RÉDACTION N° 188

COTE : NBR 091

TITRE : LIVRE I - THÉORIE DES ENSEMBLES
CHAPITRE IV (ÉTAT 8 ?) STRUCTURES

ASSOCIATION DES COLLABORATEURS DE NICOLAS BOURBAKI

NOMBRE DE PAGES : 40

NOMBRE DE FEUILLES : 40

1re Diéudonné sept. 59

NBR 091

188 2

LIVRE I

THEORIE DES ENSEMBLES

CHAPITRE IV (Etat 8 ?)

STRUCTURES

Sommaire.

- II -

Commentaires.

Conformément aux décisions de Juin 1953, seuls les §§ 2 et 3 ont été tirés ; le § 1 et l'Appendice circulent en 3 exemplaires.

Le rédacteur a suivi les décisions de la Tribu n°31, sauf sur les points suivants :

On a supprimé, non seulement les petites lettres grasses, mais aussi les autres ; il ne semble pas que cela crée des inconvénients sérieux. On a conservé les extensions canoniques (covariantes) d'applications quelconques ; çà peut être utile (voir § 3, n°2, où on se sert de CE2). Contrairement à La Tribu, on a conservé la distinction entre "caractérisation typique" et "axiome" d'une espèce de structure, parce que c'est ainsi qu'on procède dans la pratique. Le rédacteur n'a pas compris pour quelle raison bizarre la "structure d'ensemble" devait être repoussée au § 2, où elle n'a évidemment que faire, et il a laissé les choses en l'état. Même réaction au sujet des applications semi-linéaires, qu'il continue à trouver un excellent exemple. Le rédacteur se déclare incapable de rédiger quelque chose de sensé et de non vaseux sur les "identifications en cercle" et acceptera toute rédaction que le prochain Congrès voudra bien faire sur ce sujet (palpitant !).

Au § 1, on a été amené à modifier légèrement la notion de transport de structure lorsqu'il y a des ensembles auxiliaires, pour tenir compte de la pratique (ex.:variétés différentiables réelles). Cela entraîne une généralisation, dans l'Appendice, de la notion de relation ou terme transportable : d'ailleurs, il semble que cette généralisation soit nécessaire à d'autres égards, par exemple pour pouvoir dire que $E^{\mathbb{N}}$ (ensemble des suites infinies d'éléments de E) est transportable.

- III -

Au § 2, on a amélioré les critères de transitivité, conformément à la suggestion de La Tribu (pour les ensembles quotients). Après étude de la question, au lieu de bloquer en un seul plusieurs critères sur les rapports entre structure induite et structure produit, on les a au contraire dédoublés (en CE10 et CE11), ce qui correspond à la nature de la question (cf. les démonstrations). On s'est aperçu que CE12 (ancien CE11) était faux (le "il faut" est incorrect, contrairement à ce que tout le monde penserait : les "structures" générales vous réservent de ces surprises !!).

Au § 3, on a suivi de très près la rédaction Samuel. L'exemple des revêtements universels, proposé dans la rédaction précédente, est visiblement déconnant : on n'applique pas un espace dans son revêtement universel !! Le précédent rédacteur était sans doute un peu fatigué ce jour-là et sa flèche pointait dans la mauvaise direction ! Le rédacteur s'estime incompétent pour rédiger les variétés d'Albanese, et demande une rédaction à Samuel. On attire l'attention sur l'exerc.2 qui, s'il n'est pas déconnant, donne un procédé général de formation de "sommes directes" et structures finales ; peut-être pourrait-on le mettre dans le texte ??

Dans l'Appendice, on s'est aperçu qu'il fallait "relativiser" la notion de terme ou relation transportable quand il y a une structure : "le groupe des commutateurs" n'est pas un terme transportable au sens absolu !.

CHAPITRE IV

§ 2. Morphismes et structures dérivées.

1. Morphismes d'une espèce de structure.

Pour simplifier, nous supposerons, dans ce paragraphe et dans le suivant, que les structures dont il est question sont définies sur *un seul* ensemble ; le lecteur étendra sans peine les définitions et résultats au cas général.

Pour la plupart des espèces de structure usuelles Σ, on introduit une nouvelle notion celle de *morphisme* de l'espèce de structure Σ, ou Σ *-morphisme*. Supposons Σ définie sur une lettre x, et soit y une lettre distincte des constantes de la théorie $\mathcal{T}_\Sigma$; on forme alors un terme $M\{x,y\}$ de la théorie $\mathcal{T}_\Sigma$, de façon que les conditions suivantes soient remplies :

(MO_I) $M\{x,y\} \subset \mathcal{F}(x,y)$ (ensemble des applications de x dans y).

(MO_{II}) *Si* E,E',E" *sont trois ensembles munis de structures d'espèce* Σ, *alors les relations* $f \in M\{E,E'\}$ *et* $g \in M\{E',E''\}$ *entraînent* $g \circ f \in M\{E,E''\}$.

(MO_{III}) *Etant donnés deux ensembles* E,E' *munis de structures d'espèce* Σ, *pour qu'une bijection* f *de* E *sur* E' *soit un isomorphisme, il faut et il suffit que l'on ait* $f \in M\{E,E'\}$ *et* $f' \in M\{E',E\}$ (f' désignant l'application réciproque de f).

Nous exprimerons encore la relation $f \in M\{x,y\}$ en disant que f *est un* Σ *-morphisme de* x *dans* y ; si E et E' sont deux ensembles munis de structures d'espèce Σ, le terme $M\{E,E'\}$ est appelé *l'ensemble des* Σ *-morphismes de* E *dans* E'.

Exemples.- 1) Prenons pour Σ l'espèce de structure d'ordre. Si S,S' sont des structures d'ordre sur les ensembles A,A' respectivement, l'ensemble des Σ-morphismes est par définition l'ensemble des applications f de A dans A' tels que la relation $(x,y)\in S$ entraîne $(f(x),f(y))\in S'$. Avec les notations du chap.III, § 1, cela signifie encore que $x \leqslant y$ entraîne $f(x)\leqslant f(y)$, c'est-à-dire que f est croissante ; la vérification des conditions (MO_{II}) et (MO_{III}) est alors immédiate.

2) Prenons pour Σ une espèce de structure algèbrique définie par une loi de composition interne partout définie. Soient F,F' les graphes de deux telles lois sur les ensembles A,A' respectivement. Un Σ-morphisme de A dans A' est par définition une application u telle que la relation $(x,y)\in F$ entraîne $(u(x),u(y))\in F'$, c'est-à-dire telle que l'on ait $f'(u(x),u(y))=u(f(x,y))$; ces applications sont encore appelées représentations ou homomorphismes de A dans A' (cf. Alg.,chap.I). La vérification des conditions (MO_{II}) et (MO_{III}) est immédiate.

3) Prenons pour Σ l'espèce de structure topologique (§ 1,n°4, exemple 3). Soient S,S' deux topologies sur A,A' respectivement. Par définition, un Σ-morphisme de A dans A' est une application u telle que la relation $X'\in S'$ entraîne $\overset{-1}{u}(X')\in S$; autrement dit, l'image réciproque par u de tout ensemble ouvert (pour S') doit être un ensemble ouvert (pour S). On dit encore que ces applications sont les applications continues de A dans A' (pour les topologies S et S'); elles vérifient (MO_{II}) et (MO_{III}) (cf.Top.gén.,chap.I, § 4).

<u>Remarque</u>.- Pour une espèce de structure donnée Σ , il peut y avoir plusieurs termes $M\{x,y\}$ qui satisfont aux conditions (MO_I),(MO_{II}) et (MO_{III}). Par exemple, pour l'espèce de structure topologique, on dit (avec les notations de l'exemple précédent) qu'une application u de A dans A' est <u>ouverte</u> si la relation $X\in S$ entraîne $u(X)\in S'$ (autrement dit, si l'image par u de tout ensemble ouvert est un ensemble ouvert). On constate aisément que les applications ouvertes satisfont aussi aux conditions (MO_{II}) et (MO_{III}) pour l'espèce Σ ; en outre, on peut montrer qu'une application continue n'est pas nécessairement ouverte, et qu'une application ouverte n'est pas nécessairement continue. La donnée d'une espèce de structure <u>n'implique donc pas</u> une notion de morphisme bien déterminée. Le choix de la définition d'un Σ -morphisme (lorsqu'on introduit une telle notion) est dicté par son utilité dans les applications aux théories où intervient l'espèce de structure Σ .

La condition (MO_{III}) et la caractérisation des bijections (chap.II, § 3,cor. du th.1) entraînent le critère suivant :

CE5. <u>Soient</u> E,E' <u>deux ensembles munis chacun d'une structure d'espèce</u> Σ. <u>Soit</u> f <u>un</u> Σ <u>-morphisme de</u> E <u>dans</u> E', g <u>un</u> Σ <u>-morphisme de</u> E' <u>dans</u> E . <u>Si</u> $g\circ f$ <u>est l'application identique de</u> E <u>sur lui-même</u>, <u>et</u> $f\circ g$ <u>l'application identique de</u> E' <u>sur lui-même</u>, f <u>est un isomorphisme de</u> E <u>sur</u> E', <u>et</u> g <u>est l'isomorphisme réciproque</u>.

On notera qu'une bijection de E sur E' peut être un Σ -morphisme sans que son application réciproque soit un Σ -morphisme.

Par exemple, une application bijective d'un espace topologique A dans un espace topologique A' peut être continue sans que son application réciproque le soit (<u>Top.gén</u>., chap.I, § 4).

Dans tout ce qui suit, nous considèrerons une espèce de structure Σ pour laquelle nous supposerons définie une notion de Σ-morphisme.

Lorsqu'une espèce de structure Σ est définie sur plusieurs ensembles de base $x_1,\dots,x_n$, un Σ-morphisme est un système de n applications $(f_1,\dots,f_n)$ vérifiant des conditions analogues à (MO_I), (MO_{II}) et (MO_{III}) ; lorsque certains des x_i sont considérés comme ensembles <u>auxiliaires</u> (§ 1, n°9), on convient d'ordinaire que les f_i correspondants sont tous l'application identique.

