RÉDACTION N° 183

COTE : NBR 086

TITRE : ALGÈBRE
CHAPITRES III ET IV - RAPPORT POUR LA RÉÉDITION

ASSOCIATION DES COLLABORATEURS DE NICOLAS BOURBAKI

NOMBRE DE PAGES : 28

NOMBRE DE FEUILLES : 28

Archives
M. Koszul
Juin 1953

NBR 086

183 2

ALGÈBRE - Chapitres III et IV .

Rapport pour la réédition.

Sommaire.

Commentaires.

Il n'a pas semblé que ces Chapitres doivent subir une refonte complète. Les améliorations souhaitables consistent en compléments ou en corrections sans grave répercussions sur le contexte. On observera que le paragraphe sur les différentielles est le seul qui exige vraiment une retouche. Pour le reste, les lacunes de l'édition actuelle ne doivent pas avoir de graves répercussions sur le reste de l'Ouvrage.

Appendices au Chapitre I.

§ A. On propose de remonter au Chapitre I l'introduction des dérivations de manière à pouvoir combler certaines lacunes du Chapitre II .

§ B. Ce paragraphe pourra venir au besoin avec l'Algèbre homologique. Il est nécessaire à l'étude simultanée des algèbres extérieures et des algèbres de polynomes donnée au § D . Mais ce n'est pas la seule raison pour l'ajouter au Chapitre I .

Projet pour le nouveau Chapitre II (ancien Chapitre III)

§ 1. Tenseurs et espaces tensoriels. Ancien § 4 du Chapitre III le N°6 étant complété par le § B du présent rapport.

§ 2. Algèbre commutative gauche d'un module gradué. § D du présent rapport.

§ 3. Algèbres extérieure. Ancien § 5 du Chap.III ainsi modifié :
N° 1,2,3,4, inchangés.
N° 5. Définition de l'Algèbre extérieure d'un module E comme l'Algèbre commutative gauche de E gradué par un degré pour lequel tous les éléments sont de degré 1 . On appelle puissance extérieure p-ième de E le sous-module des éléments d'ordre p de son algèbre extérieure. On appelle puissance extérieure p-ième d'une application $f : E \rightarrow F$ l'application de $\Lambda^p E$ dans $\Lambda^p F$ définie par restriction à $\Lambda^p E$ du prolongement canonique de f aux algèbres extérieures. Ajouter à ce N° le milieu de la p. 71 (Table de multiplication dans le cas d'un module libre).

N° 6, inchangé
N° 7, 8, 9 supprimés.

Ajouter un N° donnant la

Proposition. Si E est un module libre ayant une base de n-éléments, et si $\overline{\alpha}$ est la dérivation de l'algèbre extérieure $\bigwedge E$ qui prolonge un endomorphisme α de E , on a $\overline{\alpha}.t$ = (Trace de α)t pour tout n-vecteur t de E .

§ 4. Déterminants. Ancien § 6 du Chap.III. Seul changement : l'échange des lignes et des colonnes (Proposition 4) sera déduit de la Proposition 8 du § D .

§ 5. Déterminants et p-vecteurs décomposables. Ancien § 7 du Cha-p.III.

§ 6. Dualité dans l'Algèbre extérieure. Ancien § 8 du Chap.III ainsi modifié.

N° 1 - Accorder la formule de dualité (1) aux § C et § D .

N° 2 - Terminer le N° avec l'identité de Lagrange.

N° 3 et 4. Supprimés.

N° 5 et 6 inchangés.

Projet pour le nouveau Chapitre III (ancien Chap. IV).

§ 1. Polynomes. Ajouter à la fin du N°1 : Proposition : L'Algèbre des Polynomes par rapport aux indéterminées X_i ($i \in I$) est canoniquement isomorphe à l'algèbre commutative gauche du module libre ayant pour base les X_i et dont tous les éléments sont de degré 0 .

N° 2 Inchangé.
N° 3 On peut rattacher la notion de degré au § B comme suit. On appelle degré total d'un polynome son ordre en tant qu'élément de l'algèbre commutative gauche du A-module M de base X . A toute partie J de I correspond un degré sur M pour lequel les X_i sont de degré 1 lorsque $i \in J$ et de degré 0 lorsque $i \notin J$. Son prolongement à l'algèbre des polynomes $A[X_i]$ est un degré appelé le degré par rapport aux X d'indice $i \in J$.
N° 4, 5 inchangés.

§ 2. Fonctions polynomes inchangé

§ 3. Fractions. inchangé.

§ 4. Différentielles et dérivations.

N° 1. Différentielles des Algèbres Commutatives. § E du présent rapport, avec en moins la Proposition 5 .
N° 2. Prolongement des dérivations. N° 4 du texte publié, complété par la Proposition 5 du § E .
N° 3. N° 1 du texte publié, et N° 6 .
N° 4. N° 2 du texte publié.

(Le N° 3 du texte publié ayant été remplacé par le § A au Chap.I).

§ 5. Séries formelles. inchangé.

§ A - Dérivations.

Définition 1. Soit M un module bilatère sur un anneau A . On appelle dérivation de A dans M un homomorphisme D du groupe abélien A dans M vérifiant la condition $D.(ab) = (D.a)b + a(D.b)$ quels que soient $a, b \in A$.

Soit C le centre de l'anneau A et soit M un module bilatère sur A . Les dérivations de A dans M constituent un sous-groupe du groupe des homomorphismes de A dans M considérés comme groupes abéliens. Ce groupe des dérivations possède une structure de module bilatère sur C qui est définie par $(cD).a = c(D.a)$ et $(Dc).a = (D.a)c$ pour $c \in C$ et $a \in A$.

Les zéros d'une dérivation de A dans un A-module constituent un sous-anneau de A . Si A possède une unité et si M est un module unitaire (à gauche et à droite) sur A , alors l'unité de A est un zéro de toutes les dérivations de A dans M .

Définition 2. On appelle dérivation d'un anneau A les dérivations de l'anneau A dans A muni de sa structure canonique de bimodule sur A .

Si l'anneau A est muni d'une structure d'algèbre sur l'anneau commutatif B , on appellera dérivation de l'algèbre A les dérivations de l'anneau A qui sont des endomorphismes de A considéré comme B-module. Si A possède une unité, et si B est identifié à une sous-anneau de A , les dérivations de l'algèbre A sont les dérivations de l'anneau A nulles sur B .

Proposition 1. Soient A une algèbre sur B, I un idéal bilatère de A et D une dérivation de A . L'endomorphisme du B-module A/I déduit de D par passage au quotient est une dérivation de A/I considéré comme algèbre sur B .

Proposition 2. Formule de Leibnitz (comme dans l'édition 1).

<u>Proposition 3</u>. Soit A une algèbre sur un anneau commutatif B et soient D et D' deux dérivations de A . L'endomorphisme (de B-module) DD' - D'D est une dérivation de l'algèbre A , notée $[D,D']$ et appelée le <u>crochet</u> de D et D' .

