RÉDACTION N° 175

COTE : **NBR 078**

TITRE : **VARIÉTÉS DIFFÉRENTIABLES I-II-III**

ASSOCIATION DES COLLABORATEURS DE NICOLAS BOURBAKI

NOMBRE DE PAGES : **82**

NOMBRE DE FEUILLES : **82**

Archives
Forlement mars 53

NBR 078

1752

VARIETES DIFFERENTIABLES . I

Sommaire

Commentaires .

Ce Chapitre, première pierre d'un grandiose édifice, a pour but de donner les notions indispensables sur les variétés fibrées et les variétés $P^{(m)}(V)$. Comme on ne saurait parler de variétés fibrées sans parler de groupes de Lie, et qu'on ne saurait parler de ceux-ci sans montrer qu'il en existe d'autres que GL(V), on a donné dans les §§ 1 et 2 ce qui est nécessaire et suffisant pour assurer que "tous les groupes connus" sont de Lie, sauf bien entendu ceux- du reste peu intéressants ... - qui n'en sont pas. Il ne semble du reste pas mauvais de commencer une théorie des variétés par des choses élémentaires, même si celles-ci peuvent être récupérées après coup à l'aide des marteux-pilons qui suivront.

On est prié de ne pas considérer ce Chapitre et ceux qui le suivront comme une rédaction en forme (d'ailleurs, l'absence des ornements canoniques ne manquera pas de frapper les fidèles); on les a rédigés plutôt comme des fascicules de résultats, en donnant toutefois suffisamment de détails sur les démonstrations pour que leur reconstitution complète par les lecteurs ne soit qu'un exercice trivial de dressage de l'âne-qui-trotte, et en s'arrangeant pour énoncer les résultats dans un ordre cohérent.

A part la définition des variétés et les résultats élémentaires sur les fonctions différentiables dans R^n , on ne suppose rien connu.

Ayant décidé de sa propre initiative de rendre publics les résultats de ses nombreuses cogitations, le rédaateur ne s'est pas crû lié par le plan adopté à Pelvoux en juillet 52 ; il n'en eût évidemment pas été de même, comme l'expérience l'a toujours montré, si l'on avait dû écrire une rédaction officielle, le respect des décisions prises en Congrès étant, comme chacun sait, à la base du fonctionnement normal et efficace de notre institution...

---

§ 1 - Vecteurs tangents.

1 - Soit V une variété différentiable. On désigne par D(V) l'ensemble des fonctions différentiables réelles définies sur V ; c'est une algèbre sur R. On appelle <u>vecteur tangent à V en</u> x toute forme linéaire $f \longrightarrow X(f)$ sur D(V) vérifiant l'identité

$$X(fg) = X(f)g(x) + f(x)X(g).$$

Il est clair que l'ensemble des vecteurs tangents à V en x est un sous-espace du dual de D(V); on appelle <u>espace vectoriel tangent à V en</u> x et on le note $\mathcal{V}'(x)$. Si X est un vecteur tangent en x, on a $X(f) = 0$ pour toute f de la forme gh, où g et h sont nulles en x; en particulier, $X(f) = 0$ dès que f est nulle au voisinage de x. Cela permet de définir X(f) ~~à~~ même lorsque f n'est définie qu'au voisinage de x.

2 - Soit (ξ^i) une carte de V autour de x, de telle sorte que toute $f \in D(V)$ puisse, au voisinage de x, s'exprimer différentiablement au moyen des fonctions ξ^i ; on supposera pour simplifier

(1) $$\xi^i(x) = 0$$

pour tout i, et, pour $f \in D(V)$, on posera

(2) $$X_i(f) = \frac{\partial f}{\partial \xi^i}(x) \quad ;$$

il est évident que les formes linéaires X_i ainsi obtenues sont des vecteurs tangents à V en x; de plus, soit X un vecteur tangent à V en x, par ailleurs quelconque; d'après la formule de Taylor on a une relation

$$f = f(x) + \sum X_i(f)\xi^i + g$$

où g est de la forme $g'g''$ avec g' et g'' nulles en x; par conséquent $X(g) = 0$ et il vient, en tenant compte du fait évident qu'on a aussi $X(1) = 0$:

$$X(f) = \sum \alpha^i . X_i(f)$$

où $\alpha^i = X(\xi^i)$ est une constante. On déduit de là que l'espace vectoriel tangent à V en x est de dimension n = dim(V), et que les (2) en forment une base.

3 - Soit θ une application de V dans une variété W, et soit X un vecteur tangent à V en x; pour $g \in D(W)$ posons $Y(g) = X(g \circ \theta)$; il est immédiat de voir qu'on définit ainsi un vecteur Y tangent à W au point $y = \theta(x)$; on dit que Y est l'<u>image de</u> X <u>par</u> θ. L'application $X \longrightarrow Y$ ainsi définie de $\mathcal{V}'(x)$ dans $\mathcal{W}'(y)$ est évidemment linéaire; c'est l'<u>application dérivée de</u> θ <u>en</u> x, notée $\theta'(x)$. Le rang de $\theta'(x)$ s'appelle <u>rang de</u> θ <u>en</u> x. Si $\theta = \psi \circ \varphi$ est composée de deux applications φ et ψ il est clair qu'on a la relation

$$\theta'(x) = \psi'[\varphi(x)] \circ \varphi'(x) \quad ,$$

dite <u>théorème des fonctions composées.</u>

4 - θ étant une application de V dans W, telle que $\theta(x) = y$, prenons une carte (ξ^i) de V autour de x, et une carte (η^j) de W autour de y, d'où des relations $\eta^j = \theta^j(\xi)$ pour définir θ ; à ces cartes locales sont associées (n°2) une base $X_i : f \rightarrow \frac{\partial f}{\partial \xi^i}(x)$ de $\mathcal{V}'(x)$, et une base $Y_j : g \rightarrow \frac{\partial g}{\partial \eta^j}(y)$ de $\mathcal{W}'(y)$. Cela dit, on vérifie sans peine que, par rapport à ces bases, la matrice de l'application dérivée $\theta'(x)$ a pour terme général la dérivée partielle $\partial \theta^j / \partial \xi^i$ calculée au point x.

5 - Du n°4 et du théorème des fonctions implicites résulte que, pour que θ définisse un isomorphisme d'un voisinage de x sur un voisinage de y il faut et il suffit que $\theta'(x)$ soit un isomorphisme de $\mathcal{V}'(x)$ sur $\mathcal{W}'(y)$.

6 - Soient $W = U \times V$ une variété produit, $z = (x,y)$ un point de W, et Z un vecteur tangent à W en z; on définit alors un vecteur X tangent à U en x en posant, pour $f \in D(U)$, $X(f) = Z(f \otimes 1)$; de même on définit un vecteur Y

tangent à V en y en posant $Y(g) = Z(1 \otimes g)$ pour $g \in D(V)$; cela dit on vérifie en prenant des cartes locales que $Z \to (X,Y)$ est un isomorphisme de l'espace tangent $\mathcal{W}'(z)$ sur le produit $\mathcal{U}'(x) \times \mathcal{V}'(y)$. On dit que X et Y sont les <u>composantes de</u> Z suivant U et V; ce sont évidemment les images de Z par les projections canoniques de Z sur U et V.

---

§ 2 - Sous variétés.

1 - Rappelons qu'une variété de dimension n est un espace topologique V muni d'un entier n (Ah! qu'en termes...) et d'une famille D(V) de fonctions réelles définies sur V, avec les axiomes suivants:

(VD 1): toute fonction f définie sur V qui, au voisinage de tout point de V, peut s'exprimer différentiablement au moyen de fonctions de D(V), est elle-même dans D(V);

(VD 2): pour tout $x \in V$ il existe n fonctions $\xi^i \in D(V)$ et un ouvert U contenant x tels que: 1° $y \to (\xi^i(y))$ soit un homéomorphisme de U sur un ouvert de R^n; 2° toute $f \in D(V)$ soit, dans U, fonction différentiable des ξ^i.

2 - Soit E une partie d'une variété V, et désignons par D(E) la famille des fonctions définies sur E et possédant la propriété suivante: pour tout $x \in E$ et toute $f \in D(E)$ il existe $g \in D(V)$ telle que $f(y) = g(y)$ pour tout $y \in E$ assez voisin de x. Il est visible que D(E) vérifie l'axiome (VD 1). Si D(E) vérifie (VD 2) pour un entier p on dira que E est une <u>sous-variété de dimension p de</u> V. On peut alors munir E d'une structure de variété différentiable (dite "induite" par celle de V), et il est clair que l'injection de E dans V est une application différentiable.

3 - Soit E une sous-variété de dimension p d'une variété V de dimension n; en un point x de E choisissons une carte locale (ξ^i) de V et une carte locale (η^j) de E ; U étant un voisinage assez petit de x dans V, on aura dans $E \cap U$ des relations $\eta^j = f^j(\xi)$, $\xi^i = g^i(\eta)$ où les f^j et g^i sont différentiables dans des ouverts de R^n et R^p. La matrice $(\partial f^j/\partial \xi^i)$ étant évidemment inverse à gauche de la matrice $(\partial g^i/\partial \eta^j)$ on voit qu'en numérotant convenablement les coordonnées on peut supposer le jacobien de $\eta^1,\ldots,\eta^p$ par rapport à $\xi^1,\ldots,$ ξ^p non nul au voisinage de x; il en est de même alors du jacobien de $\eta^1,\ldots$ $\eta^p, \xi^{p+1},\ldots,\xi^n$ par rapport à $\xi^1,\ldots,\xi^n$; par suite les fonctions $\eta^1,$ $\ldots, \eta^p, \xi^{p+1},\ldots,\xi^n$ forment une carte de V autour de x, de sorte qu'on peut supposer $\eta^j = \xi^j$ pour $1 \leq j \leq p$, ce que nous ferons. Dans $E \cap U$ on aura alors des relations $\xi^{p+1} = g^{p+1}(\xi^1,\ldots,\xi^p),\ldots,\xi^n = g^n(\xi^1,\ldots,\xi^p)$ et ces relations caractérisent les $y \in E$ assez voisins de x (car si $y \in V$ les vérifie, et si l'on désigne par z le point de E ayant, dans la carte locale $\xi^1,\ldots,\xi^p$, les coordonnées $\xi^j(y)$, on voit que y et z auront mêmes coordonnées dans V, d'où $y = z$ et $y \in E$). Prenant comme carte de V autour de x les fonctions $\xi^1,\ldots,\xi^p$, $\xi^{p+1}-g^{p+1}(\xi^1,\ldots,\xi^p),\ldots,\xi^n - g^n(\xi^1,\ldots,\xi^p)$ -ce qui est évidemment permis - on en conclut que pour tout $x \in E$ il existe une carte (ξ^i) de V autour de x telle que, au voisinage de x, E soit définie par des équations $\xi^{p+1} = \ldots = \xi^n = 0$. Il est clair que cela caractérise les sous-variétés de dimension p.

