RÉDACTION N° 189

COTE : NBR 092

TITRE : LIVRE I - THÉORIE DES ENSEMBLES
CHAPITRE III (ÉTAT 6) ENSEMBLES ORDONNÉS.
CARDINAUX. NOMBRES ENTIERS.

ASSOCIATION DES COLLABORATEURS DE NICOLAS BOURBAKI

NOMBRE DE PAGES : 83

NOMBRE DE FEUILLES : 83

Mr Dieudonné
sept. 1953
NBR 092

LIVRE I.

THÉORIE DES ENSEMBLES

CHAPITRE III (Etat 6)

ENSEMBLES ORDONNÉS. CARDINAUX. NOMBRES ENTIERS.

§ 1. Relations d'ordre. Ensembles ordonnés.

1. Définition d'une relation d'ordre.

Soit $R\{x,y\}$ une relation, x et y étant des lettres distinctes. On dit que R est une *relation d'ordre par rapport aux lettres* x *et* y (ou *entre* x *et* y) ~~xx~~ si les relations

$$(R\{x,y\} \text{ et } R\{y,z\}) \Longrightarrow R\{x,z\}$$

$$(R\{x,y\} \text{ et } R\{y,x\}) \Longrightarrow (x=y)$$

$$R\{x,y\} \Longrightarrow (R\{x,x\} \text{ et } R\{y,y\})$$

sont vraies. La première exprime que la relation R est *transitive* par rapport aux lettres x et y (chap. II, § 6, n°1).

Exemples.- 1) La *relation d'égalité* $x=y$ est une relation d'ordre, appelée relation d'ordre *discrète*.

2) La *relation d'inclusion* $X \subset Y$ est une relation d'ordre (chap. II, § 1, prop. 1 et 2 et axiome A1), qui est la source de nombreux et importants exemples de relations d'ordre.

3) Soit $R\{x,y\}$ une relation d'ordre par rapport à x et y. La relation $R\{y,x\}$ est une relation d'ordre par rapport à x et y, appelée relation d'ordre *opposée* à $R\{x,y\}$.

On appelle *relation d'ordre dans un ensemble* E une relation d'ordre $R\{x,y\}$ par rapport à deux lettres distinctes x,y, telle que la relation $R\{x,x\}$ soit *équivalente à* $x \in E$ (autrement dit, telle que $R\{x,y\}$ soit *réflexive* dans E (chap. II, § 6, n°1)). Alors la relation

$R\{x,y\}$ implique "$x \in E$ et $y \in E$", et la relation ($R\{x,y\}$ et $R\{y,x\}$) est équivalente à "$x \in E$ et $y \in E$ et $x=y$".

<u>Exemples</u>.- 1) La relation d'égalité et la relation d'inclusion ne sont pas des relations d'ordre dans un ensemble car les relations $x=x$ et $X \subset X$ ne sont pas collectivisantes (chap. II, § 1, n°7).

2) Soient $R\{x,y\}$ une relation d'ordre et E un ensemble tel que $x \in E$ entraîne $R\{x,x\}$ (on notera que l'ensemble vide satisfait à cette condition). La relation "$R\{x,y\}$ et $x \in E$ et $y \in E$" est alors une relation d'ordre dans E, comme on le vérifie aussitôt : on dit que c'est la relation d'ordre <u>induite</u> par $R\{x,y\}$ dans E (cf. n°4). Par abus de langage, on dira souvent "la relation $S\{x,y\}$ est une relation d'ordre entre éléments de E" au lieu de dire "la relation ($S\{x,y\}$ et $x \in E$ et $y \in E$) est une relation d'ordre dans E". Par exemple, la relation d'inclusion est une relation d'ordre entre parties d'un ensemble E.

3) Soient E et F des ensembles. La relation "g est un prolongement de f" est une relation d'ordre (par rapport à f et g) entre applications de parties de E dans F.

4) Dans l'ensemble $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(E))$ des ensembles de parties d'un ensemble E, soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des <u>partitions</u> de E (chap. II, § 4, n°4). Rappelons qu'une partition $\overline{\omega}$ est dite moins fine qu'une partition $\overline{\omega}'$ si, quel que soit $Y \in \overline{\omega}'$, il existe $X \in \overline{\omega}$ tel que $Y \subset X$ (chap. II, § 4, n°3). Pour toute partition $\overline{\omega} \in \mathcal{P}$, soit $\widetilde{\overline{\omega}}$ le graphe de l'équivalence définie par $\overline{\omega}$ dans E (chap. II, § 6, n°2) : la relation "$\overline{\omega}$ est moins fine que $\overline{\omega}'$" est équivalente) $\widetilde{\overline{\omega}} \supset \widetilde{\overline{\omega}'}$; c'est donc une relation d'ordre dans l'ensemble $\mathcal{P}$.

On appelle <u>ordre</u> sur un ensemble E une correspondance $\Gamma = (G,E,E)$ ayant E comme ensemble de départ et ensemble d'arrivée et telle que la relation $(x,y) \in G$ soit une relation d'ordre dans E ; Par abus de langage, on dira parfois que le graphe G de Γ est un ordre sur E . Si $R\{x,y\}$ est une relation d'ordre dans E , elle admet un graphe, qui est un ordre sur E .

PROPOSITION 1.- <u>Pour qu'une correspondance</u> Γ <u>entre</u> E <u>et</u> E <u>soit un ordre sur</u> E , <u>il faut et il suffit que son graphe</u> G <u>satisfasse aux conditions suivantes</u> :

a) <u>On a</u> $G \circ G = G$.

b) <u>L'ensemble</u> $G \cap \overset{-1}{G}$ <u>est la diagonale</u> Δ <u>de</u> $E \times E$.

En effet, la relation $((x,y) \in G$ et $(y,z) \in G) \Rightarrow ((x,z) \in G)$ s'écrit aussi $G \circ G \subset G$, et la relation $((x,y) \in G$ et $(y,x) \in G) \Leftrightarrow (x=y$ et $x \in E$ et $y \in E)$ s'écrit $G \cap \overset{-1}{G} = \Delta$. De $G \cap \overset{-1}{G} = \Delta$, on déduit alors $\Delta \subset G$; d'où $G = \Delta \circ G \subset G \circ G$, ce qui, compte tenu de $G \circ G \subset G$, entraîne $G \circ G = G$.

2. <u>Relations de préordre.</u>

Soit $R\{x,y\}$ une relation, x et y étant des lettres distinctes. Si R est transitive et si la relation $R\{x,y\} \Rightarrow (R\{x,x\}$ et $R\{y,y\})$ est vraie, R n'est pas nécessairement une relation d'ordre, car la relation $(R\{x,y\}$ et $R\{y,x\})$ n'entraîne pas nécessairement $x=y$.

Par exemple, soit $\mathfrak{R}$ l'ensemble des parties de $\mathfrak{P}(E)$ qui sont des recouvrements d'un ensemble E (chap.II, §4,n°3). La relation " $\mathfrak{X}$ est moins fin que $\mathfrak{X}'$ " entre éléments de $\mathfrak{R}$ (chap.II, §4,n°3) est transitive et réflexive, mais deux recouvrements distincts peuvent être tels que chacun soit moins fin que l'autre.

Il en est ainsi lorsque $\mathcal{K}'$ est (dans $\mathfrak{P}(E)$) réunion de $\mathcal{K}$ et d'une partie de E contenue dans un ensemble de $\mathcal{K}$ mais n'appartenant pas à $\mathcal{K}$.

Mais en tout cas la relation ($R\{x,y\}$ et $R\{y,x\}$) est une <u>relation d'équivalence</u> $S\{x,y\}$ (par rapport à x et y), comme on le vérifie aussitôt. Soient x',y' des lettres distinctes de x,y et ne figurant pas dans R ; alors $R\{x,y\}$ est <u>compatible</u> (par rapport à x et y) avec les relations d'équivalence $S\{x,x'\}$ et $S\{y,y'\}$; autrement dit (chap.II, § 6, n°3) la relation ($R\{x,y\}$ et $S\{x,x'\}$ et $S\{y,y'\}$) entraîne $R\{x',y'\}$, comme il résulte de la définition de S et de la transitivité de R.

On appelle <u>relation de préordre dans un ensemble</u> E une relation de préordre $R\{x,y\}$ telle que la relation $R\{x,x\}$ soit équivalente à $x \in E$; la relation $R\{x,y\}$ implique alors "$x \in E$ et $y \in E$" .

Si $R\{x,y\}$ est une relation de préordre dans un ensemble E , $S\{x,y\}$ est une relation d'équivalence dans E . Considérons alors la relation

$$X \in E/S \text{ et } Y \in E/S \text{ et } (\exists x)(\exists y)(x \in X \text{ et } y \in Y \text{ et } R\{x,y\})$$

déduite de R par passage au quotient (par rapport à x et y) que nous noterons $R'\{X,Y\}$; elle est équivalente à la relation

$$X \in E/S \text{ et } Y \in E/S \text{ et } (\forall x)(\forall y)((x \in X \text{ et } y \in Y) \Rightarrow R\{x,y\})$$

(chap.II, § 6,n°3). Montrons que $R'\{X,Y\}$ est une <u>relation d'ordre</u> entre éléments de E/S . En effet, la relation ($R'\{X,Y\}$ et $R'\{Y,Z\}$) est équivalente à $X \in E/S$ et $Y \in E/S$ et $Z \in E/S$ et

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)((x \in X \text{ et } y \in Y \text{ et } z \in Z) \Rightarrow (R\{x,y\} \text{ et } R\{y,z\})$$

(chap.I, § 4,critères C40 et C41), comme $R\{x,y\}$ est transitive, on en déduit aussitôt que $R'\{X,Y\}$ est transitive. En second lieu ($R'\{X,Y\}$ et $R'\{Y,X\}$) est équivalente à

$$X\in E/S \text{ et } Y\in E/S \text{ et } (\forall x)(\forall y)((x\in X \text{ et } y\in Y)\Rightarrow (R\{x,y\} \text{ et } R\{y,x\})$$

c'est-à-dire à

$$X\in E/S \text{ et } Y\in E/S \text{ et } (\forall x)(\forall y)((x\in X \text{ et } y\in Y)\Rightarrow S\{x,y\})$$

donc elle entraîne

$$X\in E/S \quad \text{et} \quad Y\in E/S \quad \text{et} \quad X=Y .$$

Par ailleurs, $R\{x,y\}$ entraîne $R\{x,x\}$ et $R\{y,y\}$, d'où résulte aussitôt que $R'\{X,Y\}$ entraîne

$$X\in E/R \quad \text{et} \quad (\forall x)((x\in X)\Rightarrow R\{x,x\})$$

et
$$Y\in E/R \quad \text{et} \quad (\forall y)((y\in Y)\Rightarrow R\{y,y\})$$

c'est-à-dire $R'\{X,X\}$ et $R'\{Y,Y\}$. Enfin, comme $x\in E$ entraîne $R\{x,x\}$, $X\in E/S$ entraîne $R'\{X,X\}$, ce qui achève de démontrer notre assertion. On dit que $R'\{X,Y\}$ est la relation d'ordre dans E/S <u>associée à</u> $R\{x,y\}$.

On appelle <u>préordre</u> sur un ensemble E une correspondance $\Gamma=(G,E,E)$ ayant E comme ensemble de départ et ensemble d'arrivée, et telle que $(x,y)\in G$ soit une relation de préordre dans E ; par abus de langage, on dit parfois que le graphe G de Γ est un préordre sur E. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que l'on ait $\Delta\subset G$ et $G\circ G\subset G$ (ce qui entraîne $G\circ G=G$). La relation d'équivalence S correspondant à la relation de pré-ordre $(x,y)\in G$ a alors pour graphe $G\cap\overset{-1}{G}$; la relation d'ordre associée à $(x,y)\in G$ a pour graphe la partie G' de $(E/S)\times(E/S)$ qui correspond (chap. II, § 6, n°8) à l'image de G par l'application canonique de $E\times E$ sur $(E\times E)/(S\times S)$.

<u>Exemples</u>.- * 1) Soit A un anneau ayant un élément unité. La relation $(\exists z)(z\in A$ et $y=zx)$ entre deux éléments x et y de A est une relation de préordre dans A ; elle se lit "x est diviseur à droite de y"

ou "y est multiple à gauche de x" (cf. Alg., chap. VI, § 1). *

* 2) Soient E un ensemble, $\mathfrak{S}$ une partie de $\mathfrak{P}(E)$ telle que la réunion de deux parties de E appartenant à $\mathfrak{S}$ soit encore un élément de $\mathfrak{S}$. Dans l'ensemble $\mathbb{R}^E$ des applications de E dans $\mathbb{R}$, la relation "il existe $A \in \mathfrak{S}$ tel que, pour tout $x \in E-A$, $f(x) \leqslant g(x)$" est une relation de préordre entre f et g. La relation d'équivalence correspondante est "il existe $A \in \mathfrak{S}$ tel que, pour tout $x \in E-A$, $f(x)=g(x)$" ; autrement dit, une classe d'équivalence se compose des fonctions numériques dont deux quelconques sont égales dans le complémentaire d'une partie appartenant à $\mathfrak{S}$. L'exemple le plus important de ce genre de relations est fourni par la théorie de l'Intégration (Intégr., chap. IV, §§ 2 et 5). *

3. Ensembles ordonnés.

Une relation d'ordre $R\{x,y\}$ se note souvent $x(\sigma)y$, où (σ) représente un signe ou groupe de signes, caractéristique de la relation envisagée ; par abus de langage, on parlera souvent de "la relation (σ)" au lieu de "la relation $x(\sigma)y$". Dans de nombreux cas, on emploie les signes $\leqslant$ et $\geqslant$ * (par analogie avec la notation de la relation d'ordre usuelle entre entiers ou nombres réels) * ; par abus de notation, le signe $\leqslant$ pourra même être utilisé pour noter plusieurs relations d'ordre distinctes dans une même démonstration, s'il n'en résulte pas de confusion. Une relation d'ordre $R\{x,y\}$ s'écrira alors $x \leqslant y$ ou $y \geqslant x$; ces relations se lisent "x est <u>inférieur</u> à y", ou "x est <u>plus petit</u> que y", ou "y est <u>supérieur</u> à x", ou "y est <u>plus grand</u> que x". Avec cette notation, les conditions pour que $x \leqslant y$ soit une relation d'ordre dans un ensemble E s'écrivent :

NBR 092 8

(RO_I) *La relation* "$x \leqslant y$ *et* $y \leqslant z$" *entraîne* $x \leqslant z$.

(RO_{II}) *La relation* "$x \leqslant y$ *et* $y \leqslant x$" *entraîne* $x=y$.

(RO_{III}) *La relation* $x \leqslant y$ *entraîne* "$x \leqslant x$ *et* $y \leqslant y$" .

(RO_{IV}) *La relation* $x \leqslant x$ *est équivalente à* $x \in E$.

Lorsqu'une relation d'ordre est notée $x \leqslant y$ nous écrirons $x < y$ (ou $y > x$) la relation "$x \leqslant y$ et $x \neq y$" ; ces relations se lisent "x est *strictement inférieur* à y" ou "x est *strictement plus petit* que y" ou "y est *strictement supérieur* à x" ou "y est *strictement plus grand* que x" .

L'exemple de la relation d'inclusion montre que la négation de $x \leqslant y$ (qu'on note parfois $x \not\leqslant y$) *n'est pas* équivalente à $y < x$ en général (cf. n°6).

C58. *Soient* $\leqslant$ *une relation d'ordre*, x *et* y *deux lettres distinctes. La relation* $x \leqslant y$ *est équivalente à* "$x < y$ *ou* $x=y$" . *Chacune des relations* "$x \leqslant y$ *et* $y < z$" , "$x < y$ *et* $y \leqslant z$" *entraîne* $x < z$.

La première assertion résulte du critère "A $\Longrightarrow$ ((A et (non B)) ou B)" (chap.I, § 3, critère C24). Pour démontrer la seconde, on remarque d'abord que chacune des hypothèses entraîne $x \leqslant z$, d'après la transitivité ; d'autre part la relation ($x=z$ et $x \leqslant y$ et $y \leqslant z$) entraînerait $x=y=z$, ce qui est contraire à l'hypothèse .

Afin de rendre l'exposé plus commode, et de remplacer par des théorèmes mathématiques les critères métamathématiques, nous allons le plus souvent nous placer dans une théorie $\mathcal{T}$, comprenant les axiomes et schémas d'axiomes de la théorie des ensembles, et en outre deux constantes E et Γ satisfaisant à l'axiome :

" Γ est un ordre sur l'ensemble E" (n°1) .

Nous noterons $x \leqslant y$ la relation $y \in \Gamma\langle x\rangle$, et nous dirons que E est un ensemble ordonné par l'ordre Γ (ou par la relation d'ordre $y \in \Gamma\langle x\rangle$) (cf. chap. IV).

Dans certains cas (par exemple dans la définition qui suit), la théorie dans laquelle nous nous placerons sera un peu plus compliquée. Nous laisserons au lecteur le soin d'expliciter les constantes et les axiomes de cette théorie.

Soient E,E' deux ensembles ordonnés par les ordres Γ et Γ'. On appelle isomorphisme de E sur E' (pour les ordres Γ et Γ') une application biunivoque f de E sur E' telle que les relations $x \leqslant y$ et $f(x) \leqslant f(y)$ soient équivalentes (cf. chap.IV).

4. Sous-ensembles ordonnés. Produit d'ensembles ordonnés.

Soit E un ensemble ordonné par un ordre Γ, de graphe G. Pour toute partie A de E, on vérifie aussitôt que $G \cap (A \times A)$ est un ordre sur A ; la relation d'ordre correspondante équivaut à "$x \leqslant y$ et $x \in A$ et $y \in A$" ; nous la noterons encore $x \leqslant y$ (par abus de langage). L'ordre et la relation d'ordre ainsi définis sur A sont dits induits par l'ordre et la relation d'ordre donnés sur E ; on dit aussi que l'ordre et la relation d'ordre sur E sont des prolongements de l'ordre et la relation d'ordre qu'ils induisent sur A. Quand on considère A comme ensemble ordonné, c'est de l'ordre induit sur A par celui de E qu'il s'agit, sauf mention expresse du contraire.

Exemples.- Les relations induites par la relation d'inclusion sur divers ensembles de parties ont une importance considérable. En voici des exemples :

1) Soient E,F deux ensembles, $\Phi(E,F)$ l'ensemble des applications de parties de E dans F ; pour toute fonction $f \in \Phi(E,F)$,

soit G_f le graphe de f , qui est une partie de $E \times F$. Si on munit $\Phi(E,F)$ de la relation d'ordre "g est un prolongement de f" entre f et g (n°1, exemple 3), $f \to G_f$ est un isomorphisme de l'ensemble ordonné $\Phi(E,F)$ sur un sous-ensemble de $\mathfrak{P}(E \times F)$, ordonné par la relation d'inclusion.

2) Pour toute partition $\overline{\omega}$ d'un ensemble E , soit $\tilde{\overline{\omega}}$ le graphe de l'équivalence définie par $\overline{\omega}$ dans E . L'application $\overline{\omega} \to \tilde{\overline{\omega}}$ est un isomorphisme de l'ensemble $\mathcal{P}$ des partitions de E , ordonné par la relation "$\overline{\omega}$ est plus fine que $\overline{\omega}'$ " (n°1, exemple 4) sur un sous-ensemble de $\mathfrak{P}(E \quad E)$, ordonné par la relation d'inclusion.

3) Soient E un ensemble, $\Omega \subset \mathfrak{P}(E \times E)$ l'ensemble des graphes des <u>préordres</u> sur E (n°2) (ou, par abus de langage, l'ensemble des préordres sur E). La relation d'ordre $s \subset t$, induite sur Ω par la relation d'inclusion dans $\mathfrak{P}(E \times E)$, s'exprime en disant que "le préordre s est <u>plus fin</u> que t" ou que "t est <u>moins fin</u> que s" . Notons $x(s)y$ et $x(t)y$ respectivement les relations de préordre $(x,y) \in s$ et $(x,y) \in t$ dans E ; dire que t est moins fin que s revient à dire que la relation $x(s)y$ <u>entraîne</u> $x(t)y$.

Soit $(E_\iota)_{\iota \in I}$ une famille d'ensembles, et pour chaque $\iota \in I$, soit Γ_ι un ordre sur E_ι , $G_\iota \subset E_\iota \times E_\iota$ étant le graphe de Γ_ι ; notons $x_\iota \leqslant y_\iota$ la relation d'ordre $(x_\iota, y_\iota) \in G$ sur E . Dans l'ensemble produit $F = \prod_{\iota \in I} E_\iota$, la relation $(\forall \iota)((\iota \in I) \Rightarrow (x_\iota \leqslant y_\iota))$ est une relation d'ordre entre $x=(x_\iota)$ et $y=(y_\iota)$, comme on le vérifie aisément. L'ordre et la relation d'ordre ainsi définie sur F sont appelés l'<u>ordre produit</u> des ordres Γ_ι , et le <u>produit des</u>

des relations d'ordre $x_\iota \leqslant y_\iota$; on écrit cette relation $x \leqslant y$ par abus de notation, et on dit que l'ensemble F, ordonné par le produit des ordres Γ_ι, est le *produit des ensembles ordonnés* E_ι.

Il est immédiat que le graphe de l'ordre produit sur F correspond à l'ensemble produit $\prod_{\iota \in I} G_\iota$ par l'application canonique de $\prod_{\iota \in I} (E_\iota \times E_\iota)$ sur $F \times F$ (chap.II, § 5, n°5).

Un exemple important de produit d'ensembles ordonnés est l'ensemble F^E des graphes des applications d'un ensemble E dans un ensemble ordonné F ; on sait qu'il existe une application canonique de F^E sur l'ensemble $\mathcal{F}(E,F)$ des applications de E dans F ; cette application est un isomorphisme de l'ensemble ordonné F^E sur $\mathcal{F}(E,F)$ muni de l'ordre défini par la relation "quel que soit $x \in E$, $f(x) \leqslant g(x)$" entre deux applications f, g de E dans F (relation que l'on note $f \leqslant g$).

On notera que, dans l'ensemble ordonné $\mathcal{F}(E,F)$, la relation $f < g$ signifie "quel que soit $x \in E$, $f(x) \leqslant g(x)$ et il existe $y \in E$ tel que $f(y) < g(y)$", et *non* "quel que soit $x \in E$, $f(x) < g(x)$". Pour ne pas risquer cette confusion, on évitera d'ordinaire de faire usage de la notation $f < g$ dans ce cas.

5. Fonctions monotones.

DÉFINITION 1.- *Soient* E *et* F *des ensembles ordonnés* ; *on dit qu'une application* f *de* E *dans* F *est croissante si la relation* $x \leqslant y$ *entraîne* $f(x) \leqslant f(y)$; *on dit que* f *est décroissante si la relation* $x \leqslant y$ *entraîne* $f(x) \geqslant f(y)$. *Une application de* E *dans* F *est dite monotone si elle est croissante ou si elle est décroissante*.

Une application croissante de E dans F devient décroissante (et vice-versa) quand on remplace l'un des ordres de E ou de F par l'ordre opposé.

Toute fonction constante est à la fois croissante et décroissante ; la réciproque n'est pas vraie en général.

Par exemple, si un ensemble E est ordonné par la relation d'égalité, l'application identique de E sur lui-même est à la fois croissante et décroissante, mais non constante si E n'est pas réduit à un seul élément (cf. § 6, prop. 4).

DÉFINITION 2.- Soient E et F deux ensembles ordonnés ; on dit qu'une application f de E dans F est strictement croissante si la relation $x < y$ entraîne $f(x) < f(y)$; on dit que f est strictement décroissante si la relation $x < y$ entraîne $f(x) > f(y)$. Une application de E dans F est dite strictement monotone si elle est strictement croissante ou si elle est strictement décroissante.

Exemples.- 1) L'injection d'une partie A d'un ensemble ordonné E est strictement croissante. La projection d'un produit d'ensembles ordonnés sur l'un des facteurs est croissante, mais non strictement croissante lorsque le produit a plus d'un facteur non réduit à un seul élément.

2) Soit E un ensemble ; l'application $X \to E-X$ de $\mathfrak{P}(E)$ (ordonné par inclusion) sur lui-même est strictement décroissante.