2. <u>Structures plus ou moins fines</u>.

Soient E un ensemble, $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ deux structures d'espèce Σ sur E. On dit que la structure $\mathcal{S}_1$ est <u>plus fine</u> que $\mathcal{S}_2$ (ou que $\mathcal{S}_2$ est <u>moins fine</u> que $\mathcal{S}_1$) si l'application identique de E, muni de $\mathcal{S}_1$, sur E, muni de $\mathcal{S}_2$, est un Σ-morphisme.

De cette définition et de la condition (MO_{II}) il résulte que si E' est un ensemble muni d'une structure $\mathcal{S}'$ d'espèce Σ, et si f est un Σ-morphisme de E, muni de $\mathcal{S}_2$, dans E', muni de $\mathcal{S}'$, alors f est aussi un Σ-morphisme de E, muni de $\mathcal{S}_1$, dans E', muni de $\mathcal{S}'$. De même, si g est un Σ-morphisme de E', muni de $\mathcal{S}'$, dans E, muni de $\mathcal{S}_1$, g est aussi un Σ-morphisme de E', muni de $\mathcal{S}'$, dans E, muni de $\mathcal{S}_2$.

En termes plus imagés, <u>plus</u> une structure (d'espèce Σ) sur E est fine, <u>plus</u> il y a de Σ-morphismes de E dans les ensembles munis de structures d'espèce Σ, et <u>moins</u> il y a de Σ-morphismes de tels ensembles dans E.

La relation " $\mathcal{S}_1$ est moins fine que $\mathcal{S}_2$ " est une <u>relation d'ordre</u> entre $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ dans l'ensemble des structures d'espèce Σ sur E : elle est en effet réflexive d'après (MO_{III}), transitive d'après (MO_{II}), et si une structure d'espèce Σ est à la fois plus fine et moins fine qu'une autre, elle lui est identique en vertu de (MO_{III}) et de la définition d'un isomorphisme (§ 1,n°8). On dit que deux structures d'espèce Σ sur E sont <u>comparables</u> si l'une est plus fine que l'autre ; on dit qu'une structure est <u>strictement plus fine</u> (resp. <u>strictement moins fine</u>) qu'une autre si elle est <u>plus fine</u> (resp. <u>moins fine</u>) que cette dernière et en est distincte.

<u>Exemples</u>.- 1) Pour qu'une structure d'ordre de graphe S sur un ensemble A soit plus fine qu'une structure d'ordre de graphe S', il faut et il suffit que $S \subset S'$. Autrement dit, deux éléments x,y de A , comparables pour S , doivent être comparables pour S' ; on retrouve la définition donnée au chap.III, § 1,n°4,exemple 3 .

2) Considérons deux structures algèbriques F,F' de même espèce Σ sur un ensemble A , F et F' étant les graphes de deux applications de $A \times A$ dans A. D'après la définition des Σ -morphismes dans ce cas (n°1, exemple 2), dire que F est plus fine que F' signifie que $F \subset F'$. Mais comme F et F' sont des graphes fonctionnels ayant tous deux le même ensemble de définition $A \times A$, on a nécessairement F=F'. Autrement dit, deux structures <u>comparables</u> d'espèce Σ sont nécessairement <u>identiques</u>.

3) Soient S,S' deux topologies sur un ensemble A . Dire que S est plus fine que S' signifie ici, en vertu de la définition des morphismes (n°1,exemple 3) que $S' \subset S$; en d'autres termes, toute partie de A qui est un ensemble ouvert pour S' est aussi un ensemble ouvert pour S

(ou, de façon plus imagée, plus une topologie est fine, plus il y a d'ensembles ouverts).

Remarque.- Nous venons de voir un exemple (exemple 2) où deux structures comparables de même espèce Σ sont nécessairement identiques. On rencontre de nombreux exemples de telles structures : *structures algébriques dont les lois de composition sont partout définies, structures d'ordre total, topologies d'espace compact, topologies d'espace de Fréchet, topologies définies par une valeur absolue (ou une valuation) sur un corps, etc.*

Pour une telle espèce de structure Σ (supposée transportable ce qui est le cas des exemples précédents), un Σ-morphisme f de E dans E' qui est une application bijective est un isomorphisme : car en transportant par f la structure $\mathcal{S}$ de E , on obtient une structure d'espèce Σ plus fine que la structure $\mathcal{S}'$ de E', donc qui lui est nécessairement identique.

Plus particulièrement, il peut arriver qu'une espèce de structure Σ soit telle que deux structures d'espèce Σ sur le même ensemble, se déduisent nécessairement l'une de l'autre par transport de structure : *il en est ainsi de la structure de corps premier, ou de celle d'espace vectoriel de dimension finie sur un corps donné (considéré comme ensemble auxiliaire), ou de celle de groupe monogène. *

Le cas extrême se présente lorsque deux structures d'espèce Σ, sur des ensembles E et E' quelconques, se déduisent nécessairement l'une de l'autre par transport de structure. On dit alors que l'espèce de structure Σ est univalente. *Il en est ainsi de la structure de groupe monogène infini (isomorphe à $\mathbb{Z}$), de celle de

WBR 091 11

de corps premier de caractéristique 0 (isomorphe à $\mathbb{Q}$), de la structure de corps ordonné, archimédien et complet (isomorphe à $\mathbb{R}$), de la structure de corps connexe, localement compact et non commutatif (isomorphe au corps des quaternions $\mathbb{K}$)$_*$. On observera que ces structures sont essentiellement celles qui sont à la base de la Mathématique classique.

3. Structures initiales.

Considérons une espèce de structure Σ, et une famille $(A_\iota)_{\iota\in I}$ d'ensembles, dont chacun est muni d'une structure $\mathcal{S}_\iota$ d'espèce Σ. Soit d'autre part E un ensemble, et, pour tout $\iota \in I$, soit f_ι une application de E dans A_ι. On dit qu'une structure $\mathcal{S}_0$ d'espèce Σ sur E est structure initiale pour la famille $(A_\iota, \mathcal{S}_\iota, f_\iota)_{\iota\in I}$ si elle possède la propriété suivante :

(IN) Quels que soient l'ensemble E', la structure $\mathcal{S}'$ d'espèce Σ sur E' et l'application g de E' dans E, la relation

"g est un Σ-morphisme de E' dans E"

est équivalente à la relation

"quel que soit $\iota \in I$, $f_\iota \circ g$ est un Σ-morphisme de E' dans A_ι".

Comme nous le verrons ci-dessous, il n'existe pas nécessairement de structure initiale pour une famille donnée $(A_\iota, \mathcal{S}_\iota, f_\iota)$. Mais on a le critère suivant :

CE6. S'il existe, sur E, une structure initiale pour la famille $(A_\iota, \mathcal{S}_\iota, f_\iota)_{\iota\in I}$, elle est unique, et elle est la moins fine des structures d'espèce Σ sur E pour lesquelles chacune des applications f_ι est un Σ-morphisme.

En effet, soit $\mathcal{S}_0$ une structure initiale sur E, et $\mathcal{S}$ une structure d'espèce Σ sur E, pour laquelle chacune des f_ι est un Σ-morphisme.

Désignant par e l'application identique de E , muni de $\mathcal{S}$, sur E , muni de $\mathcal{S}_0$, on peut encore dire que $f_\iota \circ e$ est un Σ -morphisme pour tout $\iota \in I$; la condition (IN) montre que e est un Σ -morphisme, ce qui signifie (n°2) que $\mathcal{S}$ est plus fine que $\mathcal{S}_0$. D'autre part, en appliquant (IN) au cas où g est l'application identique de E (muni de $\mathcal{S}_0$) sur lui-même, on voit (en vertu de (MO_{III})) que chacune des f_ι est un Σ -morphisme de E dans A_ι , ce qui prouve le critère.

On a le critère de transitivité suivant :

CE7. Soit $(A_\iota)_{\iota \in I}$ une famille d'ensembles, et pour tout $\iota \in I$ soit $\mathcal{S}_\iota$ une structure d'espèce Σ sur A_ι . Soit $(J_\lambda)_{\lambda \in L}$ une partition de I, et soit $(B_\lambda)_{\lambda \in L}$ une famille d'ensembles ayant L comme ensemble d'indices. Enfin, pour tout $\lambda \in L$ et tout $\iota \in J_\lambda$, soit $g_{\lambda\iota}$ une application de B_λ dans A_ι , et pour tout $\lambda \in L$, soit h_λ une application d'un ensemble E dans B_λ ; pour $\lambda \in L$ et $\iota \in J_\lambda$, on pose $f_\iota = g_{\lambda\iota} \circ h_\lambda$. On suppose que, pour tout $\lambda \in L$, il existe une structure initiale $\mathcal{S}'_\lambda$ sur B_λ , pour la famille $(A_\iota, \mathcal{S}_\iota, g_{\lambda\iota})_{\iota \in J_\lambda}$. Dans ces conditions, les propositions suivantes sont équivalentes :

a) il existe une structure initiale $\mathcal{S}$ sur E pour la famille $(A_\iota, \mathcal{S}_\iota, f_\iota)_{\iota \in I}$;

b) il existe une structure initiale $\mathcal{S}'$ sur E pour la famille $(B_\lambda, \mathcal{S}'_\lambda, h_\lambda)_{\lambda \in L}$.

En outre, ces propositions entraînent que $\mathcal{S} = \mathcal{S}'$.

