RÉDACTION N° 176

COTE : NBR 079

TITRE : ESPACES HILBERTIENS § 2 (ÉTAT 6)

ASSOCIATION DES COLLABORATEURS DE NICOLAS BOURBAKI

NOMBRE DE PAGES : 11

NOMBRE DE FEUILLES : 11

Archives [illegible] NBR 079 176 2

ESPACES HILBERTIENS. § 2. Etat 6.

1. Somme hilbertienne externe d'espaces hilbertiens.- Soit $(E_\iota)_{\iota\in I}$ une famille d'espaces hilbertiens sur K ; dans chacun des E_ι , nous désignerons par $(x_\iota \mid y_\iota)$ le produit scalaire, par $\|x_\iota\|$ la norme. Dans l'espace vectoriel produit $F = \prod_{\iota\in I} E_\iota$, considérons le sous-ensemble E des points $x = (x_\iota)_{\iota\in I}$ tels que $\sum_{\iota\in I} \|x_\iota\|^2 < +\infty$. Cet ensemble est un ble est un sous-espace vectoriel de F , car on a $\|x_\iota + y_\iota\|^2 \leqslant 2(\|x_\iota\|^2 + \|y_\iota\|^2)$. Dans cet espace, pour tout couple de points $x = (x_\iota)$, $y = (y_\iota)$, la famille de scalaires $(x_\iota \mid y_\iota)$ est sommable en raison des inégalités $|(x_\iota \mid y_\iota)| \leqslant \|x_\iota\|\,\|y_\iota\| \leqslant \frac{1}{2}(\|x_\iota\|^2 + \|y_\iota\|^2)$. Si on pose $(x|y) = \sum_{\iota\in I} (x_\iota | y_\iota)$, il est clair que $(x|y)$ est une forme sesquilinéaire hermitienne ; en outre, comme $(x|x) = \sum_{\iota\in I} \|x_\iota\|^2$, cette forme est définie-positive. Montrons enfin que E, muni du produit scalaire $(x|y)$, est un espace hilbertien, autrement dit qu'il est complet pour la norme $\|x\| = (x|x)^{\frac{1}{2}}$. En effet, soit (x_n) une suite de Cauchy pour cette norme, et soit $x_n = (x_{n,\iota})_{\iota\in I}$ avec $x_{n,\iota} \in E_\iota$. Par hypothèse, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que les relations $m \geqslant n_0$, $n \geqslant n_0$ entraînent $\|x_m - x_n\|^2 \leqslant \varepsilon^2$, c'est-à-dire $\sum_{\iota\in I} \|x_{m,\iota} - x_{n,\iota}\|^2 \leqslant \varepsilon^2$; en particulier, pour chaque $\iota \in I$, la suite $(x_{n,\iota})_{n\in N}$ est une suite de Cauchy, qui converge donc vers un point $a_\iota \in E_\iota$; en faisant tendre m vers $+\infty$, on voit que, pour toute partie finie J de I, on a $\sum_{\iota\in J} \|a_\iota - x_{n,\iota}\|^2 \leqslant \varepsilon^2$ pour $n \geqslant n_0$, et par conséquent aussi $\sum_{\iota\in I} \|a_\iota - x_{n,\iota}\|^2 \leqslant \varepsilon^2$ pour $n \geqslant n_0$, cela démontre d'abord que $a - x_n \in E$, donc $a \in E$, puisque la suite (x_n) tend vers a dans E , ce qui achève de prouver notre assertion.

Soit f_ι l'application de E_ι dans E qui transforme $z \in E_\iota$ en l'élément $(x_\iota) \in E$ tel que $x_\varkappa = 0$ pour $\varkappa = \iota$, et $x_\iota = z$. Alors, f_ι est un isomorphisme de l'espace hilbertien E_ι sur un sous-espace vectoriel fermé de E . On dit que f_ι est *l'application canonique* de E_ι dans E . Le plus souvent, on identifie E_ι et son image dans E par cet isomorphisme. Avec cette convention, E_ι et $E_\varkappa$ sont orthogonaux dans E quand $\iota \neq \varkappa$; E est le sous-espace vectoriel fermé engendré par la réunion des sous-espaces E_ι .