3) Soit E un ensemble ordonné. Pour tout $x \in E$, soit S_x l'ensemble des $y \in E$ tels que $y \geqslant x$ (section de E en x). L'application $x \to S_x$ est une application strictement décroissante de E dans $\mathfrak{P}(E)$ (ordonné par inclusion). On peut même remarquer que la relation $x \leqslant y$ est équivalente à $S_x \supset S_y$.

Une application monotone et biunivoque de E dans F est strictement monotone ; la réciproque n'est pas vraie en général, puisque l'on peut avoir $f(x)=f(y)$ lorsqu'aucune des relations $x \leqslant y$, $x \geqslant y$ n'est vraie.

Pour qu'une application biunivoque f d'un ensemble ordonné E sur un ensemble ordonné E' soit un isomorphisme de E sur E' (n°3) il faut et il suffit que f et son application réciproque soient croissantes.

Lorsque I est un ensemble d'indices <u>ordonné</u>, on dit qu'une <u>famille</u> $(X_\iota)_{\iota\in I}$ <u>de parties</u> d'un ensemble E est <u>croissante</u> si $\iota \to X_\iota$ est une application croissante de I dans $\mathfrak{P}(E)$ ordonné par inclusion (autrement dit, si $\iota \leqslant \varkappa$ entraîne $X_\iota \subset X_\varkappa$). On définit de même une famille de parties $(X_\iota)_{\iota\in I}$ <u>décroissante</u>, <u>strictement croissante</u> ou <u>strictement décroissante</u>.

6. <u>Ensembles totalement ordonnés</u>. <u>Intervalles</u>.

DÉFINITION 3.- <u>On dit que deux éléments</u> x,y <u>d'un ensemble ordonné</u> E <u>sont comparables si la relation</u> "$x \leqslant y$ <u>ou</u> $y \leqslant x$" <u>est vraie</u>. <u>On dit qu'un ensemble</u> E <u>est totalement ordonné s'il est ordonné et si deux éléments quelconques de</u> E <u>sont comparables</u>. <u>On dit alors que l'ordre sur</u> E <u>est un ordre total et la relation d'ordre correspondante une relation d'ordre total</u>.

Lorsque x et y sont des éléments d'un ensemble totalement ordonné E, une et une seule des trois relations $x=y$, $x<y$, $x>y$ est vraie. On en déduit que la négation de $x \leqslant y$ est alors $x > y$.

Pour qu'un ordre sur E soit un ordre total, il faut et il suffit que son graphe G, en plus des relations $G\circ G=G$ et $G\cap \overset{-1}{G} = \Delta$, satisfasse à la relation $G \cup \overset{-1}{G} = E\times E$.

<u>Exemples</u>.- 1) Toute partie d'un ensemble totalement ordonné est totalement ordonnée pour l'ordre induit.

2) Soit E un ensemble ordonné quelconque. La partie vide de E est totalement ordonnée, ainsi que toute partie réduite à un élément. Pour qu'une partie de E formée de deux éléments soit

NBR 092 14

totalement ordonnée, il faut et il suffit que ces éléments soient comparables.

3) * L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels est totalement ordonné. *

Un ensemble totalement ordonné est aussi totalement ordonné pour l'ordre opposé.

Soient E un ensemble totalement ordonné, a et b deux éléments de E tels que $a \leqslant b$. On appelle *intervalle fermé d'origine* a *et d'extrémité* b, et on note $[a,b]$, la partie de E formée des éléments x tels que $a \leqslant x \leqslant b$; on appelle *intervalle semi-ouvert à droite* (resp. *à gauche*) *d'origine* a *et d'extrémité* b, et on note $[a,b[$ (resp. $]a,b]$) l'ensemble des $x \in E$ tels que $a \leqslant x < b$ (resp. $a < x \leqslant b$) ; on appelle *intervalle ouvert d'origine* a *et d'extrémité* b, et on note $]a,b[$, l'ensemble des $x \in E$ tels que $a < x < b$.

On notera qu'un intervalle fermé n'est jamais vide si E est non vide ; l'intervalle $[a,a]$ est l'ensemble réduit à l'élément a. Par contre, les intervalles $[a,a[$, $]a,a]$ et $]a,a[$ sont vides ; un intervalle ouvert $]a,b[$ peut être vide même si $a < b$.

Soit a un élément de E. L'ensemble des $x \in E$ tels que $x \leqslant a$ (resp. $x < a$) s'appelle *l'intervalle fermé* (resp. *ouvert*) *illimité à gauche et d'extrémité* a, et se note $]\leftarrow, a]$ (resp. $]\leftarrow, a[$) ; l'ensemble des $x \in E$ tels que $x \geqslant a$ (resp. $x > a$) s'appelle *l'intervalle fermé* (resp. *ouvert*) *illimité à droite et d'origine* a et se note $]a, \rightarrow[$ (resp. $]a, \rightarrow[$). Enfin E lui-même est appelé *l'intervalle ouvert illimité dans les deux sens*, et noté $]\leftarrow, \rightarrow[$.

PROPOSITION 2.- *Dans un ensemble totalement ordonné, l'intersection de deux intervalles est vide ou est un intervalle.*

Considérons par exemple l'intersection de deux intervalles fermés $[a,b]$ et $[c,d]$; si $b < c$, cette intersection est vide, puisqu'on ne peut avoir à la fois $x \leqslant b$ et $x \geqslant c$. Sinon, désignons par α l'élément a si $c \leqslant a$, l'élément c si $a < c$, par β l'élément b si $b \leqslant d$, l'élément d si $d < b$; si on a à la fois $a \leqslant x \leqslant b$ et $c \leqslant x \leqslant d$, on en déduit $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$, et réciproquement ; l'intersection de $[a,b]$ et de $[c,d]$ est donc l'intervalle fermé $[\alpha,\beta]$. Nous laissons au lecteur le soin de faire la démonstration dans les autres cas.

On notera qu'en général la réunion de deux intervalles n'est pas un intervalle.

PROPOSITION 3.- <u>Toute application strictement monotone f d'un ensemble totalement ordonné E dans un ensemble ordonné F est injective, et est un isomorphisme de E sur f(E).</u>

En effet, $x \neq y$ entraîne $x < y$ ou $x > y$, donc $f(x) < f(y)$ ou $f(x) > f(y)$, et par suite $f(x) \neq f(y)$ en tous cas. Il reste à montrer que $f(x) \leqslant f(y)$ entraîne $x \leqslant y$; dans le cas contraire, on aurait $x > y$ puisque E est totalement ordonné, d'où $f(x) > f(y)$.

7. Eléments minimaux et éléments maximaux.

DEFINITION 4.- <u>Soient E un ensemble ordonné, X une partie de E. Un élément $x \in X$ est appelé élément minimal (resp. maximal) de X si la relation "$x \in X$ et $x \leqslant a$" (resp. "$x \in X$ et $x \geqslant a$") entraîne $x = a$.</u>

Tout élément minimal de X est un élément maximal pour l'ordre opposé, et vice-versa. L'ensemble des éléments maximaux de X peut être vide, ou contenir plusieurs éléments.

<u>Exemples</u>.- 1) Dans la partie de l'ensemble $\mathfrak{P}(A)$ (ordonné par inclusion) formée des parties non vides de A, les éléments minimaux sont les parties réduites à un élément.

2) Dans l'ensemble $\Phi(E,F)$ des applications de parties de E dans F, ordonné par la relation "v est un prolongement de u" entre u et v, les éléments maximaux sont les applications de E dans F.

3) * Dans l'ensemble des entiers naturels > 1, ordonné par la relation "m divise n" entre m et n, les éléments minimaux sont les nombres premiers. *

8. Plus petit élément ; plus grand élément.

Soit X une partie d'un ensemble ordonné E. S'il existe un élément $a \in X$ tel que $a \leqslant x$ pour tout $x \in X$, c'est le seul élément de X ayant cette propriété ; car si on a aussi $b \leqslant x$ pour tout $x \in X$, on en déduit $a \leqslant b$ et $b \leqslant a$, d'où $a = b$.

DÉFINITION 5.- Soient E un ensemble ordonné, X une partie de E. On dit qu'un élément a de X est le plus petit (resp. le plus grand) élément de X si, pour tout $x \in X$, on a $a \leqslant x$ (resp. $x \geqslant a$).

Une partie d'un ensemble ordonné n'admet pas nécessairement de plus petit ni de plus grand élément ; si X admet un plus petit élément a, a est le plus grand élément de X pour l'ordre opposé.

Si X admet un plus petit élément a, a est l'unique élément minimal de X ; en effet, pour tout $x \in X$ distinct de a, on a $a < x$. Réciproquement, lorsque X est une partie totalement ordonnée de E, un élément minimal a de X est aussi le plus petit élément de X : en effet, pour tout $x \in X$, la relation $x < a$ est fausse, donc la relation $x \geqslant a$ est vraie.

Exemples.- 1) Soit $\mathfrak{S}$ une partie non vide de l'ensemble $\mathfrak{P}(E)$ des parties d'un ensemble E . Si $\mathfrak{S}$ admet un plus petit (resp. plus grand) élément A , celui-ci n'est autre que l'intersection I (resp. la réunion) des ensembles de $\mathfrak{S}$: en effet, on a $A \subset I$ par hypothèse, et $I \subset A$ par définition de l'intersection. Réciproquement, si l'intersection (resp. la réunion) des ensembles de $\mathfrak{S}$ appartient à $\mathfrak{S}$, c'est le plus petit (resp. plus grand) élément de $\mathfrak{S}$.

2) En particulier, $\emptyset$ est le plus petit élément et E le plus grand élément de $\mathfrak{P}(E)$. Dans l'ensemble $\Phi(E,F)$ des applications de parties de E dans F , ordonné par prolongement (n^o1, exemple 3), l'application vide est le plus petit élément, et il n'y a pas de plus grand élément si F n'est pas réduit à un seul élément. Enfin, la diagonale Δ de $E \times E$ est le plus petit élément de l'ensemble des graphes des équivalences (ou des préordres) sur E .

9. Majorants ; minorants.

DÉFINITION 6.- Soient E un ensemble ordonné et X une partie de E . On appelle minorant (resp. majorant) de X tout élément $x \in E$ tel que, pour tout $y \in X$, on ait $x \leqslant y$ (resp. $x \geqslant y$) ; on dit alors que x minore (resp. majore) X .

Tout majorant de X est un minorant de X pour l'ordre opposé, et vice-versa.

Lorsque x minore X , tout élément $z \leqslant x$ minore aussi X . Un minorant de X est aussi minorant de toute partie de X . Pour que X admette un plus petit élément, il faut et il suffit qu'il existe un minorant de X appartenant à X .

NBR 092 18

L'ensemble des minorants d'une partie X de E peut être vide ; c'est le cas lorsque $X=E$ et que E n'a pas de plus petit élément.

Une partie X de E dont l'ensemble des minorants (resp. des majorants) est non vide, est dite _minorée_ (resp. _majorée_) ; une partie à la fois majorée et minorée est dite _bornée_ (au sens de la théorie des ensembles ordonnés). Lorsque X est minorée (resp. majorée, bornée), toute partie de X est minorée (resp. majorée bornée).

La partie vide est bornée ; il en est de même d'une partie réduite à un seul élément. Mais une partie de deux éléments n'est pas nécessairement majorée ni minorée (cf. § 6, n°2).

Soient E un ensemble ordonné, et f une application d'un ensemble quelconque A dans E . On dit par abus de langage que l'application f est minorée (resp. majorée, bornée) si l'ensemble $f(A)$ est minoré (resp. majoré, borné) dans E .

Dire que l'application f est minorée revient à dire que, dans l'ensemble ordonné $\mathcal{F}(A,E)$ des applications de A dans E (n°4), la partie réduite à f est minorée _par une application constante_.

10. _Borne inférieure ; borne supérieure._

DÉFINITION 7.- _Soient_ E _un ensemble ordonné_, X _une partie de_ E . _On dit qu'un élément de_ E _est la borne inférieure_ (resp. _supérieure_) _de_ X _dans_ E _si c'est le plus grand_ (resp. _le plus petit_) _élément de l'ensemble des minorants_ (resp. _majorants_) _de_ X _dans_ E .

Etant donnée une partie X d'un ensemble ordonné E , on note $\sup_E X$ (resp. $\inf_E X$) ou $\sup X$ (resp. $\inf X$) lorsqu'aucune confusion n'est à craindre, la borne supérieure (resp. inférieure) de X dans E , lorsque cette borne existe.

Si X admet une borne inférieure a dans E , a est borne supérieure de X pour l'ordre opposé sur E ; ceci nous permettra, dans ce qui suit, de ne considérer le plus souvent que les propriétés des bornes supérieures.

Exemples.- 1) L'ensemble des majorants (resp. minorants) de la partie vide $\emptyset$ de E est évidemment E lui-même ; pour que $\emptyset$ admette dans E une borne supérieure (resp. inférieure), il faut et il suffit donc que E admette un plus petit (resp. plus grand) élément, et cet élément est alors la borne supérieure (resp. inférieure) de $\emptyset$.

Z

2) Dans un ensemble totalement ordonné E , la borne supérieure b d'une partie X de E (lorsqu'elle existe) peut être caractérisée par les propriétés suivantes : 1° b est un majorant de X ; 2° pour tout $c \in E$ tel que $c < b$, il existe $x \in X$ tel que $c < x \leqslant b$. En effet, la seconde condition exprime qu'aucun élément $c < b$ n'est un majorant de X , c'est-à-dire que b est un élément minimal de l'ensemble M des majorants de X ; or ceci revient à dire que b est le plus petit élément de M , puisque M est totalement ordonné (n°8).

Un ensemble majoré n'a pas nécessairement de borne supérieure ; * un exemple est fourni dans l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels par la partie X formée des nombres rationnels $< \sqrt{2}$ * . Si une partie X d'un ensemble ordonné E admet une borne supérieure dans E , cette borne n'appartient pas nécessairement à E , *comme le montre l'exemple d'un intervalle ouvert dans $\mathbb{Q}$ * .

3) Dans l'ensemble $\mathfrak{P}(E)$ des parties d'un ensemble E , ordonné par inclusion, un majorant d'une partie $\mathfrak{G}$ de $\mathfrak{P}(E)$ est une partie B de E telle que $X \subset B$ pour tout $X \in \mathfrak{G}$. Donc toute

partie $\mathfrak{G}$ de $\mathfrak{P}(E)$ admet dans $\mathfrak{P}(E)$ une borne supérieure, qui est l'*intersection* des parties B de E qui contiennent toutes les parties appartenant à $\mathfrak{G}$. De même, $\mathfrak{G}$ admet dans $\mathfrak{P}(E)$ une borne inférieure, qui est la *réunion* des parties A de E qui sont contenues dans toutes les parties $X \in \mathfrak{G}$.

4) Soient E et F deux ensembles, et Θ une partie de l'ensemble $\Phi(E,F)$ des applications de parties de E dans F, ordonné par prolongement (n°1, exemple 3). Pour tout $u \in \Phi(E,F)$, soit $D(u)$ l'ensemble de définition de u. La condition d'existence d'un prolongement commun pour une famille d'applications appartenant à $\Phi(E,F)$ (chap. II, §4, prop. 6) montre que, pour que Θ admette une borne supérieure dans $\Phi(E,F)$, il faut et il suffit que, pour tout couple d'éléments (u,v) de Θ, on ait $u(x)=v(x)$ pour tout $x \in D(u) \cap D(v)$.

PROPOSITION 4.- *Pour qu'une partie non vide X d'un ensemble ordonné E admette un plus grand élément, il faut et il suffit que X admette une borne supérieure a dans E et que* $a \in X$; *a est alors le plus grand élément de X*.

La proposition est évidente à partir des définitions.

Etant donnée une application f d'un ensemble A dans un ensemble ordonné E, on dit que cette fonction admet une borne supérieure si l'image f(A) admet une borne supérieure dans E ; cette borne est alors appelée *borne supérieure de f* et se note $\sup_{x \in A} f(x)$. Définition et notation analogues pour la borne inférieure.

En particulier, si une partie A de E admet une borne supérieure dans E, cette borne est la borne supérieure de l'injection de A dans E, et peut donc s'écrire $\sup_{x \in A} x$.

PROPOSITION 5.- Soient E un ensemble ordonné, et A une partie de E admettant à la fois une borne inférieure et une borne supérieure dans E ; on a $\inf A \leqslant \sup A$ si A n'est pas vide ; si $A=\emptyset$, $\sup A$ est le plus petit et $\inf A$ le plus grand élément de E .

Cela résulte aussitôt des définitions.

PROPOSITION 6.- Soient E un ensemble ordonné, A et B des parties de E admettant toutes deux une borne supérieure (resp. inférieure) dans E ; si $A \subset B$, on a $\sup A \leqslant \sup B$ (resp. $\inf A \geqslant \inf B$) .

C'est évident.

COROLLAIRE.- Soit $(x_\iota)_{\iota \in I}$ une famille d'éléments d'un ensemble ordonné E , admettant une borne supérieure dans E ; si J est une partie de I telle que la famille $(x_\iota)_{\iota \in J}$ admette une borne supérieure dans E , on a $\sup_{\iota \in J} x_\iota \leqslant \sup_{\iota \in I} x_\iota$.

PROPOSITION 7.- Soient $(x_\iota)_{\iota \in I}$, $(y_\iota)_{\iota \in I}$ deux familles d'éléments d'un ensemble ordonné E , ayant même ensemble d'indices I, et telles que $x_\iota \leqslant y_\iota$ pour tout $\iota \in I$; si elles admettent toutes deux une borne supérieure dans E , on a $\sup_{\iota \in I} x_\iota \leqslant \sup_{\iota \in I} y_\iota$.

En effet, $a=\sup_{\iota \in I} y_\iota$ est un majorant de l'ensemble des y_ι , donc $x_\iota \leqslant y_\iota \leqslant a$ pour tout ι , ce qui entraîne $\sup_{\iota \in I} x_\iota \leqslant a$.

PROPOSITION 8.- Soient $(x_\iota)_{\iota \in I}$ une famille d'éléments d'un ensemble ordonné E , $(J_\lambda)_{\lambda \in L}$ un recouvrement de l'ensemble d'indices I ; on suppose que chacune des sous-familles $(x_\iota)_{\iota \in J_\lambda}$ admette une borne supérieure dans E . Pour que la famille $(x_\iota)_{\iota \in I}$ admette une borne supérieure dans E , il faut et suffit que la famille $(\sup_{\iota \in J_\lambda} x_\iota)_{\lambda \in L}$ admette une borne supérieure dans E , et on a alors

(1) $$\sup_{\iota \in I} x_\iota = \sup_{\lambda \in L} (\sup_{\iota \in J_\lambda} x_\iota).$$

Posons $b_\lambda = \sup\limits_{\iota \in J_\lambda} x_\iota$. Supposons que $(x_\iota)_{\iota \in I}$ admette une borne supérieure a ; alors $a \geqslant b_\lambda$ pour tout $\lambda \in L$ (cor. de la prop.7) ; d'autre part, si $c \geqslant b_\lambda$ pour tout $\lambda \in L$, on a aussi $c \geqslant x_\iota$ pour tout $\iota \in I$, puisque $(J_\lambda)_{\lambda \in L}$ est un recouvrement de I ; on a donc $c \geqslant a$, ce qui prouve que $a = \sup\limits_{\lambda \in L} b_\lambda$. Supposons réciproquement que la famille $(b_\lambda)_{\lambda \in L}$ admette une borne supérieure a' ; alors $a' \geqslant x_\iota$ pour tout $\iota \in I$; d'autre part, si $c' \geqslant x_\iota$ pour tout $\iota \in I$, on a en particulier $c' \geqslant \sup\limits_{\iota \in J_\lambda} x_\iota = b_\lambda$ pour tout $\lambda \in L$, donc $c' \geqslant a'$, ce qui prouve que $a' = \sup\limits_{\iota \in I} x_\iota$.

COROLLAIRE 1.- <u>Soit</u> $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ <u>une famille de parties d'un ensemble ordonné</u> E <u>, admettant chacune une borne supérieure dans</u> E ; <u>pour que la réunion</u> $A = \bigcup\limits_{\lambda \in L} A_\lambda$ <u>admette une borne supérieure dans</u> E , <u>il faut et il suffit que la famille</u> $(\sup A_\lambda)_{\lambda \in L}$ <u>en admette une, et on a alors</u>

$$\sup A = \sup_{\lambda \in L} (\sup A_\lambda) . \tag{2}$$

COROLLAIRE 2.- <u>Soit</u> $(x_{\lambda\mu})_{(\lambda,\mu) \in L \times M}$ <u>une famille "double" d'éléments d'un ensemble ordonné</u> E <u>, telle que, pour tout</u> $\mu \in M$, <u>la famille</u> $(x_{\lambda\mu})_{\lambda \in L}$ <u>admette une borne supérieure dans</u> E . <u>Pour que la famille</u> $(x_{\lambda\mu})_{(\lambda,\mu) \in L \times M}$ <u>admette une borne supérieure dans</u> E , <u>il faut et il suffit que la famille</u> $(\sup\limits_{\lambda \in L} x_{\lambda\mu})_{\mu \in M}$ <u>en admette une, et on a alors</u>

$$\sup_{(\lambda,\mu) \in L \times M} x_{\lambda\mu} = \sup_{\mu \in M} (\sup_{\lambda \in L} x_{\lambda\mu}) . \tag{3}$$

PROPOSITION 9.- <u>Soit</u> $(E_\iota)_{\iota \in I}$ <u>une famille d'ensembles ordonnés, et pour chaque</u> $\iota \in I$, <u>soit</u> A_ι <u>une partie non vide de</u> E_ι . <u>Pour que, dans l'ensemble ordonné produit</u> $E = \prod\limits_{\iota \in I} E_\iota$, <u>l'ensemble</u> $A = \prod\limits_{\iota \in I} A_\iota$ <u>admette une borne supérieure, il faut et il suffit que, pour tout</u> $\iota \in I$, A_ι <u>admette une borne supérieure dans</u> E , <u>et on a alors</u> $\sup A = (\sup A_\iota)_{\iota \in I}$.

En effet, supposons que, pour tout $\iota \in I$, A_ι admette une borne supérieure b_ι dans E_ι. Dire que $c=(c_\iota)$ est un majorant de A signifie alors que $c_\iota \geqslant b_\iota$ pour tout $\iota \in I$, donc $(b_\iota)_{\iota \in I}$ est borne supérieure de A. Réciproquement, supposons que A admette une borne supérieure $a=(a_\iota)_{\iota \in I}$; pour tout $\varkappa \in I$, $a_\varkappa$ est un majorant de $A_\varkappa$, car si $x_\varkappa \in A_\varkappa$, il existe $x \in A$ tel que $pr_\varkappa x = x_\varkappa$ puisque les A_ι sont non vides (chap. II, § 5, prop.   ) ; d'autre part, si $a'_\varkappa$ est un majorant de $A_\varkappa$ dans $E_\varkappa$, l'élément $c'=(c'_\iota)_{\iota \in I}$ tel que $c'_\varkappa = a'_\varkappa$ pour $\iota \neq \varkappa$, est un majorant de A, ce qui entraîne $c' \geqslant a$, et par suite $a'_\varkappa \geqslant a_\varkappa$; $a_\varkappa$ est donc la borne supérieure de $A_\varkappa$ dans $E_\varkappa$.

Soit F une partie d'un ensemble ordonné E, et soit A une partie de F. Il peut se faire que l'un des éléments $\sup_E A$, $\sup_F A$ existe et non l'autre, ou qu'ils existent tous deux et soient inégaux.

Exemples.- * 1) Dans l'ensemble ordonné $E = \mathbb{R}$ des nombres réels, considérons l'ensemble $F = \mathbb{Q}$ des nombres rationnels, et l'ensemble $A \subset F$ des nombres rationnels $< \sqrt{2}$; alors $\sup_E A$ existe, mais non $\sup_F A$.

2) Avec les mêmes notations que dans l'exemple 1), soit G la réunion de A et de l'ensemble $\{2\}$; on a $G \subset F$, et $\sup_G A$ existe, mais non $\sup_F A$.