<u>Proposition 4</u>. Soit A une algèbre sur un corps K de caractéristique 0 et soit D une dérivation de A telle que, pour tout $a \in A$ il existe un entier p pour lequel $D^p.a = 0$. L'endomorphisme $\exp D = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{n} D^n$ est un automorphisme de l'algèbre A . Si D' est une autre dérivation de A possédant cette propriété et si $DD' = D'D$, alors $\exp (D + D') = (\exp D)(\exp D') = (\exp D')(\exp D)$.

§ B. Degrés en Algèbre linéaire.

N°1 Définitions. Soit Δ un groupe abélien. On appelle degré de type Δ sur un groupe abélien G une famille de sous-groupes G^i dont l'ensemble d'indices est Δ et telle que G soit la somme directe des G^i. Un groupe où a été défini un degré s'appelle un groupe gradué. Le groupe Δ s'appelle le groupe des degrés. Quels que soient Δ et G, la famille définie par $G^i = (0)$ pour $i \neq 0$ (dans Δ) et $G^0 = G$ est un degré de type Δ sur G appelé le degré nul.

Soient Δ et Δ' deux groupes abéliens et α un homomorphisme de Δ dans Δ'. Soit (G^i) $(i \in \Delta)$ un degré de type Δ sur G. Les sommes directes $G^j = \sum_{\alpha \cdot i = j} G^i$ $(i \in \Delta,\ j \in \Delta')$ constituent sur G un degré de type Δ'.

Dans la pratique, on utilisera presque exclusivement des degrés de type Z, Z étant le groupe des entiers rationnels. Occasionnellement, on se servira de degrés de type $Z \times Z$. On dira parfois qu'un groupe gradué de type $Z \times Z$ est un groupe bigradué. Les homomorphismes de $Z \times Z$ sur Z définis par $(p,q) \to p$, $(p,q) \to q$ et $(p,q) \to p+q$ définissent dans un groupe bigradué trois degrés de type Z.

Etant donnés deux degrés sur G de type respectifs Δ et Δ', on dira que ces degrés sont compatibles si G est somme directe des sous-groupes $G^{(i,j)} = G^i \cap G^j$ $(i \in \Delta,\ j \in \Delta')$. Les sous-groupes $G^{(i,j)}$ constituent alors un degré de type $\Delta \times \Delta'$ sur G.

Définition 1. Un anneau A est appelé un anneau gradué lorsqu'est défini sur A, considéré comme groupe abélien, un degré pour lequel

$A^p\ A^q \subset A^{p+q}$ quels que soient p et q dans le groupe des degrés.

Définition 2. Soit A un anneau gradué de type Δ . Un A-module à gauche (resp. à droite) M est appelé un module gradué sur A lorsqu'est défini sur M , considéré comme groupe abélien, un degré de type Δ (M^p) qui vérifie la condition $A^p\ M^r \subset M^{p+r}$ (resp. $M^r\ A^p \subset M^{p+r}$) quels que soient p et r dans Δ .

On exprimera parfois cette condition en disant que le degré sur M est compatible avec la structure de A-module.

Tout groupe abélien gradué est un module gradué sur l'anneau des entiers, gradué par le degré nul. Lorsque A est un anneau gradué, le sous-groupe A^o est un sous-anneau de l'anneau A . Si A possède une unité, alors cette unité est dans A^o. Pour tout module gradué M sur A , chaque M^p est un sous-module de M considéré comme module sur A^o par restriction à A^o des opérations externes. Un élément de M est qualifié d'homogène s'il est contenu dans l'un des sous-groupes M^p . Un élément de M^p est appelé un élément de degré p . Pour tout $u \in M$, on appelle composante de degré p de u la composante de u dans M .

Soit M un module gradué sur un anneau A . On peut identifier M à un sous-module du produit direct M' des M^p . On appellera encore composante de degré p d'un élément $u' \in M'$ la composante de u dans M^p .

Définition 4. Soit M un module gradué sur l'anneau gradué A . Un sous-module N de M est appelé un sous-module homogène s'il est somme directe des $N^p = N \cap M^p$.

Si N est un sous-module homogène de M , les sous-modules $N^p = N \cap M^p$ constituent un degré sur N appelé le degré induit pour lequel N est un A-module gradué. Les images canoniques des sous-groupes M^p dans le A-module quotient M/N constituent un degré sur M/N appelé le degré quotient, pour lequel M/N est un A-module gradué.

Si M est un A-module gradué, le sous-module de M engendré par une famille quelconque d'éléments <u>homogènes</u> de M est un sous-module homogène.

N°2 - <u>Anneaux commutatifs gauches</u>. Dans ce N° ainsi que dans les suivants on ne parlera que de degrés de type Z . En fait, on a besoin de supposer simplement que le groupe des degrés est équipé d'un homomorphisme dans le groupe des nombres duaux. Mais les notations en usage se prêtent mal à cette généralisation.

<u>Définition 5</u>. Un anneau gradué A est appelé un anneau <u>commutatif gauche</u> si $a\,b = (-1)^{pq}\, b\, a$ lorsque $a \in A^p$ et $b \in A^q$, et si $a^2 = 0$ lorsque a est de degré impair.

Soit M un groupe gradué dont le degré est compatible avec une structure de module à gauche et une structure de module à droite sur un anneau commutatif gauche A . On dira que ces deux structures de modules sont associées si elles commutent et si $a\,u = (-1)^{pr}\, u\, a$ lorsque $a \in A^p$ et $u \in M^r$.

<u>Proposition 1</u>. Soit M un module gradué à gauche (resp. à droite) sur un anneau commutatif gauche A , il existe dans M une structure et une seule de module gradué à droite (resp. à gauche) sur A qui soit associée à la structure gauche (resp. droite).

On appellera module gradué sur un anneau commutatif gauche A un groupe gradué muni d'une structure de module gradué à gauche sur A , et de la structure de module gradué à droite sur A , qui lui est associée.

" Vis à vis des modules gradués, les anneaux commutatifs gauches jouissent
" de propriétés comparables à celles dont jouissent les anneaux commutatifs
" vis à vis des modules où l'on ne considère pas de degré. Principe du
" $(-1)^{pq}$: les égalités écrites dans le second cas, s'étendent au cas
" gradué à condition d'ajouter un facteur $(-1)^{pq}$ lorsque l'on commute des
" é léments de degrés respectifs p et q " (usage interne).

On appelle <u>centre gauche</u> d'un anneau gradué A le sous-anneau homogène de A dont tout élément a de degré r vérifie la relation $au = (-1)^{rp}\ ua$ pour tout $u \in A^p$ et $a^2=0$ si a est de degré impair. Le centre gauche d'un anneau est un anneau commutatif gauche.

N°3- <u>Produit tensoriel de modules gradués.</u>

Soient E et F deux <u>groupes gradués</u>. Leur produit tensoriel <u>sur</u> Z (l'anneau des entiers) $E \otimes_Z F$ peut être identifié à la somme directe des groupes $E^p \otimes_Z F^q$ $(p, q \in Z)$. Ces sous-groupes $E^p \otimes_Z F^q$ constituent donc dans $E \otimes_Z F$ un degré de type $(Z \times Z)$. Les sommes directes $G^r = \sum_p E^p \otimes_Z F^{r-p}$ constituent dans $E \otimes_Z F$ un degré de type Z . Sauf mention explicite du contraire, quand on parlera du degré sur $E \otimes_Z F$, il s'agira du degré (G^r).