On dit que E est la *somme hilbertienne externe* de la famille d'espaces hilbertiens $(E_\iota)_{\iota \in I}$, et on écrit $E = \bigoplus_{\iota \in I} E_\iota$. Lorsqu'aucune confusion n'est à craindre avec la terminologie qui sera introduite au n°2 , on dit aussi plus brièvement que E est la somme hilbertienne des E_ι .

Lorsque I est fini, E est la somme directe des E_ι . Comme le projecteur de E sur E_ι est continu pour tout ι , E est aussi la somme directe topologique des E_ι (chap. I, § 1, prop. 10). Si $I = [1, n]$, on écrit aussi $E = E_1 \oplus E_2 \oplus \ldots \oplus E_n$.

2. *Somme hilbertienne de sous-espaces orthogonaux d'un espace hilbertien.*-

Proposition 1.- Soient E un espace préhilbertien séparé, $(V_\iota)_{\iota \in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E telle que, pour tout couple d'indices $\iota, \varkappa$ distincts, V_ι et $V_\varkappa$ soient orthogonaux. Pour tout $\varkappa \in I$, l'intersection de $V_\varkappa$ et du sous-espace vectoriel fermé $W_\varkappa$ engendré par les V_ι d'indice $\iota \neq \varkappa$, est réduite à 0 (ce qui entraîne en particulier que la somme des V_ι est directe au sens algèbrique).

En effet, si un vecteur x appartient à $V_\varkappa$, il est orthogonal à tous les V_ι d'indice $\iota \neq \varkappa$, donc à $W_\varkappa$. Si en outre il appartient à $W_\varkappa$, il est nul.

Définition 1.- On dit qu'un espace hilbertien E est somme hilbertienne d'une famille $(E_\iota)_{\iota \in I}$ de sous-espaces vectoriels fermés de E lorsque :

1. pour deux indices distincts $\iota, \varkappa$ quelconques, E_ι et $E_\varkappa$ sont orthogonaux ;
2. le sous-espace vectoriel fermé engendré par les E_ι est E .

Théorème 1.- Soit E un espace hilbertien somme hilbertienne d'une famille $(E_\iota)_{\iota \in I}$ de sous-espaces vectoriels fermés de E . Il existe un isomorphisme f et un seul de E sur la somme hilbertienne externe E' des E_ι tel que, pour tout $\iota \in I$, la restriction de f à E_ι soit l'application canonique f_ι de E_ι dans E'.

En effet, soit $F = \sum_{\iota \in I} E_\iota \subset E$ la somme des E_ι . Comme la somme $\sum_{\iota \in I} E_\iota$ est directe (prop.1), il existe une application linéaire g de F dans E' dont la restriction à E_ι soit f_ι pour tout $\iota \in I$. Soient $x = \sum_{\iota \in I} x_\iota$, $y = \sum_{\iota \in I} y_\iota$ deux éléments de F, avec $x_\iota \in E_\iota$ et $y_\iota \in E_\iota$ pour tout $\iota \in I$, et $x_\iota = y_\iota = 0$ sauf pour un nombre fini d'indices ι . On a $(x|y) = \sum_{\iota \in I, \varkappa \in I} (x_\iota | y_\varkappa) = \sum_{\iota \in I} (x_\iota | y_\iota) = (g(x)\ g(y))$. Ainsi, g est un isomorphisme de l'espace préhilbertien F sur un sous-espace partout dense de E'. Donc g se prolonge en un isomorphisme du complété de F , qui s'identifie à E , sur E'. Enfin, l'isomorphisme f est bien déterminé par ses restrictions aux E_ι , puisque le sous-espace vectoriel fermé engendré par les E_ι est E .

On identifie généralement E à E' par l'isomorphisme f .

Dans tout ce qui suit, pour tout sous-espace vectoriel fermé V d'un espace hilbertien E , nous désignerons par P_V le projecteur orthogonal de E sur V (§ 1, n°4).

