1, \dots, B_r)$.

2° La relation de transport (pour Σ et T_1) entraîne, dans \mathcal{C}_1 la relation

$$(5) \quad \langle f_1, \dots, f_n, I_1, \dots, I_{m+r} \rangle^S (U \{ \{ x_1, \dots, x_n, s_1, \dots, s_p, u_1, \dots, u_q \} \}) = U \{ \{ y_1, \dots, y_n, t_1, \dots, t_p, u_1, \dots, u_q \} \}.$$

On vérifie aisément que ces nouvelles notions peuvent se ramener aux notions de transportabilité (absolue) définies antérieurement, de façon suivante : Pour que la relation P soit transportable relativement à Σ pour la typification T_1 , il faut et il suffit que la relation $R \Rightarrow P$ soit transportable (dans \mathcal{C}) pour la typification "T et T_1 ".

De même, on a le critère de transportabilité suivant :

CT'12. Soit $U \{x_1, \dots, x_n, s_1, \dots, s_p, u_1, \dots, u_q\}$ un terme tel que la relation "T et T₁ et R" entraîne la relation

$$U \{x_1, \dots, x_n, s_1, \dots, s_p, u_1, \dots, u_q\} \in S(x_1, \dots, x_n, A_1, \dots, B_r).$$

Pour que le terme U soit transportable de type S, relativement à Σ , pour la typification T₁, il faut et il suffit que la relation z=U soit transportable relativement à Σ , pour la typification "T₁ et z ∈ S" (z étant une lettre distincte de toutes les lettres antérieures).

La démonstration se fait exactement comme pour le critère CT12.

Un terme $U \{x_1, \dots, x_n, s_1, \dots, s_p\}$ qui ne contient aucune lettre autre que les constantes de \mathcal{C}_Σ , et qui est transportable relativement à Σ est encore dit canoniquement associé à la structure générique (s_1, \dots, s_p) ou intrinsèque pour (s_1, \dots, s_p) . Il est immédiat que la relation "(f₁, ..., f_n) est un automorphisme de x₁, ..., x_n (munis de (s₁, ..., s_p))" entraîne que le transformé de U par f₁, ..., f_n est égal à U ; on dit encore que U est invariant par tous les automorphismes de x₁, ..., x_n, munis de (s₁, ..., s_p).

Cette condition nécessaire pour que U soit canoniquement associé à (s_1, \dots, s_p) n'est pas suffisante en général : il peut se faire par exemple que tout automorphisme de x₁, ..., x_n se réduise à l'application identique sur chacun des x_i. *C'est le cas pour l'espèce de structure de corps premier, ou pour celle de corps ordonné, archimédien et complet ; or, si par exemple Σ est l'espèce de corps premier à deux éléments, ayant pour ensemble de base K, le terme $\tau_z (z \in K)$ n'est pas transportable relativement à l'espèce de structure Σ (et on ne dispose d'aucun théorème permettant de dire si ce terme est égal à 0 ou à 1).*

Lorsqu'un terme canoniquement associé U à (s_1, \dots, s_p) est tel en outre que la relation " U est une correspondance entre X et Y " (resp. " U est une application de X dans Y ") soit un théorème de \mathcal{E}_Σ (X et Y étant deux termes canoniquement associés à (s_1, \dots, s_p)), on dit que U est une correspondance canonique (resp. application canonique) pour Σ . On aura l'occasion, dans la suite de ce Traité, de définir de très nombreuses applications canoniques.

5. Critères de transportabilité relative.

A chacun des critères de transportabilité donnés au n°2 correspond un critère de transportabilité relative à une espèce de structure que nous désignerons par la notation CT' suivie du même numéro. Nous en laisserons la démonstration au lecteur, et nous nous contenterons d'expliciter ceux dont l'énoncé ne se déduit pas de celui du critère de transportabilité correspondant, en y remplaçant "transportable" par "transportable relativement à Σ ".

CT'1. Relativement à Σ et pour la typification T_1 , u_k est un terme transportable de type S_{p+k} , s_j un terme transportable de type S_j , x_i un terme transportable de type $\mathcal{P}(x_j)$, A_n (resp. B_ℓ) un terme transportable de type $\mathcal{P}(A_n)$ (resp. $\mathcal{P}(B_\ell)$).

CT'7. Relativement à Σ , si P est une relation transportable, et si P' est une relation équivalente à P (dans \mathcal{E}_Σ), alors P' est transportable.

CT'13. Soit P une relation transportable relativement à Σ , pour la typification T_1 . Chacune des relations

$$(\exists u_k)(u_k \in S_{p+k} \text{ et } P)$$

$$(\forall u_k)((u_k \in S_{p+k}) \Rightarrow P)$$

est transportable relativement à Σ ($1 \leq k \leq q$).