Soit A un anneau gradué et soient E un A-module gradué à droite sur A et F un A-module gradué à gauche. Dans le produit tensoriel $E \otimes_Z F$ de E et F considérés comme groupes abéliens, les éléments de la forme $ua \otimes v - u \otimes av$ $(u \in E\ ,\ v \in F\ ,\ a \in A)$ engendrent un sous-groupe homogène N . Le degré sur $E \otimes_Z F$ définit donc, par passage au quotient, un degré sur $(E \otimes_Z F)/N$ qui est canoniquement isomorphe à $E \otimes_A F$. Il existe dans $E \otimes_Z F$ deux structures de modules sur le centre gauche C de A . Le sous-groupe N est un sous-module pour ces deux structures qui définissent, par passage au quotient, une même structure de C-module dans $E \otimes_A F$. Le degré sur $E \otimes_A F$ est compatible avec cette structure de C-module.

Si A est commutative gauche, alors le produit tensoriel $F \otimes_A E$ est également défini. L'isomorphisme canonique de $E \otimes_A F$ sur $F \otimes_A A$ qui transforme $u \otimes v$ en $(-1)^{pq}\ v \otimes u$ lorsque $u \in E^p$ et $v \in F^q$ est compatible avec les structures de A-modules définies dans ces deux produits tensoriels.

N°4 - <u>Applications linéaires de modules gradués.</u>

Soient E et F deux groupes abéliens gradués. On désigne par $L_r^p(E,F)$ le sous-groupe des homomorphismes de E dans F dont l'image est dans F^p et dont le noyau contient tous les éléments de degré $\neq r$ dans E. La somme directe G des L_r^p $(r,p \in Z)$ s'identifie à un sous-groupe du groupe de tous les homomorphismes de E dans F. Les $L_r^p(E,F)$ y constituent un degré de type $(Z \times Z)$, le degré d'un élément de $L_r^p(E,F)$ étant $(-r,p)$. Les sommes directes $G^s = \sum_{p-r=s} L_r^p(E,F)$ constituent un degré de type Z sur G. Sauf mention du contraire, quand on parlera du degré sur G, il s'agira du degré défini par les sous-groupes G^r. Un homomorphisme de degré r de E dans F est donc un homomorphisme qui <u>élève les degrés</u> de r en ce sens que l'image d'un élément de degré p a pour degré p+r. Le groupe G sera appelé le <u>groupe gradué</u> des homomorphismes de E dans F.

Soient E et F deux modules gradués à gauche (resp. à droite) sur l'anneau gradué A. Dans le groupe $L^r(E,F)$ des homomorphismes de degré r de E dans F (considérés comme groupes abéliens) les homomorphismes f qui vérifient la condition

$$f.(au) = (-1)^{pr}a(f.u) \qquad (\text{resp. } f.(ua) = (f.u)a\ )$$

quels que soient $a \in A^p$ et $u \in E$, constituent un sous-groupe noté $L_A^r(E,F)$. La somme directe $L_A(E,F)$ des $L_A^r(E,F)$ est un groupe abélien gradué, qui possède une structure de module sur le centre gauche C de A compatible avec le degré. On l'appellera le module gradué des applications linéaires de E dans F. Le module gradué des applications linéaires de E dans A considéré comme module gradué sur A à gauche (resp. à droite) sera appelé le <u>dual gradué</u> de E et noté $\widehat{E}$. On observera que, si tous les éléments de E sont de degré r et si le degré sur A est nul, les éléments de $\widehat{E}$ sont de degré $-r$.

Soient E un module gradué sur l'anneau A et u un endomorphisme de degré r de E . On appellera transposé de u et l'on notera ${}^t u$ l'endomorphisme de $\widehat{E}$ défini par la condition

$$({}^t u\,.f).x = (-1)^{rp}\, f\, u\,.x$$

lorsque f est de degré p dans $\widehat{E}$, $x \in E$. Cet endomorphisme est de degré $+r$.

N°5 – Algèbres graduées.

Définition 6. Soit A un anneau commutatif gauche avec unité. Un anneau gradué L est appelé une algèbre graduée sur A si L est muni d'une structure de module gradué sur A qui vérifie la condition

$$a\,(u\,v) = (-1)^{pr}\, u\,(av) = (au)\,v$$

quels que soient $a \in A^p$, $u \in L^r$ et $v \in L$.

Ces conditions sont équivalentes aux suivantes :

$$(u\,v)\,a = u(va) = (-1)^{qr}\,(ua)\,v \quad \text{lorsque} \quad v \in L^r .$$

Proposition 2. Si L est une algèbre graduée sur A, tout idéal engendré par une famille d'éléments homogène est homogène. Si K est un idéal homogène de L , le quotient L/K est une algèbre graduée sur A .

Si L et M sont deux algèbres graduées sur un même anneau commutatif gauche A , on appellera produit tensoriel des algèbres L et M l'algèbre sur A obtenue en définissant un produit dans le A-module $L \underset{A}{\otimes} M$ par la condition

$$(u \otimes v)(u' \otimes v') = (-1)^{pq}\,(uu' \otimes vv')$$

lorsque v et u' sont de degrés respectifs p et q . L'application de $L \underset{A}{\otimes} M$ dans $M \underset{A}{\otimes} L$ qui applique $(u \otimes v)$ sur $(-1)^{rp}\,(v \otimes u)$ (r = degré de u , p = degré de v) est alors un isomorphisme canonique de l'algèbre $L \underset{A}{\otimes} M$ sur l'algèbre $M \underset{A}{\otimes} L$.

Si L_i $(i \in I)$ est une famille d'algèbres graduées <u>ayant des unités</u>, on peut définir le produit tensoriel $\bigotimes_{(I)} L_i$ de ces algèbres .

<u>Proposition 3</u>. Le produit tensoriel de deux algèbres commutatives gauches est une algèbre commutative gauche.

N°6 - <u>Dérivations des algèbres graduées</u>.

<u>Définition 7</u>. Soit L un anneau gradué. On appellera <u>dérivation de degré</u> r de L un endomorphisme de degré r , D du groupe abélien L vérifiant la condition $D.(ab) = (D.a)b + (-1)^{pr} a(D.b)$ pour $a \in L^p$ et $b \in L$.

Lorsque L est un anneau gradué, on entendra généralement par dérivation de L une dérivation de degré pair et par dérivation <u>gauche</u> de A une dérivation de degré impair. Les zéros d'une dérivation de degré r constituent un sous-anneau de L , contenant l'unité si L possède une unité.

Si l'anneau L est muni d'une structure d'algèbre graduée sur un anneau commutatif gauche A , on appellera dérivation de degré r de l'algèbre gradué L des dérivations D de l'anneau gradué L qui sont des endomorphismes de degré r pour la structure de A-module gradué c'est-à-dire tels que $a(D.c) = (-1)^{qr} a(D.c)$ pour $a \in A^q$.

<u>Proposition 4</u>. Soient D et D' deux dérivations de degrés respectifs p et q de l'algèbre graduée L . L'endomorphisme $DD' - (-1)^{pq}D'D$ est une dérivation de degré $p+q$ de l'algèbre A . Si p est impair, D^2 est une dérivation de A .