4 - Le n° précédent montre que l'injection ι de E dans V est, en tout point x de E, une application de rang p ; donc ι applique isomorphiquement l'espace tangent $\mathcal{E}'(x)$ sur un sous-espace de l'espace tangent $\mathcal{V}'(x)$; si E est définie au voisinage de x par des équations $\xi^i = 0$ ($p+1 \leq i \leq n$) ce sous-espace est évidemment engendré par les vecteurs $f \rightarrow (\partial f/\partial \xi^i)(x)$, $1 \leq i \leq p$.

5 - Soit θ une application de rang constant p d'une variété V de dimension n dans une variété W; on va montrer que toute équation θ = Constante définit

nit une sous-variété E de dimension n-p de V, et que pour tout $x \in E$ le sous-espace tangent à E en x est le noyau de $\Theta'(x)$. Pour $x \in E$ choisissons en effet une carte (ξ^i) de V autour de x, et une carte (η^j) de W autour de $y = \Theta(x)$, d'où des relations $\eta^j = \Theta^j(\xi)$ au voisinage de x; comme Θ est de rang p on peut supposer le jacobien des Θ^j $(1 \leqslant j \leqslant p)$ par rapport aux $\xi^i (1 \leqslant i \leqslant p)$ non nul en x, et par suite, comme le montre le raisonnement du n°3, choisir la carte de V de telle sorte qu'on ait $\Theta^j(\xi) = \xi^j$ pour $1 \leqslant j \leqslant p$; le rang de Θ n'étant pas $>$ p , on aura alors

$$\frac{D(\xi^1, \ldots, \xi^p, \Theta^j)}{D(\xi^1, \ldots, \xi^p, \xi^i)} = 0$$

quels que soient i et j au voisinage de x, ce qui veut dire que les fonctions Θ^j , au voisinage de x, ne dépendent que de $\xi^1, \ldots, \xi^p$. Par conséquent E est défini au voisinage de x par des relations $\xi^i = \text{Cte}$ $(1 \leqslant i \leqslant p)$, d'où les propriétés annoncées.

7 – Soient $W = U \times V$ une variété produit, E et F des sous-variétés de dimensions p et q de U et V; il résulte alors immédiatement du n°3 que $E \times F$ est une sous-variété de dimension p+q de W. Si on munit en outre E,F et $E \times F$ des structures différentiables induites par celles de U,V,W , il est clair que $E \times F$ s'identifie à la variété produit de E et F.

8 – Notons enfin les résultats triviaux mais utiles que voici: soit E une sous-variété de V; pour qu'une application de W dans E soit différentiable en tant qu'application dans la variété E, il faut et il suffit qu'elle le soit en tant qu'application dans V; d'autre part, toute sous-variété de E est une sous-variété de V , et les structures différentiables s'induisent transitivement.

§ 3 - Exemples de groupes de Lie.

1 - On appelle <u>groupe de Lie</u> tout groupe G muni d'une structure différentiable telle que l'application $(x,y) \longrightarrow xy^{-1}$ soit différentiable.

Par exemple, soit V un vectoriel de dimension finie sur R, et considérons le groupe GL(V) des automorphismes de V. C'est une partie ouverte, donc une sous-variété, du vectoriel $\mathcal{L}(V)$ des applications linéaires de V dans V ; si l'on représente chaque $u \in GL(V)$ par sa matrice $(\xi^i_j(u))$ par rapport à une base de V, les fonctions ξ^i_j forment une carte de GL(V) (i.e. appliquent isomorphiquement GL(V) sur un ouvert d'un espace cartésien). Or les coordonnées de uv^{-1} s'expriment, au moyen de celles de u et de celles de v, par des fonctions rationnelles dont les dénominateurs ne s'annulent pas dans GL(V) ; muni de la structure différentiable qu'on vient de définir, GL(V) est donc un groupe de Lie.

On notera que, pour qu'une application $x \longrightarrow u(x)$ d'une variété U dans GL(V) soit différentiable il faut et il suffit que, pour tout $a \in V$, l'application $x \longrightarrow u(x)a$ de U dans V soit différentiable.

2 - Soit H un sous-groupe d'un groupe de Lie G, et supposons que H soit en même temps une <u>sous-variété</u> de G; alors H, muni de la structure différentiable induite, est un groupe de Lie. Cela résulte immédiatement du fait que la structure différentiable de la variété $H \times H$ est induite par celle de $G \times G$ (2,n°7).

3 - On dit qu'un groupe de Lie G <u>opère</u> (à droite) <u>différentiablement</u> sur une variété V si l'on s'est donné une application différentiable $(x,s) \longrightarrow x.s$ de $V \times G$ dans V possédant les propriétés algébriques bien connues. Chaque $s \in G$ définit alors un autom. $x \rightarrow x.s$ de la variété V. Par exemple, pour V vectoriel, le groupe GL(V) opère différentiablement (à gauche) sur V.

4 - Soit G un groupe de Lie opérant différentiablement sur une variété V; pour un $x \in V$ considérons le sous-groupe H défini par la relation $x.s = x$ (groupe d'isotropie, ou stabilisateur, de x); alors H est une sous-variété de G (donc peut être muni d'une structure de groupe de Lie). Considérons en effet l'application $\theta : s \to x.s$ de G dans V, et, pour tout $a \in G$, les applications $\tau_a : s \to sa$, et $\sigma_a : y \to y.a$, qui sont des autom. des variétés G et V respectivement. Il est clair qu'on a l'identité

$$\theta \circ \tau_a = \sigma_a \circ \theta$$

d'où en appliquant le théorème des fonctions composées la relation

$$\theta'(sa) \circ \tau'_a(s) = \sigma'_a(x.s) \circ \theta'(s) \qquad ;$$

comme les applications dérivées $\tau'_a(s)$ et $\sigma'_a(x.s)$ sont des isomorphismes sur, on voit que $\theta'(sa)$ et $\theta'(s)$ ont même rang. Par suite θ est une application de rang constant, d'où immédiatement notre assertion.

5 - Etant donnés un groupe de Lie G et un vectoriel V de dimension finie, on appelle représentation linéaire de G dans V toute représentation différentiable $s \to M(s)$ de G dans le groupe de Lie $GL(V)$. On peut alors faire opérer G différentiablement sur V par la formule $(a, s) \longrightarrow M(s^{-1})a$. D'après le n° 4 on peut donc, pour tout $a \in V$, munir le sous-groupe des s tels que $M(s)a = a$ d'une structure de groupe de Lie (induite par celle de G).

A partir de la représentation M de G dans V on peut construire une représentation (dite contragrédiente de la précédente) de G dans le dual V' de V, au moyen de la formule $s \to {}^tM(s^{-1})$; plus généralement, soit $T^p_q(V)$ l'espace vectoriel produit tensoriel de p espaces égaux à V et de q espaces égaux à V' ; on peut définir de façon évidente une représentation de G dans cet espace à partir de la représentation donnée M ; on obtient ainsi un moyen de former, à partir de G et d'une représentation de G, des sous-groupes de Lie de G.

6 - Le lecteur est prié de faire trotter tout seul les groupes classiques, et même, si l'envie l'en prend, les groupes algébriques, sans omettre de remarquer que leur structure différentiable est induite par celle du $GL(V)$ qui les contient, et donc par celle du $\mathcal{L}(V)$ correspondant; il est en effet utile de savoir que, pour vérifier qu'un élément d'un tel groupe varie différentiablement, il suffit de regarder les éléments de sa matrice.

7 - Soit A une algèbre (associative ou non) de dimension finie sur R. Soit f l'application bilinéaire $(x,y) \to xy$ définissant la structure de A ; f s'identifie à un élément de $T^1_2(A)$; lui appliquant le n°5 on en conclut que le groupe $G(A)$ des autom. de l'algèbre A est de Lie , et qu'il opère différentiablement sur A, vu que sa structure différentiable est induite par celle de $GL(A)$.

---

§ 4 - Espaces fibrés.

"Pourquoi avez-vous votre menton rasé comme cela, dit-il au baron d'un ton de calinerie. C'est si beau une belle barbe. - Fi! c'est dégoûtant", répondit le baron.

1 - Soit P une variété sur laquelle opère un groupe de Lie G, et soit π une application différentiable de P sur une variété V. On dit que P est un espace fibré principal de base V et de groupe G si les axiomes suivants sont vérifiés:

(FP 1): quels que soient $u, v \in P$ il existe au plus un $s \in G$ tel que $v = u.s$;

(FP 2): l'existence d'un s tel que $v = u.s$ équivaut à $\pi(u) = \pi(v)$;

(FP 3): pour tout ouvert U suffisamment petit de V, il existe un isomorphisme (non canonique) de la variété $\pi^{-1}(U)$ sur la variété $U \times G$ qui transforme π en $(x,s) \to x$ et les opérations de G en $(x,s) \to (x,sg)$.

Par exemple, le produit $V \times G$ peut être considéré de façon évidente comme un fibré principal de base V et de groupe G; un tel fibré principal sera dit <u>trivial</u>.

2 - Soient P un fibré principal de base V et de groupe G, et F une variété sur laquelle G opère à gauche. On peut alors faire opérer G dans $P \times F$ par la formule

$$(u,\xi).s = (u.s, s^{-1}.\xi) ,$$

d'où une relation d'équivalence sur $P \times F$; nous désignerons par E l'ensemble quotient, et allons montrer comment on peut le munir canoniquement d'une structure différentiable.

3 - Désignons par $\tilde{u}(\xi)$ l'élément de E qui correspond au couple (u,ξ) de $P \times F$; chaque $u \in P$ définit ainsi une application $\tilde{u}$ de F dans E; cette application est appelée un <u>repère</u> dans E, et l'image $\tilde{u}(F)$ s'appelle une <u>fibre</u> de E. En vertu de l'axiome (FP 1), $\tilde{u}$ est une application <u>biunivoque</u> ; d'autre part la fibre $u(F)$ ne dépend que du point $x = \pi(u)$ de V, car la relation du n°2 montre qu'on a

$$\widetilde{u.s}(\xi) = \tilde{u}(s.\xi) ;$$

on écrira donc la plupart du temps $F(x)$ au lieu de $\tilde{u}(F)$. Il est évident que les fibres $F(x)$ sont deux à deux disjointes et ont pour réunion E tout entier, de sorte qu'on peut définir une application π_E de E sur V par la condition qu'elle applique la fibre $F(x)$ sur le point x. Cette application se déduit du reste, par passage au quotient, de l'application $(u,\xi) \to \pi(u)$ de $P \times F$ sur V.