3) Avec les mêmes notations, on a $\sup_E A = \sqrt{2}$, $\sup_G A = 2$. *

On a toutefois le résultat suivant :

PROPOSITION 10.- <u>Soient</u> E <u>un ensemble ordonné</u>, F <u>une partie de</u> E <u>et</u> A <u>une partie de</u> F. <u>Si</u> $\sup_E A$ <u>et</u> $\sup_F A$ <u>existent tous deux, on a</u> $\sup_E A \leqslant \sup_F A$. <u>Si</u> $\sup_E A$ <u>existe et appartient à</u> F, $\sup_F A$ <u>existe et est égale à</u> $\sup_E A$.

La première assertion résulte de ce que l'ensemble M des majorants de A dans F est contenu dans l'ensemble N des majorants de A dans E et de la prop.6. D'autre part, si le plus petit élément de N est dans F, il appartient à M, et c'est évidemment le plus petit élément de M ; cela démontre la seconde assertion.

§ 2. Ensembles bien ordonnés.

1. Segments d'un ensemble bien ordonné.

Soit $R\{x,y\}$ une relation entre deux lettres distinctes x,y. On dit que R est une relation de bon ordre entre x et y si R est une relation d'ordre entre x et y, et si, pour tout ensemble non vide E sur lequel $R\{x,y\}$ induit une relation d'ordre (c'est-à-dire tel que $x\in E$ entraîne $R\{x,x\}$; cf. § 1, n°1) E, ordonné par cette relation, admet un plus petit élément.

On dit qu'un ensemble E ordonné par un ordre Γ et bien ordonné, si la relation $y\in\Gamma\langle x\rangle$ est une relation de bon ordre entre x et y ; on dit alors que Γ est un bon ordre sur E. Il revient au même de poser la définition suivante :

DÉFINITION 1.- <u>On dit qu'un ensemble E est bien ordonné s'il est ordonné et si toute partie non vide de E admet un plus petit élément.</u>

Un ensemble bien ordonné E est totalement ordonné, puisque toute partie $\{x,y\}$ de E possède un plus petit élément. Toute partie A de E, majorée dans E, admet une borne supérieure dans E.

Exemples.- 1) Soit $E=\{\alpha,\beta\}$ un ensemble dont les éléments α,β sont distincts. On vérifie aussitôt que la partie $\{(\alpha,\alpha),(\alpha,\beta),(\beta,\beta)\}$ de $E\times E$ est le graphe d'un bon ordre sur E.

2) Toute partie d'un ensemble bien ordonné (en particulier l'ensemble vide) est bien ordonnée par l'ordre induit.

3) L'existence d'ensembles totalement ordonnés et non bien ordonnés est équivalente à l'axiome de l'infini (§ 5).

4) Un produit d'ensembles bien ordonnés n'est pas en général totalement ordonné, ni a fortiori bien ordonné.

5) *Si Γ est un bon ordre sur E , l'ordre opposé de Γ n'est un bon ordre sur E que si E est fini (§ 4).*

DÉFINITION 2.- *Dans un ensemble totalement ordonné* E , *on appelle segment de* E *toute partie* S *de* E *telle que les relations* $x \in S$, $y \in E$ *et* $y \leqslant x$ *entraînent* $y \in S$.

Il est évident que toute intersection ou toute réunion de segments est un segment ; si S est un segment de E , tout segment de S est aussi un segment de E . L'ensemble E lui-même et l'ensemble vide sont des segments de E .

PROPOSITION 1.- *Dans un ensemble bien ordonné* E , *tout segment distinct de* E *est un intervalle* $]\leftarrow, a[$, *où* $a \in E$.

En effet, soit S un segment de E distinct de E . Comme E-S n'est pas vide, il a un plus petit élément *a* ; en vertu de la déf.2, la relation $x \geqslant a$ entraîne $x \notin S$, car sans quoi on aurait $a \in S$, ce qui est absurde. Donc E-S est l'intervalle $[a, \rightarrow[$ et S l'intervalle $]\leftarrow, a[$.

Dans un ensemble totalement ordonné quelconque, tout intervalle de la forme $]\leftarrow, a[$ ou $]\leftarrow, a]$ est un segment, mais la réciproque n'est pas toujours vraie. *Par exemple, dans l'ensemble totalement ordonné Q des nombres rationnels, l'ensemble des $x \in Q$ tels que $x < \sqrt{2}$ est un segment, mais non un intervalle de Q .

Pour tout élément x d'un ensemble bien ordonné E, nous noterons S_x le segment $]\leftarrow, x[$, et nous dirons que c'est le <u>segment d'extrêmité</u> x .

On notera que si E n'est pas vide, il a un plus petit élément α , et que par suite S_x est aussi l'intervalle semi-ouvert $[\alpha, x[$.

PROPOSITION 2.- <u>L'ensemble E^* des segments d'un ensemble bien ordonné E est bien ordonné par inclusion ; l'application $x \to S_x$ est un isomorphisme de l'ensemble bien ordonné E sur l'ensemble des segments de E , distincts de E .</u>

Il est clair que si $x \in E$ et $y \in E$, la relation $x \leqslant y$ entraîne $S_x \subset S_y$, et que $x < y$ entraîne $S_x \neq S_y$; l'application $x \to S_x$ est donc un isomorphisme de E sur l'ensemble des segments de E distincts de E ; il en résulte que cet ensemble est bien ordonné. Comme E est le plus grand élément de E^*, E^* est lui-même bien ordonné.

Soit E' la réunion des segments S_x , où x parcourt E ; E' étant un segment, est de la forme S_b ou est identique à E . Dans le premier cas, b est maximal (et par suite le plus grand élément de E), car si on avait $b < x$ pour un $x \in E$, on en déduirait $b \in S_x \subset E' = S_b$, ce qui est absurde ; E est alors réunion de S_b et de $\{b\}$. Dans le second cas, E n'a pas de plus grand élément, car un tel élément ne peut appartenir à aucun segment S_x .

PROPOSITION 3.- <u>Soit $(X_\iota)_{\iota \in I}$ une famille d'ensembles bien ordonnés, telle que, pour tout couple d'indices $(\iota, \varkappa)$, l'un des ensembles $X_\iota, X_\varkappa$ soit un segment de l'autre. Alors, sur l'ensemble $E = \bigcup_{\iota \in I} X_\iota$, il existe un ordre et un seul qui induise sur chacun des X_ι l'ordre donné ; muni de cet ordre E est un ensemble bien ordonné. Tout segment de X_ι est un segment de E , et pour tout $x \in X_\iota$, le segment d'extrêmité x dans X_ι est égal au segment d'extrêmité x dans E .</u>

NBR 092

Désignons par G_ι le graphe de l'ordre donné sur X_ι. Si G est le graphe d'un ordre induisant sur chacun des X_ι l'ordre de graphe G_ι, on a nécessairement $G_\iota \subset G$ pour tout ι, donc G contient la réunion $\bigcup_{\iota\in I} G_\iota$. D'autre part, pour tout couple (x,y) d'éléments de E, il existe deux indices ι, $\varkappa$ tels que $x\in X_\iota$, $y\in X_\varkappa$; comme l'un des ensembles X_ι, $X_\varkappa$ est contenu dans l'autre, supposons par exemple que $X_\iota \subset X_\varkappa$; alors si $(x,y)\in G$, on a nécessairement $(x,y)\in G_\varkappa$ par hypothèse, d'où $G \subset \bigcup_{\iota\in I} G_\iota$; on a donc nécessairement $G = \bigcup_{\iota\in I} G_\iota$. Inversement, comme $G_\varkappa \cap (X_\iota \times X_\iota) = G_\iota$ lorsque $X_\iota \subset X_\varkappa$, on a aussi $G\cap(X_\iota\times X_\iota) = G_\iota$ pour tout $\iota\in I$; comme trois éléments x,y,z quelconques de E appartiennent à un même ensemble X_ι, G est le graphe d'une relation d'ordre total sur E (que nous noterons $x\leqslant y$), induisant sur chaque X_ι la relation d'ordre donnée sur cet ensemble. Si $x\in X_\iota$ les relations $y\in E$, $y\leqslant x$ entraînent que x et y appartiennent à un même ensemble $X_\varkappa$; mais pour tout $\varkappa\in I$ tel que $x\in X_\varkappa$, le segment d'extrémité x dans $X_\varkappa$ est par hypothèse égal au segment d'extrémité x dans X_ι, puisqu'on a $X_\iota \subset X_\varkappa$ ou $X_\varkappa \subset X_\iota$; on en conclut que le segment d'extrémité x dans E est égal au segment d'extrémité x dans X_ι. Prouvons ensuite que E est bien ordonné : en effet, si A est une partie non vide de E, et si $x\in A$, on a $x\in X_\iota$ pour un indice ι, et $A\cap X_\iota$ n'étant pas vide, a un plus petit élément $\underline{a}$; le segment d'extrémité $\underline{a}$ dans E étant aussi le segment d'extrémité $\underline{a}$ dans X_ι, ne rencontre pas A, ce qui prouve que a est le plus petit élément de A dans E. Enfin, tout ensemble X_ι est un segment dans E, car ou bien $X_\iota = E$, ou bien $E - X_\iota$ n'est pas vide et admet un plus petit élément b_ι ; X_ι contient alors le segment d'extrémité b_ι dans E, mais d'autre part il ne peut contenir d'élément $y > b_\iota$, car il contiendrait alors aussi le segment d'extrémité y dans E, et par suite b_ι, ce qui est absurde.

2. Le principe de récurrence transfinie.

A la notion d'ensemble bien ordonné est lié le critère suivant, dit principe de récurrence transfinie (ou principe d'induction transfinie) :

C59. Dans une théorie $\mathcal{C}$, soient $R\{x\}$ une relation, E et Γ deux termes. On suppose que dans la théorie $\mathcal{C}$, les relations suivantes soient vraies :

1) Γ est un bon ordre sur l'ensemble E .

2) $(x \in E$ et $(\forall y)((y \in E$ et $y < x) \Rightarrow R\{y\})) \Rightarrow R\{x\}$.

Dans ces conditions, la relation $(x \in E) \Rightarrow R\{x\}$ est un théorème de $\mathcal{C}$. (On a noté $x \leqslant y$ la relation $y \in \Gamma\langle x \rangle$).

En effet, s'il n'en était pas ainsi, l'ensemble A des $x \in E$ tels que "non $R\{x\}$ " ne serait pas vide, et aurait donc un plus petit élément a puisque E est bien ordonné. Par définition de a , la relation $(\forall y)((y \in E$ et $y < a) \Rightarrow R\{y\})$ est vraie ; il résulte des hypothèses que $R\{a\}$ est vraie, ce qui entraîne contradiction.

L'usage du principe de récurrence transfinie permet entre autres de démontrer l'existence d'applications vérifiant certaines conditions, ou, comme on dit, de définir une application par récurrence transfinie. Pour plus de commodité, nous nous placerons dans une théorie $\mathcal{C}$ où E est un ensemble bien ordonné (par une relation notée $x \leqslant y$). On a alors le critère suivant :

C60. Soit $T\{u\}$ un terme de la théorie $\mathcal{C}$. Il existe un ensemble U et une application f de E sur U telle que, pour tout $x \in E$, la relation $f(x) = T\{f^{(x)}\}$ (où $f^{(x)}$ est la restriction de f au segment S_x d'extrémité x dans E) soit vraie dans $\mathcal{C}$. En outre, l'ensemble U et l'application f sont déterminés de façon unique par cette condition.

Soit $R\{x\}$ la relation suivante : "$x \in E$ et il existe un ensemble et un seul U_x et une application et une seule f_x de l'intervalle $]\leftarrow, x] = S_x \cup \{x\}$ sur U_x telle que, pour tout $y \leq x$, $f_x(y) = T\{f_x^{(y)}\}$ " (où $f_x^{(y)}$ désigne la restriction de f_x au segment S_y). Nous allons montrer que la relation $x \in E$ entraîne $R\{x\}$. Appliquons par cela le principe d'induction transfinie, en prouvant que si $R\{y\}$ est vraie pour tout $y < x$, alors $R\{x\}$ est vraie. Remarquons tout d'abord que si $y < z < x$, la restriction de f_z à l'intervalle $]\leftarrow, y]$ est nécessairement identique à f_y ; en effet pour $t \leq y$, on a $f_z(t) = T\{f_z^{(t)}\}$, puisque $t \leq z$, et il n'y a par hypothèse qu'une seule fonction f_y définie dans $]\leftarrow, y]$, qui satisfasse à ces conditions. Le même raisonnement montre que, si U_x et f_x satisfont aux conditions énoncées dans $R\{x\}$, la restriction de f_x à tout intervalle $]\leftarrow, y]$, pour $y < x$, est identique à f_y ; en particulier, on a $f_x(S_x) = \bigcup_{y \in S_x} f_y(S_y \cup \{y\}) = \bigcup_{y \in S_x} U_y$. En outre, on doit avoir $f_x(x) = T\{f_x^{(x)}\}$, ce qui montre que U_x et f_x sont déterminés de façon unique s'ils existent. Mais, en vertu de ce qui précède, on peut définir une application g de S_x sur $V = \bigcup_{y \in S_x} U_y$ par la condition que sa restriction à tout intervalle $]\leftarrow, y]$ $(y < x)$ soit identique à f_y (chap. II, § 4, prop. 6) ; on prend ensuite $U_x = V \cup \{T\{g\}\}$, et on définit f_x dans U_x par la condition que la restriction de f_x à V soit g, et que $f_x(x) = T\{g\}$ (chap. II, § 4, prop. 7). Alors, pour tout $y < x$, la restriction de f_x à $]\leftarrow, y]$ est f_y, ce qui prouve que $R\{x\}$ est vraie pour tout $x \in E$.

Cela étant, pour tout couple d'éléments x, y de E tels que $y < x$, f_y est la restriction de f_x à $]\leftarrow, y]$; on définit donc une application f de E sur $U = \bigcup_{x \in E} U_x$ par la condition que sa restriction à tout intervalle $]\leftarrow, x]$ soit identique à f_x (chap.II, §4, prop.6). Il est clair que f et U répondent à la question et sont uniquement déterminés.

Le plus souvent, on appliquera la règle précédente au cas où $T\{u\}$ est un terme tel que le théorème suivant soit vrai dans $\mathcal{T}$: <u>pour toute application</u> h <u>d'un segment de</u> E <u>dans un ensemble</u> F, <u>on a</u> $T\{h\} \in F$. Alors l'ensemble U obtenu par application de C60 est une <u>partie de</u> F ; on le voit aussitôt par récurrence transfinie : si (avec les notations de la démonstration précédente), pour tout $y < x$, on a $U_y \in F$, on a aussi $V = \bigcup_{y \in S_x} U_y \subset F$, et comme g est une application de S_x dans F, $T\{g\} \in F$, d'où $U_x = V \cup \{T\{g\}\} \subset F$.

3. <u>Le théorème de Zermelo.</u>

PROPOSITION 4.- <u>Soient</u> E <u>un ensemble</u>, $\mathfrak{S}$ <u>une partie de</u> $\mathfrak{P}(E)$ <u>et</u> p <u>une application de</u> $\mathfrak{S}$ <u>dans</u> E <u>telle que</u> $p(X) \notin X$ <u>pour tout</u> $X \in \mathfrak{S}$. <u>Il existe alors une partie</u> M <u>de</u> E, <u>et un bon ordre</u> Γ <u>sur</u> M <u>tels que</u> (en désignant par $x \leqslant y$ la relation $y \in \Gamma\langle x \rangle$ dans M) :

1° <u>pour tout</u> $x \in M$, <u>on a</u> $S_x \in \mathfrak{S}$ <u>et</u> $p(S_x) = x$;

2° $M \notin \mathfrak{S}$.

<u>En outre,</u> M <u>et</u> Γ <u>sont déterminés de façon unique par ces conditions.</u>

Soit $\mathfrak{M}$ l'ensemble des parties G de $E \times E$ satisfaisant aux conditions suivantes :

a) G est le graphe d'un bon ordre dans $pr_1 G = U$;

b) si on note $x \leqslant y$ la relation $(x,y) \in G$ dans U, pour tout $x \in U$ on a $S_x \in \mathfrak{S}$ et $p(S_x) = x$.

Montrons que si G, G' sont deux éléments de $\mathfrak{M}$, et $U = pr_1 G$, $U' = pr_1 G'$, l'un des deux ensembles U, U' est contenu dans l'autre, et que si par exemple $U \subset U'$, on a $G = G' \cap (U \times U)$ (en d'autres termes, la relation d'ordre sur U est induite par la relation d'ordre sur U') et U est un <u>segment</u> de U'.

Pour cela, considérons l'ensemble V des $x \in U \cap U'$ tels que les segments d'extrémité x soient les mêmes dans U et U', et que les relations d'ordre induites sur ce segment par celles de U et de U' soient les mêmes. Il est clair que V est un <u>segment</u> dans U et dans U' et que les relations d'ordre induites sur V sont les mêmes ; notre assertion sera prouvée si nous montrons que $V=U$ ou $V=U'$. Raisonnons par l'absurde en supposant $V \neq U$ et $V \neq U'$.

Soit x le plus petit élément de U-V dans U et x' le plus petit élément de U'-V dans U' ; on a $V=S_x$ dans U, $V=S_{x'}$ dans U'. Mais par hypothèse, on a $V \in \mathfrak{G}$ et $x=p(S_x)$, $x'=p(S_{x'})$, d'où $x=x'$; on a alors par définition $x \in V$, ce qui est absurde.

On peut alors appliquer à l'ensemble des $U = pr_1 G$ $(G \in \mathfrak{M})$ la prop.3, et on obtient ainsi un ensemble bien ordonné $M = \bigcup_{G \in \mathfrak{M}} pr_1 G$; en outre le graphe de l'ordre sur M appartient à $\mathfrak{M}$. Si on avait $M \in \mathfrak{G}$, en posant $a=p(M)$, on aurait $a \notin M$; on pourrait alors prolonger à $M'=M \cup \{a\}$ l'ordre de M en posant $x < a$ pour tout $x \in M$. Cet ordre est un bon ordre, car si X est une partie non vide de M', ou bien elle est réduite à <u>a</u>, et alors <u>a</u> est son plus petit élément, ou bien elle rencontre M, et alors le plus petit élément de $X \cap M$ dans M est aussi le plus petit élément de X dans M'. On aurait en outre $M=S_a$, d'où $S_a \in \mathfrak{G}$ et $p(S_a)=a$. Il en résulte que le graphe de l'ordre sur M' appartiendrait à $\mathfrak{M}$, ce qui est absurde.

Reste à voir que M et Γ sont bien déterminés. Or, si M_1 et Γ_1 satisfont aux conditions de l'énoncé, et si G_1 est le graphe de Γ_1, on a $G_1 \in \mathfrak{M}$, donc $M_1 \subset M$ et la relation d'ordre sur M_1 est induite par celle de M ; mais si $M_1 \neq M$, comme M_1 est un segment de M, on aurait $M_1 = S_b$ pour $b \in M$, d'où $M_1 \in \mathfrak{S}$ contrairement à l'hypothèse. On a donc bien $M_1 = M$ et $\Gamma_1 = \Gamma$.

On notera que si $\mathfrak{S} = \emptyset$, l'ensemble M dont l'existence est affirmée par la prop.4 est l'ensemble vide.

THÉORÈME 1 (Zermelo).- <u>Sur tout ensemble</u> E <u>il existe un bon ordre</u>.

Soit $\mathfrak{S} = \mathfrak{P}(E) - \{E\}$ l'ensemble des parties de E distinctes de E, et pour tout $X \in \mathfrak{S}$, posons $p(X) = \tau_x(x \in E - X)$; comme la relation $X \in \mathfrak{S}$ entraîne $(\exists x)(x \in E - X)$, elle entraîne aussi $p(X) \in E - X$, donc $p(X) \notin X$. On peut alors appliquer la prop.4, et il existe donc un bon ordre sur une partie M de E telle que $M \notin \mathfrak{S}$; mais la seule partie de E n'appartenant pas à $\mathfrak{S}$ est E, d'où le théorème.

4. Ensembles inductifs ; le théorème de Zorn.

DÉFINITION 3.- <u>On dit qu'un ensemble ordonné</u> E <u>est inductif si toute partie totalement ordonnée de</u> E <u>possède une borne supérieure dans</u> E.

<u>Exemples</u>.- 1) Soit $\mathfrak{F}$ un ensemble de parties d'un ensemble A, ordonné par inclusion et tel que, pour tout sous-ensemble totalement ordonné $\mathfrak{G}$ de $\mathfrak{F}$, la réunion (resp. l'intersection) des ensembles de $\mathfrak{G}$ appartienne à $\mathfrak{F}$ (il en est ainsi par exemple si $\mathfrak{F} = \mathfrak{P}(A)$). Alors $\mathfrak{F}$ est inductif pour la relation $\subset$ (resp. $\supset$) puisque la réunion (resp. l'intersection) des ensembles de $\mathfrak{G}$ n'est autre que la borne supérieure (resp. inférieure) de $\mathfrak{G}$ dans $\mathfrak{P}(A)$.

2) Un exemple important d'ensemble de parties inductif pour la relation $\subset$ est l'ensemble $\mathfrak{F}$ des graphes d'applications de parties d'un ensemble A dans un ensemble B : en effet, $\mathfrak{F}$ est une partie de $\mathfrak{P}(A \times B)$ et dire qu'une partie $\mathfrak{G}$ de $\mathfrak{F}$ est totalement ordonnée pour la relation $\subset$, signifie que les éléments de $\mathfrak{G}$

sont des graphes d'applications telles que, de deux quelconques de ces applications, l'une prolonge l'autre. Il s'ensuit aussitôt que la réunion des ensembles de $\mathfrak{G}$ est un élément de $\mathfrak{F}$ (chap.II, § 4,n°3,prop.6). On peut donc dire encore que l'ensemble $\Phi(A,B)$ des applications de parties de A dans B est inductif pour la relation d'ordre (entre u et v) "v prolonge u" .

3) *L'ensemble des entiers naturels n'est pas inductif (pour la relation $\leqslant$).*

THÉORÈME 2 (Kuratowski-Zorn).- <u>Tout ensemble ordonné inductif possède un élément maximal</u>.

Ce théorème sera conséquence du résultat plus précis suivant :

PROPOSITION 5.- <u>Soit</u> E <u>un ensemble ordonné dont toute partie bien ordonnée soit majorée</u> ; <u>alors</u> E <u>admet un élément maximal</u>.

Disons qu'un élément $v \in E$ est un <u>majorant strict</u> d'une partie X de E si v est un majorant de X et si $v \notin X$. Soit $\mathfrak{S}$ l'ensemble des parties de E admettant des majorants stricts, et, pour tout $S \in \mathfrak{S}$, posons $p(S) = \tau_v$ (v est un majorant strict de S) : alors p(S) est un majorant strict de S . Appliquant à $\mathfrak{S}$ et p la prop.4, on voit qu'il existe une partie M de E et un bon ordre Γ sur M satisfaisant aux conditions de l'énoncé de la prop.4 ; en particulier, M n'admet pas de majorant strict dans E .

En outre, l'ordre Γ est identique à l'ordre induit sur M par celui de E . En effet, dans M , la relation "$y \in \Gamma\langle x \rangle$ et $x \neq y$" équivaut à $x \in S_y$, et comme $p(S_y)=y$ est un majorant de S_y (pour l'ordre de E) elle entraîne $x < y$ dans E . Mais cela signifie que l'injection de M dans E est une application strictement croissante (lorsque M est muni de Γ), et comme M est totalement ordonné, on en conclut que dans M , les relations $y \in \Gamma\langle x\rangle$ et $x \leqslant y$ sont équivalentes (§1, prop.3). Cela étant, il existe par hypothèse un majorant m de M dans E ; mais comme M n'admet pas de majorant strict, m est nécessairement maximal dans E.

COROLLAIRE 1.- Soient E un ensemble ordonné inductif, et a un élément de E ; il existe un élément maximal m de E tel que $m \geqslant a$.

En effet, il résulte de la déf.3 que l'ensemble F des éléments $x \geqslant a$ est inductif, et un élément maximal de F est aussi élément maximal de E.

COROLLAIRE 2.- Soit $\mathfrak{F}$ un ensemble de parties d'un ensemble E tel que, pour tout sous-ensemble $\mathfrak{G}$ de $\mathfrak{F}$, totalement ordonné par inclusion, la réunion (resp. l'intersection) des ensembles de $\mathfrak{G}$ appartienne à $\mathfrak{F}$; alors $\mathfrak{F}$ possède un élément maximal (resp. minimal).