En effet, soit F un ensemble muni d'une structure $\mathcal{S}''$ d'espèce Σ , et soit u une application de F dans E . Remarquons que par définition, la relation "$h_\lambda \circ u$ est un Σ -morphisme de F dans B_λ " est équivalente à la relation "quel que soit $\iota \in J_\lambda$, $g_{\lambda\iota} \circ h_\lambda \circ u = f_\iota \circ u$ est un

Σ -morphisme de F dans A_ι ". La relation "quel que soit $\lambda \in L$, $h_\lambda \circ u$ est un Σ -morphisme de F dans B_λ " est donc équivalente à la relation "quel que soit $\iota \in I$, $f_\iota \circ u$ est un Σ-morphisme de F dans A_ι " . Or, dire que $\mathcal{S}'$ est structure initiale, pour $(B_\lambda, \mathcal{S}'_\lambda, h_\lambda)_{\lambda \in L}$ signifie que la première de ces relations est équivalente à "u est un Σ -morphisme de F dans E muni de $\mathcal{S}'$ " ; et dire que $\mathcal{S}$ est structure initiale pour $(A_\iota, \mathcal{S}_\iota, f_\iota)_{\iota \in I}$ signifie que la seconde est équivalente à "u est un Σ -morphisme de F dans E muni de $\mathcal{S}$ " ; d'où le critère, compte tenu de la propriété d'unicité de la structure initiale.

Soit φ une application biunivoque de E sur un ensemble E', et soit ψ l'application réciproque ; si Σ est une espèce de structure transportable, et s'il existe une structure initiale $\mathcal{S}_0$ sur E pour la famille $(A_\iota, \mathcal{S}_\iota, f_\iota)_{\iota \in I}$, la structure $\mathcal{S}'_0$ sur E', transportée de $\mathcal{S}_0$ par φ , est structure initiale sur E' pour la famille $(A_\iota, \mathcal{S}_\iota, f_\iota \circ \psi)_{\iota \in I}$. Il résulte en effet de (MO_{II}) et (MO_{III}) que, pour tout ensemble F muni d'une structure $\mathcal{S}$ d'espèce Σ , et pour toute application u de F dans E', les relations "u est un Σ -morphisme de F dans E' " et "$\psi \circ u$ est un Σ -morphisme de F dans E " sont équivalentes.

4. Exemples de structures initiales : image réciproque d'une structure, structure induite, structure produit, borne supérieure d'une famille de structures.

I : Image réciproque d'une structure. Lorsque I est un ensemble à un ensemble à un seul élément, la structure initiale pour le seul triplet $(A, \mathcal{S}, f)$ est appelée (lorsqu'elle existe) image réciproque par f de la structure $\mathcal{S}$.

Une topologie admet toujours une image réciproque par une application quelconque f ; mais il n'en est pas ainsi pour une structure d'ordre ou une structure algèbrique.

II : Structure induite. Soient A un ensemble muni d'une structure $\mathcal{S}$ d'espèce Σ, B une partie de A, i l'injection canonique de B dans A. On appelle structure induite par $\mathcal{S}$ sur B l'image réciproque (si elle existe) de la structure $\mathcal{S}$ par l'injection i.

Une structure d'ordre induit une structure de même espèce sur toute partie de l'ensemble où elle est définie ; il n'en est pas de même d'une structure d'ensemble ordonné filtrant.

Une topologie définit une topologie sur toute partie de l'ensemble où elle est définie ; il n'en est pas de même d'une topologie d'espace compact. Sur une partie quelconque B d'un ensemble A muni d'une structure algèbrique, cette structure n'induit pas en général une structure de même espèce ; lorsque la structure donnée sur A comporte des lois de composition partout définies, il est nécessaire que B soit stable pour chacune de ces lois, mais cette condition n'est pas suffisante.

Le critère général CE7 donne pour les structures induites le critère de transitivité :

CE8. Soient B une partie de A, C une partie de B ; si une structure $\mathcal{S}$ sur A induit sur B une structure $\mathcal{S}'$, et si $\mathcal{S}'$ induit sur C une structure $\mathcal{S}''$, alors $\mathcal{S}''$ est la structure induite sur C par $\mathcal{S}$.

III : Structure produit. Soit $(A_\iota)_{\iota\in I}$ une famille d'ensembles et sur chaque ensemble A_ι, soit $\mathcal{S}_\iota$ une structure d'espèce Σ ; soit $E = \prod_{\iota\in I} A_\iota$ l'ensemble produit de la famille $(A_\iota)_{\iota\in I}$ (chap. II, § 5), et soit pr_ι la projection de E sur A_ι. On appelle structure produit des structures $\mathcal{S}_\iota$ la structure initiale (si elle existe) pour la famille $(A_\iota, \mathcal{S}_\iota, pr_\iota)_{\iota \in I}$.

Une famille de structures d'ordre admet toujours une structure produit, mais non une famille de structures d'ordre total.

Une famille de structures de groupe admet toujours une structure produit, mais non une famille de structures de corps. Une famille de topologies admet toujours une structure produit, mais non une famille de topologies d'espace localement compact.

Le critère CE7 donne pour les structures produits le critère d'associativité :

CE9. Soit $(A_\iota)_{\iota \in I}$ une famille d'ensembles, et pour chaque $\iota \in I$, soit $\mathcal{S}_\iota$ une structure d'espèce transportable Σ sur A_ι. Soit $(J_\lambda)_{\lambda \in L}$ une partition de I. Si, sur chaque produit partiel $F_\lambda = \prod_{\iota \in J_\lambda} A_\iota$, $\mathcal{S}'_\lambda$ est la structure produit de la famille $(\mathcal{S}_\iota)_{\iota \in J_\lambda}$, et si, sur le produit $E = \prod_{\lambda \in L} F_\lambda$, $\mathcal{S}''$ est la structure produit de la famille $(\mathcal{S}'_\lambda)_{\lambda \in L}$, alors (en identifiant E au produit $\prod_I A$) $\mathcal{S}''$ est la structure produit de la famille $(\mathcal{S}_\iota)_{\iota \in I}$.

Une autre application de CE7 donne le critère suivant, relatif aux structures induites par une structure produit :

CE10. Soit $(A_\iota)_{\iota \in I}$ une famille d'ensembles, et pour chaque $\iota \in I$, soit $\mathcal{S}_\iota$ une structure d'espèce Σ sur A. Pour chaque $\iota \in I$, soit B_ι une partie de A_ι. On suppose que chaque $\mathcal{S}_\iota$ induise une structure $\mathcal{S}'_\iota$ sur B_ι, et que sur le produit $E = \prod_{\iota \in I} A_\iota$, il existe une structure $\mathcal{S}$ produit des $\mathcal{S}_\iota$. Dans ces conditions, les propositions suivantes sont équivalentes :

a) sur l'ensemble $B = \prod_{\iota \in I} B_\iota \subset E$, il existe une structure $\mathcal{S}''$ induite par $\mathcal{S}$;

b) sur l'ensemble B , il existe une structure $\mathcal{S}'$ produit des structures $\mathcal{S}'_\iota$.

En outre, ces propositions entraînent que $\mathcal{S}' = \mathcal{S}''$.

En effet, soient j_ι l'injection de B_ι dans A_ι, i l'injection de B dans E , p_ι la projection de E sur A_ι , p'_ι la projection de B sur B_ι ; on a $p_\iota \circ i = j_\iota \circ p'_\iota$ pour tout $\iota \in I$. D'après CE7, $\mathcal{S}''$ est la structure initiale correspondant à la famille $(A_\iota, \mathcal{S}_\iota, p_\iota \circ i)_{\iota \in I}$ et $\mathcal{S}'$ est la structure initiale correspondant à la famille $(A_\iota, \mathcal{S}_\iota, j_\iota \circ p'_\iota)_{\iota \in I}$. D'où le critère.

Les notions d'image réciproque et de structure produit sont aussi liées par le critère suivant :

CE11. Soit $(A_\iota)_{\iota \in I}$ une famille d'ensembles, et pour chaque $\iota \in I$, soit $\mathcal{S}_\iota$ une structure d'espèce Σ sur A_ι , et f_ι une application d'un ensemble E dans A_ι . On suppose qu'il existe sur l'ensemble produit $A = \prod_{\iota \in I} A_\iota$ une structure produit $\mathcal{S}$ des $\mathcal{S}_\iota$. Alors, pour qu'il existe une structure initiale pour la famille $(A_\iota, \mathcal{S}_\iota, f_\iota)_{\iota \in I}$, il faut et il suffit qu'il existe une structure image réciproque de $\mathcal{S}$ par l'application $x \to f(x) = (f_\iota(x))$ de E dans A .

Comme $f_\iota = pr_\iota \circ f$, ce critère est un cas particulier de CE7.

On a enfin le critère suivant :

CE12. Soient $(A_\iota)_{\iota \in I}$, $(B_\iota)_{\iota \in I}$ deux familles d'ensembles ayant même ensemble d'indices. Pour tout $\iota \in I$, soit $\mathcal{S}_\iota$ une structure d'espèce Σ sur A_ι , $\mathcal{S}'_\iota$ une structure d'espèce Σ sur B_ι . Soit $\mathcal{S}$ (resp. $\mathcal{S}'$) la structure produit des $\mathcal{S}_\iota$ (resp. $\mathcal{S}'_\iota$) sur $A = \prod_{\iota \in I} A_\iota$ (resp. $B = \prod_{\iota \in I} B_\iota$), supposée exister. Enfin, pour tout $\iota \in I$, soit f_ι une application de A_ι dans B_ι . Pour que l'application $f = (f_\iota)_{\iota \in I}$

soit un Σ -morphisme de A dans B , il suffit que, pour tout $\iota \in I$, f_ι soit un Σ -morphisme de A_ι dans B_ι .

En effet, soit p_ι (resp. q_ι) la projection de A sur A_ι (resp. de B sur B_ι) ; on a $q_\iota \circ f = f_\iota \circ p_\iota$. Comme f_ι et p_ι sont des Σ -morphismes (critère CE6), il en est de même de $f_\iota \circ p_\iota$ d'après (MO_{II}), donc f est un Σ -morphisme en vertu de la condition (IN).

Pour la plupart des structures usuelles, la condition énoncée dans CE12 est non seulement suffisante, mais aussi nécessaire pour que f soit un Σ -morphisme (cf. n°6, Remarque 2).