4 - Soit, dans V, un ouvert U vérifiant (FP 3), d'où un isomorphisme f de $U \times G$ sur $\pi^{-1}(U)$ vérifiant

$$\pi \circ f(x,s) = x \qquad ; \qquad f(x,s).t = f(x,st) \quad ;$$

posant $u(x) = f(x,e)$ on définit une application de U dans P telle que $\pi \circ u(x) = x$, et il est clair que f est donnée par

$$f(x,s) = u(x).s \quad .$$

Cela dit, tout élément de E se projettant dans U se met, de façon unique, sous la forme $u(x)(\xi)$; on obtient ainsi une application biunivoque

$$\tilde{f} : (x,\xi) \longrightarrow \widetilde{u(x)}(\xi)$$

de $U \times F$ sur l'ensemble $\pi_E^{-1}(U) \subset E$; cela permet de transporter à cet ensemble la structure différentiable de $U \times F$. Comme la structure différentiable ainsi définie sur $\pi_E^{-1}(U)$ dépend à priori de l'isomorphisme f nous la désignerons provisoirement par $S(f)$. Il est clair que l'application π_E est différentiable pour $S(f)$.

5 - Soient maintenant U' et U'' deux ouverts de V vérifiant (FP 3), f' et f'' des isomorphismes de $U' \times G$ sur $\pi^{-1}(U')$ et de $U'' \times G$ sur $\pi^{-1}(U'')$; il leur correspond (n° 4) des applications $u'(x)$ et $u''(x)$ de U' et U'' dans P ; et d'autre part f' et f'' définissent des structures différentiables $S(f')$ et $S(f'')$ sur les ensembles $\pi_E^{-1}(U')$ et $\pi_E^{-1}(U'')$. Posons $U = U' \cap U''$; comme π_E est différentiable pour $S(f')$ et $S(f'')$ on voit que $\pi_E^{-1}(U)$ est ouvert dans chacun des ensembles $\pi_E^{-1}(U')$ et $\pi_E^{-1}(U'')$; on va montrer que les structures différentiables $S(f')$ et $S(f'')$ sont compatibles dans $\pi_E^{-1}(U)$. En effet, ces structures sont obtenues en identifiant cet ensemble avec $U \times F$ d'une part au moyen de l'application $(x,\xi) \longrightarrow \widetilde{u'(x)}(\xi)$, d'autre part au moyen de $(x,\xi) \longrightarrow \widetilde{u''(x)}(\xi)$; posant $u''(x) = u'(x).s(x)$ on voit que la seconde structure se déduit de la première par l'application $(x,\xi) \longrightarrow (x, s(x).\xi)$ de $U \times F$ sur lui-même; donc tout revient à faire voir que, dans U, $s(x)$ est fonction différentiable de x, autrement dit à établir le résultat qui nous

occupe lorsque $E = P$; mais alors c'est une conséquence triviale de (FP 3).

6 - Du n°5 résulte l'existence sur E d'une structure différentiable unique induisant les diverses structures partielles $S(f)$. Muni de cette structure de variété, E s'appelle l'espace fibré de fibre F associé à P. Il est évident que la projection π_E de E sur V est différentiable, et partout de rang maximum; que chaque fibre de E est une sous-variété fermée de E; qu'enfin chaque rep~~r~~ère u définit entre F et $\tilde{u}(F)$ un isomorphisme de variété. Noter aussi que, si F est le groupe G opérant à gauche sur lui-même, la variété E s'identifie canoniquement à P.

7 - Pour chaque fibre $F(x)$ de E, on a en général une infinité d'isomorphismes de F sur $F(x)$, à savoir les $\tilde{u}$ avec $\pi(u) = x$, et ils se déduisent les uns des autres par les opérations de G sur F. Il s'ensuit que toute structure algébrique sur F invariante par G se transporte canoniquement aux fibres $F(x)$.

8 - Soit E un espace fibré de fibre F, associé à un fibré principal P de base V et de groupe G. Une application σ d'un ouvert U de V dans E est une section de E au-dessus de U si l'on a $\pi_E \circ (x) = x$ pour tout $x \in U$. Une section de E au-dessus de V s'appellera une section de E, sans autre précision. L'axiome (FP 3) montre qu'on peut toujours former des sections au-dessus d'un ouvert suffisamment petit.

Soit σ une section de E ; pour tout $u \in P$ il existe un $\xi \in F$ et un seul tel que $\tilde{u}(\xi) = \sigma(x)$, $x = \pi(u)$; posant $\xi = \varphi(u)$ on définit ainsi une application différentiable de P dans F qui, d'après le n° 2, vérifie l'identité

$$\varphi(u.s) = s^{-1}.\varphi(u) ;$$

réciproquement une telle application conduit de façon évidente à une section de E.

§ 5 – Opérations sur les espaces fibrés.

1 – Soit P fibré principal de base V et de groupe G, et soit Θ une application de W dans V; dans l'ensemble produit $P \times W$ soit Q l'ensemble des couples (u,y) tels que $\pi(u) = \Theta(y)$; G opère sur Q par $(u,y).s = (u.s,y)$, et d'autre part on a une application π de Q sur W par $(u,y) \rightarrow y$. Soit A un ouvert de V au-dessus duquel P s'identifie à $A \times G$, et soit $B = \Theta^{-1}(A)$; alors il est clair qu'au dessus de B l'ensemble Q s'identifie à $B \times G$; on en déduit, par des raisonnements analogues à ceux du § 4, n°5, l'existence sur Q d'une structure différentiable telle que : 1° Q soit un fibré principal de base W et de groupe G; 2° l'application $\hat{\Theta}$: $(u,y) \rightarrow u$ de Q dans P soit différentiable. On dit que Q est l'<u>image réciproque de</u> P <u>par</u> Θ.

2 – Soit maintenant un fibré E de fibre L associé à P, et formons le fibré F de même fibre L associé à Q. Pour $\xi \in L$ et $v = (u,y) \in Q$ considérons les points $\tilde{u}(\xi) \in E$ et $\tilde{v}(\xi) \in F$; en vertu des relations

$$\widetilde{u.s}(\xi) = \tilde{u}(s.\xi), \ \ldots.$$

il est clair que $\tilde{u}(\xi)$ ne dépend que de $\tilde{v}(\xi)$, d'où une application, que nous noterons encore $\hat{\Theta}$, de F dans E. Il est clair que, pour tout $y \in W$, $\hat{\Theta}$ définit un isomorphisme de la fibre $L(y)$ de F sur la fibre $L(x)$ de E, où $x = \Theta(y)$. Comme au n° 1, on dit que F est l'image réciproque de E par Θ.

3 – (PRODUIT FIBRE) Soient P et Q deux fibrés principaux de même base V, de groupes G et H; dans $P \times Q$ soit R l'ensemble des couples (u,v) tels que $\pi(u) = \pi(v)$; on a une application évidente de R sur V, et d'autre part on peut faire opérer le groupe $G \times H$ sur R par $(u,v).(s,t) = (u.s,v.t)$. Soit U un ouvert suffisamment petit de V; au-dessus de U, on a un isomorphisme f de $U \times G$ dans P et un isomorphisme g de $U \times H$ dans Q (axiome (FP 3)); la formule $(x,(s,t)) \rightarrow (f(x,s),g(x,t))$ définit alors une application biunivoque de $U \times (G \times H)$ sur la partie de R située au-dessus de U. D'où par les

raisonnements usuels une structure différentiable sur R qui en fait un fibré principal de base V et de groupe $G\times H$. On dit que R est le <u>produit fibré</u> de P par Q.

4 - Plus généralement soient E un fibré de fibre L associé à P et F un fibré de fibre M associé à Q ; faisons opérer $G\times H$ sur $L\times M$ de façon évidente; alors le fibré de fibre $L\times M$ associé à R s'appelle encore le <u>produit fibré</u> de E par F; il est évident que, pour tout $x\in V$, la fibre de x dans ce produit fibré s'identifie <u>canoniquement</u> au produit $L(x)\times M(x)$ des fibres de x dans E et F.

5 - On peut encore former d'autres fibrés associés à R. Par exemple, et conservant les notations du n° précédent, supposons que les fibres L et M soient des vectoriels, sur lesquels G et H opèrent par des représentations linéaires λ et μ ; on peut alors définir une représentation de $G\times H$ dans le vectoriel N formé des applications p-linéaires de L dans M; d'où un fibré associé à R ; pour $x\in V$, la fibre $N(x)$ de celui-ci s'identifie canoniquement au vectoriel des applications p-linéaires de la fibre $L(x)$ dans la fibre $M(x)$. On pourrait aussi se restreindre aux applications multilinéaires alternées, ou symétriques, etc...

6 -(PRODUITS TENSORIELS ,...) Soit P un fibré principal de base V et de groupe G; soit $s\to M(s)$ une représentation linéaire de G dans un vectoriel F , et soit $s\to M'(s)$ la représentation contragrédiente dans le dual ~~M~~ F' de F ; si E et E' désignent les fibrés associés à P, de fibres F et F', la fibre $F'(x)$ du second s'identifie canoniquement au dual de la fibre $F(x)$ du premier. On dit que E' est le <u>dual fibré</u> de E.

7 - Soient maintenant λ et μ des représentations de G dans des vectoriels L et M , et soit ν la représentation de G dans $L\otimes M = N$ donnée par

$$\nu(s)(\xi\otimes\eta) = \lambda(s)\xi\otimes\mu(s)\eta \quad ;$$

le fibré de fibre N associé à P s'appelle le produit tensoriel fibré des fibrés E et F de fibres L et M associés à P. Pour tout $x\in V$, la fibre du premier au-dessus de x s'identifie canoniquement au produit tensoriel des fibres L(x) et M(x) de L et M. Si σ et τ sont des sections de E et F, on a donc une section de leur produit tensoriel fibré par $x\rightarrow\sigma(x)\otimes\tau(x)$.

8 - En combinant les procédés décrits aux n° 6 et 7 on obtient d'autres espaces fibrés, que le lecteur fera trotter à loisir.

---

§ 6 - Algèbres locales attachées à une variété.

1 - Soit A une algèbre associative, commutative, avec unité, et de dimension finie, sur R. On dit que A est une algèbre locale si A possède un idéal ~~maximal~~ I tel que A/I soit de dimension 1, et tel que $I^{m+1} = 0$ pour un entier m; le plus petit de ces entiers s'appelle le rang de A.

2 - Une algèbre locale A possède un seul idéal maximal, à savoir I. Si l'on identifie les scalaires $\lambda\in R$ aux éléments $\lambda.1$ de A on peut écrire $A = R\oplus I$. Pour tout $a\in A$ il existe alors un scalaire a_0 et un seul tel que

$$a \equiv a_0 \text{ modulo } I \quad ;$$

on dit que a_0 est la partie finie de a. Il est évident que $a\longrightarrow a_0$ est un homom. de A sur R dont le noyau est précisément I.

3 - Soit B une sous-algèbre contenant 1 d'une algèbre locale A, d'idéal maximal I; alors B est une algèbre locale d'idéal maximal $J = B\cap I$ (trivial). De même, toute algèbre quotient de A est une algèbre locale.