En effet, la réunion (resp. l'intersection) des ensembles de $\mathfrak{G}$ est leur borne supérieure (resp. inférieure) dans $\mathfrak{P}(E)$ donc aussi dans $\mathfrak{F}$.

5. Isomorphismes d'ensembles bien ordonnés.

THÉORÈME 3.- Soient E et F deux ensembles bien ordonnés ; il existe un isomorphisme de l'un d'eux sur un segment de l'autre. En outre, si par exemple il existe un isomorphisme de E sur un segment de F, cet isomorphisme est unique.

Considérons l'ensemble $\mathfrak{S}$ des parties de $E \times F$ dont chacune est le graphe G d'un isomorphisme f d'un segment de E de la forme S_x sur un segment de F de la forme S_y. Si on pose alors $p(G)=(x,y)$, on a évidemment $p(G) \notin G$. Appliquons à $\mathfrak{S}$ et à p la prop.4, et soient M et Γ la partie de $E \times F$ et le bon ordre sur M ainsi obtenus. Par définition, pour tout élément $(x,y) \in M$, $S_{(x,y)}$ (pour l'ordre Γ) est le graphe d'un isomorphisme du segment S_x de E sur le segment S_y de F ; il en résulte (chap.II, §4, prop.6) que M est le graphe d'une application biunivoque f de la réunion E' des S_x sur la réunion F' des S_y (x parcourant $pr_1 M$ et y parcourant $pr_2 M$. En outre, si $(x,y),(x',y')$ sont deux éléments distincts de M , on a par exemple $(x',y') \in S_{(x,y)}$, d'où résulte aussitôt que $x' < x$ et $y' < y$, ce qui prouve que f est un isomorphisme de E' sur F'. Or, E' est un segment de E et F' un segment de F ; si on avait à la fois $E' \neq E$ et $F' \neq F$, on aurait $E' = S_a$ et $F' = S_b$ avec $a \in E$, $b \in F$ (prop.1) ; mais alors on aurait par définition $M \in \mathfrak{S}$, contrairement à la prop.4 .

Si par exemple il existe un isomorphisme f de E sur un segment de F, l'unicité de f résulte de ce que, pour tout $x \in E$, la restriction de f à S_x est un isomorphisme de S_x sur $S_{f(x)}$; désignant par M le graphe de f et par Γ l'ordre induit sur M par l'ordre produit sur $E \times F$, on voit que M remplit les conditions de la prop.4, donc est unique en vertu de cette proposition.

COROLLAIRE.- *Le seul isomorphisme d'un ensemble bien ordonné* E *sur un segment de* E *est l'application identique de* E *sur lui-même*.

PROPOSITION 6.- *Soient* E *un ensemble bien ordonné*, f *une application strictement croissante de* E *dans lui-même* ; *pour tout* $x \in E$, *on a* $f(x) \geqslant x$.

Raisonnons par l'absurde, et supposons que l'ensemble H des $x \in E$ tels que $f(x) < x$ ne soit pas vide ; il aurait alors un plus petit élément *a* . Par définition de *a* , pour tout $x < a$, on a $f(x) \geqslant x$, et comme f est strictement croissante, on a aussi f(a) f(x) x ; mais comme par définition on a $f(a) < a$, on aurait, en remplaçant x par f(a), $f(a) > f(a)$, ce qui est absurde.

COROLLAIRE.- *Tout sous-ensemble* A *d'un ensemble bien ordonné* E *est isomorphe à un segment de* E .

En vertu du th.3, il suffit de prouver qu'il n'existe pas d'isomorphisme f de E sur un segment de A de la forme S_a ; mais f serait une application strictement croissante de E dans E, telle que $f(a) \in S_a$, autrement dit $f(a) < a$, ce qui contredirait la prop.6.

6. <u>Produits lexicographiques</u>.

Soit $(E_\iota)_{\iota \in I}$ une famille d'ensembles ordonnés, dont l'ensemble d'indices I soit <u>bien ordonné</u>. Considérons l'ensemble produit $E = \prod_{\iota \in I} E_\iota$, et la relation

"$x \in E$ et $y \in E$ et $((x=y)$ ou (pour le plus petit indice $\iota \in I$ tel que $pr_\iota x \neq pr_\iota y$, on a $pr_\iota x < pr_\iota y)$"

que nous noterons $R\{x,y\}$. Il est immédiat que $R\{x,x\}$ est équivalente à $x \in E$, que $R\{x,y\}$ implique ($R\{x,x\}$ et $R\{y,y\}$) et que ($R\{x,y\}$ et $R\{y,x\}$) implique $x=y$. En outre, supposons que $R\{x,y\}$ et $R\{y,z\}$ soient vraies ; il est immédiat que si $x=y$ ou si $y=z$, $R\{x,z\}$ est vraie ; dans le cas contraire, soit λ (resp. μ) le plus petit indice dans I tel que $pr_\lambda x \neq pr_\lambda y$ (resp. $pr_\mu y \neq pr_\mu z$), et soit ν le plus petit des indices λ, μ ; si $\nu = \lambda$ on a $pr_\iota x = pr_\iota z$ pour tout $\iota < \nu$, et $pr_\nu x < pr_\nu y \leq pr_\nu z$, donc $pr_\nu x < pr_\nu z$; si au contraire $\nu = \mu$, on a $pr_\iota x = pr_\iota z$ pour tout $\iota < \nu$ et $pr_\nu x \leq pr_\nu y < pr_\nu z$; dans tous les cas, ν est le plus petit indice tel que $pr_\nu x \neq pr_\nu z$, et on a $pr_\nu x < pr_\nu z$, ce qui montre que $R\{x,z\}$ est vraie. Nous venons donc de vérifier que $R\{x,y\}$ est une <u>relation d'ordre sur l'ensemble produit E</u> ; on dit que cette relation, et l'ordre qu'elle définit sur E, sont la <u>relation d'ordre lexicographique</u> et l'<u>ordre lexicographique</u> sur E (déduits des ordres donnés sur I et sur les E_ι) ; l'ensemble E, ordonné par cette relation, est appelée le <u>produit lexixographique</u> des ensembles ordonnés E_ι. Lorsque les

les ensembles E_ι sont <u>totalement ordonnés</u>, il résulte aussitôt de la définition de l'ordre lexicographique que le produit lexicographique des E_ι est <u>totalement ordonné</u>.

§ 3. Ensembles équipotents. Cardinaux.

1. <u>Le cardinal d'un ensemble</u>.

DÉFINITION 1.- <u>On dit qu'un ensemble</u> X <u>est équipotent à un ensemble</u> Y <u>s'il existe une bijection de</u> X <u>sur</u> Y . <u>On note</u> Eq(X,Y) <u>la relation</u> "X <u>est équipotent à</u> Y" .

Il est clair que les relations "Eq(X,Y)" et "Eq(Y,X)" sont équivalentes, autrement dit, la relation Eq(X,Y) est <u>symétrique</u> ; lorsqu'elle est vraie, on dit aussi que X <u>et</u> Y <u>sont équipotents</u>. D'autre part, Eq(X,X) est vraie. Enfin, la relation Eq(X,Y) est <u>transitive</u>, la composée de deux bijections étant une bijection (chap.II, § 3, th. 1) ; c'est donc une <u>relation d'équivalence</u>, réflexive dans tout ensemble.

De ce qui précède résulte que si X et Y sont équipotents, la relation $(\forall Z)(\mathrm{Eq}(X,Z) \Longleftrightarrow \mathrm{Eq}(Y,Z))$ est vraie. Or, le schéma S7 (chap.I, § 5, n°1) fournit l'axiome suivant

$$((\forall Z)(\mathrm{Eq}(X,Z) \Longleftrightarrow \mathrm{Eq}(Y,Z)) \Longrightarrow (\tau_Z(\mathrm{Eq}(X,Z)) = \tau_Z(\mathrm{Eq}(Y,Z))) .$$

Donc, si X et Y sont équipotents, on a $\tau_Z(\mathrm{Eq}(X,Z)) = \tau_Z(\mathrm{Eq}(Y,Z))$.

Posons la définition suivante :

DÉFINITION 2.- <u>L'ensemble</u> $\tau_Z(\mathrm{Eq}(X,Z))$ <u>est appelé le cardinal de</u> X (ou la <u>puissance</u> de X) <u>et se note</u> Card(X).

Comme Eq(X,X) est vraie, Card(X) est <u>équipotent à</u> X (chap.I, § 4, schéma S5). Nous avons donc démontré le résultat suivant :

PROPOSITION 1.- <u>Pour que deux ensembles</u> X,Y <u>soient équipotents, il faut et il suffit que leurs cardinaux soient égaux</u>.

Exemples.- 1) Le seul ensemble équipotent à $\emptyset$ est $\emptyset$ (chap.II, § 3, n^{os} 1 et 4). On a donc Card($\emptyset$)=$\emptyset$; Card($\emptyset$) se note aussi 0.

2) Tous les ensembles à un élément sont équipotents, car $\{(a,b)\}$ est le graphe d'une bijection de $\{a\}$ sur $\{b\}$; en particulier, ils sont équipotents à $\{\emptyset\}$. On note 1 leur cardinal ; c'est donc l'ensemble $\mathrm{Card}(\{\emptyset\}) = \tau_Z(\mathrm{Eq}(\{\emptyset\}, Z))$. (*)

3) On note 2 le cardinal $\mathrm{Card}(\{\emptyset, \{\emptyset\}\})$; c'est le cardinal de tout ensemble de deux éléments dont les éléments sont différents.

4) * Un espace hilbertien de type dénombrable est équipotent à l'ensemble des nombres réels. *

2. Relation d'ordre entre cardinaux.

La relation "X est équipotent à une partie de Y" signifie "il existe une injection de X dans Y" ; en raison de la transitivité des injections (chap.II, § 3, th.1), elle équivaut aussi à la relation "Card(X) est équipotent à une partie de Card(Y)".

THÉORÈME 1.- La relation $R\{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}\}$:
" $\mathfrak{x}$ et $\mathfrak{y}$ sont des cardinaux et $\mathfrak{x}$ est équipotent à une partie de $\mathfrak{y}$" est une relation de bon ordre (§ 2, n^{o} 1).

(*) Bien entendu (et malgré la confusion créée par des notations identiques), il n'y a rien de commun entre le terme mathématique désigné par le symbole "1", et le mot "un" du langage ordinaire. Le terme désigné par "1" est aussi désigné, en vertu de la définition donnée ci-dessus, par le symbole

$$\tau_Z((\exists u)(u \subset \{\emptyset\} \times Z \text{ et } (\forall x)((x \in \{\emptyset\}) \Rightarrow (\exists y)((x,y) \in u))$$
$$\text{et } (\forall x)(\forall y)(\forall y')(((x,y) \in u \text{ et } (x,y') \in u) \Rightarrow (y=y'))$$
$$\text{et } (\forall y)((y \in Z) \Rightarrow (\exists x)((x,y) \in u)))) .$$

Une estimation grossière montre que le terme ainsi désigné est un assemblage de 100.000 signes environ (chacun de ces signes étant l'un des signes τ, $\square$, $\vee$, $\neg$, $=$, $\in$, $\supset$).

Comme $R\{\mathfrak{x},\mathfrak{x}\}$ est vraie, tout revient à voir que la relation "$\mathfrak{x}\in E$ et $\mathfrak{y}\in E$ et $R\{\mathfrak{x},\mathfrak{y}\}$" est une relation de bon ordre dans un ensemble E de cardinaux. Considérons l'ensemble $A=\bigcup_{\mathfrak{x}\in E}\mathfrak{x}$; tout cardinal $\mathfrak{x}\in E$ est donc une partie de A . Il existe sur A une relation de bon ordre (§ 2,th.1) que nous noterons $x\leq y$, et toute partie de A est équipotente à un segment de A (§ 2,cor. de la prop.6). Pour tout cardinal $\mathfrak{x}\in E$, considérons l'ensemble des segments de A équipotents à $\mathfrak{x}$, qui n'est pas vide, et admet donc un plus petit élément $\varphi(\mathfrak{x})$ (§ 2,prop.2). La relation "$\mathfrak{x}\in E$ et $\mathfrak{y}\in E$ et $\mathfrak{x}$ est équipotent à une partie de $\mathfrak{y}$" est <u>équivalente</u> à $\varphi(\mathfrak{x})\subset\varphi(\mathfrak{y})$; en effet, elle est évidemment entraînée par cette dernière ; d'autre part, si $\mathfrak{x}$ est équipotent à une partie de $\varphi(\mathfrak{y})$, on ne peut avoir $\varphi(\mathfrak{x})\supset\varphi(\mathfrak{y})$ et $\varphi(\mathfrak{x})\neq\varphi(\mathfrak{y})$, car alors il existerait un segment de $\varphi(\mathfrak{y})$ équipotent à $\mathfrak{x}$, contredisant la définition de $\varphi(\mathfrak{x})$; comme l'ensemble des segments de A est totalement ordonné par inclusion (§ 2,prop.2), on a nécessairement $\varphi(\mathfrak{x})\subset\varphi(\mathfrak{y})$. Ceci prouve tout d'abord que "$\mathfrak{x}\in E$ et $\mathfrak{y}\in E$ et $R\{\mathfrak{x},\mathfrak{y}\}$" est une relation d'ordre ; comme en outre toute partie non vide de l'ensemble des $\varphi(\mathfrak{x})$ (pour $\mathfrak{x}\in E$) a un plus petit élément (§ 2,prop.2), le théorème est démontré.

Nous noterons $\mathfrak{x}\leq\mathfrak{y}$ la relation $R\{\mathfrak{x},\mathfrak{y}\}$.

Il est clair que l'on a $0\leq\mathfrak{x}$ pour tout cardinal $\mathfrak{x}$, et $1\leq\mathfrak{x}$ pour tout cardinal $\mathfrak{x}\neq 0$.

COROLLAIRE 1.- <u>Pour que</u> X <u>soit équipotent à une partie de</u> Y , <u>il faut et il suffit que</u> Card(X) $\leq$ Card(Y).

COROLLAIRE 2.- <u>Etant donné deux ensembles, l'un est équipotent à une partie de l'autre.</u>

COROLLAIRE 3.- Deux ensembles tels que chacun soit équipotent à une partie de l'autre sont équipotents.

Remarque.- Pour tout ensemble A , il existe un ensemble dont les éléments sont les cardinaux Card(X) pour toutes les parties X de A : en effet, c'est l'ensemble des objets de la forme Card(X) pour $X \in \mathfrak{P}(A)$ (chap.II, § 1,n°6). Pour tout cardinal $\mathfrak{a}$, la relation " $\mathfrak{k}$ est un cardinal et $\mathfrak{k} \leqslant \mathfrak{a}$ " est donc collectivisante en $\mathfrak{k}$, puisqu'elle est équivalente à la relation " $\mathfrak{k}$ est de la forme Card(X) pour $X \subset \mathfrak{a}$ " ; l'ensemble des $\mathfrak{k}$ satisfaisant à cette relation est appelé l'ensemble des cardinaux $\leqslant \mathfrak{a}$.

PROPOSITION 2.- Soit f une application d'un ensemble X sur un ensemble Y ; on a alors Card(Y) $\leqslant$ Card(X).

En effet, il existe une section s associée à f (chap.II, § 3,prop.8), et s est une injection de Y dans X .

3. Opérations sur les cardinaux.

DEFINITION 3. Soit $(\mathfrak{a}_\iota)_{\iota \in I}$ une famille de cardinaux. Le cardinal de l'ensemble produit (resp. somme) des ensembles $\mathfrak{a}_\iota$ s'appelle le produit cardinal (resp. la somme cardinale) des $\mathfrak{a}_\iota$ et se note $\underset{\iota \in I}{\mathrm{P}} \mathfrak{a}_\iota$ (resp. $\sum_{\iota \in I} \mathfrak{a}_\iota$).

Lorsqu'aucune confusion n'est à craindre, on dit simplement "produit" et "somme" au lieu de "produit cardinal" et "somme cardinale", et on écrira $\prod_{\iota \in I} \mathfrak{a}_\iota$ au lieu de $\underset{\iota \in I}{\mathrm{P}} \mathfrak{a}_\iota$.

PROPOSITION 3.- Soient $(E_\iota)_{\iota \in I}$ une famille d'ensembles, P son produit, S sa somme, $\mathfrak{a}_\iota$ le cardinal de E_ι ; le cardinal de P (resp. S) est le produit cardinal (resp. somme cardinale) des $\mathfrak{a}_\iota$.

NBR 96 41

Il existe en effet une bijection de P (resp. S) sur l'ensemble produit des ensembles $\mathfrak{a}_\iota$ (resp. sur l'ensemble somme des $\mathfrak{a}_\iota$)(chap.II, § 4, prop.9 et § 5, prop.10).

COROLLAIRE.– *Pour toute famille* $(E_\iota)_{\iota \in I}$ *d'ensembles, le cardinal de la réunion* $\bigcup_{\iota \in I} E_\iota$ *est au plus égal à la somme* $\sum_{\iota \in I} \mathrm{Card}(E_\iota)$.

En effet, il existe une application de la somme S des E_ι sur leur réunion (chap.II, § 4, n°8) ; le corollaire résulte donc des prop.2 et 3.

PROPOSITION 4.– a) *Soit* $(\mathfrak{a}_\iota)_{\iota \in I}$ *une famille de cardinaux, et soit* f *une bijection d'un ensemble* K *sur l'ensemble* I ; *on a*

$$\sum_{\varkappa \in K} \mathfrak{a}_{f(\varkappa)} = \sum_{\iota \in I} \mathfrak{a}_\iota \quad \text{et} \quad \mathop{P}_{\varkappa \in K} \mathfrak{a}_{f(\varkappa)} = \mathop{P}_{\iota \in I} \mathfrak{a}_\iota .$$

b) *Soit* $(\mathfrak{a}_\iota)_{\iota \in I}$ *une famille de cardinaux, et* $(J_\lambda)_{\lambda \in L}$ *une partition de* I ; *on a* ("associativité de la somme et du produit")

$$\sum_{\iota \in I} \mathfrak{a}_\iota = \sum_{\lambda \in L} \Big(\sum_{\iota \in J_\lambda} \mathfrak{a}_\iota \Big)$$

$$\mathop{P}_{\iota \in I} \mathfrak{a}_\iota = \mathop{P}_{\lambda \in L} \Big(\mathop{P}_{\iota \in J_\lambda} \mathfrak{a}_\iota \Big) .$$

c) *Soit* $((\mathfrak{a}_{\lambda,\iota})_{\iota \in J_\lambda})_{\lambda \in L}$ *une famille* (*admettant* L *comme ensemble d'indices*) *de familles de cardinaux*. *Soit* $I = \prod_{\lambda \in L} J_\lambda$. *On a* ("distributivité du produit par rapport à la somme")

$$\mathop{P}_{\lambda \in L} \Big(\cancel{\mathop{P}_{\lambda \in L}} \sum_{\iota \in J_\lambda} \mathfrak{a}_{\lambda,\iota} \Big) = \sum_{f \in I} \Big(\mathop{P}_{\lambda \in L} \mathfrak{a}_{\lambda, f(\lambda)} \Big) .$$

a) résulte des formules analogues pour la réunion et le produit d'ensembles (le fait que f est une bijection implique que si $(X_\iota)_{\iota \in I}$ est une famille d'ensembles mutuellement disjoints, il en est de même de la famille $(X_{f(\varkappa)})_{\varkappa \in K}$) (cf.chap.II, § 4, prop.1 et § 5, prop.4).

b) est une conséquence immédiate des formules d'associativité de la réunion et du produit (chap.II, § 4, prop.2 et § 5, prop.6) et de la distributivité de l'intersection par rapport à la réunion (chap.II, § 5, prop.7), qui prouve que si $(X_\iota)_{\iota \in I}$ est une famille d'ensembles mutuellement disjoints, il en est de même de la famille $\big(\bigcup_{\iota \in J} X_\iota\big)_{\lambda \in L}$.

Enfin, c) est une conséquence de la distributivité du produit par rapport à la réunion et à l'intersection (chap.II, § 5, prop.8 et cor.1 de la prop.8).

Soient $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ deux cardinaux. Si I est un ensemble à deux éléments distincts (par exemple le cardinal 2), il existe une application f de I sur $\{\mathfrak{a}, \mathfrak{b}\}$, ce qui définit une famille de cardinaux ; la somme et le produit de celle-ci ne dépendent que de $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ (en vertu de la prop. 4 a)) ; on appelle ces cardinaux la <u>somme</u> et le <u>produit</u> de $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$, et on les note $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$. On définit et note de même la somme et le produit de plusieurs cardinaux. La prop.4 entraîne alors le corollaire suivant :

COROLLAIRE.- <u>Soient</u> $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ <u>des cardinaux ; on a</u>

(1) $\mathfrak{a}+\mathfrak{b} = \mathfrak{b}+\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{b}\mathfrak{a}$

(2) $\mathfrak{a}+(\mathfrak{b}+\mathfrak{c})=(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})+\mathfrak{c}$, $\mathfrak{a}(\mathfrak{b}\mathfrak{c})=(\mathfrak{a}\mathfrak{b})\mathfrak{c}$

(3) $\mathfrak{a}(\mathfrak{b}+\mathfrak{c})=\mathfrak{a}\mathfrak{b}+\mathfrak{a}\mathfrak{c}$.

4. Propriétés des cardinaux 0 et 1.

PROPOSITION 5.- <u>Soient</u> $(\mathfrak{a}_\iota)_{\iota \in I}$ <u>une famille de cardinaux, et</u> J (resp. K) <u>une partie de</u> I <u>telle que l'on ait</u> $\mathfrak{a}_\iota = 0$ <u>pour tout</u> $\iota \notin J$ (resp. $\mathfrak{a}_\iota = 1$ <u>pour tout</u> $\iota \notin K$) ; <u>on a alors</u>

$$\sum_{\iota \in I} \mathfrak{a}_\iota = \sum_{\iota \in J} \mathfrak{a}_\iota$$

(resp. $\prod_{\iota \in I} \mathfrak{a}_\iota = \prod_{\iota \in K} \mathfrak{a}_\iota$).

C'est immédiat pour la somme, car l'ensemble somme S_I de la famille d'ensembles $(\mathfrak{a}_\iota)_{\iota \in I}$ est équipotent à la réunion de l'ensemble somme S_J de la famille $(\mathfrak{a}_\iota)_{\iota \in J}$ et de l'ensemble vide donc équipotent à S_J . Pour le produit, cela résulte de ce que la projection pr_K de l'ensemble produit $\prod_{\iota \in I} \mathfrak{a}_\iota$ sur le produit partiel $\prod_{\iota \in K} \mathfrak{a}_\iota$ est une bijection (chap.II, § 5, n°5, <u>Remarque</u> 1).

COROLLAIRE 1.- <u>Pour tout cardinal</u> $\mathfrak{a}$, <u>on a</u> $\mathfrak{a}+0 = \mathfrak{a}.1 = \mathfrak{a}$.

COROLLAIRE 2.- <u>Soient</u> $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ <u>des cardinaux</u>, <u>et soit</u> I <u>un ensemble équipotent à</u> $\mathfrak{b}$; <u>pour tout</u> $\iota \in I$, <u>soit</u> $\mathfrak{a}_\iota = \mathfrak{a}$, $\mathfrak{k}_\iota = 1$; <u>on a</u>

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \sum_{\iota \in I} \mathfrak{a}_\iota \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{b} = \sum_{\iota \in I} \mathfrak{k}_\iota .$$

La seconde formule résulte de ce qu'un ensemble est réunion de l'ensemble de ses parties à un élément. La première s'en déduit par multiplication par $\mathfrak{a}$, en utilisant le cor.1 .

PROPOSITION 6.- <u>Soit</u> $(\mathfrak{a}_\iota)_{\iota \in I}$ <u>unefamille de cardinaux</u> ; <u>pour que l'on ait</u> $\mathrm{P}_{\iota \in I}\, \mathfrak{a}_\iota \neq 0$, <u>il faut et il suffit que l'on ait</u> $\mathfrak{a}_\iota \neq 0$ <u>pour tout</u> $\iota \in I$.