Corollaire 1.- Soit E un espace hilbertien somme hilbertienne d'une famille $(E_\iota)_{\iota\in I}$ de sous-espaces vectoriels fermés de E. Pour $x\in E$, soit $x_\iota = P_{V_\iota}(x)$. Les familles $(\|x_\iota\|^2)$ et (x_ι) sont sommables, et on a $\|x\|^2 = \sum_{\iota\in I}\|x_\iota\|^2$, $x = \sum_{\iota\in I} x_\iota$. Réciproquement, si (x_ι) est une famille d'éléments de E tels que $x_\iota\in E_\iota$ pour tout ι et tels que $\sum_{\iota\in I}\|x_\iota\|^2 < +\infty$, cette famille est sommable, et sa somme x est le seul point de E tel que $x_\iota = P_{V_\iota}(x)$ pour tout $\iota\in I$. Enfin, si y est un autre point de E, et si $y_\iota = P_{V_\iota}(y)$, on a $(x|y) = \sum_{\iota\in I}(x_\iota|y_\iota)$.

Corollaire 2.- Soit E un espace hilbertien somme hilbertienne d'une famille finie $(E_\iota)_{\iota\in I}$ de sous-espaces vectoriels fermés. Alors, E est somme directe topologique des E_ι.

Corollaire 3.- Soient E un espace préhilbertien séparé, $(E_\iota)_{\iota\in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels complets de E tels que, pour tout couple d'indices $\iota, \varkappa$ distincts, E_ι et $E_\varkappa$ soient orthogonaux. Soit V le sous-espace vectoriel fermé engendré par les E_ι. Soient $x\in E$, et $x_\iota = P_\iota(x)$.

1° On a : $\sum_{\iota\in I}\|x_\iota\|^2 \leq \|x\|^2$.

2° Les conditions suivantes sont équivalentes : a) $x\in V$; b) $\sum_{\iota\in I}\|x_\iota\|^2 = \|x\|^2$; c) la famille (x_ι) est sommable dans E, et $x = \sum_{\iota\in I} x_\iota$.

3° Si V est complet, la famille x_ι est sommable dans E, et on a $\sum_{\iota\in I}\|x_\iota\|^2 = \|P_V(x)\|^2$, $\sum_{\iota\in I} x_\iota = P_V(x)$.

En effet, soit $\hat{E}$ l'espace hilbertien complété de E, et identifions E à un sous-espace partout dense de $\hat{E}$. Les E_ι s'identifient à des sous-espaces vectoriels fermés de $\hat{E}$. L'adhérence $\hat{V}$ de V dans $\hat{E}$ est le sous-espace vectoriel fermé engendré par les E_ι dans $\hat{E}$, et on a $V = \hat{V}\cap E$.

 6

L'espace $\hat{E}$ est la somme hilbertienne des E_ι et du sous-espace E_0 supplémentaire orthogonal de $\hat{V}$ dans E . Soit $x_0 = P_{E_0}(x)$. D'après le cor. 1, on a $\|x\|^2 = \|x_0\|^2 + \sum_{\iota \in I} \|x_\iota\|^2$, et $x = x_0 + \sum_{\iota \in I} x_\iota^0$ dans $\hat{E}$. Ceci entraîne aussitôt le 1° du cor., et le fait que les conditions b) et c) du 2° sont équivalentes à la condition $x_0 = 0$ donc à la condition $x \in V$. Enfin, si V est complet, $x' = P_V(x)$ existe, et $x' - x_\iota = (x - x_\iota) - (x - P_V(x))$ est orthogonal à E_ι, donc $x_\iota = P_{V_\iota}(x')$; il suffit alors d'appliquer le 2° du cor. au vecteur x' .

Soit V la somme hilbertienne d'une famille $(V_\lambda)_{\lambda \in L}$; supposons que, pour chaque $\lambda \in L$, V_λ soit somme hilbertienne d'une famille $(W_{\lambda\mu})_{\mu \in M_\lambda}$; alors V est somme hilbertienne de tous les $W_{\lambda\mu}$ ($\lambda \in L$, $\mu \in M_\lambda$ pour chaque $\lambda \in L$). Tout revient en effet à vérifier que V est le sous-espace vectoriel fermé engendré par les $W_{\lambda\mu}$; or, ce sous-espace V' contient tous les $W_{\lambda\mu}$ pour un $\lambda \in L$ fixe, donc le sous-espace fermé V_λ qu'ils engendrent ; il est par suite identique à V .