4 - Soient A et B deux algèbres locales d'idéaux maximaux I et J; alors $A\otimes B$ est une algèbre locale d'idéal maximal $A\otimes J + I\otimes B$ (trivial).

5 - Etant donné un entier n, soit R_n l'algèbre des séries formelles sur R par rapport à n indéterminées X_i $(1\leqslant i\leqslant n)$; celle-ci possède un (et un seul)

idéal maximal I , formé des séries sans terme constant. L'algèbre

$$R_n^{(m)} = R_n/I^{m+1}$$

est évidemment une algèbre locale de rang m. On désignera toujours par X_i l'image dans cette algèbre de l'élément X_i de R_n ; il est clair que tout élément de $R_n^{(m)}$ s'écrit, de façon unique, comme polyñome de degré $\leqslant$ m en les X_i.

Le groupe des automorphismes de $R_n^{(m)}$ sera désigné par $G_n^{(m)}$; c'est un groupe de Lie , etc...

6 - Soit A une algèbre locale de rang m et d'idéal maximal I; alors quels que soient les $a_i \in I$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ il existe un homom. et un seul de $R_n^{(m)}$ dans A qui applique chaque X_i sur a_i , et c'est un homom. <u>sur</u> si on lui impose d'appliquer 1 sur 1. Toute algèbre locale est donc un quotient de $R_n^{(m)}$ pour m et n convenablement choisis. (Le rédacteur s'apercoit qu'il vient de déconner; ça n'a d'ailleurs aucune importance).

7 - Soit maintenant V une variété de dimension n. On dit qu'une $f \in D(V)$ possède un <u>zéro d'ordre</u> m en un point x de V si, dans une carte (et donc dans toute carte) autour de x, f et ses dérivées partielles d'ordre $<$ m sont nulles en x. Cette terminologie n'est pas conforme, mais est commode. Cette propriété signifie encore qu'on a une relation $f = f_1 \ldots f_m$ où les $f_i \in D(V)$ sont nulles en x. Si donc on désigne par I(V;x) ou I(x) l'idéal maximal de D(V) formé des fonctions nulles en x, on voit que les fonctions ayant en x un zéro d'ordre m constituent l'idéal $I(x)^m$.

8 - On posera

$$D^{(m)}(V;x) = D(V)/I(V;x)^{m+1} \quad ;$$

les éléments de cette algèbre seront appelés les <u>éléments de fonction d'ordre</u> m <u>en</u> x ; l'image d'une $f \in D(V)$ dans cette algèbre est la <u>partie principale d'ordre</u> m <u>de</u> f <u>en</u> x.

9 - Soit (ξ^i) $(1 \leqslant i \leqslant n)$ une carte de V autour de x; toute $f \in D(V)$ peut se mettre (formule de Taylor) , avec unicité, sous forme d'un polyňome de degré $\leqslant$ m en les $\xi^i - \xi^i(x)$, modulo une fonction ayant en x un zéro d'ordre m+1 . On en déduit qu'il existe un isomorphisme de l'algèbre locale $R_n^{(m)}$ sur l'algèbre $D^{(m)}(V;x)$. Un tel isomorphisme s'appelle un <u>repère de rang m en x</u>. A chaque carte (ξ^i) autour de x est associé un repère de rang m en x : celui qui applique chaque $X_i \in R_n^{(m)}$ sur la partie principale d'ordre m de $\xi^i - \xi^i(x)$ en x. On obtient d'ailleurs de cette façon tous les repères de rang m en x.

---

§ 7 - Les espaces fibrés principaux $P^{(m)}(V)$.

1 - Soit V une variété de dimension n. On désigne par $P^{(m)}(V)$ l'ensemble des repères de rang m aux différents points de V . On a une application évidente de $P^{(m)}(V)$ sur V; d'autre part, en composant un repère u avec un automorphisme de l'algèbre $R_n^{(m)}$ on obtient encore un repère (de même "origine") , de sorte que le groupe $G_n^{(m)}$ des automorphismes de $R_n^{(m)}$ opère sur l'ensemble $P^{(m)}(V)$. Les axiomes (FP 1) et (FP 2) sont évidemment vérifiés.

2 - Soit (ξ^i) une carte de V, i.e. un isomorphisme d'un ouvert U de V sur R^n ; celle-ci définit en chaque point x de U un repère u(x) de rang m en x. La formule $(x,s) \rightarrow u(x) \circ s$ détermine alors un isomorphisme de l'ensemble $U \times G_n^{(m)}$ sur l'ensemble $\overset{-1}{\pi}(U) \subset P^{(m)}(V)$, d'où une structure différentiable sur ce dernier ensemble. On vérifie immédiatement que les structures différentiables ainsi obtenues sur les divers $\overset{-1}{\pi}(U)$ sont compatibles entre elles , et par suite sont induites par une structure différentiable bien déterminée sur $P^{(m)}(V)$. Muni de cette structure, $P^{(m)}(V)$ devient un espace fibré principal de base V et de groupe $G_n^{(m)}$; c'est l'<u>espace des repères</u>

de rang m sur V. Il est clair que si (ξ^i) est une carte d'un ouvert U de V, et si u(x) désigne, pour chaque $x \in U$, le repère de rang m en x associé à cette carte, $x \longrightarrow u(x)$ est une section (différentiable) de $P^{(m)}(V)$ au-dessus de U.

3 – Désignons maintenant par $D^{(m)}(V)$ la réunion des diverses algèbres locales $D^{(m)}(V;x)$; nous allons montrer que cet ensemble s'identifie canoniquement à l'espace fibré E, de fibre $R_n^{(m)} = F$, associé à $P^{(m)}(V)$. En effet, chaque repère $u \in P^{(m)}(V)$ définit d'une part un isomorphisme $\tilde{u}$ de F sur la fibre F(x), $x = \pi(u)$, de E, d'autre part un isomorphisme u de F sur $D^{(m)}(V;x)$; d'où un isomorphisme de $D^{(m)}(V;x)$ sur F(x), lequel est indépendant de u (en vertu de la formule générale $\widetilde{u.s}(\xi) = \tilde{u}(s.\xi)$), donc canonique. De cette façon on obtient l'identification annoncée entre les "ensembles fibrés" E et $D^{(m)}(V)$. Cela permet évidemment de munir $D^{(m)}(V)$ d'une structure différentiable; on obtient ainsi l'espace fibré des éléments de fonction de rang m sur V.

4 – Pour $f \in D(V)$, soit $f^{(m)}(x)$ la partie principale de rang m de f en x; alors $x \longrightarrow f^{(m)}(x)$ est une section (différentiable) de $D^{(m)}(V)$. A.Q.T.

---

§ 8 – Tenseurs.

1 – Sur une variété V de dimension n, considérons d'une part un fibré principal $P^{(m)}(V)$, d'autre part un fibré principal Q de base V et de groupe H. Formons le produit fibré R de $P^{(m)}(V)$ par Q, espace fibré principal de base V et de groupe $G_n^{(m)} \times H$; soit λ une représentation linéaire de celui-ci dans un vectoriel F ; formons le fibré E de fibre F associé à R. Cela fait, toute section d'un fibré tel que E s'appellera tenseur (ou mieux champ de tenseurs) de rang m sur V.

Par exemple, pour toute $f \in D(V)$, l'application $x \to f^{(m)}(x)$ (§7, n°4) est un tenseur de rang m sur V.

2 - Soit λ une représentation linéaire de $G_n^{(m)} \times H$ dans un vectoriel F ; restreinte à $G_n^{(m)}$ et à H, cette représentation définit des représentations ρ et M de ces deux groupes dans F ; bien entendu, ρ et M commutent et on a $\lambda(\sigma,s) = \rho(\sigma)M(s)$ pour $\sigma \in G_n^{(m)}$, $s \in H$. On en déduit qu'on peut encore identifier les tenseurs d'espèce λ aux fonctions $T(u,v)$, définies pour $\pi(u) = \pi(v)$, à valeurs dans F, et vérifiant l'identité

$$T(u.\sigma, v.s) = \rho(\sigma)^{-1}M(s)^{-1}T(u,v) \quad .$$

On peut évidemment effectuer sur les tenseurs des opérations analogues à celles que l'on peut effectuer sur les représentations. Nous nous garderons bien de les expliciter ici(ou ailleurs). Le cas le plus intéressant (m=1) sera traité en détail plus tard.

Archives

VARIETES DIFFERENTIABLES . II

Sommaire .

Commentaires.

Ce Chapitre, deuxième pierre d'un grandiose édifice, a pour but de résumer et de compléter les résultats généraux exposés par Weil sur les variétés prolon-gées en général. Les seules innovations sont d'une part une étude soignée (relativement à la rédaction Weil) des lois de composition , étude qui permet de beaucoup éclaircir la question des identifications canoniques telles que $V^A \sim V \otimes A$ pour V vectoriel, d'autre part une étude des prolongements des espa-ces fibrés en liaison avec la notion de connexion infinitésimale. Le résultat le plus clair est la possibilité de définir de façon entièrement correcte le transport parallèle d'un élément d'un fibré d'un point x de la base en un point infiniment voisin de x, et de s'en servir pour définir des opérations analogues à la dérivation covariante (mais dans le "rang m"). Bien entendu l'intérêt de ces considérations n'est pas encore très clair dans le cas général, i.e. pour le calcul de rang quelconque; mais pour le calcul de rang un, qui sera traité en détail plus loin, il devient possible en les utilisant de justifier <u>entièrement</u> les définitions classiques des dérivées covariantes (y compris extérieures), i.e. la formule approximative que voici:

$$\bar{d}T(x) = T(x+dx)-T(x)$$

dans laquelle il est entendu que $T(x+dx)$ est ramené au point x par transport parallèle.

---

§ 1 - Points d'espèce A d'une variété.

1 - Soit V une variété différentiable. Pour tout $x \in V$, la formule $f \longrightarrow f(x)$ définit évidemment un homom. de l'algèbre D(V) sur le corps R ; le noyau de cet homom. est l'idéal I(x) des fonctions ayant en x un zéro d'ordre 1. La correspondance entre x et l'homom. en question est biunivoque.

2 - Soit maintenant A une algèbre locale (Chap. I, § 6, n°1). On appelle A-<u>point de</u> V <u>proche de</u> x tout homom. de D(V) dans A qui, pour chaque $f \in D(V)$, applique f sur un élément de A dont la partie finie est f(x). On désignera ces A-points par des notations telles que x' ; étant donnés un A-point x' et une $f \in D(V)$, l'élément de A que x' associe à f sera désigné par l'une des notations suivantes:

$$f(x') \quad ; \quad {}^{A}f(x') \quad ; \quad A_{x}^{x'} f(x)$$

(dans la troisième la lettre x est une variable liée). Si I est l'idéal maximal de A et si x' est proche de x on a

$$f(x') \equiv f(x) \quad \text{modulo } I .$$

3 - Supposons A de rang m, et soit x' un A-point de V proche de x. Alors f(x') <u>est nul dès que</u> f <u>a en</u> x <u>un zéro d'ordre</u> m+1 ; car on peut alors écrire $f = f_1 \ldots f_{m+1}$ où chaque f_i est nulle en x, d'où $f_i(x') \in I$ et donc $f(x) \in I^{m+1}$, comme annoncé. Par passage au quotient on obtient donc un homom. (qu'on ide,tifiera le plus souvent à x') de l'algèbre locale

$$D^{(m)}(V;x) = D(V)/I(x)^{m+1}$$

dans A ; réciproquement tout homom. non nul de $D^{(m)}(V;x)$ dans A provient d'un A-point proche de x, et d'un seul.