§ C.- Algèbres tensorielles.

On désigne par A un anneau commutatif aveé unité, notée I . Les A-modules sont supposés unitaires. On désigne universellement par i l'isomorphisme canonique d'un A-module E dans son algèbre tensorielle T(E).

N°1. Prolongement des applications. Soient E un A-module et L une algèbre avec unité sur A . Si f est une application linéaire de E dans L considérée comme A-module, il existe un homomorphisme unitaire et un seul $f' : T(E) \rightarrow L$ tel que $f'i = f$. L'unicité vient de ce que l'algèbre T(E) est engendrée par l'unité et les éléments de i.E . On définit un homomorphisme f' en prenant pour restriction à $T^p(E)$ $(p > 0)$ l'application linéaire $f^p : T^p(E) \rightarrow L$ définie par

$$f^p(x_1 \otimes x_2 \ldots x_p) = f(x_1)\, f(x_2) \ldots f(x_p) .$$

Soient E et F deux A-modules et soit f une application de E dans F . L'application $i\,f$ étant une application linéaire de E dans l'algèbre T(F), il existe un homomorphisme f' et un seul de T(E) dans T(F) tel que $f'i = i\,f$. On l'appellera le prolongement de f aux algèbres tensorielles. Etant donnés trois A-modules E,F,G et des applications $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$, on a $(gf)' = g'f'$. Enfin si $E = F$ et si f est l'automorphisme identique de E , f' est l'automorphisme identique de T(E).

Lorsque f applique E sur F , son prolongement applique T(E) sur T(F). Lorsque $f : E \rightarrow F$ est un isomorphisme, f' n'en est pas pour autant un isomorphisme. Néanmoins on a le résultat suivant :

Proposition 1. Si f est un isomorphisme de E dans F et si l'image de E par f possède dans F un sous-module supplémentaire, alors, f' est un isomorphisme de T(E) dans T(F).

En effet, si g est une application de F dans E telle que $g\,f$ soit l'identité de E, $(g\,f)' = g'f'$ est l'identité de $T(E)$, donc f' est un isomorphisme.

<u>Proposition 2</u>. Soit E un sous-module de F. L'idéal bilatère N de $T(F)$ engendré par E est le noyau de l'homomorphisme $T(F) \to T(F/E)$ qui prolonge $F \to F/E$.

Puisque $i : F \to T(F)$ applique E dans N, elle définit par passage aux quotients une application linéaire de F/E dans l'algèbre $T(F)/N$. Soit g' son prolongement à $T(F/E)$. Le diagramme

$$\begin{tikzcd} T(F) \arrow[rr] \arrow[dr] & & T(F/E) \arrow[dl, "g'"] \\ & T(F)/N & \end{tikzcd}$$

est commutatif ; tout zéro de $T(F) \to T(F/E)$ est donc dans N. La réciproque est évidente.

<u>Proposition 3</u>. Soient E un A-module semi-simple et U, V deux sous-modules de E. La sous-algèbre de $T(E)$ engendrée par $U \cap V$ et l'unité est l'intersection des sous-algèbres de $T(E)$ engendrées respectivement par U et V (et l'unité).

On peut identifier la sous-algèbre engendrée par un sous-module M de E et l'unité avec $T(M)$. La proposition exprime donc que $T(U\cap V) = T(U)\cap T(V)$. L'inclusion $T(U\cap V) \subset T(U) \cap T(V)$ est triviale. Pour démontrer l'inclusion inverse, on supposera $U + V = E$ et l'on choisira un supplémentaire U' de $U\cap V$ dans U et un supplémentaire V' de $U\cap V$ dans V. Soient α l'endomorphisme de E nul sur U' et égal à l'identité sur V, et β l'endomorphisme de E nul sur V' et égal à l'identité sur U. Les prolongements α' et β' induisent l'automorphisme identique sur $T(U) \cap T(V)$. Or l'image de $\alpha'\beta'$ est $T(U\cap V)$, donc $T(U)\cap T(V) \subset T(U\cap V)$.

Pour les modules semi-simples, il correspond donc à tout tenseur t un plus petit sous-module $F(t)$ de E tels que $T(F(t)) \ni t$.

Lemme 1. Soit E un A-module et soient f et α deux applications linéaires de E dans le A-module des endomorphismes de $T(E)$ considéré comme A-module. Il existe un endomorphisme Φ de $T(E)$ et un seul tel que

$$\Phi.(x\ t) = f(x).t + \alpha(x)\ \Phi.t$$

$$\Phi.I = 0 \qquad \text{(I étant le tenseur unité).}$$

N°2 - Algèbre tensorielle et algèbre libre d'un ensemble.

Soit A un anneau commutatif avec unité et E un ensemble. Soit U l'ensemble des parties finies ordonnées de E (y compris la partie vide). Dans le module libre sur A ayant pour base les éléments de U, on définit une structure d'algèbre associative en posant

$$[a_1,a_2,a \dots a_r]\,[b_1,b_2,\dots b_s] = [a_1,a_2,\dots a_r,b_1,\dots b_s]$$

$$[\emptyset]\,[u] = [u]\,[\emptyset] = [u]$$

pour $a_1,\dots,a_r,b_1,\dots,b_s \in E$, $[u] \in U$. Cette algèbre est appelée l'algèbre libre (sur A) de l'ensemble E.

Proposition 4. Si M est un A-module possédant une base a_i $(i \in I)$. L'algèbre tensorielle $T(M)$ est isomorphe à l'algèbre libre de l'ensemble I des indices de la base.

Proposition 5. Soit M un A module et soit N l'idéal bilatère de l'algèbre libre L de l'ensemble des éléments de M engendré par les éléments de la forme $a[x] - [ax]$, $[x+y] - [x] - [y]$ $(a \in A$, $x,y \in M)$. Soit β l'homomorphisme canonique de L sur L/N. L'application linéaire $x \to \beta.[x]$ de M dans L/N a pour prolongement à $T(M)$ un isomorphisme de l'algèbre tensorielle $T(M)$ sur le quotient L/N.

En effet, puisque L est un A-module libre, il existe une application linéaire $\gamma\ L \to T(M)$ telle que $\gamma.\emptyset$ soit le tenseur unité et que

$$\gamma[x_1\, x_2 \ldots x_p] = x_1 \otimes x_2 \ldots \otimes x_p$$

pour $x_i \in M$. Cette application est nulle sur N et donne par passage au quotient une application de L/N dans $T(M)$ inverse de la précédente.

Prolongement des degrés.

Proposition 6. Si M est un A-module gradué, A étant gradué par le degré nul, il existe un degré sur $T(M)$ et un seul tel que $T(M)$ soit une algèbre graduée sur A et que l'isomorphisme $M \longrightarrow T(M)$ soit de degré 0.

Ce degré est appelé le prolongement à $T(M)$ du degré sur M .

Le degré de type Z sur $T(M)$ qui prolonge le degré pour lequel tous les éléments de M sont de degré 1 est appelé l'ordre.

Proposition 7. Les prolongements à $T(M)$ de deux degrés compatibles sur M sont des degrés compatibles sur $T(M)$.