Cela ne fait que traduire la condition pour qu'un ensemble produit soit non vide (chap.II, §5,cor.2 de la prop.5).

PROPOSITION 7.- <u>Si</u> $\mathfrak{a}$ <u>et</u> $\mathfrak{b}$ <u>sont des cardinaux tels que</u> $\mathfrak{a}+1 = \mathfrak{b}+1$, <u>on a</u> $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$.

Soit X un ensemble tel que $\mathrm{Card}(X) = \mathfrak{a}+1 = \mathfrak{b}+1$. Il existe des parties A,B de X , de cardinaux $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$, et telles que les complémentaires X-A et X-B soient chacun réduits à un seul élément ; soient u et v ces éléments. L'intersection $C = A \cap B$ a pour complémentaire dans X l'ensemble $\{u,v\}$. Si u=v , on a A=B=C , d'où $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$. Sinon $A = C \cup \{v\}$, $B = C \cup \{u\}$, et $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} = 1+\mathrm{Card}(C)$.

On se gardera de croire que $\mathfrak{a}+\mathfrak{m} = \mathfrak{b}+\mathfrak{m}$ entraîne $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ pour tout cardinal $\mathfrak{m}$ (cf.n°5) ; *nous verrons cependant qu'il en est bien ainsi lorsque $\mathfrak{m}$ est <u>fini</u> (§4, cor.4 de la prop.6)* .

5. Exponentiation des cardinaux.

DÉFINITION 4.- *Soient* $\mathfrak{a}$ *et* $\mathfrak{b}$ *des cardinaux ; le cardinal de l'ensemble des applications de* $\mathfrak{b}$ *dans* $\mathfrak{a}$ *se note* $\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}}$, *par abus de notation.*

L'abus provient de ce que cette notation désigne déjà l'ensemble des graphes fonctionnels d'applications de $\mathfrak{b}$ dans $\mathfrak{a}$ (chap.II, § 5), et que ce dernier ensemble n'est pas nécessairement un cardinal (exerc.11). Le contexte indiquera toujours clairement le sens qu'il faut donner à $\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}}$.

PROPOSITION 8.- *Soient* X *et* Y *deux ensembles,* $\mathfrak{a}$ *et* $\mathfrak{b}$ *leurs cardinaux ; l'ensemble* X^Y *a pour cardinal* $\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}}$.

En effet, il existe une bijection de X^Y sur l'ensemble des applications de $\mathfrak{b}$ dans $\mathfrak{a}$ (chap.II, § 5,n°2,prop.2).

La définition du produit d'une famille d'ensembles comme ensemble de graphes fonctionnels (chap.II, § 5,n°3) montre que l'on a la proposition suivante :

PROPOSITION 9.- *Soient* $\mathfrak{a}$ *et* $\mathfrak{b}$ *des cardinaux, et* I *un ensemble tel que* card(I)= $\mathfrak{b}$ *; si* $\mathfrak{a}_\iota = \mathfrak{a}$ *pour tout* $\iota \in I$ *, on a* $\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}} = \prod_{\iota \in I} \mathfrak{a}_\iota$.

COROLLAIRE 1.- *Soient* $\mathfrak{a}$ *un cardinal et* $(\mathfrak{b}_\iota)_{\iota \in I}$ *une famille de cardinaux. On a*

$$\mathfrak{a}^{\sum_{\iota \in I} \mathfrak{b}_\iota} = \prod_{\iota \in I} \mathfrak{a}^{\mathfrak{b}_\iota} .$$

Soit S l'ensemble somme des $\mathfrak{b}_\iota$, et posons $\mathfrak{a}_s = \mathfrak{a}$ pour tout $s \in S$. Les deux membres de l'égalité à démontrer sont alors égaux à $\prod_{s \in S} \mathfrak{a}_s$, en vertu de la prop.9 et de la formule d'associativité du produit (prop.4 b)).

COROLLAIRE 2.- <u>Soient</u> $(\mathfrak{a}_\iota)_{\iota\in I}$ <u>une famille de cardinaux, et</u> $\mathfrak{b}$ <u>un cardinal ; on a</u>

$$\Big(\prod_{\iota\in I}\mathfrak{a}_\iota\Big)^{\mathfrak{b}} = \prod_{\iota\in I}\mathfrak{a}_\iota^{\mathfrak{b}} .$$

Soit K un ensemble tel que card(K)= $\mathfrak{b}$, et posons $\mathfrak{a}_{\iota\varkappa} = \mathfrak{a}_\iota$ pour tout $(\iota, \varkappa)\in I\times K$. On a alors, en vertu de l'associativité du produit

$$\Big(\prod_{\iota\in I}\mathfrak{a}_\iota\Big)^{\mathfrak{b}} = \prod_{\varkappa\in K}\Big(\prod_{\iota\in I}\mathfrak{a}_{\iota\varkappa}\Big) = \prod_{\iota\in I}\Big(\prod_{\varkappa\in K}\mathfrak{a}_{\iota\varkappa}\Big) = \prod_{\iota\in I}\mathfrak{a}_\iota^{\mathfrak{b}} .$$

COROLLAIRE 3.- <u>Soient</u> $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ <u>des cardinaux ; on a</u> $\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}\mathfrak{c}} = (\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}})^{\mathfrak{c}}$.

Soit I un ensemble tel que card(I)= $\mathfrak{c}$; posons $\mathfrak{b}_\iota = \mathfrak{b}$ pour tout $\iota\in I$. On a

$$\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}\mathfrak{c}} = \mathfrak{a}^{\sum_{\iota\in I}\mathfrak{b}_\iota} = \prod_{\iota\in I}\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}_\iota} = (\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}})^{\mathfrak{c}}$$

en vertu du cor.1 .

PROPOSITION 10.- <u>Soit</u> $\mathfrak{a}$ <u>un cardinal. On a</u> $\mathfrak{a}^0=1$, $\mathfrak{a}^1=\mathfrak{a}$, $1^{\mathfrak{a}}=1$; <u>si</u> $\mathfrak{a}\neq 0$, <u>on a</u> $0^{\mathfrak{a}} = 0$.

En effet, il existe une application et une seule de $\emptyset$ dans un ensemble quelconque (l'application vide) ; l'ensemble des applications d'un ensemble à un seul élément dans un ensemble quelconque X est équipotent à X (chap.II, § 5,n°3) ; il existe une application et une seule d'un ensemble quelconque dans un ensemble à un élément ; enfin, il n'existe aucune application d'un ensemble non vide dans $\emptyset$.

On notera que l'on a $0^0=1$; *l'"indétermination" généralement attachée à ce symbole ne se présente que lorsqu'on cherche à étendre l'exponentielle a^b à des valeurs non entières des arguments.*

PROPOSITION 11.- <u>Soient X un ensemble et</u> $\mathfrak{a}$ <u>son cardinal ; le cardinal de l'ensemble</u> $\mathfrak{P}(X)$ <u>des parties de X est</u> $2^{\mathfrak{a}}$.

NBR 092 46

Soit I l'ensemble $\{0,1\}$; on a card(I)=2 . A toute partie Y de X , faisons correspondre sa <u>fonction caractéristique</u> φ_Y , c'est-à-dire l'application de X dans I définie par $\varphi_Y(x)=1$ pour $x\in Y$ et $\varphi_Y(x)=0$ pour $x \in X-Y$; soit u l'application $Y \to \varphi_Y$ de $\mathfrak{P}(X)$ dans I^X . Inversement, à toute application g de X dans I , faisons correspondre la partie $\overset{-1}{g}(1)$ de X ; soit v l'application $g \to \overset{-1}{g}(1)$ de I^X dans $\mathfrak{P}(X)$. Il est clair que les applications $u \circ v$ et $v \circ u$ sont les applications identiques de I^X et de $\mathfrak{P}(X)$. Donc u et v sont des bijections (chap.II, § 3,cor. de la prop.8), ce qui montre que $\operatorname{card}(\mathfrak{P}(X))=2^{\mathfrak{a}}$.

6. Relations d'ordre et opérations entre cardinaux.

PROPOSITION 12.- <u>Soient</u> $\mathfrak{a}$ <u>et</u> $\mathfrak{b}$ <u>des cardinaux</u> ; <u>pour que l'on ait</u> $\mathfrak{a} \geqslant \mathfrak{b}$, <u>il faut et il suffit qu'il existe un cardinal</u> $\mathfrak{c}$ <u>tel que</u> $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} + \mathfrak{c}$.

En effet, la relation $\mathfrak{a} \geqslant \mathfrak{b}$ signifie qu'il existe une partie B de $\mathfrak{a}$ équipotente à $\mathfrak{b}$ (n°2), c'est-à-dire que $\mathfrak{a}$ est équipotent à l'ensemble somme de $\mathfrak{b}$ et d'un ensemble C .

Si $\mathfrak{a} \geqslant \mathfrak{b}$, il existe en général plusieurs cardinaux $\mathfrak{c}$ tels que $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} + \mathfrak{c}$; on ne peut donc en général définir de "différence" $\mathfrak{a} - \mathfrak{b}$ de deux tels cardinaux (voir § 4,n°5).

COROLLAIRE 1.- <u>Soient</u> $(\mathfrak{a}_\iota)_{\iota\in I}$ <u>et</u> $(\mathfrak{b}_\iota)_{\iota\in I}$ <u>deux familles de cardinaux ayant le même ensemble d'indices</u> I , <u>et telles que</u> $\mathfrak{a}_\iota \geqslant \mathfrak{b}_\iota$ <u>pour tout</u> $\iota \in I$; <u>on a alors</u>

$$\sum_{\iota\in I} \mathfrak{a}_\iota \geqslant \sum_{\iota\in I} \mathfrak{b}_\iota \quad \underline{\text{et}} \quad \mathrm{P}\, \mathfrak{a}_\iota \geqslant \mathrm{P}\, \mathfrak{b}_\iota .$$

Posons $\mathfrak{a}_\iota = \mathfrak{b}_\iota + \mathfrak{c}_\iota$. On a $\sum_{\iota\in I} \mathfrak{a}_\iota = \sum_{\iota\in I} \mathfrak{b}_\iota + \sum_{\iota\in I} \mathfrak{c}_\iota$ d'après l'associativité de la somme (prop. 4b)). D'autre part

$\prod_{\iota\in I}\mathfrak{a}_\iota = \prod_{\iota\in I}(\mathfrak{b}_\iota + \mathfrak{c}_\iota) = (\prod_{\iota\in I}\mathfrak{b}_\iota) + \mathfrak{d}$ en vertu de la formule de distributivité (prop.4 c)), d'où la seconde assertion.

La seconde formule résulte aussi des relations d'inclusion entre produits d'ensembles (chap.II, § 5, cor.3 de la prop.5).

COROLLAIRE 2.- Soit $(\mathfrak{a}_\iota)_{\iota\in I}$ une famille de cardinaux. Pour toute partie J de I, on a $\sum_{\iota\in J}\mathfrak{a}_\iota \leqslant \sum_{\iota\in I}\mathfrak{a}_\iota$. Si en outre on a $\mathfrak{a}_\iota \neq 0$ pour tout $\iota\in I-J$, on a $\prod_{\iota\in J}\mathfrak{a}_\iota \leqslant \prod_{\iota\in I}\mathfrak{a}_\iota$.

Posons $\mathfrak{b}_\iota = \mathfrak{a}_\iota$ pour $\iota\in J$, et $\mathfrak{b}_\iota = 0$ (resp. 1) pour $\iota\in I-J$; il suffit d'appliquer le cor.1, en remarquant que la relation $\mathfrak{a}\neq 0$ entraîne $\mathfrak{a}\geqslant 1$.

COROLLAIRE 3.- Si $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}', \mathfrak{b}, \mathfrak{b}'$ sont des cardinaux tels que $\mathfrak{a}\leqslant\mathfrak{a}'$ et $\mathfrak{b}\leqslant\mathfrak{b}'$, on a $\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}}\leqslant\mathfrak{a}'^{\mathfrak{b}'}$.

On a en effet $\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}}\leqslant\mathfrak{a}'^{\mathfrak{b}}$ d'après le cor.1 et la prop.9, et $\mathfrak{a}'^{\mathfrak{b}}\leqslant\mathfrak{a}'^{\mathfrak{b}'}$ d'après le cor.2 et la prop.9.

Remarque.- Soit $(\mathfrak{a}_\iota)_{\iota\in I}$ une famille de cardinaux, et $\mathfrak{a}$ leur somme. L'ensemble F des cardinaux $\leqslant\mathfrak{a}$ étant bien ordonné et contenant tous les $\mathfrak{a}_\iota$ (en vertu du cor.2 de la prop.12), la famille $(\mathfrak{a}_\iota)_{\iota\in I}$ admet une borne supérieure $\mathfrak{b}$ dans cet ensemble. En outre, tout cardinal $\mathfrak{c}$ tel que $\mathfrak{c}\geqslant\mathfrak{a}_\iota$ pour tout $\iota\in I$ est tel que $\mathfrak{c}\geqslant\mathfrak{b}$; dans le cas contraire, on aurait en effet $\mathfrak{c}<\mathfrak{b}\leqslant\mathfrak{a}$, donc $\mathfrak{c}\in F$, et l'inégalité $\mathfrak{c}<\mathfrak{b}$ contredirait alors la définition de la borne supérieure de la famille $(\mathfrak{a}_\iota)$ dans l'ensemble ordonné F. Par abus de langage, on dit que $\mathfrak{b}$ est la borne supérieure de la famille $(\mathfrak{a}_\iota)_{\iota\in I}$ de cardinaux.

THÉORÈME 2 (Cantor).- Pour tout cardinal $\mathfrak{a}$, on a $2^{\mathfrak{a}}>\mathfrak{a}$.

Soit E un ensemble tel que $\mathrm{Card}(E)=\mathfrak{a}$; on a $\mathrm{Card}(\mathfrak{P}(E))=2^{\mathfrak{a}}$ (prop.11). L'application $x \to \{x\}$ $(x\in E)$ est une injection de E dans $\mathfrak{P}(E)$; d'où $\mathfrak{a}\leq 2^{\mathfrak{a}}$. Il suffit de montrer que $\mathfrak{a}\neq 2^{\mathfrak{a}}$, c'est-à-dire que, pour toute application f de E dans $\mathfrak{P}(E)$, l'image f(E) est distincte de $\mathfrak{P}(E)$. Or, soit X l'ensemble des $x\in E$ tels que $x\notin f(x)$; si $x\in X$, on a $f(x)\neq X$, car $x\notin f(x)$; si $x\in E-X$, on a $f(x)\neq X$, car on a $x\in f(x)$. Ceci démontre que $X\notin f(E)$, d'où le théorème.

COROLLAIRE.- Il n'existe pas d'ensemble dont tout cardinal soit élément.

Si I était un tel ensemble il existerait un ensemble S , somme de la famille d'ensembles $(X)_{X\in I}$, et tout cardinal serait équipotent à une partie de S . En particulier, soit $\mathfrak{s}=\mathrm{Card}(S)$; comme $2^{\mathfrak{s}}$ est un cardinal, on aurait $2^{\mathfrak{s}}\leq\mathfrak{s}$, ce qui est absurde.

§ 4. Entiers naturels. Ensembles finis.

1. Définition des entiers.

DEFINITION 1.- On dit qu'un cardinal $\mathfrak{a}$ est fini si $\mathfrak{a}\neq\mathfrak{a}+1$; un cardinal fini s'appelle aussi un entier naturel (ou simplement un entier si aucune confusion n'est à craindre(*)). On dit qu'un ensemble E est un cardinal fini ; on dit alors que Card(E) est le nombre d'éléments de E.

On dit qu'une famille (chap.II, §3,n°4) est finie si son ensemble d'indices est fini. On appelle suite finie (resp. suite finie d'éléments de E) une famille (resp. une famille d'éléments de E) dont l'ensemble d'indices est un ensemble fini I d'entiers ; le nombre d'éléments de I s'appelle alors encore la longueur de la suite finie.

(*) La notion d'"entier" sera plus tard généralisée en Algèbre, où l'on définira les entiers rationnels et les entiers algébriques par rapport à un anneau.

49

Quand nous dirons que le nombre des objets d'un certain type est un entier n , nous entendrons que ces objets sont les éléments d'un ensemble fini E dont le nombre d'éléments est n . Un ensemble dont le nombre d'éléments est n est encore appelé <u>ensemble à n éléments</u>.

PROPOSITION 1.- <u>Pour qu'un cardinal $\mathfrak{a}$ soit fini, il faut et il suffit que $\mathfrak{a}+1$ soit fini.</u>

On sait en effet que les relations $\mathfrak{a}=\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{a}+1=\mathfrak{b}+1$ sont équivalentes (§ 3, prop. 7) ; les relations $\mathfrak{a}\neq\mathfrak{a}+1$ et $\mathfrak{a}+1\neq(\mathfrak{a}+1)+1$ sont donc équivalentes.

Il est clair que $0\neq 1$; donc 0 est un entier. On en déduit que 1 et 2 sont des entiers. Les cardinaux $2+1$ et $(2+1)+1$ sont des entiers, que l'on note 3 et 4 .

PROPOSITION 2.- <u>Soient E un ensemble, $\mathfrak{F}(E)$ l'ensemble des parties de E . L'ensemble $\mathfrak{F}(E)$ est la plus petite des parties $\mathfrak{G}$ de $\mathfrak{P}(E)$ satisfaisant aux conditions suivantes</u> : 1° $\emptyset\in\mathfrak{G}$; 2° <u>les relations</u> $X\in\mathfrak{G}$ <u>et</u> $x\in E$ <u>entraînent</u> $X\cup\{x\}\in\mathfrak{G}$.

Soit Φ l'ensemble des parties $\mathfrak{G}$ de $\mathfrak{P}(E)$ satisfaisant à la condition de l'énoncé. Il résulte de la prop. 1 que l'on a $\mathfrak{F}(E)\in\Phi$, car $\emptyset$ est fini et si X est une partie finie de E et $x\in E$, ou bien $X\cup\{x\}=X$, ou bien $\mathrm{Card}(X\cup\{x\})=\mathrm{Card}(X)+1$. Montrons inversement que $\mathfrak{F}(E)\subset\mathfrak{G}$ pour toute partie $\mathfrak{G}\in\Phi$. Dans le cas contraire, il existerait un entier m et une partie X de E telle que $\mathrm{Card}(X)=m$, n'appartenant pas à $\mathfrak{G}$. Les cardinaux $\leqslant m$ forment un ensemble (§ 3, n°2, <u>Remarque</u>); soit n le plus petit entier $\leqslant m$ pour lequel il existe une partie B de E telle que $B\notin\mathfrak{G}$ et $\mathrm{Card}(B)=n$. Par définition de Φ , on a $B\neq\emptyset$; soit $b\in B$ et $B'=B-\{b\}$; si $n'=\mathrm{Card}(B')$, on a $n=n'+1$; n' est entier (prop. 1), donc $\neq n'+1$ et par suite $n'<n$.

Par définition de n , on a donc $B' \in \mathfrak{S}$; mais alors $B=B' \cup \{b\} \in \mathfrak{S}$ par définition, ce qui est contradictoire.

2. Inégalités entre entiers.

PROPOSITION 3.- Soit n un entier. Tout cardinal $\mathfrak{a}$ tel que $\mathfrak{a} \leqslant n$ est un entier. Si $n \neq 0$, il existe un entier m et un seul tel que $n=m+1$, et la relation $a < n$ est équivalente à $a \leqslant m$.

Si $\mathfrak{a} \leqslant n$, il existe un cardinal $\mathfrak{b}$ tel que $n=\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ (§ 3, prop. 12) alors $(\mathfrak{a}+1)+\mathfrak{b}=(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})+1 = n+1$ (§ 3, cor. de la prop. 4) et comme $n+1 \neq n$, on a $(\mathfrak{a}+1)+\mathfrak{b} \neq \mathfrak{a}+\mathfrak{b}$; par suite $\mathfrak{a}+1 \neq \mathfrak{a}$, ce qui signifie que $\mathfrak{a}$ est un entier. Si $n \neq 0$, on a $n \geqslant 1$ (§ 3, n°2), donc il existe un cardinal m tel que $n=m+1$ (§ 3, prop. 12) ; comme $m \leqslant n$, m est un entier en vertu de ce qui précède. Enfin, si un entier a est tel que $a < n$, on a $n=a+b$, avec $b \neq 0$ (§ 3, prop. 12) ; comme b est entier, on a $b=c+1$ et $n=m+1=(a+c)+1$. On en conclut que $m=a+c$ (§ 3, prop. 7), d'où $a \leqslant m$ (§ 3, prop. 12). Inversement, si $a \leqslant m$, on a aussi $a \leqslant m+1=n$ et si on avait $a=n=m+1$, on aurait $a > m$, contrairement à l'hypothèse.

COROLLAIRE 1.- Toute partie d'un ensemble fini est finie.

COROLLAIRE 2.- Si X est une partie d'un ensemble fini E , distincte de E , on a $\mathrm{Card}(X) < \mathrm{Card}(E)$.

En effet, X est contenue dans le complémentaire X' d'une partie de E réduite à un seul élément ; on a $\mathrm{Card}(X) \leqslant \mathrm{Card}(X')$, et $\mathrm{Card}(E)=\mathrm{Card}(X')+1$, donc (prop. 3) $\mathrm{Card}(X') < \mathrm{Card}(E)$ et a fortiori $\mathrm{Card}(X) < \mathrm{Card}(E)$.

COROLLAIRE 3.- Si f est une application d'un ensemble fini E dans un ensemble F , f(E) est une partie finie de F .

En effet, $\mathrm{Card}(f(E)) \leqslant \mathrm{Card}(E)$ (§ 3, prop. 2).

COROLLAIRE 4.- <u>Soient</u> E <u>et</u> F <u>deux ensembles finis ayant le même nombre d'éléments</u>, <u>et</u> f <u>une application de</u> E <u>dans</u> F . <u>Les propriétés suivantes sont équivalentes</u> :

a) f <u>est une injection</u> ;

b) f <u>est une surjection</u> ;

c) f <u>est une bijection</u>.

Il suffit de prouver que a) et b) sont équivalentes. Si f est injective, on a $\mathrm{Card}(f(E))=\mathrm{Card}(E)=\mathrm{Card}(F)$, d'où $f(E)=F$ (cor.2). Si f n'est pas injective, soient x,x' deux éléments de E tels que $x\neq x'$ et $f(x)=f(x')$; alors, en posant $E'=E-\{x\}$, on a $f(E')=f(E)$, d'où $\mathrm{Card}(f(E))\leqslant \mathrm{Card}(E') < \mathrm{Card}(E)$ en vertu du cor.2 ; mais comme $\mathrm{Card}(F)=\mathrm{Card}(E)$, on a nécessairement $f(E)\neq F$.

<u>3. Le principe de récurrence.</u>

Tout ensemble d'entiers, étant un ensemble de cardinaux, est <u>bien ordonné</u> (§ 3,th.1). Ce fait est à la base du critère suivant dit <u>principe de récurrence</u> :

C61. <u>Soient</u> $R\{n\}$ <u>une relation dans une théorie</u> $\mathcal{C}$. <u>On suppose que dans</u> $\mathcal{C}$, <u>la relation suivante soit vraie</u> :

$$\text{"}R\{0\} \text{ et } ((n \text{ est un entier et } R\{n\}) \Longrightarrow R\{n+1\})\text{"} .$$

<u>Alors la relation</u> "(n est un entier) $\Longrightarrow R\{n\}$ " <u>est un théorème de</u> $\mathcal{C}$.

Raisonnons par l'absurde et supposons que la relation "il existe un entier n tel que (non $R\{n\}$)" soit vraie dans $\mathcal{C}$. Soit q un entier tel que "non $R\{q\}$" (cf.chap.I, § 3,n°3 et § 4,n°1). Les entiers n tels que $n\leqslant q$ et "non $R\{n\}$" forment un ensemble non vide bien ordonné (§ 3,n°2,<u>Remarque</u>), qui aurait donc un plus petit élément s . Si $s=0$, on aurait "non $R\{0\}$" , ce qui est contraire à l'hypothèse. Si $s>0$,

$s = s'+1$, où s' est un entier tel que $s' < s$ (prop.3). Par définition de s, on aurait donc $R\{s'\}$, mais alors l'hypothèse entraîne que $R\{s\}$ est vraie, ce qui contredit la définition de s.