4 - De là et du Chap. I, § 6 résulte que, étant donnés une carte (ξ^i) de V autour de x et des éléments a^i de A, pour qu'il existe un A-point proche de

x tel que $\xi^i(x') = a^i$ il est nécessaire et suffisant qu'on ait $a^i \equiv \xi^i(x)$ modulo I.

5 - Si x' est un A-point proche de x, alors on a une relation $f(x') = f(x) + L(f)$, où L est une application linéaire de D(V) dans A (et en fait dans I) vérifiant l'identité

$$L(fg) = L(f)g(x) + L(f)L(g) + f(x)L(g).$$

Réciproquement une telle application définit un A-point proche de x.

6 - Soit x' un A-point proche de x, et soit α un homom. non nul de A dans une algèbre locale B; en composant x' avec α on obtient évidemment un B-point proche de x; on le note $\alpha\circ x'$ et on dit que c'est une <u>spécialisation</u> de x'.

7 - Prenant $A = D^{(m)}(V;x)$, il est clair que l'homom. canonique de D(V) dans A définit un A-point proche de x; on l'appelle <u>point proche de</u> x <u>canonique de rang</u> m. Il est clair que, pour toute algèbre locale B de rang $\leq$ m, tout B-point proche de x est une spécialisation du précédent.

8 - Prenons en particulier V = R. Soit ι l'application identique de R dans R ; si x' est un A-point proche de x, le n°4 montre que x' est parfaitement déterminé par l'élément $\iota(x')$ de A, et qu'on peut choisir celui-ci arbitrairement pourvu que $\iota(x') \equiv x$ modulo I. <u>On identifiera toujours</u> x' <u>avec l'élément</u> $\iota(x')$ <u>de</u> A.

9 - Soient θ une application différentiable d'une variété V dans une variété W, et x' un A-point de V proche de $x \in V$; composant l'homom. x' de D(V) dans A avec l'homom. $g \to g\circ\theta$ de D(W) dans D(V) on définit évidemment un A-point y' de W proche de $y = \theta(x)$. On dit que y' est l'<u>image de</u> x' <u>par</u> θ. Si W = R, en sorte que $\theta \in D(V)$, y' s'identifie à un élément de A (n°8), qui n'est autre que $\theta(x')$ vu que $\iota\circ\theta = \theta$. Ceci justifie, dans le cas

général, l'emploi des notations $\theta(x')$,... pour désigner l'image de x' par θ.

10 - Si θ est composée d'applications ψ et φ, on a trivialement la relation $\theta(x') = \psi[\varphi(x')]$, qui s'appelle théorème des fonctions composées.

---

§ 2 - Variétés prolongées.

1 - Soit A une algèbre locale de rang m, d'idéal maximal I. On désignera par $H_n(A)$ (mort au Haut-Commissariat) l'ensemble des homom. non nuls de $R_n^{(m)}$ dans A. Si u est un tel homom., u envoie 1 sur 1 et les générateurs X_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ de $R_n^{(m)}$ sur des éléments a_i de I, qu'on peut évidemment choisir arbitrairement; d'où une application biunivoque de $H_n(A)$ sur le vectoriel $I \times \ldots \times I$ (n facteurs) et, par transport, une structure différentiable sur $H_n(A)$. Pour qu'un $u \in H_n(A)$ varie différentiablement, il faut et il suffit qu'il en soit ainsi des éléments $u(X_i)$ du vectoriel A. On en déduit que le groupe $G_n^{(m)}$ des autom. de $R_n^{(m)}$, qui opère de façon évidente sur $H_n(A)$, y opère de façon <u>différentiable</u>.

2 - Soit maintenant V une variété de dimension n. Etant donnée une algèbre locale A, de groupe d'autom. G(A), on appelle <u>système fibré d'algèbres locales de type A sur V</u> tout espace fibré de fibre A associé à un fibré principal P de base V et de groupe G(A). La fibre A(x) d'un tel système fibré est évidemment une algèbre locale isomorphe(non canoniquement en général) à A.

Exemples: 1° le système trivial $V \times A$; 2° l'espace fibré $D^{(m)}(V)$, associé à $P^{(m)}(V)$, de fibre $R_n^{(m)}$ (cf. Chap.I, § 7).

On peut naturellement effectuer sur les systèmes fibrés d'algèbres locales diverses opérations; nous les étudierons au fur et à mesure des besoins.

Les systèmes fibrés d'algèbres locales de fibre A seront désignés par une lettre telle que $\mathcal{A}$; toutefois le système trivial $V \times A$ sera désigné par (A).

3 - Soient A une algèbre locale de rang m, V une variété de dimension n, et $\mathcal{A}$ un système fibré d'algèbres locales de type A sur V, associé à un fibré principal P de groupe G(A). Soit Q le fibré principal produit fibré de P par $P^{(m)}(V)$; le groupe structural $G(A) \times G_n^{(m)}$ de Q opère de façon évidente et différentiable sur la variété $H_n(A)$ des homom. non nuls de $R_n^{(m)}$ dans A. Le fibré de fibre $H_n(A)$ associé à Q sera désigné par la notation

$$^{\mathcal{A}}V$$

et appelé le <u>prolongement d'espèce</u> $\mathcal{A}$ <u>de</u> V.

Si $\mathcal{A}$ est le système trivial (A), on écrira ^{A}V au lieu de $^{(A)}V$.

4 - Puisque la fibre de x dans le fibré $D^{(m)}(V)$ de fibre $R_n^{(m)}$ associé à $P^{(m)}(V)$ n'est autre que l'algèbre locale $D^{(m)}(V;x)$, il est clair que la fibre de x dans $^{\mathcal{A}}V$ s'identifie canoniquement à l'ensemble des homom. non nuls de $D^{(m)}(V;x)$ dans la fibre A(x) du système fibré $\mathcal{A}$. Autrement dit, <u>la fibre de</u> x <u>dans</u> $^{\mathcal{A}}V$ <u>s'identifie canoniquement à l'ensemble des</u> A(x)-<u>points de</u> V <u>proches de</u> x.

Si en particulier $\mathcal{A}$ est le système trivial (A), auquel cas A(x) est <u>canoniquement</u> isomorphe à A, la variété ^{A}V s'identifie à l'ensemble de tous les A-points de V.

5 - Soit (ξ^i) une carte d'un ouvert U de V ; si U est assez petit, on a un isomorphisme f de $U \times A$ sur la partie de $\mathcal{A}$ située au-dessus de U; par ailleurs, la carte considérée détermine un isomorphisme de $U \times R_n^{(m)}$ sur la partie de $D^{(m)}(V)$ située au-dessus de U : cet isomorphisme associe à

$x \in U$ et à l'élément $f(X)$ de A (f polynôme en les X_i) l'élément de $D^{(m)}(V;x)$ obtenu en appliquant f aux parties principales d'ordre m en x des fonctions $\xi^i - \xi^i(x)$. En composant cet isomorphisme avec l'isomorphisme f correspondant à $\mathcal{A}$ on voit que chaque point x' de ${}^{\mathcal{A}}V$ se projettant dans U est caractérisé par n éléments a^i de A, savoir ceux qui, par f, conduisent aux éléments $\xi^i(x')$ de la fibre $A(x)$. Si la carte considérée applique U <u>sur</u> R^n (ce que d'ailleurs nous supposerons toujours réalisé) on obtient ainsi une application $x' \to (a^i)$ de la partie de ${}^{\mathcal{A}}V$ située au-dessus de U <u>sur</u> $A \times \ldots \times A$ (n facteurs) (le $x \in U$ dont x' est proche est donné par $\xi^i(x)$ = partie finie de a^i , etc...); et d'après la théorie générale des espaces fibrés, cette application définit, par transport, la structure différentiable de ${}^{\mathcal{A}}V$ au-dessus de U.

Si en particulier $\mathcal{A}$ est le système trivial (A), alors l'application $x' \to (\xi^i(x'))$ de ${}^{A}V$ dans $A \times \ldots \times A$ définit la structure différentiable de ${}^{A}V$ au-dessus de U.

6 - Plus particulièrement encore, prenons $V = R$, auquel cas (§ 1, n°8) l'ensemble ${}^{A}R$ s'identifie à A par $x' \to \iota(x')$, ι application identique. Comme ι est une carte de R (valable dans R tout entier) ce qui précède montre que l'identification de ${}^{A}R$ avec A transforme la structure différentiable de ${}^{A}R$ en celle du vectoriel A.

7 - Soient V et W deux variétés, Θ une application de V dans W, et $\mathcal{B}_W$ un système fibré d'algèbres locales de type A sur W ; soit $\mathcal{A}$ son image réciproque par Θ : c'est encore un système fibré d'algèbres locales de type A sur V, et Θ se "relève" en une application $\hat{\Theta}$ de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}$ (Chap. I, § 5, n°2), qui, pour tout x, est un isomorphisme de la fibre de x dans $\mathcal{A}$ sur la fibre de $y = \Theta(x)$ dans $\mathcal{B}$. Soit alors $x' \in {}^{\mathcal{A}}V$, proche de $x \in V$; on peut

alors définir l'image $\theta(x')$ de x' par θ, qui est un point proche de $\theta(x)$ et de même espèce que x', puis composer $\theta(x')$ avec l'isomorphisme $\mathring{\theta}$ de la fibre de x dans $\mathcal{A}$ sur la fibre de $\theta(x)$ dans $\mathcal{B}$; on définit ainsi une application de ${}^{\mathcal{A}}V$ dans ${}^{\mathcal{B}}W$ qu'on appelle <u>prolongement d'espèce $\mathcal{A}$ de</u> θ et qu'on désigne par ${}^{\mathcal{A}}\theta$. Bien entendu, ${}^{\mathcal{A}}\theta$ n'a de sens que si $\mathcal{A}$ est image réciproque par θ d'un système fibré $\mathcal{B}$ de base W.

Si en particulier $\mathcal{A}$ est le système trivial $V \times A$, il est clair que $\mathcal{A}$ s'identifie canoniquement à l'image réciproque par θ du système trivial $A \times W$; on obtient alors le <u>prolongement d'espèce</u> A <u>de</u> θ ; ce n'est évidemment pas autre chose que l'application $x' \to \theta(x')$ de ${}^{A}V$ dans ${}^{A}W$. On la désigne par ${}^{A}\theta$, ou simplement par θ si aucune confusion n'est à craindre.