IV : Borne supérieure d'une famille de structures. Soit $(\mathcal{S}_\iota)_{\iota \in I}$ une famille de structures de même espèce Σ sur un même ensemble A ; désignons par A_ι l'ensemble A muni de la structure $\mathcal{S}_\iota$, et par e_ι l'application identique de A dans A_ι . S'il existe une structure initiale $\mathcal{S}$ pour la famille $(A_\iota, \mathcal{S}_\iota, e_\iota)_{\iota \in I}$, il résultera de CE6 que $\mathcal{S}$ est la moins fine de toutes les structures d'espèce Σ qui sont plus fines que chacune des structures $\mathcal{S}_\iota$; autrement dit, $\mathcal{S}$ est la borne supérieure de l'ensemble des $\mathcal{S}_\iota$ dans l'ensemble ordonné des structures d'espèce Σ sur A . Mais il peut se faire que cet ensemble admette une borne supérieure sans que cette borne supérieure soit structure initiale pour la famille $(A_\iota, \mathcal{S}_\iota, e_\iota)$ (exerc.3).

Remarque.- Soit B l'ensemble produit $A^I = \prod_{\iota \in I} A_\iota$, Δ la diagonale de ce produit (chap.II, § 5,n°   ), et h l'application canonique de A sur Δ , h(x) étant l'élément $(x_\iota)_{\iota \in I}$ tel que $x_\iota = x$ pour tout $\iota \in I$. Supposons qu'il existe sur B la structure produit $\mathcal{S}'$ des $\mathcal{S}_\iota$, et que l'espèce Σ soit transportable. Comme h est injective, le critère CE11 montre que pour qu'il existe une structure initiale $\mathcal{S}$ pour la famille $(A_\iota, \mathcal{S}_\iota, e_\iota)_{\iota \in I}$, il faut et il suffit qu'il existe sur Δ une structure $\mathcal{S}''$ induite par $\mathcal{S}'$, et que $\mathcal{S}''$ est alors transportée de $\mathcal{S}$ par h .

5. Structures finales.

Considérons une espèce de structure Σ, et une famille $(A_\iota)_{\iota \in I}$ d'ensembles, dont chacun est muni d'une structure $\mathcal{S}_\iota$ d'espèce Σ. Soit d'autre part E un ensemble, et, pour chaque $\iota \in I$, soit g_ι une application de A_ι dans E . On dit qu'une structure $\mathcal{S}_\infty$ d'espèce Σ sur E est structure finale pour la famille $(A_\iota, \mathcal{S}_\iota, g_\iota)_{\iota \in I}$ si elle possède la propriété suivante :

(FI) Quels que soient l'ensemble E', la structure $\mathcal{S}'$ d'espèce Σ sur E', et l'application f de E dans E', la relation

"f est un Σ-morphisme de E dans E' "

est équivalente à la relation "quel que soit $\iota \in I$, $f \circ g_\iota$ est un Σ-morphisme de A_ι dans E'. Il n'existe pas nécessairement de structure finale pour une famille donnée $(A_\iota, \mathcal{S}_\iota, g_\iota)$; mais on a le critère suivant :

CE13. S'il existe sur E une structure finale pour la famille $(A_\iota, \mathcal{S}_\iota, g_\iota)_{\iota \in I}$, elle est unique, et elle est la plus fine des structures d'espèce Σ sur E pour lesquelles chacune des applications g_ι est un Σ-morphisme.

En effet, soit $\mathcal{S}_\infty$ une structure finale sur E , et $\mathcal{S}$ une structure d'espèce Σ sur E , pour laquelle chacune des g_ι soit un Σ-morphisme. Désignant par e l'application identique de E , muni de $\mathcal{S}_\infty$, sur E , muni de $\mathcal{S}$, on peut encore dire que $e \circ g_\iota$ est un Σ-morphisme pour tout $\iota \in I$; la condition (FI) montre que e est un Σ-morphisme, ce qui signifie (nº2) que $\mathcal{S}$ est moins fine que $\mathcal{S}_\infty$. D'autre part, en appliquant (FI) au cas où f est l'application identique de E (muni de $\mathcal{S}_\infty$) sur lui-même, on voit (en vertu de (MO_{III})) que chacune des g_ι est un Σ -morphisme de A_ι dans E , ce qui prouve le critère.

On a le critère de transitivité suivant :

CE14. Soit $(A_\iota)_{\iota \in I}$ une famille d'ensembles, et pour tout $\iota \in I$, soit $\mathcal{S}_\iota$ une structure d'espèce Σ sur A_ι . Soit $(J_\lambda)_{\lambda \in L}$ une partition de I , et soit $(B_\lambda)_{\lambda \in L}$ une famille d'ensembles ayant L comme ensemble d'indices. Enfin, pour tout $\lambda \in L$ et tout $\iota \in J_\lambda$, soit $g_{\iota\lambda}$ une application de A_ι dans B_λ et pour tout $\lambda \in L$, soit h_λ une application de B_λ dans un ensemble E ; pour $\lambda \in L$ et $\iota \in J_\lambda$, on pose $f_\iota = h_\lambda \circ g_{\iota\lambda}$. On suppose que, pour tout $\lambda \in L$, il existe une structure finale sur B_λ , pour la famille $(A_\iota, \mathcal{S}_\iota, g_{\iota\lambda})_{\iota \in J_\lambda}$. Dans ces conditions, les propositions suivantes sont équivalentes :

a) il existe une structure finale $\mathcal{S}$ sur E pour la famille $(A_\iota, \mathcal{S}_\iota, f_\iota)_{\iota \in I}$;

b) il existe une structure finale $\mathcal{S}'$ sur E pour la famille $(B_\lambda, \mathcal{S}'_\lambda, h_\lambda)_{\lambda \in L}$.

En outre, ces propositions entraînent que $\mathcal{S}' = \mathcal{S}$.

En effet, soit F un ensemble muni d'une structure $\mathcal{S}''$ d'espèce Σ , et soit u une application de E dans F . Par définition, la relation "$u \circ h_\lambda$ est un Σ -morphisme de B_λ dans F " est équivalente à la relation "quel que soit $\iota \in J_\lambda$, $u \circ h_\lambda \circ g_{\iota\lambda} = u \circ f_\iota$ est un Σ -morphisme de A_ι dans F " . La relation "quel que soit $\lambda \in L$, $u \circ h_\lambda$ est un Σ -morphisme de B_λ dans F " est donc équivalente à la relation "quel que soit $\iota \in I$, $u \circ f_\iota$ est un Σ -morphisme de A_ι dans F " . Or, dire que $\mathcal{S}'$ est structure finale pour $(B_\lambda, \mathcal{S}'_\lambda, h_\lambda)_{\lambda \in L}$ signifie que la première

 20

de ces relations est équivalente à "u est un Σ -morphisme de E (muni de $\mathcal{S}'$) dans F " ; et dire que $\mathcal{S}$ est structure finale pour $(A_\iota, \mathcal{S}_\iota, f_\iota)_{\iota \in I}$ signifie que la seconde est équivalente à "u est un Σ -morphisme de E (muni de $\mathcal{S}$) dans F ". D'où le critère, compte tenu de la propriété d'unicité de la structure finale.

Soit φ une application biunivoque de E sur un ensemble E' ; si Σ est une espèce de structure transportable, et s'il existe une structure finale $\mathcal{S}_\infty$ sur E pour la famille $(A_\iota, \mathcal{S}_\iota, g_\iota)_{\iota \in I}$, la structure $\mathcal{S}'_\infty$ sur E', transportée de $\mathcal{S}_\infty$ par φ, est structure finale sur E' pour la famille $(A_\iota, \mathcal{S}_\iota, \varphi \circ g_\iota)_{\iota \in I}$. Il résulte en effet de (MO_{II}) et (MO_{III}) que, pour tout ensemble F muni d'une structure $\mathcal{S}$ d'espèce Σ, et pour toute application u de E' dans F, les relations "u est un Σ -morphisme de E' dans F " et "$u \circ \varphi$ est un Σ -morphisme de E dans F " sont équivalentes.

6. <u>Exemples de structures finales</u> : <u>image directe d'une structure, structure quotient</u>, <u>borne inférieure d'une famille de structures</u>.

I : <u>Image directe d'une structure</u>. Lorsque I est un ensemble à un seul élément, la structure finale pour le seul triplet $(A, \mathcal{S}, f)$ est appelée (lorsqu'elle existe) <u>image directe par</u> f <u>de la structure</u> $\mathcal{S}$.

II : <u>Structure quotient</u>. Soient A un ensemble muni d'une structure $\mathcal{S}$ d'espèce Σ, R une relation d'équivalence dans A, et soit φ l'application canonique de A sur l'ensemble quotient $E = A/R$ (chap. II, § 6, n°).

On appelle <u>structure quotient</u> de $\mathcal{S}$ par la relation R l'image directe (si elle existe) de la structure $\mathcal{S}$ par l'application φ.

En général, une structure d'ordre ou une structure algèbrique n'admettent pas de structure quotient pour une relation d'équivalence quelconque. Par contre une topologie admet toujours une structure quotient pour une relation d'équivalence arbitraire, mais il n'en est pas de même d'une structure d'espace topologique séparé.

Soient f une application de A <u>sur</u> un ensemble B , R la relation d'équivalence $f(x)=f(y)$, φ l'application canonique de A sur A/R ; posons $f=g\circ\varphi$, où g est une bijection de A/R sur B . L'espèce de structure Σ étant supposée transportable, pour qu'il existe une structure quotient $\mathcal{S}'$ de $\mathcal{S}$ par R , il faut et il suffit qu'il existe une image directe $\mathcal{S}''$ de $\mathcal{S}$ par f , et $\mathcal{S}''$ est alors transportée de $\mathcal{S}'$ par g .