Proposition 8. Soit M un module gradué sur A et α une application linéaire de degré r de M dans l'algèbre graduée $T(M)$. Il existe une dérivation $\overline{\alpha}$ de degré r dans $T(M)$ et une seule ayant α pour restriction à M . Si α et β sont des endomorphismes de degrés respectifs p et q , de M , alors $\overline{\alpha}\,\overline{\beta} - (-1)^{pq}\,\overline{\beta}\,\overline{\alpha} = \overline{(\alpha\,\beta - (-1)^{pq}\,\beta\,\alpha)}$.

C'est une conséquence immédiate du Lemme 1 .

Dual de l'algèbre tensorielle. On désignera par $\widehat{T(E)}$ le dual gradué du module gradué $T(E)$, c'est-à-dire le sous-module de $T(E)^*$ constitué par les fonctions linéaires sur $T(E)$ nulles sur tous les sous-modules $T^p(E)$ sauf un nombre fini. On définit dans $\widehat{T(E)}$ une structure d'algèbre graduée sur A (le degré sur A étant le degré nul) en posant

$$(fg)(x_1 \otimes x_2 \ldots x_{r+s}) = g(x_1 \otimes x_2 \ldots x_r)\, f(x_{r+1} \otimes x_{r+2} \ldots x_{r+s})$$

lorsque f et g sont des éléments de degrés respectifs $-s$ et $-r$ dans $\widehat{T(E)}^*$, c'est-à-dire lorsque $f \in T^s(E)^*$ et $g \in T^r(E)^*$.

 17

L'isomorphisme canonique de E^* dans $T(E)^*$ se prolonge en un homomorphisme canonique de l'algèbre $T(E^*)$ dans l'algèbre $\widehat{T(E)}$. Si l'on adopte dans $T(E^*)$ le degré pour lequel un tenseur d'ordre p est de degré -p, c'est-à-dire le degré prolongeant le degré sur E^* pour lequel tous les éléments sont de degré -1, l'homomorphisme précédent conserve les degrés.

<u>Proposition 9</u>. Si E est un module ayant une base finie, alors $T(E^*) \to \widehat{T(E)}$ est un isomorphisme sur.

<u>Exercice</u>. Soient E et F deux A-modules et u une application linéaire de E dans F. Le prolongement u' de u à T(E) a pour transposé un homomorphisme de l'algèbre $\widehat{T(F)}$ dans l'algèbre $\widehat{T(E)}$.

<u>Prolongement des formes bilinéaires</u>. Soit $B(x,y)$ une forme bilinéaire sur le A-module E. On notera β l'application linéaire de E dans le dual E^* de E définie par $(\beta.x).y = B(x,y)$. Elle se prolonge en un homomorphisme de $T(E)$ dans $T(E^*)$ qui, composé avec l'homomorphisme canonique de $T(E^*)$ dans $\widehat{T(E)}$ donne un homomorphisme $\beta' : T(E) \to \widehat{T(E)}$. On a $\beta.T(E)^p \subset (T(E)^p)^*$. On appellera <u>prolongement à</u> $T(E)$ de $B(x,y)$ la forme bilinéaire $B(t, t') = (\beta'.t).t'$. Si $B(x,y)$ est symétrique (resp. antisymétrique) son prolongement est symétrique (resp. antisymétrique). Si t et t' sont des tenseurs d'ordre différent, $B(t,t')=0$.

Si $t = x_1 \otimes x_2 \dots x_p$ et $t' = y_1 \otimes y_2 \dots y_p$ avec $x_1, x_2, \dots x_p, y_1, y_2, \dots y_p \in E$, alors

$$B(t,t') = B(x_p,y_1)B(x_{p-1},y_2) \dots B(x_1,y_p)$$

§ D - Algèbre commutative gauche d'un module gradué.

Dans ce paragraphe, on désigne par C un anneau commutatif avec unité gradué par le degré nul. Tous les C-modules sont supposés unitaires. Sauf mention du contraire, les degrés sont de type Z .

N° 1 - Définitions.

Définition 1. On appelle algèbre commutative gauche du module gradué M , et l'on notera G(M), l'algèbre quotient de l'algèbre tensorielle T(M) par l'idéal bilatère N engendré par les tenseurs de la forme

$x \otimes y - (-1)^{pq}\, y \otimes x$ (pour $x \in M^p$, $y \in M^q$)

$x \otimes x$ (pour x de degré impair dans M).

L'idéal N est homogène pour le degré sur T(M) qui prolonge le degré sur N . Par conséquent, G(M) est une algèbre graduée qui est visiblement commutative gauche.

Supposons défini sur M , en plus du degré de type Z , un degré de type Δ compatible avec le premier. On sait que les prolongements à T(M) de ces deux degrés sont encore compatibles. De plus, l'idéal N est encore un idéal homogène pour le degré de type Δ sur T(M). Il existe donc dans G(M) un degré quotient de type Δ que l'on appellera le prolongement à G(M) du degré de type Δ sur M . En particulier, en prenant $\Delta = Z$ et degré de type Δ de $x = 1$ pour tout élément $x \in M$, on obtient un prolongement à G(M) appelé l'ordre. L'idéal N ne contient pas de tenseurs d'ordre 0 ou 1 . Par suite, les éléments d'ordre 0 de G(M) s'identifient comme ceux de T(M) aux éléments de C . Et en composant l'isomorphisme canonique de T(M) dans G(M), on obtient un isomorphisme canonique $j : M \longrightarrow G(M)$ qui conserve les degrés.

On identifiera souvent M avec son image par j qui est le sous-module des éléments d'ordre 1 dans G(M). Exemple : l'algèbre G(M) est engendrée par l'unité et les éléments de M .

<u>Caractère universel de</u> G(M). Soient L une algèbre graduée commutative gauche avec unité et f une application C-linéaire de degré 0 de M dans L. Il existe un homomorphisme $f':G(M) \longrightarrow L$ et un seul tel que $f'\, j = f$. Cet homomorphisme est de degré 0 ; on l'appelle le <u>prolongement</u> de f à G(M) . Soient M et P deux modules gradués sur C et g une application linéaire <u>de degré</u> 0 de M dans P . Alors j g qui est une application de degré 0 de M dans G(P) se factorise aussi en g' j , où g' est un homomorphisme de degré 0 de G(M) dans G(P). Cet homomorphisme g' conserve également l'ordre. Il sera appelé le <u>prolongement</u> de g à G(M).

<u>Lemme 1</u>. Soient E et F deux modules gradués sur C . L'application linéaire de $E \times F$ dans l'algèbre commutative gauche $G(E) \otimes G(F)$ qui applique (a,b) sur $a \otimes I + I \otimes b$ ($a \in E$, $b \in F$, I unité de C) a pour prolongement un isomorphisme de l'algèbre $G(E \times F)$ sur $G(E) \otimes G(F)$, de degré 0 et d'ordre 0 .

L'isomorphisme inverse s'obtient en combinant les homomorphismes de $G(E) \longrightarrow G(E \times F)$ et $G(F) \longrightarrow G(E \times F)$ qui prolongent les applications canoniques $E \longrightarrow E \times F$ et $F \longrightarrow E \times F$.

Plus généralement

<u>Proposition 1</u>. Si M est un C-module gradué, somme directe d'une famille de C-modules gradués M_i ($i \in J$), G(M) est canoniquement isomorphe à $\bigotimes_{(J)} G(M_i)$.