Lorsqu'on veut utiliser le principe de récurrence, on doit donc démontrer la relation "(n est un entier et $R\{n\}$) $\Rightarrow R\{n+1\}$" ; lorsqu'on fait cette démonstration, on dit souvent que la relation "n est un entier et $R\{n\}$" est l'<u>hypothèse de récurrence</u>, et qu'on procède "par récurrence sur l'entier n".

<u>Remarque</u>.- On utilise souvent, sous le nom de "principe de récurrence", divers critères qui se déduisent aisément de C61, et dont nous allons indiquer les plus importants :

1) Supposons que la relation $S\{n\}$:

"(n est un entier et m est un entier et $m < n$) $\Rightarrow R\{m\}$" <u>entraîne</u> $R\{n\}$. Alors la relation "(n est un entier) $\Rightarrow R\{n\}$" est vraie. En effet, la relation $S\{0\}$ est vraie, et par hypothèse $S\{n\}$ entraîne $R\{n\}$. Comme la relation $m < n+1$ est équivalente à $m \leqslant n$ (prop.3), la relation $S\{n+1\}$ est équivalente à "$S\{n\}$ et $R\{n\}$" ; par suite $S\{n\}$ entraîne $S\{n+1\}$. Le critère C61 prouve alors que la relation "(n est un entier) $\Rightarrow S\{n\}$" est vraie, et comme $S\{n\}$ entraîne $R\{n\}$, "(n est un entier) $\Rightarrow R\{n\}$" est vraie.

2) Soient k un entier, $R\{n\}$ une relation $R\{k\}$ telle que la relation "(n est un entier $\geqslant k$ et $R\{n\}$) $\Rightarrow R\{n+1\}$" soient vraies. Alors la relation "(n est un entier $\geqslant k$) $\Rightarrow R\{n\}$" est vraie ("<u>récurrence à partir de k</u>"). En effet, soit $S\{n\}$ la relation "$(n \geqslant k) \Rightarrow R\{n\}$" ; alors $S\{0\}$ est vraie, et la relation "(n est un entier et $S\{n\}$) $\Rightarrow S\{n+1\}$" est vraie. On conclut de C61 que "(n est un entier) $\Rightarrow S\{n\}$" est vraie, et par suite que "(n est un entier $\geqslant k$) $\Rightarrow R\{n\}$" est vraie.

3) Soient a, b deux entiers tels que $a \leqslant b$ et soit $R\{n\}$ une relation telle que l'on ait $R\{a\}$ et

"(n est un entier et $a \leqslant n < n+1 \leqslant b$ et $R\{n\}$) $\Rightarrow R\{n+1\}$ ".

Alors la relation "(n est un entier tel que $a \leqslant n \leqslant b$) $\Rightarrow R\{n\}$ " est vraie. On procède comme dans le cas précédent en prenant pour $S\{n\}$ la relation "$(a \leqslant n < n+1 \leqslant b) \Rightarrow R\{n\}$ " ("<u>récurrence limitée à un intervalle</u>").

4) Soient a, b deux entiers tels que $a \leqslant b$ et soit $R\{n\}$ une relation telle que l'on ait $R\{b\}$ et

"(n est un entier et $a \leqslant n < n+1 \leqslant b$ et $R\{n+1\}$) $\Rightarrow R\{n\}$ ".

Alors la relation "(n est un entier tel que $a \leqslant n \leqslant b$) $\Rightarrow R\{n\}$ " est vraie. Remarquons en effet que l'on a la relation

"(n est un entier et $a \leqslant n < n+1 \leqslant b$ et (non $R\{n\}$)) $\Rightarrow$ (non $R\{n+1\}$)".

Si, pour $a \leqslant n < n+1 \leqslant b$, on avait (non $R\{n\}$), on déduirait de 3) que l'on aurait (non $R\{b\}$) contrairement à l'hypothèse ; d'où le critère ("<u>récurrence descendante</u>").

<u>4. Opérations sur les entiers et les ensembles finis.</u>

PROPOSITION 4.- <u>Soit</u> $(a_i)_{i \in I}$ <u>une famille finie d'entiers. Les cardinaux</u> $\sum_{i \in I} a_i$ <u>et</u> $\prod_{i \in I} a_i$ <u>sont alors des entiers.</u>

Montrons d'abord que, si a et b sont des entiers, $a+b$ est un entier. Procédons par récurrence sur b. La proposition est vraie pour $b=0$, car $a+0=a$. Si $a+b$ est entier, il en est de même de $(a+b)+1$ (prop. 1) ; mais $(a+b)+1=a+(b+1)$ (§ 3, cor. de la prop. 4), donc $a+(b+1)$ est entier, et par suite $a+b$ est un entier pour tout entier b.

Montrons maintenant, par récurrence sur $n=\operatorname{Card}(I)$, que $\sum_{i \in I} a_i$ est un entier. C'est évident si $n=0$, car alors $I=\emptyset$ et $\sum_{i \in I} a_i = 0$.

Si $\mathrm{Card}(I)=n+1$, on a $I=J \cup \{k\}$, avec $\mathrm{card}(J)=n$ et $k \notin J$; alors $\sum_{i\in I} a_i = a_k + \sum_{i \in J} a_i$ (§ 3, prop.4). L'hypothèse de récurrence est que $\sum_{i\in J} a_i$ est un entier ; il en est donc de même de $a_k + \sum_{i\in J} a_i$ d'après ce qui vient d'être démontré. Cela prouve que $\sum_{i\in I} a_i$ est entier pour tout n .

Comme le produit ab de deux entiers $\underline{a}$ et b est la somme d'une famille finie d'entiers égaux à $\underline{a}$ (§ 3, cor.2 de la prop.5), ab est un entier. Montrons, par récurrence sur $n=\mathrm{Card}(I)$, que $\prod_{i\in I} a_i$ est un entier. C'est vrai pour $n=0$, car alors $\prod_{i\in I} a_i = 1$. D'autre part, si $\mathrm{Card}(I)=n+1$, on a (avec les mêmes notations que ci-dessus) $\prod_{i\in I} a_i = a_k \cdot \prod_{i\in J} a_i$ (§ 3, prop.4), donc l'hypothèse de récurrence entraîne que $\prod_{i\in I} a_i$ est un entier. Par suite $\prod_{i\in I} a_i$ est un entier pour tout n .

COROLLAIRE 1.- <u>La réunion E d'une famille finie $(X_i)_{i\in I}$ d'ensembles finis est un ensemble fini.</u>

En effet, l'ensemble somme S de la famille (X_i) est fini. Comme il existe une application de S sur E (chap.II, § 4, n°8), l'ensemble E est tel que $\mathrm{Card}(E) \leqslant \mathrm{Card}(S)$ (§ 3, prop.2), donc E est fini (prop.3).

COROLLAIRE 2.- <u>Le produit d'une famille finie d'ensembles finis est un ensemble fini.</u>

COROLLAIRE 3.- <u>Si a et b sont des entiers, a^b est un entier. L'ensemble des applications d'un ensemble fini dans un ensemble fini est fini.</u>

En effet, a^b est le produit d'une famille finie d'entiers égaux à a (§ 3, prop.9).

COROLLAIRE 4.- <u>L'ensemble des parties d'un ensemble fini E est fini.</u>

En effet, son cardinal est $2^{\mathrm{Card}(E)}$ (§ 3, prop.11).

5. Relation d'ordre et opérations entre entiers.

PROPOSITION 5.- *Soient a et b deux entiers ; pour que $a < b$, il faut et il suffit qu'il existe un entier $c > 0$ tel que $b=a+c$.*

En effet, si $a < b$, on sait qu'il existe un cardinal $c \leqslant b$ (qui est donc un entier (prop.3) tel que $b=a+c$ (§ 3, prop.12) ; si $a \neq b$, on a nécessairement $c \neq 0$. Inversement, si $b=a+c$ et $c > 0$, on a $c \geqslant 1$, donc $a < a+1 \leqslant a+c=b$.

PROPOSITION 6.- *Soient $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ deux familles finies d'entiers telles que $a_i \leqslant b_i$ pour tout $i \in I$ et $a_i < b_i$ pour un indice i au moins. On a alors $\sum_{i\in I} a_i < \sum_{i\in I} b_i$. Si on suppose de plus $b_i > 0$ pour tout $i \in I$, on a $\prod_{i\in I} a_i < \prod_{i\in I} b_i$.*

Soit j un indice tel que $a_j < b_j$, et posons $J=I-\{j\}$. On a $b_j=a_j+c_j$ avec $c_j > 0$ (prop.5), donc (§ 3, cor.1 de la prop.12)

$$\sum_{i\in I} b_i = a_j+c_j+\sum_{i\in J} b_i \geqslant c_j+a_j+\sum_{i\in J} a_i = c_j+\sum_{i\in I} a_i$$

et comme $c_j > 0$, on en déduit la première assertion (prop.5). De même

$$\prod_{i\in I} b_i = (a_j+c_j).\prod_{i\in J} b_i = a_j.\prod_{i\in J} b_i + c_j.\prod_{i\in J} b_i \geqslant$$

$$\geqslant \prod_{i\in I} a_i + c_j.\prod_{i\in J} b_i$$; or, comme c_j et tous les b_i sont $\neq 0$, le produit $c_j.\prod_{i\in J} b_i \neq 0$ (§ 3, prop.6) ; la seconde assertion en résulte, compte tenu de la prop.5.

COROLLAIRE 1.- *Soient a, a' et b des entiers tels que $a < a'$ et $b > 0$; alors $a^b < a'^b$.*

Il suffit d'exprimer a^b et a'^b comme produits de familles finies d'entiers (§ 3, prop.9) et d'appliquer la prop.6, en remarquant que la relation $a < a'$ implique $a' > 0$.

COROLLAIRE 2.- Soient a,b et b' des entiers tels que $a>1$ et $b<b'$; on a alors $a^b<a^{b'}$.

En effet, il existe un entier $c>0$ tel que $b'=b+c$ (prop.5) ; comme $c\geqslant 1$, on a $a^c\geqslant a>1$; d'où $a^{b'}=a^b a^c>a^b$.

COROLLAIRE 3.- Soient a,b,b' des entiers (resp. des entiers tels que $a>0$). Pour que l'on ait $a+b=a+b'$ (resp. $ab=ab'$), il faut et il suffit que l'on ait $b=b'$.

En effet, si $b\neq b'$ on a par exemple ~~$\neq$~~ $b<b'$, et la prop.6 montre que $a+b<a+b'$ et $ab<ab'$ (si $a>0$).

COROLLAIRE 4.- Si a et b sont des entiers tels que $a\leqslant b$, il existe un entier c et un seul tel que $b=a+c$.

L'existence de c résulte de la prop.12 du § 3, et son unicité du cor.3 ci-dessus.

L'entier c tel que $b=a+c$ (~~xxxx~~ pour $a\leqslant b$) s'appelle la différence des entiers b et a, et se note $b-a$. On vérifie aussitôt que, si a,b,a',b' sont des entiers tels que $a\leqslant b$ et $a'\leqslant b'$, on a $(b-a)+(b'-a')=(b+b')-(a+a')$.

6. Intervalles dans les ensembles d'entiers.

PROPOSITION 7.- Soient a et b des entiers ; l'application $x\to a+x$ est une bijection strictement croissante de l'intervalle $[0,b]$ sur l'intervalle $[a,a+b]$, et $y\to y-a$ est la bijection réciproque.

Il est clair que les relations $0\leqslant x\leqslant b$ entraînent $a\leqslant a+x\leqslant a+b$; l'application $x\to a+x$ est strictement croissante (donc injective) en raison de la prop.6. Enfin, les relations $a\leqslant y\leqslant a+b$ entraînent $y=a+x$ avec $x\geqslant 0$, et $a+x\leqslant a+b$, d'où $x\leqslant b$ (prop.6, ce qui achève la démonstration.

PROPOSITION 8.- <u>Si</u> a <u>et</u> b <u>sont des entiers tels que</u> $a \leqslant b$, <u>l'intervalle</u> $[a,b]$ <u>est un ensemble fini dont le nombre d'éléments est</u> $(b-a)+1$.

En vertu de la prop.7, on peut se limiter au cas où $a=0$. Démontrons la proposition par récurrence sur b . La proposition est évidente pour $b=0$. D'autre part, la relation $0 \leqslant x \leqslant b+1$ équivaut à "$0 \leqslant x < b+1$ ou $x=b+1$" et la relation $0 \leqslant x < b+1$ équivaut à $0 \leqslant x \leqslant b$ (prop.3) ; autrement dit, l'intervalle $[0,b+1]$ est réunion de $[0,b]$ et de $\{b+1\}$, et ces deux ensembles ne se rencontrent pas ; en vertu de l'hypothèse de récurrence, le nombre d'éléments de $[0,b+1]$ est égal à $(b+1)+1$, ce qui établit la proposition.

PROPOSITION 9.- <u>Pour tout ensemble fini</u> E , <u>totalement ordonné</u>, <u>ayant</u> <u>n éléments</u> $(n \geqslant 1)$, <u>il existe un isomorphisme et un seul de</u> E <u>sur</u> <u>l'intervalle</u> $[1,n]$.

Tout revient à prouver l'existence de l'isomorphisme en question car son unicité résultera alors de ce que le seul automorphisme d'un ensemble bien ordonné est l'automorphisme identique (§ 2, cor. du th.3). Prouvons d'abord, par récurrence sur $n \geqslant 1$, que E possède un plus grand élément. La proposition est évidente si $n=1$. Supposons que E ait $n+1$ éléments, et soit a un élément de E : $E'=E-\{a\}$ est un ensemble totalement ordonné ayant n éléments, donc admet un plus grand élément b , en vertu de l'hypothèse de récurrence. Comme E est totalement ordonné, on a $a < b$ ou $a > b$; dans le premier cas, b est le plus grand élément de E , et dans le second cas, a est le plus grand élément de E . Cela étant, prouvons par récurrence sur n qu'il existe un isomorphisme de E sur $[1,n]$. En effet, la proposition est évidente pour $n=1$; supposons que E ait $n+1$ éléments ; soit b le plus grand élément de E , et soit $E_1=E-\{b\}$; comme E_1 a n éléments, il existe un isomorphisme f_1 de E_1 sur l'intervalle $[1,n]$;

en posant $f(x)=f_1(x)$ dans E_1 et $f(b)=n+1$, il est clair qu'on définit un isomorphisme f de E sur l'intervalle $[1,n+1]$.

Soit $(t_i)_{i\in I}$ une suite finie de longueur n, formée d'éléments d'un ensemble T. En vertu de la prop.9, il existe un isomorphisme f et un seul de l'intervalle $[1,n]$ sur l'ensemble d'entiers I. Pour tout $k\in[1,n]$, on dit que $t_{f(k)}$ est le <u>k-ème terme de la suite</u>, $t_{f(1)}$ (resp. $t_{f(n)}$) s'appelle le <u>premier</u> (resp. <u>dernier</u>) terme de la suite.

Soit $P\{i\}$ une relation telle que les i pour lesquels on a $P\{i\}$ forment un ensemble fini I d'entiers ; une suite finie $(t_i)_{i\in I}$ se note alors souvent $(t_i)_{P\{i\}}$. Par exemple, lorsque $I=[a,b]$, on emploie souvent la notation $(t_i)_{a\leqslant i\leqslant b}$. Dans les mêmes conditions, pour désigner, par exemple, le <u>produit</u> d'une famille d'ensembles $(X_i)_{i\in I}$, on utilise les notations $\prod_{P\{i\}} X_i$ et $\prod_{i=a}^{b} X_i$; notations analogues pour la réunion, l'intersection, le produit cardinal, la somme cardinale, *les lois de composition en Algèbre (<u>Alg.</u>, chap.I, §1)*, etc.

Une suite finie $(t_i)_{a\leqslant i\leqslant b}$ s'écrit souvent aussi sous une forme telle que $(t_a, t_{a+1},\ldots,t_b)$, ou $(t_a,\ldots,t_{b-1},t_b)$, ou $(t_a,t_{a+1},\ldots,t_{b-1},t_b)$, etc. Lorsqu'on emploie de telles notations, il est sous-entendu qu'on n'exclut nullement le cas où on aurait $b=a$ (et où par suite les éléments t_{a+1} ou t_{b-1} ne seraient pas définis).

<u>7. Division euclidienne.</u>

PROPOSITION 10.- <u>Soient</u> a <u>et</u> b <u>des entiers tels que</u> $b>0$; <u>il existe des entiers</u> q <u>et</u> r <u>tels que</u> $a=bq+r$ <u>et</u> $r<b$; <u>les entiers</u> q <u>et</u> r <u>sont déterminés de façon unique par ces conditions.</u>

Les conditions imposées sont équivalentes à $bq \leqslant a < b(q+1)$ et $r=a-bq$. Tout revient donc à trouver q tel que $bq \leqslant a < b(q+1)$; autrement dit, q doit être le plus petit entier tel que $a < b(q+1)$, ce qui montre que q et $r=a-bq$ sont déterminés de façon unique. Pour montrer leur existence, remarquons qu'il existe des entiers p tels que $a < bp$, ne serait-ce que $a+1$, puisque $b > 0$. Soit m le plus petit de ces entiers ; on a $m \neq 0$, et on peut donc écrire $m=q+1$ avec $q < m$ (prop.3) ; il en résulte que $bq \leqslant a < b(q+1)$.

DÉFINITION 2.- *Les notations étant celles de la prop.*10, *on dit que* r *est le reste de la division de* a *par* b. *Si* $r=0$, *on dit que* a *est multiple de* b, *ou que* a *est divisible par* b, *ou que* b *est un diviseur de* a, *ou que* b *divise* a ; *le nombre* q *s'appelle alors le quotient de* a *par* b *et se note* $\frac{a}{b}$ *ou* a/b.

Dans ce chapitre, le seul fait d'écrire a/b ou $\frac{a}{b}$ impliquera que l'on suppose que b divise a.

Les relations $a=bq$ et $q=a/b$ sont équivalentes (si $b > 0$). Tout multiple a' d'un multiple a de b est multiple de b, et l'on a $a'/b=(a'/a)(a/b)$ si $a \neq 0$. D'autre part, si c et d sont des multiples de b, $c+d$ et $c-d$ (si $d \leqslant c$) sont des multiples de b, l'on a $\frac{c+d}{b} = \frac{c}{d} + \frac{d}{b}$ et $\frac{c-d}{b} = \frac{c}{b} - \frac{d}{b}$.

Les entiers multiples de 2 sont dits *pairs*, les autres *impairs*.

8. Numération.

PROPOSITION 11.- *Soit* b *un entier* >1. *Pour tout entier* $k > 0$ *soit* E_k *le produit lexicographique* (§ 2, n°6) *de la famille* $(J_h)_{0 \leqslant h \leqslant k-1}$ *d'intervalles tous identiques à* $[0, b-1]$. *Pour tout* $r=(r_0, r_1, \ldots, r_{k-1}) \in E_k$, *soit* $f_k(r) = \sum_{h=0}^{k-1} r_h b^{k-h-1}$; *l'application* f_k *est un isomorphisme de l'ensemble ordonné* E_k *sur l'intervalle* $[0, b^k-1]$.

Nous démontrerons la proposition par récurrence sur k ; elle découle aussitôt des définitions pour $k=1$. D'autre part, pour tout $r=(r_0,\ldots,r_{k-1},r_k)\in E_{k+1}$, posons $\varphi(r)=(r_0,\ldots,r_{k-1})\in E_k$; l'application $r\to(\varphi(r),r_k)$ est un isomorphisme de E_{k+1} sur le produit lexicographique de E_k et de $J=[0,b-1]$, comme il résulte des définitions. On peut écrire $f_{k+1}(r)=b.f_k(\varphi(r))+r_k$; montrons que la relation $r<r'$ entraîne $f_{k+1}(r)<f_{k+1}(r')$. En effet, on a alors, ou bien $\varphi(r)<\varphi(r')$, ou bien $\varphi(r)=\varphi(r')$ et $r_k<r'_k$. Dans le premier cas, l'hypothèse de récurrence entraîne que $f_k(\varphi(r))<f_k(\varphi(r'))$, donc (prop.3) $f_k(\varphi(r'))\geqslant f_k(\varphi(r))+1$; par suite $f_{k+1}(r')\geqslant b.f_k(\varphi(r))+b>f_k(\varphi(r))$, puisque $r_k\leqslant b-1$. Si au contraire $\varphi(r)=\varphi(r')$ et $r_k<r'_k$, on a $f_{k+1}(r)=b.f_k(\varphi(r'))+r_k<b.f_k(\varphi(r'))+$ $+r'_k=f_{k+1}(r')$. D'autre part, l'hypothèse de récurrence montre que $f_k(\varphi(r))\leqslant b^k-1$, d'où $f_{k+1}(r)\leqslant b(b^k-1)+b-1=b^{k+1}-1$. On en conclut que f_{k+1} est un isomorphisme de E_{k+1} sur une partie de l'intervalle $[0,b^{k+1}-1]$; mais comme cet invervalle et E_{k+1} ont le même nombre d'éléments b^{k+1} (prop.8), f_{k+1} est une bijection (cor.4 de la prop.3), ce qui achève la démonstration.

Remarquons maintenant que pour tout entier a, on a $a<b^a$: il suffit de raisonner par récurrence sur a, la proposition étant évidente pour $a=0$, et l'hypothèse $a<b^a$ entraînant $a+1\leqslant b^a<b.b^a=b^{a+1}$ (prop.3 et cor.2 de la prop.6). Il existe donc un plus petit entier k tel que $a<b^k$, et la prop.11 prouve alors qu'il existe une suite finie et une seule $(r_0,\ldots,r_{k-1})$ telle que $0\leqslant r_h\leqslant b-1$ pour $0\leqslant h\leqslant k-1$ et $a=\sum_{h=0}^{k-1} r_h b^{k-h-1}$; en outre, on a nécessairement $r_0>0$, sans quoi on déduirait de la prop.11 que $a<b^{k-1}$. On dit que $\sum_{h=0}^{k-1} r_h b^{k-h-1}$ est le <u>développement de base</u> b du nombre entier a.

61

Lorsque l'entier b est assez petit pour que cela soit praticable, on représente chaque entier $< b$ par un symbole distinctif appelé chiffre, les chiffres représentant 0 et 1 étant en général 0 et 1. Soit a un entier, et $\sum_{h=0}^{k-1} r_h b^{k-h-1}$ son développement de base b ; si l'entier k figurant dans ce développement est assez petit pour que ce soit praticable, on convient d'associer à l'entier a la succession de symboles obtenue en écrivant de gauche à droite $r_0 r_1 \ldots r_{k-2} r_{k-1}$ et en remplaçant chaque entier r_i par le chiffre qui le représente ; le symbole ainsi obtenu est appelé le symbole numérique associé à a . On remplace alors souvent a par son symbole numérique dans les termes ou relations où il figure.

Par exemple, si C,D,E,F sont des chiffres, les symboles numériques CD, CDE, CDEF sont respectivement associés à Cb+D , Cb^2+Db+E , $Cb^3+Db+Eb+F$.

Il résulte de la prop.11 que le symbole numérique associé à un entier a est unique, et que si $a < b^k$, il contient k chiffres au plus.

On notera que le symbole numérique associé à l'entier b^k est formé du chiffre 1 suivi de k chiffres 0.

Le système de représentation des entiers par des symboles numériques s'appelle le système de numération de base b .Dans la pratique du Calcul numérique, on utilise les systèmes suivants : a) le système de base 2 ou système dyadique, où les chiffres sont 0 et 1, employé dans les machines à calculer modernes ; b) le système décimal, dans lequel les chiffres sont 0,1,2,3,4,5 = 4+1 ,6 = 5+1, 7=6+1, 8=7+1, 9=8+1, et où b est l'entier 9+1 (dont le symbole numérique est donc 10 dans ce système, et qui s'appelle dix). Ce dernier système est traditionnellement utilisé dans le Calcul numérique, et c'est celui dont nous nous servirons lorsque nous aurons à écrire un entier explicité dans la suite de cet ouvrage (ce qui sera assez rare, d'ailleurs).