8 - Les prolongements de θ sont des applications <u>différentiables.</u> Pour le démontrer on peut se ramener au cas où les systèmes fibrés $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont triviaux. Soit alors (η^j) une carte d'un ouvert W' de W ; ~~soit $X' = \overset{-1}{\theta}(X')$~~ ; au-dessus de W', la structure différentiable de ${}^{A}W$ est définie par l'application $y' \to (\eta^j(y'))$ dans $A \times \ldots \times A$; pour établir la différentiabilité de ${}^{A}\theta$ tout revient donc à établir celle des applications $x' \to \eta^j \circ \theta(x')$ de ${}^{A}V$ dans A, autrement dit, à établir le résultat cherché pour une $f \in D(V)$. Mais si (ξ^i) est une carte d'un ouvert V' de V, $f(x')$ est un polynôme en les $\xi^i(x')$ dont les coefficients sont des fonctions différentiables de $x = \pi(x')$ ce qui établit évidemment notre assertion.

§ 3 – Prolongements d'une variété produit. II, 83

1 – Soit $W = U \times V$ une variété produit et soit $z = (x,y)$ un point de W. Si des fonctions $f \in D(U)$ et $g \in D(V)$ ont en x et y des zéros d'ordre m il est clair que la fonction $f \otimes g \in D(W)$ a en z un zéro d'ordre m. Par passage au quotient on obtient donc un homom. canonique de l'algèbre locale

$$D^{(m)}(U;x) \otimes D^{(m)}(V;y) \quad \text{sur} \quad D^{(m)}(W;z)$$

(le fait que l'homom. soit <u>sur</u> est évident si l'on prend des cartes de U et V autour de x et y).

2 – Soit A une algèbre locale de rang m ; tout A-point z' de W proche de z définit donc un homom. de $D^{(m)}(U;x) \otimes D^{(m)}(V;y)$ dans A ; puisque chacune des algèbres $D^{(m)}(U;x)$, $D^{(m)}(V;y)$ se plonge canoniquement dans leur produit tensoriel on déduit donc de z' des homom. de ces algèbres dans A, autrement dit des A-points x' et y' de U et V proches de x et y. Il est clair qu'on a la formule

$$f \otimes g(z') = f(x')g(y')$$

pour $f \in D(U)$, $g \in D(V)$; que z' est entièrement déterminé par le couple (x', y'); qu'enfin, d'après le scholie célèbre, on peut choisir arbitrairement x' et y'

3 – On obtient donc de cette façon une application biunivoque et canonique de l'ensemble ${}^{A}W$ sur l'ensemble produit ${}^{A}U \times {}^{A}V$. Cette application est en fait un isomorphisme des <u>variétés</u> correspondantes comme on le voit (A.Q.T. en prenant des cartes de U et V.

4 – Soient maintenant x' un A-point de U voisin de x, et y' un B-point de V voisin de y (avec A et B quelconques). L'application du même scholie permet d'en déduire un $(A \otimes B)$-point de W proche de z, lequel est défini par la condition d'envoyer les fonctions $f \otimes g$ sur $f(x') \otimes g(y')$. Ce $(A \otimes B)$-point est noté $x' \otimes y'$ (c'est un produit tensoriel d'homom.). Naturellement ce procédé

ne conduit pas à tous les $(A\otimes B)$-points de W.

Noter que pour $A = B$, le A-point (x', y') de W se déduit du $A\otimes A$-point $x'\otimes y'$ par spécialisation (considérer l'homom. canonique de $A\otimes A$ sur A).

<u>Problème mis au concours</u> - Etendre tout ce qui précède aux systèmes fibrés d'algèbres locales.

---

§ 4 - Prolongement des lois de composition.

1 - Soit u une application d'un produit $U\times V$ dans une variété W. Pour toute algèbre locale A, u se prolonge en une application de ${}^A(U\times V)$ dans ${}^AW$ et par suite (§ 3) en une application de ${}^AU\times{}^AV$ dans ${}^AW$. En particulier <u>toute loi de composition interne définie</u> (et différentiable) <u>sur une variété U se prolonge en une loi de composition sur</u> ${}^AU$.

2 - Si une loi de composition interne $(x,y)\rightarrow u(x,y)$ dans une variété V est associative (resp. commutative) il en est de même de ses prolongements. Supposons d'abord u associative; l'application $(x,y,z)\rightarrow u[x,u(y,z)]$ est composée des applications $(x,(y,z))\rightarrow u[x,u(y,z)]$ et $(x,t)\rightarrow u(x,t)$; son prolongement d'espèce A est donc (théorème des fonctions composées) donné par $(x',y',z')\rightarrow {}^Au[x',{}^Au(y',z')]$; mais d'après l'associativité de u l'application considérée se compose aussi des applications $((x,y),z)\rightarrow u[u(x,y),z]$ et $(t,z)\rightarrow u(t,z)$, de sorte qu'un raisonnement analogue montre que son prolongement d'espèce A est donné par $(x',y',z')\rightarrow {}^Au[{}^Au(x',y'),z']$ ce qui établit l'associativité de ${}^Au$. Si u est commutative, désignons par s l'application $(x,y)\rightarrow(y,x)$ de $V\times V$ sur $V\times V$; on a $u\circ s = u$, d'où par prolongement ${}^Au\circ{}^As = {}^Au$; comme le A-prolongement de s est évidemment $(x',y')\rightarrow(y',x')$ la commutativité de ${}^Au$ est établie.

On pourrait bien entendu démontrer des résultats analogues relativement à la distributivité, aux éléments neutres, etc...

3 - Si en particulier G est un <u>groupe de Lie</u> le prolongement à ${}^{A}G$ de la loi de composition de G fait de ${}^{A}G$ un <u>groupe de Lie</u>, dont G est un sous-groupe. Si ρ est une représentation de G dans un autre groupe de Lie H, l'extension d'espèce A de ρ est encore une représentation des groupes prolongés (A.Q.T.).

4 - Prenons maintenant V = R, de sorte que ${}^{A}R$ s'identifie, par $x' \rightarrow z(x')$, à A. On va montrer que, modulo cette identification, les lois de composition $x+y$ et xy sur R se prolongent en celles de l'anneau A. Désignons par $x' \perp y'$ le prolongement à A de la loi de composition $x+y$; pour $f \in D(V)$, $f(x' \perp y')$ est la valeur au point (x', y') de ${}^{A}(R \times R) = {}^{A}R \times {}^{A}R$ de la fonction $(x,y) \longrightarrow f(x+y)$; prenons en particulier $f = z$; alors $f(x+y) = z(x) + z(y)$ $= (z \otimes 1 + 1 \otimes z)(x,y)$, et comme (x', y') est défini d'une façon générale par $g \otimes h(x', y') = g(x')h(y')$ il vient

$$z(x' \perp y') = z(x')1(y') + 1(x')z(y') = z(x') + z(y')$$

ce qui démontre notre assertion relativement à l'addition; celle concernant la multiplication de prouve de façon analogue. On voit donc que l'identification de ${}^{A}R$ avec A est compatible avec les structures algébriques naturelles de ces variétés.

5 - Prenons maintenant pour V un vectoriel de dimension finie. Par prolongement on a sur ${}^{A}V$ une structure de groupe additif; en outre, la loi externe $(\lambda, x) \rightarrow \lambda x$ permet de faire opérer ${}^{A}R = A$ à gauche sur ${}^{A}V$, qui devient donc un <u>module à gauche sur l'anneau</u> A. Nous allons voir que ${}^{A}V$, muni de cette structure, <u>s'identifie canoniquement au module</u> $A \otimes V$(et non, comme l'avait dit le ~~Kax~~ Maître, à $V \otimes A$). Prenons pour cela une base (e_i) de V et

pour $x \in V$ posons $x = \sum \xi^i(x) e_i$; chaque $x' \in {}^A V$ est déterminé par les éléments $\xi^i(x')$ de A, qu'on peut de plus choisir arbitrairement (§ 1, n° 4) ; posant

$$\tilde{x}' = \sum \xi^i(x') \otimes e_i$$

on obtient donc une application biunivoque de ${}^A V$ sur $A \otimes V$, laquelle, ne dépendant évidemment pas de la base choisie, est canonique. Puisque les fonctions ξ^i sont additives sur V on voit comme au n° 4 que $x' \longrightarrow \tilde{x}'$ est compatibles avec les structures additives de ${}^A V$ et de $A \otimes V$. Comme d'autre part ces ξ^i vérifient $\xi^i(\lambda x) = \tau(\lambda) \xi^i(x)$ on voit par un raisonnement du même genre que pour $\lambda' \in {}^A R$, $x' \in {}^A V$, l'élément $y' = \lambda' x'$ de ${}^A V$ vérifie $\xi^i(y') = \tau(\lambda') \xi^i(x')$, i.e. que $\tilde{y}' = \tau(\lambda')\tilde{x}'$ (produit dans $A \otimes V$). D'où les résultats annoncés.

6 - Par la suite, on identifiera toujours ${}^A V$ avec $A \otimes V$ pour V vectoriel. Cela implique que, si f est une application dans V d'une variété W, l'application prolongée applique ${}^A W$ dans $A \otimes V$; pour la calculer posons $f = \sum f^i e_i$ dans une base de V ; on a $f^i = \xi^i \circ f$ avec les notations du n° précédent; si donc $x' = f(y')$ pour un A-point y' de W on aura $f^i(y') = \xi^i(x')$, et puisque x' est identifié à l'élément $\sum \xi^i(x') \otimes e_i$ de $A \otimes W$ on en conclut que

$$f(y') = \sum f^i(y') \otimes e_i$$

pour tout A-point y' de W.