Inversement, soit V la somme hilbertienne d'une famille $(V_\lambda)_{\lambda \in L}$; soit $(L_\iota)_{\iota \in I}$ une partition de L, et, pour chaque $\iota \in I$, soit U_ι la somme hilbertienne des V_λ tels que $\lambda \in L_\iota$; alors V est somme hilbertienne des U_ι . En effet, tout revient à montrer que, si $\iota \neq \varkappa$, U_ι et $U_\varkappa$ sont orthogonaux. Or, tout élément $x \in U_\iota$ (resp. $y \in U_\varkappa$) est limite d'éléments de $\sum_{\lambda \in L_\iota} V_\lambda$ (resp. de $\sum_{\lambda \in L_\varkappa} V_\lambda$), et $\sum_{\lambda \in L_\iota} V_\lambda$ et $\sum_{\lambda \in L_\varkappa} V_\lambda$ sont orthogonaux, donc il en est de même de x et y .

On peut exprimer ces propriétés en disant que la somme hilbertienne est <u>associative</u>.

3. Familles orthonormales dans un espace hilbertien.- Définition 2.- Dans un espace préhilbertien E , on dit qu'une famille $(e_\iota)_{\iota\in I}$ de vecteurs est orthonormale si $\|e_\iota\|= 1$ pour tout $\iota\in I$, et si, pour $\iota\neq\varkappa$, e_ι et $e_\varkappa$ sont orthogonaux.

Les sous-espaces vectoriels fermés $D_\iota = Ke_\iota$ de dimension 1 sont alors deux à deux orthogonaux. Pour tout $x\in E$, la projection orthogonale de x sur D_ι est égale à $\lambda_\iota e_\iota$ avec $(x-\lambda_\iota e_\iota|e_\iota)=0$, donc $(x|e_\iota)=\lambda_\iota(e_\iota|e_\iota)=\lambda_\iota$. Les résultats du n°2, appliqués aux sous-espaces D_ι , donnent les énoncés suivants :

Proposition 2.- Dans un espace préhilbertien séparé, toute famille orthonormale est topologiquement libre.

Proposition 3.- Soient E un espace préhilbertien séparé, $(e_\iota)_{\iota\in I}$ une famille orthonormale, V le sous-espace vectoriel fermé de E engendré par les e_ι .

1° Pour tout $x\in E$, on a

$$\sum_{\iota\in I}|(x|e_\iota)|^2\leq\|x\|^2$$

(inégalité de Bessel), de sorte que l'ensemble des $\iota\in I$ tels que $(x|e_\iota)\neq 0$ est dénombrable. En outre, les conditions suivantes sont équivalentes : a) $x\in V$; b) $\|x\|^2=\sum_{\iota\in I}|(x|e_\iota)|^2$; c) la famille des $(x|e_\iota)e_\iota$ est sommable dans E ,et $x=\sum_{\iota\in I}(x|e_\iota)e_\iota$.

2° Si V est complet, la famille des $(x|e_\iota)e_\iota$ est sommable dans E et $\sum_{\iota\in I}(x|e_\iota)e_\iota = P_V(x)$, $\sum_{\iota\in I}|(x|e_\iota)|^2=\|P_V(x)\|^2$.

3° Si V est complet, et si $(\lambda_\iota)_{\iota\in I}$ est une famille de scalaires tels que $\sum_{\iota\in I}|\lambda_\iota|^2<+\infty$, il existe un point $x\in V$ et un seul tel que $(x|e_\iota)=\lambda_\iota$. Si $(\mu_\iota)_{\iota\in I}$ est une autre famille de scalaires tels que $\sum_{\iota\in I}|\mu_\iota|^2<+\infty$, et si $y\in V$ est tel que $(y|e_\iota)=\mu_\iota$, on a $(x|y)=\sum_{\iota\in I}\lambda_\iota\bar{\mu}_\iota$.