CT'14. Relativement à Σ , soient P une relation transportable et X un terme transportable de type $\mathcal{P}(S_{p+k})$ pour la typification T_1 . Chacune des relations

$$(\exists u_k)(u_k \in X \text{ et } P)$$

$$(\forall u_k)((u_k \in X) \Rightarrow P)$$

est transportable relativement à Σ .

CT'15. Soit P une relation transportable relativement à Σ , pour la typification T_1 . Si (dans \mathcal{C}_Σ), la relation " $u_k \in S_{p+k}$ et P" est fonctionnelle en u_k , le terme $\mathcal{Z}_{u_k}(u_k \in S_{p+k} \text{ et } P)$ est transportable relativement à Σ .

On énonce de même CT'16 et CT'17 en remplaçant "transportable" par "transportable relativement à Σ ", s_j par u_k et S_j par S_{p+k} . On dit que G est une correspondance transportable entre X et Y, relativement à Σ , si X, Y, G sont des termes transportables (relativement à Σ) de types $\mathcal{P}(S)$, $\mathcal{P}(S')$, $\mathcal{P}(S \times S')$ respectivement, et si la relation "G est une correspondance entre X et Y" est vraie dans \mathcal{C}_Σ . On définit de même les applications, surjections, injections et bijections transportables relativement à Σ . Moyennant quoi, nous pouvons nous dispenser d'explicitier les critères CT'21 à CT'27.

Exemple.- Prenons pour Σ l'espèce de structure de groupe (n^03), avec un seul ensemble de base G et la structure générique p. Pratiquement tous les termes et relations qu'on introduit en théorie des groupes sont transportables relativement à Σ . *Montrons-le sur quelques exemples (pour abrégé, nous dirons "transportable" au lieu de "transportable relativement à l'espèce de structure de groupe). En premier lieu, p est une application transportable

de $G \times G$ sur G (donc une application "canonique" de $G \times G$ dans G).
 La relation "H est un sous-groupe de G" est transportable pour la
 typification $H \in \mathcal{X}(G)$; en effet, elle est équivalente à

$$H \subset G \text{ et } (\forall x)(\forall y)(\forall z)((x \in H \text{ et } y \in H \text{ et } z \in G \text{ et } p(z,y)=x \Rightarrow z \in H)$$

et on utilise entre autres CT'14 et CT'11. La relation "x est un
 commutateur dans G" est transportable pour la typification $x \in G$,
 car elle est équivalente à

$$(\exists s)(\exists t)(s \in G \text{ et } t \in G \text{ et } x \in G \text{ et } p(p(t,s),x)=p(s,t)).$$

Le terme "l'ensemble des commutateurs de G" est donc transportable
 en raison de CT'16". Enfin le terme "le groupe des commutateurs
 de G" est transportable (et donc canoniquement associé à G), car
 il s'écrit "l'intersection des sous-groupes de G qui contiennent
 l'ensemble des commutateurs de G" et on conclut notamment en
 utilisant CT'18. *

6. Applications : déductions de structures et identifications.

La condition introduite sur les termes P_1, \dots, P_q dans la définition
 des procédés de déduction de structures (§ 1, n°6 ; les notations sont
 celles de ce n°) s'expriment encore, avec la terminologie introduite
 ci-dessus, en disant que P_1, \dots, P_q sont des termes canoniquement
associés à la structure générique (s_1, \dots, s_p) d'espèce Σ ; on voit
 donc pourquoi cette condition est toujours vérifiée pour les structures
 usuelles.

La notion de relation ou terme transportable relativement à une
 espèce de structure Σ est aussi celle qui justifie la plupart des
 "identifications" (§ 1, n°3). Supposons en effet que les termes

$C_k \{x_1, \dots, x_n, s_1, \dots, s_p\}$ ($1 \leq k \leq q$) soient de type S_{p+k} ($1 \leq k \leq q$) et canoniquement associés à la structure générique (s_1, \dots, s_p) d'espèce Σ . Alors, pour toute relation $A \{x_1, \dots, x_n, s_1, \dots, s_p, u_1, \dots, u_q\}$ transportable relativement à Σ , pour la typification T_1 (avec les notations du n°4), la relation

$$A \{x_1, \dots, x_n, s_1, \dots, s_p, C_1 \{x_1, \dots, x_n, s_1, \dots, s_p\}, \dots, \dots, C_q \{x_1, \dots, x_n, s_1, \dots, s_p\}\}$$

est encore transportable relativement à Σ , en raison de CT'8 ; la condition indiquée au § 1, n°8, en ce qui concerne les identifications, sera donc vérifiée par les termes C_k .