Soient A,B deux ensembles munis respectivement de structures $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}'$ d'espèce Σ , et soit f un Σ -morphisme de A dans B . Soient R la relation d'équivalence $f(x)=f(y)$, φ l'application canonique de A sur A/R , et i l'injection de f(A) dans B . Supposons que $\mathcal{S}$ admette une structure quotient $\mathcal{S}_0$ par R , et que $\mathcal{S}'$ induise une structure $\mathcal{S}_0'$ sur f(A). Alors, dans la <u>décomposition canonique</u> $f=i\circ g\circ\varphi$ de f , la bijection g de A/R sur f(A), associée à f , est un Σ -<u>morphisme</u> (mais non nécessairement un isomorphisme), lorsqu'on munit A/R de $\mathcal{S}_0$ et f(A) de $\mathcal{S}_0'$. En effet, $i\circ g$ est un Σ -morphisme de A/R dans B , par définition de la structure quotient, et g un Σ-morphisme de A/R dans f(A) par définition de la structure induite.

CE15. <u>Soient</u> A,B <u>deux ensembles munis de structures</u> $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}'$ <u>d'espèce</u> Σ , R <u>une relation d'équivalence dans</u> A , S <u>une relation d'équivalence dans</u> B . <u>On suppose qu'il existe une structure quotient</u> $\mathcal{S}_0$ <u>de</u> $\mathcal{S}$ <u>par</u> R , <u>et une structure quotient</u> $\mathcal{S}_0'$ <u>de</u> $\mathcal{S}'$ <u>par</u> S . <u>Alors, si</u> f <u>est</u>

un Σ *-morphisme de* A *dans* B *, compatible avec les relations* R *et* S *, et* g *l'application obtenue par passage aux quotients,* g *est un* Σ *-morphisme de* A/R *dans* B/S .

En effet, si φ est l'application canonique de A sur A/R , ψ l'application canonique de B sur B/S , on a $g\circ\varphi = \psi\circ f$; comme ψ et f sont des Σ-morphismes, il en est de même de $\psi\circ f$ en vertu de (MO_{II}) ; mais alors, $g\circ\varphi$ étant un Σ -morphisme, il en est de même de g par définition de la structure quotient.

Le critère de transitivité CE14 donne en particulier le critère suivant

CE16. *Soient* A *un ensemble muni d'une structure* $\mathcal{S}$ *d'espèce transportable* Σ , R *une relation d'équivalence dans* A *, telle qu'il existe sur* $B=A/R$ *une structure quotient* $\mathcal{S}'$ *de* $\mathcal{S}$ *par* R . *Soit* S *une relation d'équivalence dans* A *, entraînée par* R *, et soit* S/R *la relation d'équivalence dans* B *, quotient de* S *par* R (chap. II, § 6, n°). *Pour qu'il existe sur* $B/(S/R)$ *une structure quotient* $\mathcal{S}''$ *de* $\mathcal{S}'$ *par* S/R *, il faut et il suffit qu'il existe sur* A/S *une structure quotient de* $\mathcal{S}_0$ *par* S *, et l'application canonique de* A/S (*muni de* $\mathcal{S}_0$) *sur* $(A/R)/(S/R)$ (*muni de* $\mathcal{S}''$) *est un isomorphisme*.

En effet, soit φ l'application canonique de A sur $A/R=B$, ψ celle de B sur B (S/R). En vertu de CE14, dire que $\mathcal{S}''$ est structure quotient de $\mathcal{S}'$ par S/R équivaut à dire que $\mathcal{S}''$ est structure finale pour la triplet $(A, \mathcal{S}, \psi\circ\varphi)$. Le critère résulte alors de ce que la relation $\psi(\varphi(x))=\psi(\varphi(y))$ est équivalente à S .

Remarques.- 1) Soient A un ensemble muni d'une structure $\mathcal{S}$ d'espèce Σ, R une relation d'équivalence dans A telle qu'il existe sur E=A/R une structure quotient $\mathcal{S}'$ de $\mathcal{S}$ par R . Soient φ l'application canonique de A sur E ; en général, il n'existe pas de section s associée à φ (chap.II, § 3,n°) qui soit un Σ-morphisme de E dans A . Supposons qu'une telle section s existe, et en outre qu'il existe une structure $\mathcal{S}''$ induite par $\mathcal{S}$ sur s(E) ; alors, en désignant par i l'injection de s(E) dans A , et en posant $s=i\circ f$, l'application biunivoque f est un isomorphisme de E sur s(E). En effet, f est un Σ-morphisme par définition de la structure induite et $g=\varphi\circ i$ est un Σ-morphisme de s(E) sur E en raison de (MO_{II}) ; comme $g\circ f$ est l'application identique de E et $f\circ g$ l'application identique de s(E), la conclusion résulte du critère CE5.

2) Soit Σ une espèce de structure telle que pour deux ensembles A,B munis de structures $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}'$ d'espèce Σ, il existe une structure produit $\mathcal{S}''$ de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$. Pour toutes les espèces de structure Σ usuelles qui remplissent la condition précédente, l'image directe de $\mathcal{S}''$ par la projection pr_1 (resp. pr_2) existe et est égale à $\mathcal{S}$ (resp. $\mathcal{S}'$) ; mais on peut donner des exemples où cette condition n'est pas vérifiée (exerc.4). En outre, pour les structures usuelles, il existe $b\in B$ tel que la section $x\to(x,b)$ associée à pr_1 soit un Σ-morphisme de A dans $A\times B$ (muni de $\mathcal{S}''$) et que $\mathcal{S}''$ induise une structure d'espèce Σ sur le sous-ensemble $A\times\{b\}$. Mais on peut donner des exemples où il n'existe aucune section associée à l'application pr_1 et qui soit un Σ-morphisme de A dans $A\times B$ (exerc.5).

III : Borne inférieure d'une famille de structures.

Soit $(\mathcal{S}_\iota)_{\iota \in I}$ une famille de structures de même espèce Σ sur un même ensemble A ; soit A_ι l'ensemble A muni de la structure $\mathcal{S}_\iota$, et e_ι l'application identique de A_ι dans A . S'il existe une structure finale $\mathcal{S}$ pour la famille $(A_\iota, \mathcal{S}_\iota, e_\iota)_{\iota \in I}$, il résulte de CE13 que $\mathcal{S}$ est la borne inférieure de l'ensemble des $\mathcal{S}_\iota$ dans l'ensemble ordonné des structures d'espèce Σ sur A . Mais il peut se faire que cet ensemble admette une borne inférieure sans que cette borne inférieure soit structure finale pour la famille $(A_\iota, \mathcal{S}_\iota, e_\iota)_{\iota \in I}$ (ex.3).

Exercices.- 1) On considère n lettres $x_1, \dots, x_n$ et quatre signes P^+, P^-, X^+, X^- . On attribue à chacune des lettres x_i le poids 0, aux signes P^+ et P^- le poids 1 , aux signes X^+ et X^- le poids 2. On définit en outre pour chacun des signes précédents sa variance, qui est un des deux éléments 0,1 de F_2 , de sorte que les lettres x_i et les signes P^+, X^+ aient pour variance 0 et les signes P^-, X^- la variance 1 . La variance d'un assemblage des signes précédents est alors la somme des variances des signes qui y figurent (somme prise dans F_2). On dit qu'un tel assemblage A est un échelon signé s'il satisfait aux conditions suivantes : 1° c'est un assemblage équilibré (chap.I, Appendice, n°3) ; 2° si A n'est pas une lettre, il commence par un des signes P^+, P^-, X^+ ou X^- , et le ou les assemblages antécédents à ces signes sont des échelons signés ; 3° si en outre A commence par un signe X^+, les deux assemblages antécédents doivent avoir la variance 0, et si A commence par X^-, les deux assemblages antécédents doivent avoir la variance 1. Un échelon signé est dit covariant si sa variance est 0, contravariant si sa variance est 1 .

Si, dans un échelon signé A, on remplace les signes $\mathcal{P}^+$ et $\mathcal{P}^-$ par $\mathcal{P}$, les signes X^+ et X^- par X, on obtient un échelon sur $x_1,\dots,x_n$ (§ 1, exercice). Toute réalisation de cet échelon est dite réalisation de l'échelon signé A et se note $A(E_1,\dots,E_n)$.

Soient $E_1,\dots,E_n,E'_1,\dots,E'_n$ 2n ensembles, f_i une application de E_i dans E'_i $(1\leqslant i\leqslant n)$. Montrer qu'à chaque échelon signé S sur $x_1,\dots,x_n$, on peut associer une application $\{f_1,\dots,f_n\}^S$ ayant les propriétés suivantes :

1° si S est covariant (resp. contravariant) $\{f_1,\dots,f_n\}^S$ est une application de $S(E_1,\dots,E_n)$ dans $S(E'_1,\dots,E'_n)$ (resp. de $S(E'_1,\dots,E'_n)$ dans $S(E_1,\dots,E_n)$).

2° Si S est une lettre x_i, $\{f_1,\dots,f_n\}^S$ est f_i.

3° Si S est $\mathcal{P}^+T$ (resp. $\mathcal{P}^-T$), si $g=\{f_1,\dots,f_n\}^T$ est une application de F dans F', $\{f_1,\dots,f_n\}^S$ est l'extension de g aux ensembles de parties (resp. l'extension réciproque de g aux ensembles de parties).

4° Si S est X^+TU ou X^-TU, si $\{f_1,\dots,f_n\}^T$ est une application g de F dans F' et $\{f_1,\dots,f_n\}^U$ une application h de G dans G', $\{f_1,\dots,f_n\}^S$ est l'extension $g\times h$, application de $F\times G$ dans $F'\times G'$.

L'application $\{f_1,\dots,f_n\}^S$ est appelée l'<u>extension canonique signée</u> de $f_1,\dots,f_n$ correspondant à l'échelon signé S. Lorsque dans S ne figurent que les lettres et les signes $\mathcal{P}^+$ et X^+, l'extension canonique signée est égale à l'extension canonique $\langle f_1,\dots,f_n\rangle^S$.