7 - Notons enfin que si V est une algèbre, auquel cas ${}^A V$ est canoniquement une algèbre sur A, l'identification de ${}^A V$ avec $A \otimes V$ est aussi compatible avec les structures d'algèbres sur A de ces deux variétés. Si f et g sont des applications d'une variété W dans V, on a en outre la formule

$$^A(fg) = {}^A f\, {}^A g \quad .$$

§ 5 – Prolongements des espaces fibrés. I

1 – Soient A une algèbre locale, et P un fibré principal de base V et de groupe G. L'application π de P sur V se prolonge en une application π de ${}^AP$ dans ${}^AV$; d'autre part l'application $(u,s) \to u.s$ de $P \times G$ dans P se prolonge en une application $(u',s') \to u'.s'$ de ${}^AP \times {}^AG$ dans ${}^AP$ qui, d'après les considérations du § précédent, permet de faire opérer le groupe ${}^AG$ sur ${}^AP$. Comme on a $\pi(u.s) = \pi(u)$ dans P il est clair (théorème des fonctions composées) qu'on a encore $\pi(u'.s') = \pi(u')$ dans ${}^AP$. Maintenant prenons dans V un ouvert suffisamment petit U, de telle sorte que P s'identifie au-dessus de U à $U \times G$; soit E la partie de P au-dessus de U, et soit f un isomorphisme de $U \times G$ sur E; on a donc

$$\pi \circ f(x,s) = x \quad ; \quad f(x,s).t = f(x,st) \quad ;$$

soient E' et U' les parties de ${}^AP$ et ${}^AV$ situées au-dessus de E et U respectivement; elles s'identifient de façon évidente et canonique aux variétés prolongées ${}^AE$ et ${}^AU$; donc f se prolonge en un isomorphisme (noté encore f) de $U' \times {}^AG$ sur E' et on a encore par prolongement les identités

$$\pi \circ f(x',s') = x' \quad ; \quad f(x',s').t' = f(x',s't') \quad .$$

Comme les U' forment évidemment un recouvrement ouvert de ${}^AP$ on en conclut que ${}^AP$ <u>est un fibré principal de base</u> ${}^AV$ <u>et de groupe</u> ${}^AG$.

2 – Soit maintenant F une variété sur laquelle G opère à droite, et formons le fibré E de fibre F associé à P; on a une application canonique

$$\theta : (u,\xi) \to \theta(u,\xi) = \tilde{u}(\xi)$$

de $P \times F$ sur E, d'où par prolongement une application (que nous noterons encore θ) de ${}^AP \times {}^AF$ dans ${}^AE$. D'autre part, l'application π de E sur V se prolonge en une application π de ${}^AE$ dans ${}^AV$; et par prolongement le groupe ${}^AG$ opère à droite sur ${}^AF$, de sorte qu'on peut former le fibré de fibre

${}^AF$ associé à ${}^AP$; on va voir qu'il s'identifie canoniquement ~~àX~~ à ${}^AE$. En effet, l'application θ de $P \times F$ sur E vérifiant les identités

$$\pi \circ \theta(u, \xi) = \pi(u) \quad ; \quad \theta(u.s, \xi) = \theta(u, s.\xi)$$

(Chap. I, §4, n°3) il est clair que son prolongement vérifiera de même

$$\pi_\circ \theta(u', \xi') = \pi(u') \ ; \ \theta(u'.s', \xi') = \theta(u', s'.\xi') \quad ;$$

d'autre part, on a une application canonique de ${}^AP \times {}^AF$ sur le fibré associé en question, qui vérifie des identités analogues; et cette application définit le fibré associé comme quotient de ${}^AP \times {}^AF$; on en déduit déjà l'existence d'une application canonique φ du fibré associé dans ${}^AE$, définie comme suit: au point $\widetilde{u'(\xi')}$ de ce fibré associé correspond par φ le point $\theta(u', \xi')$ de ${}^AE$. Il est évident que φ est compatible avec les projections π sur ${}^AV$. Pour montrer que φ est un <u>isomorphisme sur</u> des <u>variétés</u> considérées, prenons comme au n°1 un ouvert U de V au-dessus duquel P s'identifie à $U \times G$ par un isomorphisme f; U' étant l'image réciproque de U dans ${}^AV$, le prolongement de f permet comme on l'a vu d'identifier ${}^AP$, au-dessus de U', à $U' \times {}^AG$; f définit d'autre part un isomorphisme de $U \times F$ sur la partie de E située au-dessus de U, cet isomorphisme $\tilde{f}$ étant défini comme suit: si l'on considère la section $u(x) = f(x, e)$ de P au-dessus de U, on a

$$\tilde{f}(x, \xi) = \theta(u(x), \xi) \ ;$$

cela dit, on voit comme au n°1 que $\tilde{f}$ se prolonge en un isomorphisme de $U' \times {}^AF$ sur la partie de ${}^AE$ située au-dessus de U' , et si l'on considère le prolongement $x' \to u(x')$ de la section $x \to u(x)$ (prolongement qui est évidemment une section de ${}^AP$ au-dessus de U', et est donné par $u(x') = f(x', e)$) il est clair d'après la formule précédente que ce prolongement de $\tilde{f}$ est donné par

$$f(x', \xi') = \Theta(u(x'), \xi') \quad ;$$

mais d'autre part à l'isomorphisme f de $U' \times {}^A G$ sur la partie de ${}^A P$ située au-dessus de U' correspond un isomorphisme g de $U' \times {}^A F$ sur la partie du fibré associé située au-dessus de U', g associant au couple (x', ξ') l'élément de ce fibré associé représenté par ξ' dans le repère $f(x', e) = u(x')$; on en déduit immédiatement que, modulo ces identifications avec $U' \times {}^A F$ des parties de ${}^A E$ et du fibré associé situées au-dessus de U', l'application φ du fibré associé dans ${}^A E$ se réduit à l'application identique; d'où notre assertion, à savoir que φ est un isomorphisme du fibré associé sur ${}^A E$. En conclusion, <u>si</u> E <u>est un fibré de fibre</u> F <u>associé à</u> P, ${}^A E$ <u>s'identifie canoniquement au fibré de fibre</u> ${}^A F$ <u>associé à</u> ${}^A P$.

3 - Il est clair que si $x \rightarrow \sigma(x)$ est une section de E, son prolongement d'espèce A, $x' \rightarrow \sigma(x')$, est une section de ${}^A E$.

§ 6 - Prolongement des espaces fibrés. II

Commentaires du rédacteur. Le but de ce § est d'étudier les prolongements des espaces fibrés lorsqu'on se donne sur l'espace de base V un système fibré non trivial d'algèbres locales. Cette question intervient dans la théorie des connexions (dans ce cas on a en particulier à considérer le système $D^{(m)}(V)$) comme on le verra plus loin. Les constructions à faire sont naturellement beaucoup plus canulées que dans le cas du système trivial; de ce point de vue on peut considérer le présent § comme un exercice assez chyadé sur les espaces fibrés; il est du reste possible que les constructions exposées ci-dessous puissent se simplifier, ou, plus vraisemblablement, s'interpréter en partie en termes d'opérations standard (quoique peut-être encore inconnues) sur les espaces fibrés généraux.

1 - Rappelons qu'étant donnés un A-point x' d'une variété V, et un homom. α de A dans une algèbre locale B, on peut définir de façon évidente le B-point $\alpha \circ x'$ (qui est une "spécialisation" de x'). En particulier, on peut faire opérer le groupe G(A) des autom. de A sur la variété prolongée ${}^AV$, et ceci, bien entendu, de façon différentiable.

Si $z' = (x', y')$ est un A-point d'une variété produit $W = U \times V$, on a évidemment la formule

$$\alpha \circ (x', y') = (\alpha \circ x', \alpha \circ y')$$

comme il résulte de

$$\alpha(f(x')g(y')) = \alpha(f(x')) \cdot \alpha(g(y')) \quad .$$

Si d'autre part Θ est une application de U dans V on a

$$\alpha \circ \Theta(x') = \Theta(\alpha \circ x') \quad .$$

2 - Il suit de là que, si G est un groupe de Lie, tout $\alpha \in G(A)$ définit un autom. du groupe ${}^AG$ - autrement dit qu'on a $\alpha \circ (x'y') = (\alpha \circ x')(\alpha \circ y')$

quels que soient $\alpha \in G(A)$, $x', y' \in {}^AG$. Plus généralement, si G opère à droite sur une variété V (auquel cas ${}^AG$ opère sur ${}^AV$) on a

$$\alpha \circ (x'.g') = (\alpha \circ x').(\alpha \circ g')$$

pour $x' \in {}^AV$, $g' \in {}^AG$.

3 – Soit P un fibré principal de groupe G et de base V; soit $\mathcal{A}$ un système fibré d'algèbres locales de type A sur V, associé à un fibré principal R de base V et de groupe G(A). Nous désignerons encore par $\mathcal{A}$ le système image réciproque de $\mathcal{A}$ par l'application $\pi : P \to V$. Notre but est de montrer qu'<u>on peut considérer la variété prolongée</u> ${}^{\mathcal{A}}P$ <u>comme un espace fibré</u> (non nécessairement principal) <u>de base</u> ${}^{\mathcal{A}}V$ <u>et de fibre</u> ${}^AG$.

Remarquons dès maintenant que l'application π de P sur V se prolonge en une application π de ${}^{\mathcal{A}}P$ sur ${}^{\mathcal{A}}V$ (§ 2,n°7), qu'on peut construire comme suit: soit $u' \in {}^{\mathcal{A}}P$ proche de $u \in P$; soit $x = \pi(u)$; u' est un A(x)-point de P , où A(x) désigne bien entendu la fibre de x dans $\mathcal{A}$; par π , u' se transforme en un A(x)-point x' de V proche de x , autrement dit en un élément de ${}^{\mathcal{A}}V$, qui est précisément le $\pi(u')$ cherché.

4 – On va maintenant construire un fibré principal Q canulé, ayant pour base ${}^{\mathcal{A}}V$ et pour groupe structural une extension de ${}^AG$ par G(A). Q sera l'ensemble des couples (u', σ) formés d'un élément u' de ${}^AP$ et d'un élément σ de R (fibré principal de base V définissant $\mathcal{A}$) , avec la condition que u' et σ se projettent au même point de V (bien entendu, pour projeter u' on projette le point u de P dont u' est proche). On a une application ϖ de Q dans ${}^{\mathcal{A}}V$ comme suit. Soit $(u', \sigma) \in Q$, se projettant en $x \in V$; σ s'identifie à un isomorphisme de A sur la fibre A(x) de x dans $\mathcal{A}$; comme u' est un A-point de P on peut donc former $\sigma \circ u'$, qui est un A(x)-point

de P qui, par π ($P \rightarrow V$) donne un A(x)-point x' de V proche de x , autrement dit un élément de $\mathcal{A}$ V ; c'est celui-ci que ϖ fait correspondre à (u',σ). On a donc

$$\varpi(u',\sigma) = \pi(\sigma \circ u').$$

Le fait que ϖ soit une application sur provient évidemment de ce que ^{A}P se projette sur ^{A}V, etc...