<u>Corollaire</u>. Si le C-module gradué M possède une base homogène, alors le C-module gradué G(M) possède une base homogène pour le degré et l'ordre

Plus précisément, si a_i $(i \otimes J)$ est une base homogène de M , G(M) est isomorphe au produit tensoriel $\bigotimes_J G(M_i)$, chaque M_i étant le module monogène Ca_i . Si a_i est de degré pair, $G(M_i) = T(M_i)$. Si a_i est de degré impair, $G(M_i)$, en tant que C-module, possède une base (I, a_i) et sa structure multiplicative est définie par $a_i^2 = 0$.

<u>Proposition 2</u>. Soit M un C-module gradué semi-simple. Pour tout élément $u \in G(M)$, il existe un plus petit sous-module homogène N tel que u soit dans la sous-algèbre isomorphe à G(N) engendrée par N et l'unité.

<u>Proposition 3</u>. Soit M un C-module gradué et h un homomorphisme de C dans un anneau commutatif avec unité C'. Soit $M^{(C')}$ le C'-module gradué déduit de M par extension de l'anneau des scalaires. Il existe un isomorphisme canonique de $G(M^{(C')})$ et de $G(M) \bigotimes_C C'$.

<u>Proposition 4</u>. Soit α un endomorphisme de degré r du C-module gradué M . Il existe une dérivation $\bar{\alpha}$ dans l'algèbre commutative gauche G(M) de degré r et une seule de l'algèbre graduée G(M) ayant α pour restriction à M . Si α et β sont des <u>endomorphismes</u> de degrés respectifs p et q de M , on a

$$\bar{\alpha}\,\bar{\beta} - (-1)^{pq}\,\bar{\beta}\,\bar{\alpha} = \overline{(\alpha\,\beta - (-1)^{pq}\,\beta\,\alpha)} \; .$$

L'unicité résulte de ce que G(M) est engendrée par M et l'unité. On démontre l'existence de la dérivation de G(M) en prolongeant α en dérivation de degré r de l'algèbre graduée T(M), puis en passant au quotient. Cette dérivation de G(M) est appelée le prolongement canonique de α en dérivation de G(M) .

$N^o 2$. Dual de l'algèbre commutative gauche d'un module gradué.

Soit M un C-module gradué de type Z et soit $G(M)$ son algèbre commutative gauche. On désignera par $G(M)^*$ le dual de $G(M)$ considéré comme C-module. Soit h l'application C-linéaire de $G(M)^* \otimes G(M)^*$ dans $(G(M) \otimes G(M))^*$ définie par

$$(h.(f \otimes g)).(u \otimes v) = (g.u)(f.v)$$

quels que soient $f, g \in G(M)^*$ et $u, v \in G(M)$ (On observera que cette définition est conforme au principe $(-1)^{pq}$ car $g.u \in C$ est de degré 0). L'isomorphisme $d: M \to G(M) \otimes G(M)$ défini par $d.x = x \otimes I + I \otimes x$ pour tout $x \in M$ se prolonge en un homomorphisme d' de degré 0 de l'algèbre $G(M)$ dans l'algèbre commutative gauche $G(M) \otimes G(M)$. L'homomorphisme transposé est une application C-linéaire ${}^t d' : (G(M) \otimes G(M))^* \to$ $\to G(M)^*$. En composant h et ${}^t d'$, on obtient une application linéaire π de $G(M)^* \otimes G(M)^*$ dans $G(M)$.

Lemme 2. Si a est un élément d'ordre n dans $G(M)$, $d'.a = I \otimes a + a \otimes I$ mod P, où P est le sous-module de $G(M) \otimes G(M)$ engendré par les éléments de la forme $u \otimes v$, u et v étant d'ordres respectifs p, q tels que $p > 0$, $q > 0$. Les images de d' sont stables par l'automorphisme $\omega: (a \otimes b) \to (-1)^{rs} (b \otimes a)$ $(a \in G^r(M),\ b \in G^s(M))$ de $G(M) \otimes G(M)$.

Il résulte de ce Lemme que d' est un isomorphisme qui sera appelé l'isomorphisme diagonal.

Proposition 5. L'application $\pi: G(M)^* \otimes G(M)^* \to G(M)^*$ définit dans $G(M)^*$ une structure d'algèbre avec unité sur C.

L'associativité du produit défini par π résulte de ce que l'isomorphisme de $G(M)$ dans $G(M) \otimes G(M) \otimes G(M)$ qui prolonge l'application $x \to x \otimes I \otimes I + I \otimes x \otimes I + I \otimes I \otimes x$ peut s'écrire $(d' \otimes \varepsilon)d'$ ou $(\varepsilon \otimes d')d'$. L'unité de $G(M)^*$ est la fonction linéaire nulle sur tous les éléments d'ordre > 0 de $G(M)$ et égale à l'identité sur C.

Soit $G(M)_p^*$ le dual algèbrique de $G(M)^p$. La somme directe des $G(M)_p^*$ s'identifie à un sous-module $\widehat{G(M)}$ de $G(M)^*$ qui est un module gradué les éléments de degré p étant ceux de $G(M)_{-p}^*$. Il est clair que $\widehat{G(M)}$ est une sous-algèbre de $G(M)^*$.

Proposition 6. L'algèbre graduée $\widehat{G(M)}$ est commutative gauche.

En effet, si f et g sont des éléments de degrés respectifs p et q dans $\widehat{G(M)}$ et si $x \in M^r$, $y \in M^s$, alors

$$(f \otimes g).(x \otimes y) = (-1)^{pq}\,(g \otimes f).(-1)^{rs}(y \otimes x) ,$$

car $f.y = 0$ et $g.x = 0$ sauf pour $p+s = 0$ et $q+r = 0$. Par conséquent,

$$(fg).u = (f \otimes g).(d'.u)=(f \otimes g).(\omega d'.u)=(-1)^{pq}(g \otimes f).(d'.u)=(-1)^{pq}(gf).u$$

pour tout $u \in G(M)$.

L'isomorphisme canonique de M^* dans $\widehat{G(M)}$ étant une application linéaire de degré 0 se prolonge en un homomorphisme canonique $\gamma : G(M^*) \longrightarrow \widehat{G(M)}$.

Proposition 7. Si le A-module M possède une base finie, l'homomorphisme γ est un isomorphisme de $G(M^*)$ sur $\widehat{G(M)}$ qui conserve les degrés.

Proposition 8. Soient M et N deux C-modules gradués et u une application linéaire de degré 0 de M dans N. Le transposé du prolongement $u' : G(M) \longrightarrow G(N)$ est un homomorphisme ${}^t(u')$ de l'algèbre $G(N)^*$ dans l'algèbre $G(M)^*$ qui conserve les degrés et applique $\widehat{G(N)}$ dans $\widehat{G(M)}$. Si $({}^tu)'$ est le prolongement à $G(N^*)$ de ${}^tu : N^* \longrightarrow M^*$, on a $\gamma\,{}^t({}^tu)' = {}^t(u')\gamma$.