Montrer que si f_i est une application de E_i dans E'_i, f'_i une application de E'_i dans E''_i $(1\leqslant i\leqslant n)$, on a, pour un échelon signé covariant S

$$\{f'_1 \circ f_1, \ldots, f'_n \circ f_n\}^S = \{f'_1, \ldots, f'_n\}^S \circ \{f_1, \ldots, f_n\}^S$$

et, pour un échelon signé contravariant S

$$\{f'_1 \circ f_1, \ldots, f'_n \circ f_n\}^S = \{f_1, \ldots, f_n\}^S \circ \{f'_1, \ldots, f'_n\}^S .$$

En déduire que si f_i est une bijection de E_i sur E'_i et f'_i la bijection réciproque, $\{f_1, \ldots, f_n\}^S$ est une bijection et $\{f'_1, \ldots, f'_n\}^S$ la bijection réciproque, et montrer que si T est l'échelon (non signé) correspondant à l'échelon signé S , $\{f_1, \ldots, f_n\}^S$ est égale à $\langle f_1, \ldots, f_n\rangle^T$ ou à $\langle f'_1, \ldots, f'_n\rangle^T$ suivant que S est covariant ou contravariant.

2) Soient $x_1, \ldots, x_n$ des lettres, $T_1, \ldots, T_p$ des échelons signés sur ces lettres (exerc. 1). Soit Σ une espèce de structure dont la caractérisation typique est

$$s_1 \in \mathfrak{P}(T_1(x_1, \ldots, x_n)) \text{ et } \ldots \text{ et } s_p \in \mathfrak{P}(T_p(x_1, \ldots, x_n)).$$

Montrer qu'on peut définir une notion de Σ-morphisme de la façon suivante : étant donnés n ensembles $E_1, \ldots, E_n$ munis d'une structure $(S_1, \ldots, S_p)$ d'espèce Σ , n ensembles $E'_1, \ldots, E'_n$ munis d'une structure $(S'_1, \ldots, S'_p)$ d'espèce Σ et une application f_i de E_i dans E'_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, on dit que $(f_1, \ldots, f_n)$ est un Σ-morphisme si les applications f_i vérifient les conditions suivantes :

1° si T_j est un échelon covariant

$$\{f_1, \ldots, f_n\}^{T_j} \langle S_j \rangle \subset S'_j \;;$$

2° si T_j est un échelon contravariant

$$\{f_1, \ldots, f_n\}^{T_j} \langle S'_j \rangle \subset S_j \;.$$

Montrer que les conditions (MO_{II}) et (MO_{III}) sont remplies

*et qu'en choisissant convenablement les variances, on peut retrouver de cette manière la définition des Σ-morphismes pour les structures

d'ordre, les structures topologiques et les structures algèbriques.*
En outre, si Σ' est une espèce de structure <u>sous-jacente</u> à Σ (§ 1, n°5), tout Σ-morphisme est aussi un Σ'-morphisme.

3) Soit Σ l'espèce de structure définie par trois lettres A, S, H, la caractérisation typique

$$S \in \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(A)) \quad \text{et} \quad H \in \mathfrak{P}(A)$$

et un axiome : "$H \in S$ et $R\{S\}$", où $R\{S\}$ est l'axiome de l'espèce de structure topologique (§ 1, n°4, <u>Exemple</u> 3). Montrer que Σ est transportable. Si A, A' sont deux ensembles munis respectivement de structures (S, H), (S', H') d'espèce Σ, on définit les Σ-morphismes f de A dans A' comme étant les applications continues de A dans A' (pour les topologies S, S') telles que $f(H) \subset H'$. Montrer que ces Σ-morphismes peuvent se définir par le procédé de l'exerc. 2 . Donner un exemple d'une famille ($\mathcal{S}_\iota$) de structures d'espèce Σ sur un ensemble A telle qu'il existe une borne supérieur de cette famille de structures, mais qu'elle ne soit pas structure initiale pour la famille (A_ι, $\mathcal{S}_\iota$, e_ι), où A_ι désigne l'ensemble A muni de la structure $\mathcal{S}_\iota$ et e_ι l'application identique de A dans A_ι (considèrer un espace topologique A dans lequel un ensemble fermé, ayant un intérieur non vide et distinct de son intérieur est intersection d'une famille d'ensembles ouverts).

Soit Θ l'espèce de structure ayant même caractérisation typique que Σ, mais avec l'axiome "$A-H \in S$ et $R\{S\}$". Les Θ-morphisme étant définis de la même façon que les Σ-morphismes, donner un exemple d'une fa-mille ($\mathcal{S}'_\iota$) de structures d'espèce Θ sur un ensemble A, telle qu'il existe une borne inférieure de cette famille de structures, mais que cette borne inférieure ne soit pas structure finale pour la famille $(A_\iota, \mathcal{S}'_\iota, e_\iota)$.

4) On considère une espèce de structure Σ définie de la façon suivante : elle comporte deux ensembles de base A,B, B étant un ensemble auxiliaire ; A est muni d'une topologie séparée sous-jacente à Σ (et arbitraire). La donnée de Σ comporte en outre une application φ d'une partie de B dans A, avec l'axiome suivant : $B = \mathbf{R}$ et φ est définie dans un intervalle de la forme $[0,a]$, avec $a > 0$, et est continue et injective. Un Σ-morphisme d'un ensemble A dans un ensemble A' est une application continue f de A dans A' telle que φ' soit un prolongement de $f\circ\varphi$ (φ' étant l'application qui définit la structure de A'). Montrer que ces Σ-morphismes peuvent se définir par le procédé de l'exerc.2, et qu'il existe une structure produit sur le produit de deux ensembles A_1, A_2 munis de structures d'espèce Σ. Mais donner un exemple où l'image directe par la première projection pr_1 de la structure produit sur $A_1 \times A_2$ n'est pas la structure donnée sur A_1 (prendre pour A_1 un espace homéomorphe à $\mathbf{R}^2$).

5) Soit Σ une espèce de structure comportant un ensemble de base A, une structure topologique sous-jacente sur A et deux éléments a,b de A avec l'axiome additionnel $a \neq b$. On définit un Σ-morphisme de A dans A' comme une application continue f de A dans A' telle que $f(a)=a'$ et $f(b)=b'$. Montrer que pour deux ensembles A,B munis de structures d'espèce Σ, il existe une structure produit sur $A \times B$ et que l'image directe par pr_1 (resp. pr_2) est la structure de A (resp. B), *mais donner un exemple où il n'existe pas de section associée à pr_1 et qui soit un Σ-morphisme de A dans $A \times B$.*

§ 3. Applications universelles.

1. *Ensembles et applications universels*.

Soient Σ et Θ deux espèces de structure (que nous supposons toujours, pour simplifier, définies chacune sur un seul ensemble) ; pour abréger, nous dirons " Σ-ensemble" (resp. " Θ -ensemble") au lieu d' "ensemble muni d'une structure d'espèce Σ " (resp. Θ). Nous supposerons que pour l'espèce Θ , on ait défini une notion de Θ -morphisme (§ 2, n°1). En outre, considérons la théorie $\mathcal{C}'$ ayant comme axiomes tous ceux de $\mathcal{C}_{\Sigma}$ et tous ceux de $\mathcal{C}_{\Theta}$; Σ étant définie sur x, et Θ sur y , (x et y distinctes) nous supposerons qu'on a défini un terme $N\{x,y\}$ de la théorie $\mathcal{C}'$, de façon que : 1° la relation $N\{x,y\} \subset \mathcal{F}(x,y)$ soit un théorème de $\mathcal{C}'$; 2° si on exprime la relation $\varphi \in N\{x,y\}$ en disant que φ *est un* (Σ , Θ)-*morphisme de* x *dans* y , la condition suivante soit vérifiée :

(BM) *Si* φ *est un* (Σ , Θ)-*morphisme d'un* Σ -*ensemble* E *dans un* Θ -*ensemble* F , *et si* f *est un* Θ -*morphisme de* F *dans un* Θ -*ensemble* F', *alors* $f \circ \varphi$ *est un* (Σ , Θ)-*morphisme de* E *dans* F'.

Cela posé, soit E un Σ -ensemble. On dit qu'un Θ -ensemble F_0 et un (Σ , Θ)-morphisme φ_0 de E dans F_0 sont *universels* pour E si la condition suivante est remplie :

(AU) *Pour tout* (Σ , Θ)-*morphisme* φ *de* E *dans un* Θ -*ensemble* F , *il existe un* Θ -*morphisme* f *de* F_0 *dans* F *tel que* $\varphi = f \circ \varphi_0$.

On dit encore dans ce cas que le couple (F_0, φ_0) est *solution du problème d'applications universelles* pour E (relativement à la donnée de Σ , Θ , des Θ -morphismes et des (Σ , Θ)-morphismes).

Soient (F_0,φ_0) et (F_1,φ_1) deux solutions du problème d'applications universelles pour E . La condition (AU) montre qu'il existe alors un Θ-morphisme f_0 de F_0 dans F_1 et un Θ-morphisme f_1 de F_1 dans F_0 tels que $\varphi_1=f_0\circ\varphi_0$ et $\varphi_0=f_1\circ\varphi_1$. Il en résulte que la restriction de $f_0\circ f_1$ à $\varphi_1(E)$ et la restriction de $f_1\circ f_0$ à $\varphi_0(E)$ sont les applications identiques de ces deux ensembles. Nous dirons que (F_0,φ_0) est une solution <u>stricte</u> du problème d'applications universelles pour E si elle satisfait à (AU) et à la condition

(AU') <u>Pour tout</u> Θ<u>-ensemble</u> F , <u>deux</u> Θ <u>-morphismes de</u> F_0 <u>dans</u> F <u>qui coïncident dans</u> $\varphi_0(E)$ <u>sont égaux</u>.