NBR079 8

Proposition 4.- Soit $(e_\iota)_{\iota \in I}$ une famille orthonormale dans un espace préhilbertien séparé E . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) la famille (e_ι) est totale ;

b) pour tout $x \in E$, la famille $(x|e_\iota)e_\iota$ est sommable et
$x = \sum_{\iota \in I} (x|e_\iota)e_\iota$;

c) pour tout $x \in E$, on a $\|x\|^2 = \sum_{\iota \in I} |(x|e_\iota)|^2$ (identité de Parseval).

Lorsque E est hilbertien, ces conditions sont encore équivalentes à la suivante :

d) les égalités $(x|e_\iota)=0$ pour tout $\iota \in I$ entraînent $x=0$.

L'équivalence des conditions a), b), c) résulte aussitôt de la prop.3. L'équivalence des conditions a) et d) lorsque E est hilbertien résulte de la prop. du § 1 .

Par abus de langage, une famille orthonormale et totale (e_ι) dans un espace préhilbertien E est appelée une base orthonormale de E ; c'est aussi une base orthonormale du complété de E .

Pour qu'aucune confusion ne se produise entre la notion de base orthonormale et celle de base de E sur le corps K définie en Alg.,chap.II, § 1,n°6, nous dirons toujours par la suite qu'une base d'un espace préhilbertien E , au sens de cette dernière définition, est une base algèbrique de E sur K .

Comme les éléments d'une famille orthonormale sont distincts, on peut encore appeler ensemble orthonormal l'ensemble de ces éléments ; les mots de "base orthonormale" pourront donc signifier aussi bien un ensemble orthonormal et total B que la famille définie par une application biunivoque d'un ensemble d'indices sur B .

4. Orthonormalisation d'un ensemble de vecteurs d'un espace hilbertien.-

Théorème 2.- *Pour tout ensemble orthonormal L dans un espace hilbertien E il existe une base orthonormale B de E contenant L.*

En effet, soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des parties orthonormales de E, ordonné par inclusion. Cet ensemble est de caractère fini (Ens. R, § 6). Il existe donc dans $\mathcal{D}$ un ensemble maximal B contenant L. Tout revient à prouver que B est un ensemble total. Dans le cas contraire, il existerait un vecteur $y \neq 0$ orthogonal à tous les vecteurs de B (prop.4), et en multipliant y par un scalaire, on peut supposer que $\| y \| = 1$; alors, $B \cup \{y\}$ serait un ensemble orthonormal distinct de B et contenant L, ce qui contredit la définition de B ; d'où le théorème.

Corollaire.- *Dans tout espace hilbertien, il existe une base orthonormal*

Il suffit d'appliquer le cor.2 au cas où $L = \emptyset$.

Proposition 5.- *Soit E un espace préhilbertien, et soit (a_n) une famille libre dénombrable de vecteurs de E. Il existe une famille orthonormale (e_n) et une seule dans E telle que :*

1°- *pour tout entier $p > 0$, le sous-espace vectoriel engendré par $e_1, e_2, \dots, e_p$ est identique au sous-espace vectoriel engendré par $a_1, a_2, \dots, a_p$;*

2°- *pour tout indice n, $(a_n | e_n)$ est réel > 0.*

En effet, soit V_n le sous-espace (de dimension n) engendré par $a_1, a_2, \dots, a_n$. Si $b_{n+1} = a_{n+1} - P_{V_n}(a_{n+1})$, Kb_{n+1} est le supplémentaire orthogonal de V_n dans V_{n+1}, donc, si les e_n satisfont à la condition 1° de l'énoncé, on doit avoir $e_{n+1} = \lambda b_{n+1}$; la condition $\| e_{n+1} \| = 1$ donne ensuite $|\lambda|^2 \| b_{n+1} \|^2 = 1$, et la condition $(a_{n+1} | e_{n+1}) > 0$ donne $\overline{\lambda}(a_{n+1} | b_{n+1}) > 0$; cela détermine complètement λ, et prouve par suite qu'on peut déterminer par récurrence une famille orthonormale (e_n) et une seule de façon à satisfaire aux conditions 1° et 2° de l'énoncé.