Proposition 8^{bis}. Soit M un C-module gradué et soit α un endomorphisme de degré r de M. L'endomorphisme ${}^t\overline{\alpha}$ de $\widehat{G(M)}$ transposé de la dérivation $\overline{\alpha}$ de G(M) qui prolonge α est une dérivation de degré $+r$ de $\widehat{G(M)}$.

Soit en effet φ la dérivation de l'algèbre $G(M) \otimes G(M)$ définie par $\varphi.(a \otimes b) = (\alpha.a) \otimes b + (-1)^{pr}\, a \otimes (\alpha.b)$ pour $a \in G^p(M)$, $b \in G(M)$. On a $\varphi.d.x = d\alpha.x$ pour tout $x \in M$ et par suite, $\varphi\, d' = d'\, \overline{\alpha}$ sur $G(M)$. Il en résulte que, si f et g sont des éléments de degrés q et s dans $\widehat{G(M)}$, on a

$$({}^t\overline{\alpha}.(fg)).a = (-1)^{r(q+s)}\,(fg)\overline{\alpha}.a = (-1)^{r(q+s)}\,(f \otimes g)d'\overline{\alpha}.a =$$

$$= (-1)^{r(q+s)}\,(f \otimes g)\;\Phi\, d'.a = ({}^t\overline{\alpha}.f \otimes g)\, d'.a + (-1)^{qr}(f \otimes {}^t\overline{\alpha}.g)d'.a =$$

$$= (({}^t\overline{\alpha}.f)g + (-1)^{rq}\, f({}^t\overline{\alpha}.g)).a$$

pour tout élément a de $G(M)$.

N°3 - <u>Les produits intérieurs</u>.

A la structure de module à gauche sur $G(M)$ définie sur $G(M)$ correspond dans $\widehat{G(M)}^*$ une structure de $G(M)$ module à droite. Pour cette structure $\widehat{G(M)}$ est un sous-module et son degré est compatible avec elle. Puisque $G(M)$ est commutative gauche, il existe dans $\widehat{G(M)}$ une structure de "$G(M)$-module à gauche gradué" associée qui est définie par

$$(uf).v = (-1)^{pr}\, f.(uv)$$

pour $u \in G^r(M)$, $v \in G(M)$ et f de degré p dans $\widehat{G(M)}$. Le produit à gauche de f par u s'appelle le <u>produit intérieur</u> de f par u. On appelle aussi "produit intérieur par u" l'endomorphisme $f \longrightarrow uf$ de $\widehat{G(M)}$ considéré comme C-module. Si u est de degré r, le produit intérieur est un endomorphisme de degré $+r$.

<u>Proposition 9</u>. Si x est un élément de degré r dans M, le produit intérieur par x est une dérivation de degré r de l'algèbre graduée $\widehat{G(M)}$.

En effet, si f et g sont des éléments de degrés respectifs p et q dans $G(M)$,

$$(x(fg)).v = (-1)^{r(p+q)} (fg).(xv) = (-1)^{r(p+q)} (f \otimes g)\, d'.(xv) =$$
$$= (-1)^{r(p+q)} (f \otimes g).((x \otimes I + I \otimes x)(d'.v)) =$$
$$= (-1)^{r(p+q)} (f \otimes (gx))\, d'.v + (-1)^{rp} (fx) \otimes g)d'.v =$$
$$= (-1)^{rp} (f(xg)).v + ((xf)g).v$$

Proposition 10. Soit x un élément de degré r dans M et $i(x)$ la dérivation de degré r de $G(M^*)$ telle que $i(x).f = (-1)^{rp} f.x$ pour tout f de degré p dans M^*. Quel que soit $w \in G(M^*)$, on a

$$i(x).w = x(\gamma.w)$$

γ étant l'homomorphisme canonique de $G(M^*)$ dans $\widehat{G(M)}$. L'égalité est triviale pour $w \in M^*$ ainsi que pour $w \in G^0(M)^*$. Elle s'étend à tous les éléments de $G(M)$ parce que $i(x)$ et le produit intérieur par x sont des dérivations de même degré r.

La structure de module sur $G(M)^*$ définie dans $G(M)$. Désignons par $k : G(M)^* \otimes G(M) \longrightarrow C$ la contraction qui applique $f \otimes u$ sur $f.u \in C$. Soient ε et ε^* respectivement les automorphismes idéntiques de $G(M)$ et $G(M)^*$. L'application linéaire de $G(M)^* \otimes G(M)$ dans $G(M)$ qui applique $f \otimes u$ sur $(k \otimes \varepsilon)(\varepsilon^* \otimes d').(f \otimes u)$ où d' désigne l'isomorphisme diagonal de $G(M)$ dans $G(M) \otimes G(M)$ sera notée α.

Proposition 11. L'application $\alpha : G(M)^* \otimes G(M) \longrightarrow G(M)$ définit dans $G(M)$ une structure de module unitaire à gauche sur $G(M)^*$.

Ceci revient à vérifier que, si $\pi : G(M)^* \otimes G(M)^* \longrightarrow G(M)^*$ est l'application linéaire définissant le produit dans $G(M)^*$, on a $\alpha(\pi \otimes \varepsilon) = \alpha(\varepsilon^* \otimes \alpha)$ sur $G(M)^* \otimes G(M)^* \otimes G(M)$. Or ceci résulte immédiatement des égalités suivantes :

$$(\varepsilon \otimes d')d' = (d' \otimes \varepsilon)d' \quad \text{sur } G(M)$$

$$(\varepsilon^* \otimes d')(\pi \otimes \varepsilon) = (\pi \otimes \varepsilon \otimes \varepsilon)(\varepsilon^* \otimes \varepsilon^* \otimes d') \quad \text{sur } G(M)^* \otimes G(M)^* \otimes G(M)$$

$$d'(k \otimes \varepsilon)(\varepsilon^* \otimes d') = (k \otimes \varepsilon \otimes \varepsilon)(\varepsilon \otimes d' \otimes \varepsilon)(\varepsilon \otimes d') \quad \text{sur " " "}$$

$$k(\pi \otimes \varepsilon) = k(\varepsilon^* \otimes k \otimes \varepsilon)(\varepsilon^* \otimes \varepsilon^* \otimes d') \quad \text{sur " " "}$$

On peut aussi se livrer à une brève contemplation du diagramme décomposant les deux applications $\alpha(\pi \otimes \varepsilon)$ et $\alpha(\varepsilon^* \otimes \alpha)$ de $G(M)^* \otimes G(M)^* \otimes G(M)$ dans $G(M)$.

On appellera produit intérieur de u par f l'élément fu de G(M). La composante d'ordre 0 de fu est f.u . En restreignant à l'algèbre graduée $\widehat{G(M)}$ les opérations externes, on obtient dans G(M) une structure de <u>module gradué sur l'algèbre commutative gauche</u> $\widehat{G(M)}$.

<u>Proposition 12</u>. Si x' est un élément de degré r dans $M^* \subset \widehat{G(M)}$, le produit intérieur par x' est une dérivation de degré r de l'algèbre graduée G(M) qui abaisse l'ordre d'une unité.