Si (F_0,φ_0) et (F_1,φ_1) sont des solutions strictes du problème d'applications universelles pour E , le raisonnement fait ci-dessus montre que les Θ-morphismes $f_0\circ f_1$ et $f_1\circ f_0$ sont les applications identiques de F_1 et F_0 respectivement. Par suite (§ 2,critère CE5) f_0 est un <u>isomorphisme</u> de F_0 sur F_1 et f_1 l'isomorphisme réciproque. On exprime encore ce résultat en disant qu'une solution stricte du problème d'applications universelles pour E est <u>unique à un isomorphisme près</u> (cf. n°3, <u>Exemple</u> IX).

On notera en outre que, lorsque (F_0,φ_0) est une solution stricte du problème d'applications universelles pour E , pour tout (Σ,Θ)-morphisme φ de E dans un Θ-ensemble F , il existe un Θ-morphisme f <u>et un seul</u> de F_0 dans F tel que $\varphi = f\circ\varphi_0$.

2. <u>Existence d'applications universelles</u>.

Un problème d'applications universelles n'a pas nécessairement de solution (exerc.1). Nous allons montrer toutefois que des conditions assez fréquemment réalisées dans les diverses théories mathématiques usuelles entraînent l'existence d'une solution <u>stricte</u>.

Considérons les conditions suivantes :

(CU_I) Sur tout produit d'une famille de Θ-ensembles, il existe une structure produit d'espèce Θ (§ 2, n°4).

(CU_{II}) Soit $(F_\iota)_{\iota \in I}$ une famille de Θ-ensembles, et pour tout $\iota \in I$, soit φ_ι un (Σ, Θ)-morphisme de E dans F_ι. Alors l'application $(\varphi_\iota)_{\iota \in I}$ de E dans $\prod_{\iota \in I} F_\iota$ (muni de la structure produit) est un (Σ, Θ)-morphisme.

Pour énoncer la troisième condition, nous dirons pour abréger qu'une partie G d'un Θ-ensemble F est Θ-fermée si la structure de F induit une structure d'espèce Θ sur G (§ 2, n°4).

(CU_{III}) Soit $(F_\iota)_{\iota \in I}$ une famille de parties Θ-fermée d'un Θ-ensemble F, et pour chaque $\iota \in I$, soit f_ι un Θ-morphisme de F_ι dans un Θ-ensemble F' ; alors l'ensemble des $y \in F$ tels que tous les $f_\iota(y)$ soient égaux est Θ-fermé.

Remarquons que si on applique en particulier (CU_{III}) aux injections des F_ι dans F, on en déduit que toute intersection de parties Θ-fermées de F est encore Θ-fermée. Etant donnée une partie quelconque G de F, il existe donc une plus petite partie Θ-fermée de F contenant G, savoir l'intersection de la famille des parties Θ-fermées contenant G ; nous dirons pour abréger que cette intersection est la Θ-fermeture de G dans F (ou est Θ-engendrée par G).

La dernière condition est alors :

(CU_{IV}) Soit G une partie d'un Θ-ensemble F ; il existe un cardinal c(G) ne dépendant que du cardinal de G et majorant le cardinal de la Θ-fermeture de G dans F.

Dans la plupart des cas usuels, on pourra prendre $c(G) = 2^{2^{\mathrm{Card}(G)}}$.

Supposons d'abord que les conditions (CU_I),(CU_{II}),(CU_{III}), soient remplies. Alors, s'il existe une solution (F_o,φ_o) du problème d'applications universelles pour E , il existe aussi une solution stricte. En effet, il résulte de (CU_{III}) que deux Θ-morphismes de F_o dans un Θ-ensemble F , qui coïncident dans $\varphi_o(E)$, coïncident aussi dans la Θ-fermeture F'_o de $\varphi_o(E)$; par suite, (F'_o,φ_o) est une solution stricte du problème d'applications universelles pour E .

Montrons en second lieu que si en outre la condition (CU_{IV}) est remplie et si l'espèce de structure Θ est transportable, alors il existe un ensemble et une application universels pour E . En effet, soit U un ensemble dont le cardinal est $c(E)$; tout ensemble de cardinal $\leqslant c(E)$ est donc équipotent à une partie de U . Considérons la famille $(\varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$ de tous les (Σ, Θ)-morphismes de E dans des parties de U munies de structures d'espèce Θ (on notera que si l'échelon T(x) est tel que toute structure d'espèce Θ sur x soit élément de T(x), l'ensemble des structures d'espèce Θ sur les parties de U est une partie de T(U) comme il résulte de CE2 appliqué à l'injection canonique d'une partie de U dans U). Désignons par F_α le Θ-ensemble qui est l'ensemble d'arrivée de φ_α ; soit F_o le Θ-ensemble produit des F_α (qui existe d'après (CU_I)), et soit $\varphi_o=(\varphi_\alpha)$, qui est un (Σ, Θ)-morphisme en vertu de (CU_{II}). Montrons que (F_o,φ_o) est solution du problème d'applications universelles pour E . En effet, étant donné un (Σ, Θ)-morphisme φ de E dans un Θ-ensemble F , on peut supposer que F est la Θ-fermeture de $\varphi(E)$, en vertu de (CU_{III}) et de la définition d'une structure induite (§ 2,n°4). Comme $\mathrm{Card}(\varphi(E)) \leqslant \mathrm{Card}(E) \leqslant c(E)$, il existe, en vertu de (CU_{IV}), une partie F' de U équipotente à F ;

soit g une bijection de F sur F' ; si on transporte par g la structure d'espèce Θ de F, il existe un β tel que F' (muni de cette structure transportée) soit égal à F_β et que $g \circ \varphi = \varphi_\beta$. Alors $f = g^{-1} \circ pr_\beta$ est un Θ-morphisme de F_o dans F tel que $\varphi = f \circ \varphi_o$, ce qui achève la démonstration.

3. Exemples d'applications universelles.

*De nombreux problèmes d'applications universelles se présentent dans des théories mathématiques très diverses ; nous allons signaler les plus importants, qui seront pour la plupart abordés ultérieurement dans le cours de ce Traité :

I. Structures algèbriques libres. Prenons pour Σ l'espèce de structure d'ensemble (§ 1, n°4, Remarque 3), pour Θ une espèce de structure algèbrique (définie par une ou plusieurs lois de composition ; cf. Alg., chap. I) ; un (Σ, Θ)-morphisme sera une application quelconque d'un ensemble dans un Θ-ensemble, et un Θ-morphisme sera une représentation pour l'espèce Θ envisagée. Toutes les espèces de structure algèbrique usuelles vérifient (CU_{III}) et (CU_{IV}) ; à l'exception de l'espèce de structure de corps, elles vérifient aussi (CU_I), et (CU_{II}) est ici une conséquence triviale de (CU_I).

Le Θ-ensemble universel F_o et l'application universelle φ_o correspondant à un ensemble (quelconque) E sont tels en général que φ_o soit injective, de sorte qu'on peut identifier E à $\varphi_o(E)$ et que E engendre F_o ; toute application de E dans un Θ-ensemble F se prolonge donc d'une seule manière en une représentation de F_o dans F.
On dit que F_o est le Θ-ensemble libre engendré par E ; c'est ainsi qu'on parlera en Algèbre de monoide libre (Alg., chap. I, § 1, n°3), de groupe libre (Alg., chap. I, § 6, exerc. 19), de module libre

(Alg., chap.II et VII), d'algèbre libre (Alg.,chap.III) ; dans chacun de ces cas, on définira F_o et φ_o sans utiliser le procédé général décrit au n°2 .

II. Anneaux et corps de fractions. La donnée d'une structure d'espèce Σ sur un ensemble A comporte une structure d'anneau commutatif sur A , ayant un élément unité, et d'une partie multiplicativement stable S de A ; une structure d'espèce Θ est une structure d'espèce Σ où on ajoute l'axiome que les éléments de S sont inversibles. Un (Σ, Θ)-morphisme de A dans A' est une représentation (pour la structure d'anneau) qui applique S dans l'ensemble correspondant S' ; définition analogue pour les Θ -morphismes. Ici la condition (CU_I) n'est pas vérifiée, mais on peut cependant démontrer l'existence d'une solution stricte pour le problème d'applications universelles. Le cas le plus important est celui où on suppose que S est le complémentaire de 0 dans A : une structure d'espèce Σ est alors une structure d'anneau d'intégrité, une structure d'espèce Θ est une structure de corps commutatif ; le Θ -ensemble universel associé à un anneau d'intégrité A est alors appelé le corps des fractions de A (Alg.,chap.I, § 9, prop.4 ; voir 2è Partie, chapitre sur les spécialisations et valuations).

III. Produit tensoriel de deux modules. Θ est l'espèce de structure de A-module unitaire, Σ l'espèce de structure de A-module unitaire somme directe de deux sous-modules ; A est un anneau commutatif ayant un élément unité, considéré comme ensemble auxiliaire ; un Σ -ensemble E est identifié au produit des deux sous-modules M,N intervenant dans sa structure. Un Θ -morphisme est une application linéaire ; un (Σ , Θ)-morphisme de $M \times N$ dans F est une application bilinéaire ;

la condition (BM) est évidemment vérifiée, ainsi que les conditions (CU_I), (CU_{II}), (CU_{III}) et (CU_{IV}) (avec $c(G)=\mathrm{Card}(G)\mathrm{Card}(A)$ si A ou G est infini, $\mathrm{Card}(\mathbb{N})$ dans le cas contraire). Le A-module universel F_o correspondant au module $M \times N$ est appelé le produit tensoriel de M par N et noté $M \otimes N$; et l'application universelle φ_o (qui est bilinéaire) notée $(x,y) \to x \otimes y$ (cf. Alg., chap. III, § 1).

IV. Extension de l'anneau d'opérateurs d'un module. Soient A un anneau commutatif ayant un élément unité, B un sous-anneau de A contenant l'élément unité de A . L'espèce Θ est l'espèce de structure de A-module unitaire, l'espèce Σ celle de structure de B-module unitaire (A et B étant considérés comme ensembles auxiliaires) ; les Θ-morphismes sont les applications A-linéaires, les (Σ, Θ)-morphismes les applications B-linéaires. Le A-module universel F_o correspondant au B-module E est alors appelé le module obtenu par extension à A de l'anneau d'opérateurs B de E , et noté $E_{(A)}$ (Alg., chap. III, § 2).