Nous renvoyons à la partie de ce Traité consacrée au Calcul numérique pour l'exposé des méthodes qui permettent d'obtenir les symboles numériques associés à la somme, la différence ou le produit de deux entiers donnés par leurs symboles numériques.

*Dans toutes les parties des mathématiques où on n'a pas en vue le Calcul numérique, la prop. 11 sera surtout utile lorsqu'elle sera appliquée à un entier b *premier*.*

9. Analyse combinatoire.

Nous allons déterminer les cardinaux de certains ensembles finis, formés à partir d'un certain nombre d'ensembles finis dont les cardinaux sont supposés connus.

Nous utiliserons la proposition suivante :

PROPOSITION 12 (principe des bergers).- *Soient* E *et* F *deux ensembles,* $\mathfrak{a}$ *et* $\mathfrak{b}$ *leurs cardinaux,* f *une surjection de* E *sur* F *telle que, pour tout* $y \in F$, *l'ensemble* $\overset{-1}{f}(y)$ *ait le même cardinal* $\mathfrak{c}$; *on a alors* $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\mathfrak{c}$.

En effet, la famille $(\overset{-1}{f}(y))_{y \in F}$ est une partition de E, dont chaque élément est un ensemble de cardinal $\mathfrak{c}$; d'où la proposition (§ 3, cor. 2 de la prop. 5).

DÉFINITION 3.- *Soit* n *un entier ; on note* n! (qui se lit "factorielle n") *le produit* $\prod_{i<n}(i+1)$.

On a $0! = 1$ (§ 3, prop. 10) et $1! = 1$.

PROPOSITION 13.- Soient m et n des entiers tels que $m \leqslant n$. Alors $n!/(n-m)!$ est le nombre des applications injectives d'un ensemble A à m éléments dans un ensemble B à n éléments.

Procédons par récurrence sur le nombre $m \leqslant n$ d'éléments de A. La proposition est évidente pour $m=0$. Supposons que $m+1 \leqslant n$, et soit A un ensemble à $m+1$ éléments, A' une partie de A ayant m éléments, et $\{a\} = A-A'$; soient F et F' les ensembles d'applications injectives de A et A' respectivement dans B, et soit φ l'application $f \to f_{A'}$ qui à toute fonction $f \in F$, fait correspondre sa restriction à A'. Pour tout $f' \in F'$, un élément f de $\overset{-1}{\varphi}(f')$ est déterminé de façon unique par sa valeur $f(a)$; comme f est injective, on doit avoir $f(a) \in B-f'(A')$. Il en résulte que $\overset{-1}{\varphi}(f')$ a même nombre d'éléments $n-m$ que $B-f'(A')$; le principe des bergers montre alors que F a $(n-m)\dfrac{n!}{(n-m)!} = \dfrac{n!}{(n-m-1)!}$ éléments, en vertu de l'hypothèse de récurrence, et cela démontre la proposition.

COROLLAIRE.- Le nombre des permutations d'un ensemble fini à n éléments est égal à $n!$.

En effet, ce nombre est égal au nombre des injections de l'ensemble dans lui-même (cor.4 de la prop.3).

PROPOSITION 14.- Soient A un ensemble à n éléments, et p un entier $\leqslant n$. Le nombre des parties à p éléments de A est $\dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.

Soit B un ensemble à p éléments, et soit F l'ensemble des injections de B dans A. Pour toute application $f \in F$, soit $\varphi(f)$ l'image $f(B)$. Il est clair que $\varphi(F)$ est l'ensemble P des parties à p éléments de A. D'autre part, si $X \in P$ et si f et f' appartiennent toutes deux à $\overset{-1}{\varphi}(X)$, on a $f'=g\circ f$, où g est une permutation de X, et réciproquement; en outre, si g et g' sont deux permutations de X, la relation $g\circ f = g'\circ f$ entraîne $g=g'$ (chap.II, §5, cor. de la prop.2).

On voit donc que $\overset{-1}{\varphi}(X)$ est un ensemble à $p!$ éléments (cor. de la prop.13). Comme F a $n!/(n-p)!$ éléments (prop.13), il résulte du principe des bergers que P a $\frac{n!}{p!(n-p)!}$ éléments.

Le nombre des parties à p éléments d'un ensemble à n éléments (si $p \leqslant n$) se note $\binom{n}{p}$ et s'appelle (pour des raisons qui apparaîtront en <u>Alg.</u>, chap.I, § 5) le <u>coefficient binomial d'indices</u> n <u>et</u> p. De la relation $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ résulte aussitôt que l'on a $\binom{n}{p}=\binom{n}{n-p}$.

Ceci résulte aussi du fait que, si E est un ensemble à n éléments, $X \to E-X$ est une bijection de l'ensemble des parties à p éléments de E sur l'ensemble des parties à n-p éléments.

On pose $\binom{n}{p}=0$ pour tout couple d'entiers tels que $p > n$. Avec cette convention, le nombre des parties à p éléments d'un ensemble à n éléments est $\binom{n}{p}$ pour <u>tout</u> entier p.

COROLLAIRE 1.- <u>Soit</u> n <u>un entier</u> >0 ; <u>le nombre</u> a_n (resp. b_n) <u>des couples</u> (i,j) <u>d'entiers tels que</u> $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$ (resp. $1 \leqslant i < j \leqslant n$) <u>est</u> $\frac{1}{2}n(n+1)$ (resp. $\frac{1}{2}n(n-1)$).

En effet, b_n est le nombre des parties à 2 éléments de $[1,n]$; donc $b_n = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{1}{2}n(n-1)$. On en déduit a_n en remarquant que l'ensemble des couples (i,j) tels que $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$ est la réunion de l'ensemble des couples (i,j) tels que $1 \leqslant i < j \leqslant n$ et de l'ensemble des couples (i,i) où $1 \leqslant i \leqslant n$; d'où $a_n = n + b_n$.

COROLLAIRE 2.- <u>Pour tout entier</u> $n>0$, <u>on a</u> $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

Dans l'ensemble A des couples d'entiers (i,j) tels que $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$, notons A_k l'ensemble des couples (i,k), où $1 \leqslant i \leqslant k$ (pour un entier quelconque $k \leqslant n$) ; le nombre d'éléments de A_k est k ; d'autre part, $(A_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ est une partition de A ; le cor.2 résulte donc du cor.1.

COROLLAIRE 3.- <u>Soient</u> E <u>et</u> F <u>des ensembles finis totalement ordonnés ayant respectivement</u> p <u>et</u> n <u>éléments. Le nombre des applications strictement croissantes de</u> E <u>dans</u> F <u>est alors</u> $\binom{n}{p}$.

En effet, une telle application est une injection de E dans F (§ 1, prop. 3), et comme E et F sont bien ordonnés (prop. 9), pour toute partie X à p éléments de F , il existe une application strictement croissante de E sur X et une seule (§ 2, th. 3).

PROPOSITION 15.- <u>Pour tout entier</u> n , <u>on a</u> $\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n$.

En effet, si E est un ensemble à n éléments, le premier nombre est le nombre des parties de E (§ 3, prop. 11).

PROPOSITION 16.- <u>Soient</u> n <u>et</u> p des entiers ; <u>on a</u> $\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p+1} + \binom{n}{p}$.

Soient E un ensemble à n+1 éléments, P l'ensemble des parties à p+1 éléments de E , a un élément de E , et $E' = E - \{a\}$. Notons P' (resp. P") l'ensemble des parties à p+1 éléments de E qui contiennent a (resp. ne contiennent pas a). L'ensemble P" est l'ensemble des parties à p+1 éléments de E', et a donc $\binom{n}{p+1}$ éléments. L'application $X \to X \cap E'$ est une bijection de P' sur l'ensemble des parties à p éléments de E' ; P' a donc $\binom{n}{p}$ éléments. La proposition résulte de ce que P est réunion des ensembles disjoints P', P".

On peut aussi démontrer la prop. 15 par un calcul facile utilisant la formule $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ pour $p \leqslant n$.

La prop. 14 exprime que, étant donné un ensemble A à n élément le nombre de <u>partitions</u> (X_1, X_2) de A en deux ensembles ayant respectivement p et n-p éléments $(1 \leqslant p < n)$ est $\frac{n!}{p!(n-p)!}$. Ceci est un cas particulier de la proposition suivante :

PROPOSITION 17.- <u>Soient</u> E <u>un ensemble fini à</u> n <u>éléments</u>, <u>et</u> $(p_i)_{1 \leq i \leq h}$ <u>une suite finie d'entiers telle que</u> $\sum_{i=1}^{h} p_i = n$. <u>Alors le nombre des</u> $(X_i)_{1 \leq i \leq h}$ <u>de</u> E <u>par des ensembles mutuellement disjoints tels que</u> $\mathrm{Card}(X_i) = p_i$ <u>pour</u> $1 \leq i \leq h$, <u>est égal à</u> $n!/\prod_{i=1}^{h} p_i!$.

Soient G l'ensemble des permutations de E , P l'ensemble des recouvrements $(X_i)_{1 \leq i \leq h}$ satisfaisant aux conditions de l'énoncé. Comme $\sum_{i=1}^{h} p_i = n$, P n'est pas vide. Soit $(A_i)_{1 \leq i \leq h}$ un élément de P . Pour toute permutation $f \in G$, la famille $(f(A_i))_{1 \leq i \leq h}$ appartient encore à P ; désignons-là par $\varphi(f)$. Pour tout élément $(X_i)_{1 \leq i \leq h}$ de P , cherchons le nombre d'éléments $f \in G$ tels que $\varphi(f) = (X_i)$. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que, pour tout indice i, la restriction de f à A_i soit une bijection de A_i sur X_i ; donc l'ensemble des permutations f considérées est équipotent au produit des ensembles de bijections de A_i sur X_i ; par conséquent, cet ensemble $\overset{-1}{\varphi}((X_i)_{1 \leq i \leq h})$ a $\prod_{i=1}^{h} p_i!$ éléments (cor. de la prop.13). Comme G a $n!$ éléments, il suffit d'appliquer le principe des bergers pour obtenir la prop.17 .

PROPOSITION 18.- <u>Soient</u> n <u>et</u> h <u>des entiers, et</u> E <u>un ensemble à</u> h <u>éléments</u>. <u>Le nombre des applications</u> u <u>de</u> E <u>dans</u> $[0,n]$ <u>telles que</u> $\sum_{x \in E} u(x) \leq n$ (resp. $\sum_{x \in E} u(x) = n$ <u>pour</u> $h > 0$) <u>est</u> $\binom{n+h}{h}$ (resp. $\binom{n+h-1}{h-1}$).

Remarquons d'abord que la seconde assertion est équivalente à la première. En effet, soit E' une partie à $h-1$ éléments de E ; il est clair que si u est une application de E dans $[0,n]$ telle que $\sum_{x \in E} u(x) = n$, sa restriction u' à E' est telle que $\sum_{x \in E'} u'(x) \leq n$, et en outre, si $\{a\} = E - E'$, on a $u(a) = n - \sum_{x \in E'} u'(x)$; réciproquement, toute application u' de E' dans $[0,n]$ satisfaisant à $\sum_{x \in E'} u'(x) \leq n$ définit une application et une seule u de E dans $[0,n]$, dont elle est la restriction, et telle que $\sum_{x \in E} u(x) = n$.

Prouvons la première assertion par récurrence sur h ; elle est évidente pour $h=0$. Soit a un élément de E , et $E'=E-\{a\}$. Soit F l'ensemble des applications u de E dans $[0,n]$ telles que $\sum_{x\in E} u(x) \leqslant n$, et pour tout entier $k\leqslant n$, soit F_k l'ensemble des $u\in F$ telles que $u(a)=k$. La restriction u' de u à E' est alors telle que $\sum_{x\in E'} u'(x)\leqslant n-k$, et réciproquement ; le nombre d'éléments de F_k est par suite $\binom{n-k+h-1}{h-1}$ en vertu de l'hypothèse de récurrence. Comme les F_k forment une partition de F , le nombre d'éléments de F est $\sum_{k=0}^{n}\binom{n+h-k-1}{h-1}$. Mais $\binom{n+h-k-1}{h-1}$ est évidemment le nombre des parties à h éléments de $[1,n+h]$ dont le plus petit élément est k , donc $\sum_{k=0}^{n}\binom{n+h-k-1}{h-1}$ est le nombre total des parties à h éléments de $[1,n+h]$, c'est-à-dire $\binom{n+h}{h}$.

Le nombre des monômes à h indéterminées $X_1^{\alpha_1}X_2^{\alpha_2}\dots X_h^{\alpha_h}$ de degré total $\leqslant n$ est évidemment égal au nombre des applications $i\to\alpha_i$ de $[1,h]$ dans $[0,n]$ telles que $\sum_{i=1}^{h}\alpha_i\leqslant n$; il est donc égal à $\binom{n+h}{h}$ d'après ce qui précède ; ce nombre est aussi celui des monômes à h+1 indéterminées de degré total n (cf. <u>Alg.</u>, chap.IV, § 1) .

§ 5. Ensembles infinis.

1. <u>L'ensemble des entiers naturels</u>.

DEFINITION 1.– <u>On dit qu'un ensemble est infini s'il n'est pas fini</u>.

En particulier, un cardinal est infini s'il n'est pas un entier.

On ne sait pas démontrer qu'il existe un ensemble infini en utilisant seulement les axiomes et schémas d'axiomes introduits jusqu'ici .

Remarquons que la relation "il existe un ensemble infini" entraîne que la relation "x est un entier" est collectivisante ; car si $\mathfrak{a}$ est un cardinal infini, et n un entier quelconque, on ne peut avoir $\mathfrak{a} \leqslant n$ (§ 4, prop. 3) ; on a donc $n < \mathfrak{a}$ pour tout entier n, ce qui prouve que l'ensemble des entiers $< \mathfrak{a}$ (§ 3, n°2) est l'ensemble de tous les entiers. Inversement, si la relation "x est un entier" est collectivisante l'ensemble des entiers E est un ensemble infini, car pour tout entier n, l'intervalle $[0,n]$ est une partie à n+1 éléments de E (§ 4, prop. 8), donc $\mathrm{Card}(E) \geqslant n+1 > n$; mais dire que $\mathrm{Card}(E) \neq n$ pour tout entier n signifie que E est infini.

Introduisons alors l'axiome suivant :

A5 ("axiome de l'infini"). <u>Il existe un ensemble infini</u>.

Les remarques qui précèdent prouvent alors le théorème suivant :

THÉORÈME 1.- <u>La relation "x est un entier" est collectivisante</u>.

Nous désignerons par $\mathcal{N}$ l'ensemble des entiers (dit aussi "ensemble des entiers naturels" lorsqu'on veut éviter des confusions).

DEFINITION 2.- <u>On appelle suite</u> (resp. <u>suite d'éléments d'un ensemble</u> E) <u>une famille</u> (resp. <u>une famille d'éléments de</u> E) <u>dont l'ensemble d'indices est une partie de</u> $\mathcal{N}$; <u>la suite est dite infinie si son ensemble d'indices est une partie infinie de</u> $\mathcal{N}$.

Si $P\{n\}$ est une relation telle que l'ensemble des n tels que $P\{n\}$ soit une partie I de $\mathcal{N}$, une suite $(x_n)_{n \in I}$ se note souvent $(x_n)_{P\{n\}}$; on dit que x_n est le <u>terme d'indice n</u> de la suite. Une suite dont l'ensemble d'indices est l'ensemble des entiers $\geqslant k$ se note souvent $(x_n)_{k \leqslant n}$, ou $(x_n)_{n \geqslant k}$, ou même (x_n) lorsque k=0 ou k=1.

Dans les mêmes conditions, pour désigner, par exemple, le produit de la suite d'ensembles $(X_n)_{n\in I}$, on utilise les notations $\prod_{P\{n\}} X_n$ et $\prod_{n=k}^{\infty} X_n$; notations analogues pour la réunion, l'intersection, la somme cardinale et le produit cardinal, *ainsi que les lois de composition en Algèbre (Alg., chap.I, § 1).*

Toute sous-famille d'une suite est une suite, qu'on dit extraite de la suite considérée.

On dit que deux suites $(x_n)_{n\in I}$, $(y_n)_{n\in J}$ ne diffèrent que par l'ordre des termes s'il existe une permutation f de l'ensemble d'indices I telle que l'on ait $x_{f(n)}=y_n$ pour tout $n\in I$.

On appelle suite multiple une famille dont l'ensemble d'indices est une partie d'un produit $\mathbb{N}^p$ (on dit encore "suite p-uple", "suite double" pour p=2, "suite triple" pour p=3, etc.)

2. Définition d'applications par récurrence.

L'ensemble $\mathbb{N}$ étant bien ordonné, on peut lui appliquer le critère C60 (§ 2,n°2), qui s'écrit ici :

C62. Soit $T\{u\}$ un terme. Il existe alors un ensemble U et une application f de $\mathbb{N}$ sur U tels que, pour tout entier n, la relation $f(n)=T\{f^{(n)}\}$ (où $f^{(n)}$ désigne la restriction de f à l'intervalle $[0,n[$) soit vraie. L'ensemble U et l'application f sont alors déterminés de façon unique par cette condition.

Un cas particulier important d'application de ce critère est le suivant :

C63. Soient $T\{u\}$ et a deux termes. Il existe un ensemble V et une application f de $\mathbb{N}$ sur V tel que l'on ait $f(0)=a$, et, pour tout entier $n\geqslant 1$, $f(n)=T\{f(n-1)\}$. En outre, l'ensemble V et l'application f sont déterminés de façon unique par ces conditions.

En effet, désignons par $D(u)$ le terme "l'ensemble de définition de u"(*), par $M(u)$ le terme "le plus petit entier n tel que, pour tout x, $(x \in D(u)) \Rightarrow (x \in \mathbb{N}$ et $x \leq n)$" ; soit $R\{y\}$ la relation

"$(u=(\emptyset,\emptyset,\emptyset)$ et $y=a)$ ou $(u \neq (\emptyset,\emptyset,\emptyset)$ et $y=u(M(u)))$"

Enfin, soit $S\{u\}$ le terme $T\{\tau_y(R\{y\})\}$. Si on applique le critère C62 au terme $S\{u\}$, comme $f^{(0)}$ est l'application vide $(\emptyset,\emptyset,\emptyset)$, on a $S\{f^{(0)}\}=a$, donc $f(0)=a$; si au contraire $n>0$, on a $D(f^{(n)})=[0,n-1]$ et $M(f^{(n)})=n-1$, d'où $S\{f^{(n)}\}=f^{(n)}(n-1)=f(n-1)$.

Exemples.- 1) Supposons que a soit un élément d'un ensemble E et $T\{u\}$ le terme $g(u)$, où g est une application de E dans lui-même. Alors, on voit aussitôt par récurrence sur n que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f(n) \in E$; f est par suite une application de $\mathbb{N}$ dans E telle que $f(0)=a$ et $f(n+1)=g(f(n))$ pour tout entier n.

De même, si h est une application de $\mathbb{N} \times E$ dans E, et soit φ l'application de $\mathbb{N} \times E$ dans lui-même définie par $\varphi(n,x)=(n+1,h(n,x))$. D'après ce qui précède, il existe une application $g=(u,f)$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N} \times E$ et une seule telle que $g(0)=(0,a)$ et $g(n+1)=\varphi(g(n))$ pour tout n ; on en conclut l'existence et l'unicité d'une application f de $\mathbb{N}$ dans E telle que $f(0)=a$ et $f(n+1)=h(n,f(n))$ pour tout entier n.

2) Soient X un ensemble, E l'ensemble des applications de X dans lui-même ; soient e l'application identique de X dans lui-même, et f un élément quelconque de E. Prenons pour $T\{u\}$ le terme $f \circ u$ (**).

(*) Si on tient compte de la définition d'une fonction (chap. II, §3), le terme $D(u)$ est le terme désigné par $pr_1(pr_1(pr_1(u)))$.

(**) Ce terme est le terme désigné par $(pr_1 f \circ pr_1 u, X, X)$, le terme $pr_1 f \circ pr_1 u$ étant défini comme dans la note suivante.

NBRO92 71

On voit, par application de C63 qu'il existe une application de $\mathbb{N}$ dans E et une seule, notée $n \to f^n$, telle que $f^0=e$ et $f^{n+1}=f\circ f^n$. On dit que f^n est la <u>n-ème itérée</u> de l'application f .

3) Plus généralement, soit G un graphe (chap. II, § 3, n°1) et soit $T\{u\}$ le terme $G\circ u$ (*) ; soit d'autre part Δ la diagonale de l'ensemble $(pr_1 G)\times(pr_1 G)$. Le critère C63 montre qu'il existe une application notée $n \to \overset{n}{G}$ de $\mathbb{N}$ dans un ensemble de graphes, telle que $\overset{0}{G}=\Delta$ et $\overset{n+1}{G} = G\circ\overset{n}{G}$; on dit que $\overset{n}{G}$ est le <u>n-ème itéré</u> du graphe G .

4) Si on prend pour $T\{u\}$ le terme $\mathfrak{P}(u)$, et pour a un ensemble E, on voit de même qu'il existe une application, notée $n \to \mathfrak{P}^n(E)$ de $\mathbb{N}$ dans un ensemble V , telle que $\mathfrak{P}^0(E)=E$, $\mathfrak{P}^1(E)=\mathfrak{P}(E)$, et $\mathfrak{P}^{n+1}(E)=\mathfrak{P}(\mathfrak{P}^n(E))$ pour tout entier n .

<u>Remarque</u>.- Soient E un ensemble, A une partie de E , g une application de A dans E , a un élément de A . Prenons pour $T\{u\}$ le terme $g(u)$ (**). On peut appliquer le critère C63, qui prouve l'existence d'une application f dans un ensemble V telle que $f(0)=a$ et $f(n+1)=g(f(n))$ pour tout entier n . Il peut se faire que $V\subset A$, sinon, soit p le plus grand entier tel que $f([0,p])\subset A$; on a alors $f(p+1)=g(p)\notin A$, et $g(g(p))$ est un terme dont on ne peut plus rien dire. Aussi considère-t-on dans ce cas que f est définie seulement dans l'intervalle $[0,p+1]$ ("récurrence limitée").

3. <u>Calcul sur les cardinaux infinis</u>.

THÉORÈME 2.- <u>Pour tout cardinal infini $\mathfrak{a}$, on a $\mathfrak{a}^2=\mathfrak{a}$</u> .

Nous utiliserons deux lemmes.

(*) Ce terme n'est autre que le terme désigné par

$\mathcal{E}_z((\exists y)((pr_1 z,y)\in u$ et $(y,pr_2 z)\in G))$.

(**) Ce terme est le terme aussi désigné par $\tau_y((u,y)\in pr_1 g)$.

<u>Lemme 1.- Tout ensemble infini E contient un ensemble équipotent à $\mathbb{N}$.</u>

Définissons par récurrence une application injective f de $\mathbb{N}$ dans E. Pour cela, soit $T\{u\}$ le terme $\tau_x(x \in E-R\{u\})$, où $R\{u\}$ désigne le terme "l'ensemble des valeurs de u". Le critère C62 montre qu'il existe une application f et une seule de $\mathbb{N}$ sur un ensemble U, telle que $f(n)=T\{f^{(n)}\}$ pour tout entier n. Montrons par récurrence que $U \subset E$ et que $f(n) \notin f^{(n)}([0,n-1])$ pour tout $n>0$, ce qui prouvera le lemme. Or, si $f^{(n)}([0,n[) \subset E$, $E-f^{(n)}([0,n[)$ n'est pas vide, puisque E est infini par hypothèse et $f^{(n)}([0,n[)$ fini (§ 4, cor. 3 de la prop. 3). Donc on a $f(n)=T\{f^{(n)}\} \in E-f^{(n)}([0,n[)$, ce qui achève la démonstration.