 10

On dit que (e_n) est obtenue par orthonormalisation de la famille libre (a_n).

Il est clair que le sous-espace vectoriel engendré par la famille (e_n) est identique au sous-espace vectoriel engendré par la famille (a_n). En particulier, si (a_n) est une suite totale, il en est de même de (e_n), qui est donc une base orthonormale de E ; d'où le corollaire :

Corollaire.- Dans tout espace préhilbertien E de type dénombrable, il existe une base orthonormale dénombrable.

Il suffit de remarquer que d'une suite totale dans E, on peut toujours extraire une famille libre totale (Alg.,chap.II,§ 3).

Par contre, il existe des espaces préhilbertiens ne possédant aucune base orthonormale (exerc.)

Pour tout ensemble d'indices I, désignons par $L^2_K(I)$ l'espace hilbertien somme hilbertienne externe de la famille $(K_\iota)_{\iota \in I}$, où $K_\iota = K$ pour tout $\iota \in I$, autrement dit, l'espace des familles $x = (\xi_\iota)_{\iota \in I}$ d'éléments de K, ayant pour ensemble d'indices I, et telles que $\sum_{\iota \in I} \xi_\iota \overline{\xi_\iota} < +\infty$, avec le produit scalaire $(x|y) = \sum_{\iota \in I} \xi_\iota \overline{\eta_\iota}$. Le cor. du th.2 montre que tout espace hilbertien sur K est isomorphe à un espace $L^2_K(I)$.

Proposition 6.- Dans un espace hilbertien E, deux bases orthonormales quelconques sont équipotentes.

Soient B et C deux bases orthonormales de E. Le cas où l'un des deux ensembles B, C est fini est trivial, puisqu'une base orthonormale finie est une base algèbrique de l'espace. Supposons donc B et C infinies. Pour tout $x \in B$, soit A_x la partie de C formée des $y \in C$ tels que $(x|y) \neq 0$. L'ensemble A_x est dénombrable (prop.2). Pour tout $y \in C$, il existe $x \in B$ tel que $y \in A_x$, puisque B est une base orthonormale et que $y \neq 0$, autrement dit, C est la réunion des ensembles dénombrables A_x, lorsque x parcourt B. La puissance de C est donc inférieure à celle de de $\mathbb{N}\times B$, donc à celle de B (Ens.R, § 7) ; de même, la puissance de B est inférieure à celle de C, ce qui achève la démonstration.

Le cardinal d'une base orthonormale quelconque d'un espace hilbertien E est appelé la <u>dimension hilbertienne de</u> E .

<u>Corollaire 1.- Etant données deux bases orthonormales dans un espace hilbertien</u> E , <u>il existe un automorphisme de</u> E <u>transformant la première base en la seconde</u>.

<u>Corollaire 2.- Pour que les espaces hilbertiens</u> $L^2_K(I)$ <u>et</u> $L^2_K(J)$ <u>soient isomorphes, il faut et il suffit que</u> I <u>et</u> J <u>soient équipotents</u>.

<u>Remarque</u>.- Supposons I infini, et soit J une partie de I distincte de I et équipotente à I . L'espace $L^2_K(J)$ s'identifie à un sous-espace de $L^2_K(I)$ distinct de $L^2_K(I)$. Donc un espace hilbertien E de dimension hilbertienne infinie est isomorphe à un sous-espace vectoriel fermé de E distinct de E .

<u>Exercice</u>.

Soient E un espace préhilbertien, (E_ι) une famille de sous-espaces vectoriels complets de E , bien ordonnée par inclusion, telle que la réunion des E_ι soit partout dense dans E . Il existe une base orthonormale $(f_\alpha)_{\alpha\in A}$ de E possédant la propriété suivante : pour tout ι , l'ensemble des f_α appartenant à E_ι est une base orthonormale de E_ι . (Considérer les systèmes orthonormaux S de E tels que tout vecteur de S n'appartenant pas à E_ι soit orthogonal à E_ι , pour tout ι ; envisager un tel système maximal). Déduire de là une nouvelle démonstration de la prop.5 .