V. Complétion d'un espace uniforme. Σ est l'espèce de structure uniforme, Θ celle de structure d'espace uniforme séparé et complet ; les (Σ, Θ)-morphismes (resp. les Θ-morphismes) sont les applications uniformément continues d'un Σ-ensemble dans un Θ-ensemble (resp. d'un Θ-ensemble dans un Θ-ensemble). Les parties Θ-fermées d'un espace uniforme complet sont ici les parties fermées pour la topologie de l'espace, et les conditions (CU_I), (CU_{II}) et (CU_{III}) sont vérifiées trivialement ; on voit aisément que (CU_{IV}) est vérifiée en prenant $c(G)=2^{2^{\mathrm{Card}(G)}}$. L'espace uniforme séparé et complet F_o n'est autre (à une isomorphie près) que le complété de l'espace uniforme séparé associé à E (Top. gén., chap. II, §§ 1 et 3).

VI. Structure uniforme universelle. Σ est l'espèce de topologie d'espace complètement régulier, Θ l'espèce de structure uniforme séparée ; les (Σ, Θ)-morphismes sont les applications continues (d'un espace complètement régulier dans un espace uniforme séparé), les Θ-morphismes les applications uniformément continues (d'un espace uniforme séparé dans un espace uniforme séparé). Les conditions (CU_I), (CU_{II}), (CU_{III}) et (CU_{IV}) sont trivialement vérifiées. On peut prendre pour F_o l'espace E muni de la structure uniforme la plus fine compatible avec sa topologie dite structure uniforme universelle (Top.gén., chap.IX, § 1, exerc.5), φ_o étant l'application identique.

VII. Compactification de Stone-Čech. Σ est encore l'espèce de topologie d'espace complètement régulier, Θ l'espèce de topologie d'espace compact, les (Σ, Θ)-morphismes et les Θ-morphismes étant les applications continues correspondantes. Les parties Θ-fermée sont encore ici les parties fermées au sens topologique, et la vérification de (CU_I), (CU_{II}), (CU_{III}) et (CU_{IV}) se fait comme dans l'exemple V. On peut prendre pour F_o le "compactifié de Stone-Čech" de E, obtenu en complétant E pour la structure uniforme la moins fine rendant uniformément continues les applications continues de E dans $[0,1]$ (Top.gén., chap.IX, § 1,exerc.7), φ_o étant l'injection de E dans F_o.

VIII. Groupes topologiques libres. Σ est l'espèce de topologie d'espace complètement régulier, Θ l'espèce de structure de groupe topologique séparé ; les (Σ, Θ)-morphismes sont les applications continues (d'un espace complètement régulier dans un groupe topologique séparé), les Θ-morphismes sont les représentations continues (d'un groupe topologique séparé dans un groupe topologique séparé).

Les conditions (BM), (CU_I),(CU_{II}),(CU_{III}) sont trivialement vérifiées ; la Θ -fermeture d'un ensemble est le sous-groupe qu'il engendre, et par suite (CU_{IV}) est vérifié avec $c(G)=\sup(\mathrm{Card}(G), \mathrm{Card}(\mathcal{N}))$. Le groupe topologique F_o solution du problème d'applications universelles ainsi obtenue est appelé le <u>groupe topologique libre engendré par l'espace</u> E ; on peut montrer que φ_o est un <u>homéomorphisme</u> de E sur le sous-espace $\varphi_o(E)$ de F_o (*). Au lieu de prendre pour Θ l'espèce de structure de groupe topologique séparé, on pourrait aussi prendre des espèces de structures telles que celles de groupe abélien topologique séparé, de groupe compact, d'anneau topologique séparé, d'espace vectoriel topologique séparé (sur un corps topologique considéré comme ensemble auxiliaire), etc.

IX. <u>Clôture algèbrique d'un corps</u>. Σ est l'espèce de structure de corps commutatif, Θ l'espèce de structure de corps commutatif algèbriquement clos ; les (Σ, Θ)-morphismes sont les représentations (d'un corps commutatif dans un corps commutatif algèbriquement clos). Ici la condition (CU_I) n'est pas vérifiée ; le problème d'applications universelles admet toujours une solution (la <u>clôture algèbrique</u> de E), mais pas en général de solution <u>stricte</u> ; toutefois la clôture algèbrique F_o est unique à un isomorphisme près (<u>Alg</u>.,chap.V, § 4), mais le Θ-morphisme f de F_o dans F tel que $\varphi = f\varphi_o$ n'est plus unique (pour un φ donné).*

(*) Cf. P. SAMUEL, Bull.Amer. Math. Soc. t.LIV (1948), p.591-598.

4. Les problèmes d'immersion.

Supposons que l'espèce de structure Σ soit sous-jacente à l'espèce de structure Θ (§ 1, n°5) (en particulier, Σ peut être une espèce de structure moins riche que Θ (§ 1, n°6)). Supposons en outre que tout Θ-morphisme d'un Θ-ensemble F dans un Θ-ensemble F' soit aussi un Σ-morphisme lorsque F et F' sont munis des structures sous-jacentes d'espèce Σ. Il est clair alors que si l'on définit un (Σ, Θ)-morphisme d'un Σ-ensemble E dans un Θ-ensemble F comme un Σ-morphisme (lorsque F est muni de la structure sous-jacente d'espèce Σ), la condition (BM) est satisfaite.

Cela étant, nous dirons que l'on peut plonger un Σ-ensemble E dans un Θ-ensemble F s'il existe une injection j de E dans F telle que : 1° la structure sous-jacente d'espèce Σ sur F induit une structure d'espèce Σ sur j(E) ; 2° lorsque j(E) est muni de cette structure induite, j est un isomorphisme de E sur j(E).

Supposons qu'il existe un Θ-ensemble F et une application j satisfaisant aux conditions précédentes (auquel cas on dit que (F,j) est une solution au problème d'immersion pour E). Supposons en outre que le problème d'applications universelles pour E admette une solution stricte (F_o, φ_o) ; comme j est, par définition, un (Σ, Θ)-morphisme, on peut écrire $j = f \circ \varphi_o$ où f est un Θ-morphisme de F_o dans F. On en conclut aussitôt que φ_o est une injection et que la restriction de f à $\varphi_o(E)$ est une bijection sur j(E). Supposant Σ transportable, on peut transporter par φ_o la structure (d'espèce Σ) de E sur $\varphi_o(E)$, et lorsque $\varphi_o(E)$ est muni de cette structure $\mathcal{S}$, la restriction de f à $\varphi_o(E)$ est un isomorphisme sur j(E). Si en outre la structure d'espèce Σ de F_o induit sur $\varphi_o(E)$ la structure $\mathcal{S}$, on voit que

(F,φ_0) est aussi une solution du problème d'immersion. Lorsqu'il en est ainsi, il arrivera souvent en outre, lorsque f applique F_0 sur F que la structure d'espèce Θ de F soit l'image directe par f de la structure d'espèce Θ de F_0.

Exemples.- *Les structures algèbriques libres citées dans l'exemple I du n°3 donnent toutes les solutions au problème d'immersion, et ces solutions sont uniques si on impose à $j(E)$ la condition d'engendrer F. Dans l'exemple I^I, φ_0 est un isomorphisme de A sur $\varphi_0(A)$ lorsque S est formé d'éléments réguliers, mais non dans le cas général. L'exemple V donne une solution au problème d'immersion lorsque E est un espace uniforme séparé. Les exemples VI, VII et VIII donnent toujours des solutions au problème d'immersion, comme on l'a déjà signalé.*

Exercices.- 1) On prend pour Σ l'espèce de structure topologique, pour Θ l'une des espèces de structure définies dans les exerc.4 et 5 du § 2, les (Σ,Θ)-morphismes étant les applications continues. Montrer que le problème d'applications universelles n'a pas en général de solution.

2) Soit Θ une espèce de structure comportant un ensemble de base A. On définit une espèce de structure Σ comportant deux ensembles de base E et I par la donnée : 1° d'une partition $(A_\iota)_{\iota\in I}$ de E ayant I pour ensemble d'indices ; 2° sur chaque A_ι, d'une structure $\mathcal{S}_\iota$ d'espèce Θ. Un (Σ,Θ)-morphisme φ de E dans A est défini par la condition que sa restriction φ_ι à chaque A_ι est un Θ-morphisme de A_ι dans A. L'espèce de structure Σ (où I est considéré comme ensemble auxiliaire), est appelée l'espèce

 40

de justaposition de familles de structures d'espèce Θ .
Montrer que s'il existe une solution stricte (F_0, φ_0) au problème d'applications universelles pour E , la structure d'espèce Θ sur F_0 est structure finale pour la famille $(A_\iota, \mathcal{S}_\iota, \varphi_\iota)_{\iota \in I}$, φ_ι étant la restriction de φ_0 à A_ι . En outre, soit F un ensemble, et pour chaque $\iota \in I$, soit f_ι une application de A_ι dans F . S'il existe sur F une structure finale d'espèce Θ pour la famille $(A_\iota, \mathcal{S}_\iota, f_\iota)$, on peut écrire $f_\iota = f \circ \varphi_\iota$, où f est un Θ -morphisme de F_0 dans F , et la structure de F est l'image directe de la structure de F_0 par f .

Applications aux cas suivants :

1° Θ est une espèce de structure algèbrique telle que monoïde, groupe, module, algèbre, etc. Le Θ-ensemble F_0 existe alors et est appelé produit libre des A_ι dans le cas des groupes, somme directe des A_ι dans le cas des modules, composé direct des A_ι dans le cas des algèbres.

2° Θ est l'espèce de structure de groupe topologique, ou d'espace vectoriel topologique ; F_0 existe dans ces deux cas, et est appelé somme directe topologique dans le cas des espaces vectoriels topologiques localement convexes.