<u>Lemme 2.- L'ensemble $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ est équipotent à $\mathbb{N}$.</u>

Comme $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ contient l'ensemble $\{0\}\times\mathbb{N}$, équipotent à $\mathbb{N}$, on a $\mathrm{Card}(\mathbb{N}) \leqslant \mathrm{Card}(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$. D'autre part, nous allons définir une injection de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Pour cela, remarquons qu'il existe une injection φ de $\mathbb{N}$ dans l'ensemble $I^{\mathbb{N}}$ des applications de $\mathbb{N}$ dans $I=\{0,1\}$ obtenue comme suit : si r est le plus petit entier tel que $n<2^r$, et $\sum_{k=0}^{r-1} \varepsilon_k 2^{r-k-1}$ le développement dyadique de n (§ 4, n°8), $\varphi(n)$ est la suite $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ telle que $u_m=\varepsilon_{r-m-1}$ pour $m<r$, et $u_m=0$ pour $m\geqslant r$. La prop. 11 du § 4 montre que φ est injective. Cela étant, pour tout couple $(n,n')\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, nous définirons $f(n,n')$ de la facon suivante : si $\varphi(n)=(u_m)$ et $\varphi(n')=(v_m)$, $f(n,n')$ sera la suite (w_m) telle que $w_{2m}=u_m$ et $w_{2m+1}=v_m$; il est clair que la relation $f(n,n')=f(n_1,n_1')$ entraîne $\varphi(n)=\varphi(n_1)$ et $\varphi(n')=\varphi(n_1')$, donc $(n,n')=(n_1,n_1')$ ce qui prouve que f est injective. On a par suite $\mathrm{Card}(\mathbb{N}\times\mathbb{N}) \leqslant \mathrm{Card}(\mathbb{N})$, ce qui achève de démontrer le lemme.

Ces lemmes étant établis, soit E un ensemble tel que $\mathrm{Card}(E)=\mathfrak{a}$. Soit D une partie de E équipotente à $\mathbb{N}$ (lemme 1) ; il existe une application bijective ψ_0 de D sur $D\times D$ (lemme 2). Soit $\mathfrak{M}$ l'ensemble des couples (X,ψ), où X est une partie de E contenant D, et ψ une application bijective de X sur $X\times X$ prolongeant ψ_0. Ordonnons l'ensemble $\mathfrak{M}$ par la relation "$X\subset X'$ et ψ' est un prolongement de ψ" entre (X,ψ) et (X',ψ') ; on ~~véfifie~~ aussitôt que $\mathfrak{M}$ est un ensemble <u>inductif</u> (cf. § 2,n°4, exemple 3). Il existe donc dans $\mathfrak{M}$ un élément maximal (F,f) en vertu du th. de Zorn (§ 2,th.2). Montrons que $\mathrm{Card}(F)=\mathfrak{a}$, ce qui démontrera le théorème. Dans le cas contraire, comme $\mathfrak{b}=\mathrm{Card}(F)$ est tel que $\mathfrak{b}^2=\mathfrak{b}$ et est infini, on a $\mathfrak{b}\leqslant 2\mathfrak{b}\leqslant 3\mathfrak{b}\leqslant \mathfrak{b}^2=\mathfrak{b}$ (§ 3,cor.1 de la prop.12), donc $2\mathfrak{b}=\mathfrak{b}$ et $3\mathfrak{b}=\mathfrak{b}$. De l'hypothèse $\mathfrak{b}<\mathfrak{a}$, il résulte que $\mathrm{Card}(E-F)>\mathfrak{b}$, car dans le cas contraire, on aurait $\mathrm{Card}(E)\leqslant 2\mathfrak{b}=\mathfrak{b}$, et on a supposé $\mathfrak{b}<\mathrm{Card}(E)$. Il existe donc une partie $Y\subset E-F$ équipotente à F ; posons $Z=F\cup Y$, et montrons qu'il existe une bijection g de Z sur $Z\times Z$ qui prolonge f. On a en effet $Z\times Z=(F\times F)\cup(F\times Y)\cup(Y\times F)\cup(Y\times Y)$; comme F et Y sont équipotents, on a $\mathrm{Card}(F\times Y)=\mathrm{Card}(Y\times F)=\mathrm{Card}(Y\times Y)=\mathfrak{b}^2=\mathfrak{b}$, d'où $\mathrm{Card}((F\times Y)\cup(Y\times F)\cup(Y\times Y))=3\mathfrak{b}=\mathfrak{b}$; il y a donc une application bijective f_1 de Y sur $(Y\times F)\cup(F\times Y)\cup(Y\times Y)$; l'application g de Z dans $Z\times Z$ égale à f dans F et à f_1 dans Y est alors une bijection qui prolonge f, ce qui est contraire à la définition de f.

COROLLAIRE 1.- <u>Si $\mathfrak{a}$ est un cardinal infini, on a $\mathfrak{a}^n=\mathfrak{a}$ pour tout entier</u> $n\geqslant 1$.

C'est évident par récurrence sur n.

74

COROLLAIRE 2.- Le produit d'une famille finie $(\mathfrak{a}_i)_{i\in I}$ de cardinaux non nuls, dont le plus grand est un cardinal infini $\mathfrak{a}$, est égal à $\mathfrak{a}$.

Soit $\mathfrak{b}$ ce produit, et soit n le nombre d'éléments de I ; on a $\mathfrak{b} \leqslant \mathfrak{a}^n = \mathfrak{a}$ (§ 3,cor.1 de la prop.12) ; d'autre part, comme $\mathfrak{a}_i \geqslant 1$ pour tout i , on a $\mathfrak{b} \geqslant \mathfrak{a}$ (ibid.).

COROLLAIRE 3.- Soient $\mathfrak{a}$ un cardinal infini et $(\mathfrak{a}_\iota)_{\iota\in I}$ une famille de cardinaux $\leqslant \mathfrak{a}$ dont l'ensemble d'indices I ait un cardinal $\leqslant \mathfrak{a}$. On a alors $\sum_{\iota\in I} \mathfrak{a}_\iota \leqslant \mathfrak{a}$; en outre, si $\mathfrak{a}_\iota = \mathfrak{a}$ pour un indice ι au moins, $\sum_{\iota\in I} \mathfrak{a}_\iota = \mathfrak{a}$.

Soit $\mathfrak{b}$ le cardinal de I ; on a alors $\sum_{\iota\in I} \mathfrak{a}_\iota \leqslant \mathfrak{a}\mathfrak{b} \leqslant \mathfrak{a}^2 = \mathfrak{a}$ (§ 3,cor.1 de la prop.12), et $\sum_{\iota\in I} \mathfrak{a}_\iota \geqslant \mathfrak{a}_\varkappa$ pour tout $x \in I$.

COROLLAIRE 4.- Si $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont deux cardinaux non nuls dont l'un est infini, on a $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \sup(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$.

Cela résulte aussitôt des cor.2 et 3 .

4. Ensembles dénombrables.

DÉFINITION 3.- On dit qu'un ensemble est dénombrable s'il est équipotent à une partie de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers.

PROPOSITION 1.- Toute partie d'un ensemble dénombrable est dénombrable. Le produit d'une famille finie d'ensembles dénombrables est dénombrable. La réunion d'une suite d'ensembles dénombrables est dénombrable.

La première assertion est évidente. Les autres résultent des corollaires du th.2 .

On a déjà vu (lemme 1) que pour tout cardinal infini $\mathfrak{a}$, on a $\mathrm{Card}(\mathbb{N}) \leqslant \mathfrak{a}$. On en déduit les conséquences suivantes :

PROPOSITION 2.- Tout ensemble infini dénombrable E est équipotent à $\mathbb{N}$.

En effet on a $\mathrm{Card}(E) \leqslant \mathrm{Card}(\mathcal{N})$ par définition, et comme E est infini $\mathrm{Card}(\mathcal{N}) \leqslant \mathrm{Card}(E)$.

PROPOSITION 3.- Tout ensemble infini E admet une partition $(X_\iota)_{\iota \in I}$ formée d'ensembles infinis dénombrables X_ι , l'ensemble d'indices I étant équipotnet à E .

On a en effet $\mathrm{Card}(E)=\mathrm{Card}(E)\mathrm{Card}(\mathcal{N})$ (cor.4 du th.2).

PROPOSITION 4.- Soit f une application d'un ensemble infini E sur un ensemble infini F , telle que, pour tout $y \in F$, $\overset{-1}{f}(y)$ soit dénombrable. Alors F est équipotent à E .

En effet, les $\overset{-1}{f}(y)$ $(y \in F)$ forment une partition de E . donc $\mathrm{Card}(E) \leqslant \mathrm{Card}(F)\mathrm{Card}(\mathcal{N})=\mathrm{Card}(F)$; on sait d'autre part que $\mathrm{Card}(F) \leqslant \mathrm{Card}(E)$ (§ 3,prop.2).

PROPOSITION 5.- L'ensemble $\mathfrak{F}(E)$ des parties finies d'un ensemble infini E est équipotent à E .

Pour tout entier n , notons $\mathfrak{F}_n$ l'ensemble des parties à n éléments de E . Pour tout $X \in \mathfrak{F}_n$, il existe une bijection de $[0,n[$ sur X ; donc le cardinal de $\mathfrak{F}_n$ est au plus égal à celui de l'ensemble des applications de $[0,n[$ dans E , c'est-à-dire à $\mathrm{Card}(E^n)=\mathrm{Card}(E)$ (cor.1 du th.2). Donc $\mathrm{Card}(\mathfrak{F}(E))=\sum_{n\in\mathcal{N}} \mathrm{Card}(\mathfrak{F}_n) \leqslant \mathrm{Card}(E)\mathrm{Card}(\mathcal{N})=$ $=\mathrm{Card}(E)$. D'autre part, comme $x \longrightarrow \{x\}$ est une application injective de E dans $\mathfrak{F}(E)$, on a $\mathrm{Card}(E) \leqslant \mathrm{Card}(\mathfrak{F}(E))$.

COROLLAIRE.- L'ensemble S des suites finies d'éléments d'un ensemble infini E est équipotent à E .

En effet, S est la réunion des E^I, où I parcourt l'ensemble $\mathfrak{F}(\mathcal{N})$ des parties finies de $\mathcal{N}$. Or, pour $I \subset \mathcal{N}$ et $I \neq \emptyset$, E^I est équipotent à E , et $\mathfrak{F}(\mathcal{N})$ est dénombrable en vertu de la prop.5. On a donc $\mathrm{Card}(E) \leqslant \mathrm{Card}(S) \leqslant \mathrm{Card}(E)\mathrm{Card}(\mathcal{N})=\mathrm{Card}(E)$.

DÉFINITION 4.- <u>On dit qu'un ensemble a la puissance du continu s'il est équipotent à l'ensemble des parties de $\mathcal{N}$</u>.

Un ensemble qui a la puissance du continu n'est pas dénombrable (3,th.2).

Le nom de "puissance du continu" provient de ce que l'ensemble des nombres réels est équipotent à $\mathfrak{P}(\mathcal{N})$ (<u>Top.gén</u>.,chap.IV,§ 8). <u>L'hypothèse du continu</u> est l'assertion que tout ensemble non dénombrable contient une partie ayant la puissance du continu ; <u>l'hypothèse du continu généralisée</u> est l'assertion que pour tout cardinal infini $\mathfrak{a}$, tout cardinal $>\mathfrak{a}$ est $\geqslant 2^{\mathfrak{a}}$. On ne sait pas démontrer ces assertions.

Soit I un ensemble infini dénombrable, f une bijection de $\mathcal{N}$ sur I . Pour toute famille $(x_\iota)_{\iota\in I}$ ayant I pour ensemble d'indices, la suite $n \to x_{f(n)}$ est dite obtenue en <u>rangeant dans un certain ordre</u> la famille $(x_\iota)_{\iota\in I}$. Les suites correspondant ainsi à deux bijections distinctes de $\mathcal{N}$ sur I ne diffèrent que par l'ordre des termes (n°1). On définit de même une suite finie ayant pour ensemble d'indices $[1,n]$ (ou $[0,n-1]$) en rangeant dans un certain ordre une famille finie dont l'ensemble d'indices a n éléments.

§ 6. Ensembles finis et relations d'ordre.

1. <u>Suites stationnaires</u>.

DEFINITION 1.- <u>On dit qu'une suite</u> $(x_n)_{n\in\mathcal{N}}$ <u>d'éléments d'un ensemble</u> E <u>est stationnaire s'il existe un entier</u> m <u>tel que</u> $x_n=x_m$ <u>pour tout entier</u> $n\geqslant m$.

PROPOSITION 1.- Soit E un ensemble ordonné. Les propositions suivantes sont équivalentes :

a) Toute partie non vide de E a un élément maximal.

b) Toute suite croissante (x_n) d'éléments de E est stationnaire.

Montrons d'abord que a) entraîne b) ; en effet, soit X l'ensemble des éléments de la suite (x_n), et soit x_m un élément maximal de X ; pour $n \geqslant m$, on a par hypothèse $x_n \geqslant x_m$, d'où $x_n = x_m$ par définition de x_m. Réciproquement, supposons qu'il existe une partie non vide A de E n'ayant pas d'élément maximal ; pour tout $x \in A$, soit T_x l'ensemble des $y \in A$ tels que $y > x$. Par hypothèse, $T_x \neq \emptyset$ pour tout $x \in A$, donc il existe une application f de A dans A telle que $f(x) > x$ pour tout $x \in A$ (chap. II, § 5, prop.) ; si $a \in A$, et si la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par récurrence par les conditions $x_0 = a$, $x_{n+1} = f(x_n)$, il est immédiat que cette suite est croissante et non stationnaire.

COROLLAIRE.- Pour qu'un ensemble totalement ordonné E soit bien ordonné, il faut et il suffit que toute suite décroissante d'éléments de E soit stationnaire.

En effet, dire que E est bien ordonné revient à dire que toute partie non vide de E admet un élément minimal (§ 1, n°8) et notre assertion résulte alors de la prop. 1 .

PROPOSITION 2.- Toute suite croissante d'éléments d'un ensemble ordonné fini est stationnaire.

En raison de la prop. 1, tout revient à montrer qu'un ensemble ordonné fini E admet un élément maximal. Raisonnons par récurrence sur le nombre d'éléments n de E , la proposition étant évidente pour n=1. Soit $a \in E$, et posons $F = E - \{a\}$; comme F a n-1 éléments, il admet par hypothèse

NBR 092 78

un élément maximal b . Si $a > b$, a est élément maximal de E ; sinon, b est élément maximal de E .

2. Ensembles filtrants.

DÉFINITION 2.- On dit qu'un ensemble ordonné E est filtrant à droite (resp. à gauche) si toute partie finie de E est majorée (resp. minorée).

Lorsque la relation d'ordre entre x et y est notée $x(\sigma)y$ au lieu de $x \leqslant y$ ((σ) étant un signe ou groupe de signes caractéristique de la relation envisagée), on dit que E est filtrant pour la relation (σ) au lieu de dire qu'il est filtrant à droite. Par exemple, si $\mathfrak{S}$ est un ensemble de parties d'un ensemble A , on dira que $\mathfrak{S}$ est filtrant pour la relation $\subset$ (resp. $\supset$) si, pour toute partie finie $\mathfrak{F}$ de $\mathfrak{S}$, il existe $X \in \mathfrak{S}$ tel que $Y \subset X$ (resp. $Y \supset X$) pour tout $Y \in \mathfrak{F}$.

Par abus de langage, au lieu d'"ensemble filtrant à droite" (resp. "à gauche"), on dira aussi parfois "ensemble filtrant croissant" (resp. "décroissant").

Un ensemble ordonné filtrant à droite est filtrant à gauche pour l'ordre opposé ; ceci nous permettra, dans ce qui suit, de ne considérer le plus souvent que les propriétés d'ensembles filtrants à droite.

PROPOSITION 3.- Pour qu'un ensemble ordonné E soit filtrant à droite, il faut et il suffit qu'il soit non vide et que toute partie à deux éléments de E soit majorée.

Les conditions sont évidemment nécessaires. Réciproquement, supposons-les vérifiées, et montrons par récurrence sur n que toute partie à n éléments de E est majorée. C'est vrai pour n=0, puisque E n'est pas vide.

NBR 979 78

Soit X une partie de E ayant $n+1$ éléments, et posons $X=Y\cup\{x\}$, où Y a n éléments. L'hypothèse de récurrence implique qu'il existe un majorant y de Y ; si $y=x$, y est un majorant de X. Sinon, $\{x,y\}$ est un ensemble à deux éléments, et possède donc un majorant z, qui est aussi évidemment un majorant de X.

Exemples.-1) Un ensemble ordonné qui admet un plus grand élément est filtrant à droite.

2) L'ensemble $\Phi(E,F)$ des applications de parties d'un ensemble E dans un ensemble F, ordonné par la relation "g est un prolongement de f" entre f et g (§ 1, n°1), est filtrant à gauche, car l'application vide en est le plus petit élément. Mais il n'est pas en général filtrant à droite, car deux applications distinctes de E dans F n'ont pas de prolongement commun.

3) L'ensemble Ω des ordres sur un ensemble E (§ 1, n°4) ordonné par la relation "t est plus fin que s" entre s et t, est filtrant à droite, puisque Ω admet un plus grand élément, l'ordre dont le graphe est la diagonale de $E\times E$. Par contre Ω n'est pas en général filtrant à gauche, car si Γ est un ordre total sur E, il n'existe pas en général d'ordre sur E moins fin que Γ et $\overset{-1}{\Gamma}$.

Il résulte aussitôt des définitions que tout produit d'ensembles ordonnés filtrants à droite est filtrant à droite. Par contre, une partie d'un ensemble filtrant à droite n'est pas nécessairement filtrante à droite.

PROPOSITION 4.- Soient E et F deux ensembles ordonnés. Si E est filtrant à droite, toute application f de E dans F qui est à la fois croissante et décroissante est constante.

En effet, soient x et y deux éléments de E, et soit z un majorant de $\{x,y\}$. Comme f est croissante, on a $f(x)\leqslant f(z)$ et $f(y)\leqslant f(z)$; comme f est décroissante, on a $f(x)\geqslant f(z)$ et $f(y)\geqslant f(z)$; d'où $f(x)=f(y)=f(z)$.

3. Ensembles réticulés.

DEFINITION 3.- On dit qu'un ensemble ordonné E est réticulé (ou que E est un réseau ordonné, ou un lattis) si toute partie finie non vide de E admet une borne supérieure et une borne inférieure dans E.

PROPOSITION 5.- Pour qu'un ensemble ordonné E soit réticulé il faut et il suffit que toute partie à deux éléments de E admette une borne supérieure et une borne inférieure.

En effet, si cette condition est vérifiée et si une partie X de E admet une borne supérieure (resp. inférieure) dans E, il en est de même de $X \cup \{x\}$ pour tout $x\in E$ (§ 1, cor. 1 de la prop. 8) ; d'où la proposition par récurrence sur le nombre d'éléments des parties finies de E.

COROLLAIRE 1.- Un ensemble totalement ordonné est réticulé.

COROLLAIRE 2.- L'ensemble vide est réticulé.

C'est un cas particulier du cor. 1.

COROLLAIRE 3.- L'ensemble des parties d'un ensemble A, ordonné par inclusion, est réticulé. Il en est de même de l'ensemble des parties finies de A.

En effet, la réunion et l'intersection de deux parties (resp. de deux parties finies) de A est encore une partie (resp. une partie finie) de A.

Exemples.- *1) L'ensemble des entiers $\geqslant 1$, ordonné par la relation "m divise n" entre m et n, est réticulé, la borne supérieure (resp. inférieure) de m,n n'étant autre que le ppcm (resp. pgcd) de m et n (cf. Alg., chap. VII, § 1).

NBR 092 81

2) L'ensemble des sous-groupes d'un groupe G, ordonné par inclusion, est réticulé (Alg., chap.I, § 6).

3) L'ensemble des topologies sur un ensemble A, ordonné par la relation " $\mathcal{C}$ est moins fine que $\mathcal{C}'$ " entre $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, est réticulé (Top.gén.,chap.I, § 2).*

Si x et y sont des éléments d'un ensemble réticulé E, on note sup(x,y) et inf(x,y) la borne supérieure et la borne inférieure de la partie $\{x,y\}$ de E ; on note de même sup(x,y,z) et inf(x,y,z) la borne supérieure et la borne inférieure d'une partie $\{x,y,z\}$ de E ; etc. Lorsque E est totalement ordonné, on écrit aussi Max(x,y,z) et Min(x,y,z) au lieu de sup(x,y,z) et inf(x,y,z) (l'élément Max(x,y,z) est dans ce cas le plus grand élément de la partie $\{x,y,z\}$).

Tout produit d'ensembles réticulés est réticulé, comme il résulte de la condition d'existence d'une borne supérieure dans un produit d'ensembles ordonnés (§ 1,prop.9).

Exemple.- *L'ensemble $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ des fonctions numériques définies dans un intervalle I de $\mathbb{R}$ est réticulé pour la relation d'ordre $f \leqslant g$ (§ 1,n°4), pour laquelle il est isomorphe au produit $\mathbb{R}^I$ d'une famille d'ensembles totalement ordonnés (cf.Intégr.,chap.II)*

Remarque.- Un ensemble ordonné réticulé non vide est évidemment filtrant à droite et à gauche. Mais un ensemble filtrant à droite et à gauche n'est pas nécessairement réticulé : *par exemple, il en est ainsi de l'ensemble des applications $x \to p(x)$ de $\mathbb{R}$ dans lui-même, où p est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$, cet ensemble étant ordonné par la relation $p \leqslant q$ (§ 1,n°4).*

4. Propriétés de caractère fini.

DÉFINITION 4.- Soit E un ensemble. On dit qu'une ensemble $\mathfrak{S}$ de parties de E est de caractère fini si la relation $X \in \mathfrak{S}$ est équivalente à la relation "toute partie finie de X appartient à $\mathfrak{S}$ ".

On dit qu'une famille $(X_\iota)_{\iota \in I}$ de parties de E est de caractère fini si l'ensemble de ses éléments est de caractère fini.

On dit qu'une propriété $P\{X\}$ d'une partie X d'un ensemble E est de caractère fini si l'ensemble des parties X de E pour lesquelles $P\{X\}$ est vrai est de caractère fini.

De facon imagée, $P\{X\}$ sera une propriété de caractère fini chaque fois que sa vérification ne fera intervenir qu'un nombre fini d'éléments de X .

Exemples.- 1) Soient A et B deux ensembles. L'ensemble des graphes des applications (resp. des injections) de parties de A dans B est de caractère fini. En effet, pour que $G \subset A \times B$ soit le graphe d'une fonction (resp. d'une injection), il faut et il suffit que les relations $(x,y) \in G$ et $(x,y') \in G$ entraînent $y=y'$ (resp. que la condition précédente soit vérifiée, et que les relations $(x,y) \in G$ et $(x',y) \in G$ entraînent $x=x'$).

2) L'ensemble des graphes des équivalences (resp. des ordres, des ordres totaux) sur les parties d'un ensemble A est de caractère fini.

3) L'ensemble des parties totalement ordonnées d'un ensemble ordonné E est de caractère fini : en effet, pour qu'une partie X de E soit totalement ordonnée, il faut et il suffit que toute partie à deux éléments de X le soit.

83

4) *L'ensemble des parties libres d'un espace vectoriel est de caractère fini (Alg. chap. II, § 1). Il en est de même de l'ensemble des parties algèbriquement libres d'une extension d'un corps commutatif (Alg., chap. V, § 5). *

THEOREME 1.- Tout ensemble $\mathfrak{S}$ de parties d'un ensemble E, de caractère fini, admet un élément maximal (quand on l'ordonne par inclusion).

En vertu du th. de Zorn (§ 2, th. 2) il suffit de prouver que $\mathfrak{S}$ est inductif, c'est-à-dire que, pour toute partie $\mathfrak{G}$ de $\mathfrak{S}$, totalement ordonnée par inclusion, la réunion X des ensembles de $\mathfrak{G}$ appartient à $\mathfrak{S}$ (§ 2, cor. 2 du th. 2). Comme $\mathfrak{S}$ est de caractère fini, il suffit de prouver que toute partie finie Y de X appartient à $\mathfrak{S}$. Or, pour tout $y \in Y$, il existe un ensemble $X_y \in \mathfrak{G}$ tel que $y \in X_y$; comme l'ensemble des X_y $(y \in Y)$ est fini et totalement ordonné par inclusion, il admet un plus grand élément S (prop. 2) ; autrement dit, il existe un ensemble $S \in \mathfrak{G}$ tel que $Y \subset S$. Mais comme $S \in \mathfrak{S}$ et que Y est une partie finie de S, $Y \in \mathfrak{S}$ puisque $\mathfrak{S}$ est de caractère fini, ce qui achève la démonstration.