Soit en effet R le sous-module des éléments de G(M) dont les composantes d'ordre 0 et 1 sont nulles. Si u et v sont des éléments de degré respectif p et q et si $d'.u = I \otimes u + \sum_i u_i \otimes u'_i \pmod{R \otimes G(M)}$ et $d'.v = I \otimes v + \sum_j v_j \otimes v'_j \pmod{R \otimes G(M)}$, alors
$d'.(uv) = (d'.u)(d'.v) = I \otimes uv + \sum_i u_i \otimes u'_i v + \sum_j (-1)^{ps_j} v_j \otimes uv'_j$
(mod $R \otimes G(M)$), en désignant par s_j le <u>degré</u> de v_j. On a donc
$x'(uv) = \sum_i (x'.u_i)\, u'_i v + \sum_j (-1)^{pr} (x'.v_j)\, u v'_j$, car $x'.v_j = 0$ si degré de $v_j \neq -r$. Or ceci est égal à $(x'u)v + (-1)^{pr} u(x'v)$.

Cette dérivation est entièrement déterminée par sa restriction à M qui est l'application $y \rightarrow x'.y$ de M dans C .

<u>Exercice</u>.- Soit M un C-module gradué et B(x,y) une forme bilinéaire qui est une application linéaire de degré 0 de $M \otimes M$ dans C . On désigne par x' l'élément de M défini par $x'.y = B(x,y)$. L'application linéaire $x \rightarrow x'$ de M dans M^* se prolonge en un homomorphisme de G(M) dans $\widehat{G(M)}$ qui conserve les degrés, et l'on obtient une seconde structure de module

gradué sur $G(M)$ dans $G(M)$ en passant par la structure de module sur $\widehat{G(M)}$. On pose $L(x).e = xe + x'e$ pour $x \in M$ et $e \in G(M)$. Les endomorphismes $L(x)$ définissent dans $G(M)$ une troisième structure de module gradué sur $G(M)$. L'application linéaire $u \longrightarrow L(u).I$ de $G(M)$ dans $G(M)$ est un isomorphisme sur, qui conserv les degrés, mais définit par transport de structure une nouvelle multiplication dans $G(M)$ qui n'est plus compatible avec l'ordre. Si $u, v \in G(M)$, la composante d'ordre 1 de $u \circ v = L(u)L(v).I$ est $B(u,v)$, où B est le prolongement à $G(M)$ de la forme bilinéaire $B(x,y)$ sur M. On vérifie que, si $B(x,y) = (-1)^{pq} B(y,x)$, lorsque x et y sont de degrés p et q, alors le prolongement de B possède la même propriété.

§ E - <u>Différentielles des algèbres commutatives</u>. Dans ce paragraphe, on se limitera à des algèbres commutatives ayant un élément unité et à des modules unitaires. L'anneau des opérations externes sera identifié au sous-anneau des multiples scalaires de l'unité. Soit A une algèbre sur l'anneau C et soit M un module sur A. Puisque A est commutative, M est muni canoniquement d'une structure de module bilatère sur A, et, par restriction des opérations externes, d'une structure de module sur C. On appellera dérivation de l'<u>algèbre</u> A dans M, les dérivations de l'anneau A dans le A-module M qui sont des homomorphismes pour les structures de C-modules, ou ce qui revient au même, qui sont nulles sur C. Elles constituent un module unitaire sur A. <u>On va construire un A-module M et une dérivation de l'algèbre A dans M qui jouera le rôle d'application universelle pour les dérivations de l'algèbre A dans des modules sur A</u>.

Dans le produit tensoriel $A \underset{C}{\otimes} A$ on considère la structure de A-module définie par $a(b \otimes c) = ab \otimes c$ $(a,b,c \in A)$. Soit N le sous-module de $A \underset{C}{\otimes} A$ engendré par les éléments de la forme

$$I \otimes ab - a \otimes b - b \otimes a \qquad (a,b \in A \text{ , } I \text{ unité de } A)$$

On appelle <u>module des différentielles de l'algèbre</u> A et l'on note $D(A)$ le A-module quotient $A \underset{C}{\otimes} A/N$. L'isomorphisme $a \longrightarrow I \otimes a$ de A dans $A \underset{C}{\otimes} A$, composé avec la projection canonique de $A \underset{C}{\otimes} A$ sur $D(A)$ donne une dérivation canonique de l'algèbre A dans le module des différentielles de A qui sera universellement notée $d: A \longrightarrow D(A)$.

Soit M un A-module quelconque et h une dérivation de A dans M. Il existe un homomorphisme de A-module $h':D(A) \longrightarrow M$ et un seul tel que $h = h'd$. L'unicité résulte de ce que <u>le A-module</u> $D(A)$ <u>est engendré par l'image de</u> d. On obtiendra h' en partant de l'homomorphisme de A-modules $f: A \underset{C}{\otimes} A \longrightarrow M$ défini par $f.(a \otimes b) = a(h.b)$. On a $f.N = 0$, par conséquent f est composé de la projection de $A \underset{C}{\otimes} A$ sur $D(A)$ et d'un homomorphisme $h':D(A) \longrightarrow M$, qui vérifie la relation $h'.(a(d.b)) = a(h.b)$ quels que soient $a,b \in A$.

On conviendra d'identifier une dérivation de A dans un A-module M avec l'homomorphisme de $D(A)$ dans M qui la factorise.

<u>Proposition 1</u>. Soient A et B deux algèbres sur C et f un homomorphisme unitaire de A dans B. Il existe un C-homomorphisme $f':D(A) \longrightarrow D(B)$ et un seul tel que $df = f'd$ et $f'.(a\omega) = (f.a)(f'.\omega)$ quels que soient $a \in A$ et $\omega \in D(A)$.

Si $f.a = B$, alors $f'.D(A) = D(B)$. Mais on prendra garde que, lorsque f est un isomorphisme, f' ne sera pas en général un isomorphisme.

<u>Proposition 2</u>.- Soit A une algèbre sur C . Le dual algèbrique du A-module des différentielles de A est le module des dérivations de l'algèbre A .

Lorsque le module des dérivations de A possède une base finie, on pourra donc définir le module des différentielles comme étant le module dual.

<u>Proposition 3</u>.- Soient A et B deux algèbres sur C . Il existe un isomorphisme canonique

$$D(A \underset{C}{\otimes} B) \cong D(A) \underset{C}{\otimes} B + A \underset{C}{\otimes} D(B)$$

compatible avec les structures de modules sur $A \underset{C}{\otimes} B$.

<u>Proposition 4</u>. Soit A une algèbre sur C et $P \neq A$ un idéal de A . Le noyau de l'homomorphisme canonique de $D(A)$ sur $D(A/P)$ est le sous-module $A(d.P)$ de $D(A)$.

<u>Proposition 5</u>. Soit A une algèbre sur C sans diviseur de 0 et soit K son corps des quotients considéré comme algèbre sur C . Il existe un isomorphisme canonique de $K \underset{C}{\otimes} D(A)$ sur $D(K)$.

<u>Proposition 6</u>.- Soit A une algèbre sur C et soit B une sous-algèbre de A contenant C . Si $D_C(A)$ et $D_B(A)$ désignent respectivement les A-modules des différentielles de A considéré comme algèbre sur C et algèbre sur B ,, il existe un isomorphisme canonique de A-modules

$$D_B(A) \cong D_C(A) / A(d.B)$$