5 - Cherchons à quelle condition deux éléments (u',σ) et (v',τ) de Q se projettent au même point x' de $\mathcal{A}$ V. Soient u et v les points de ^{A}P dont u' et v' sont proches; il faut évidemment que u,v,σ et τ se projettent tous au point x de V dont x' est proche. Puisque σ et τ appartiennent à la même fibre de R on voit déjà qu'il existe un autom. α de A tel que $\tau = \sigma \circ \alpha$; cela fait, on est ramené d'après le n°4 à résoudre $\pi(\sigma \circ u') = \pi(\sigma \circ \alpha \circ v')$; vu le n°1 (dernière équation) cela revient à résoudre $\pi(u') = \pi(\alpha \circ v')$ dans ^{A}P. Or ^{A}P est un fibré principal de base ^{A}V et de groupe ^{A}G ; donc la relation précédente équivaut à l'existence d'un $g' \in {}^{A}G$ tel que $\alpha \circ v' = u'.g'$ ce qui s'écrit

$$v' = \alpha^{-1} \circ (u'.g').$$

En d'autres termes, la relation d'équivalence définie sur Q par l'application ϖ de Q sur $\mathcal{A}$ V est encore donnée par la formule

(1) $$(u',\sigma) \sim (\alpha^{-1} \circ (u'.g'), \sigma \circ \alpha).$$

6 - La formule précédente conduit à associer, à chaque élément (g',α) de l'ensemble $^{A}G \times G(A)$ la transformation de Q donnée par

(1) $$(u',\sigma).(g',\alpha) = (\alpha^{-1} \circ (u'.g'), \sigma \circ \alpha) ;$$

à l'aide des formules du n°2 on vérifie immédiatement qu'on obtient ainsi un groupe d'autom. de Q, le produit de deux transformations (s',α) et (t',β)

étant donné par la formule

(2) $$(s',\alpha).(t',\beta) = (s'(\alpha\circ t'),\alpha\beta) .$$

On est donc conduit à munir ${}^{A}G\times G(A)$ de la structure de groupe définie par la formule (2) ci-dessus (structure qui diffère de celle du produit), grâce à quoi ${}^{A}G\times G(A)$ opère à droite sur Q, et opère <u>fidèlement</u> comme on le voit instantanément. On peut donc considérer Q comme un fibré principal de base ${}^{\mathcal{A}}V$ et de groupe structural ${}^{A}G\times G(A)$ (tordu).

(Bien entendu, le rédacteur n'est pas allé jusqu'à vérifier que tous les fourbis construits sont différentiables ; on se borne à exhiber le fonctionnement algébrique du système).

7 – Pour un $(s',\alpha)\in {}^{A}G\times G(A)$ et un $g'\in {}^{A}G$ posons

(1) $$(s',\alpha).g' = s'.(\alpha\circ g') \quad ;$$

il est clair que de cette façon on fait <u>opérer</u> le groupe ${}^{A}G\times G(A)$ tordu sur la variété ${}^{A}G$, ce qui permet de former le fibré E de fibre ${}^{A}G$ associé à Q. On va montrer que E <u>s'identifie canoniquement à la variété prolongée</u> ${}^{\mathcal{A}}P$.

Prenons en effet un $(u',\sigma)\in Q$ et un $g'\in {}^{A}G$. Si (u',σ) se projette en $x'\in {}^{\mathcal{A}}V$, proche de $x\in V$, l'expression $\sigma\circ(u'.g')$ définit un $A(x)$-point de P se projettant évidemment suivant x' (qui est un $A(x)$-point de V), donc définit un élément de ${}^{\mathcal{A}}P$; d'où une application de $Q\times {}^{A}G$ dans ${}^{\mathcal{A}}P$ et en fait évidemment <u>sur</u>, laquelle transforme l'application évidente de $Q\times {}^{A}G$ sur ${}^{\mathcal{A}}V$ en celle de ${}^{\mathcal{A}}P$ sur ${}^{\mathcal{A}}V$. Remplaçons maintenant (u',σ) par (v',τ) et g' par h' ; $\sigma\circ(u'.g')$ est remplacé par $\tau\circ(v'.h')$; pour que les deux points de ${}^{\mathcal{A}}P$ ainsi obtenus coincident, il est déjà nécessaire que σ et τ se projettent au même point x de V, i.e. qu'on ait une relation

$\tau = \sigma\circ\alpha$ pour un $\alpha\in G(A)$; il reste alors évidemment à résoudre

$$u'.g' = \alpha\circ(v'.h') = (\alpha\circ v').(\alpha\circ h') \ ;$$

ceci exige que u' et $\alpha\circ v'$ soient sur la même fibre de ^AP (considéré comme fibré de base ^AV) autrement dit, l'existence d'un $s'\in {}^AG$ tel que

$$u' = (\alpha\circ v').s'^{-1} \quad \text{d'où} \quad g' = s'.(\alpha\circ h') \ ;$$

on a donc les formules

$$\tau = \sigma\circ\alpha \ ; \ v' = \alpha^{-1}\circ(u'.s') \quad ; \quad g' = s'.(\alpha\circ h') \quad ,$$

lesquelles peuvent s'écrire

$$(v',\tau) = (u',\sigma).(s',\alpha) \ ;$$
$$g' = (s',\alpha).h' \quad .$$

En conclusion, les couples qui conduisent au même élément de $^{\mathcal{A}}P$ que le couple $\{(u',\sigma),g'\}$ sont <u>exactement</u> ceux de la forme

$$\{(u',\sigma).(s',\alpha) \ , \ (s',\alpha)^{-1}.g'\} \quad .$$

Cela démontre comme annoncé que $^{\mathcal{A}}P$ s'identifie au fibré de fibre ^AG associé à Q . OUF.

8 - Après ce grand effort, le rédacteur, épuisé, renonce à examiner les prolongements des fibrés associés à P, ainsi qu'à montrer que les constructions précédentes sont en accord avec le résultat du § précédent.

Bornons-nous à remarquer que si, dans le cas général, on ne peut pas faire opérer ^AG sur $^{\mathcal{A}}P$, on peut néammoins, pour chaque $x\in V$, faire opérer le groupe $^{A(x)}G$ sur les points u' de $^{\mathcal{A}}P$ proches de points u de P se projettant en x ; car ^BG opérant de façon naturelle sur ^BP pour toute algèbre locale B, on peut définir le transformé d'un $A(x)$-point u' de P par un $A(x)$-point g' de G , d'où notre assertion. Bien entendu, u' et $u'.g'$ se projettent suivant le même point x' de $^{\mathcal{A}}V$, et réciproquement.

§ 7 - Extension et restriction du groupe structural.

Ce § est un entracte sur les espaces fibrés, qui aurait pu être placé avec avantage au Chapitre I.

1 - Soit P un fibre principal de base V et de groupe G. Soit H un sur-groupe de G (G est donc un sous-groupe de Lie de H, muni de la structure induite). Faisons opérer G sur H de la façon évidente, i.e. par $(g,h) \rightarrow g.h$; cela permet de former un fibré Q de fibre H associé à P. Un élément v de Q est un couple (u,h) , $u \in P, h \in H$, étant entendu que (u,h) et $(u.g,g^{-1}h)$ représentent le même élément de Q. La formule $(u,h).h_1 = (u,hh_1)$ permet évidemment de faire opérer H à droite sur Q ; ceci et l'application $\pi : (u,h) \rightarrow \pi(u)$ de Q sur V permettent de considérer Q comme fibré principal de base V et de ~~base V (A;Q;T;)~~. groupe H.

2 - Les notations restant les mêmes, on voit que P s'identifie à une sous-variété de Q, en associant à $u \in P$ l'élément de Q représenté par le couple (u,e) ; cette identification est évidemment compatible avec les opérations de G, et avec la projection π de P sur V. Il s'ensuit que, pour tout $v \in Q$, il existe un $u \in P$ et un $h \in H$ tels que $v = u.h$ (u étant identifié à un élément de Q); il suffit ~~que~~ de prendre u dans la fibre de v. Bien entendu, u n'est pas unique, ni h ; mais si $v = u'.h'$ pour un autre $u' \in P$ et un autre $h' \in H$ on a une relation $u' = u.g^{-1}$ d'où $h' = g.h$; en conséquence, la classe $G.h$ de h modulo G est unique; appelons-la $\varphi(v)$; on obtient ainsi une application φ de Q dans l'espace homogène H/G , et il est clair que celle-ci vérifie

(1) $$\varphi(v.h) = \varphi(v).h$$.

On dit que le fibré principal Q se déduit de P par extension à H du groupe structural . Bien entendu, $Q = P$ si $H = G$.

3 - Réciproquement, soit Q un fibré principal de base V et de groupe H, et, pour un sous-groupe G de H, soit φ une application de Q dans H/G vérifiant la condition précédente. (Remarque du rédacteur - Ceci suppose définie la variété <u>différentiable</u> H/G; proximus redactor demerdetur). Soit P l'ensemble des $u \in Q$ tels que $\varphi(u) = \dot{e}$, classe de e. P est invariant par G, et il est clair puisque H opère transitivement dans H/G que toute fibre de Q rencontre P; donc l'application π de Q sur V applique aussi P sur V. On en déduit que P est un fibré principal de base V et de groupe G. A tout couple (u,h), $u \in P, h \in H$, associons l'élément u.h de Q; on obtient alors une application de $P \times H$ sur Q , et il est clair que les couples conduisant au même point de Q que (u,h) sont exactement de la forme $(u.g, g^{-1}h)$; on en conclut que Q s'identifie canoniquement au fibré principal déduit de P par extension à H du groupe structural.

On dit inversement que P <u>se déduit de</u> Q <u>par restriction à</u> G <u>du groupe structural</u>. Bien entendu, cette opération (contrairement à la précédente) n'est pas toujours possible; et si elle l'est, elle n'est pas unique.

<u>Remarque</u> - Le fait que l'équation $\varphi(u) = e$ définisse une sous-variété de Q se voit comme au Chapitre I, § 3,n°4 et en utilisant la trivialité locale de Q.

4 - Les notations étant celles du n° précédent, soit N une variété sur laquelle opère H, et soit M une sous-variété de N invariante par G. On peut alors former le fibré E de fibre N associé à Q, ainsi que le fibré F de fibre M associé à P. Ce dernier se plonge canoniquement dans le premier. En effet, un point de F est un couple (u, ξ), $u \in P, \xi \in M$, donc définit de même un point de E qui, évidemment, ne dépend pas de la représentation (u, ξ) adoptée. Etc...

§ 8 – Connexions. I: le cas trivial.

<u>Introduction naive</u>. Soit P fibré principal de base V et de groupe G. Soit A une algèbre locale (par ex. celle des nombres duaux); on a vu que ${}^AP$ est un fibré principal de base ${}^AV$ et de groupe ${}^AG$. Définir une <u>connexion d'espèce</u> A sur P c'est se donner des isomorphismes des fibres de P sur les fibres "infiniment voisines". Cela suppose qu'on sait ce qu'est une fibre "infiniment voisine" de celle de x ; on pourrait penser que, pour $x' \in {}^AV$ proche de x, c'est la fibre de x' dans ${}^AP$; malheureusement celle-ci est ${}^AG$ alors que la fibre de x est G. La notion de fibre infiniment voisine ne semble donc pas avoir de sens.

Heureusement, il n'en est rien. Le problème est en effet, visiblement, de prolonger P en un fibré de base ${}^AV$ et de <u>même</u> groupe structural G que P; or l'opération "restriction du groupe structural" a été inventée précisément dans ce but...

1 — On appellera donc <u>connexion d'espèce</u> A <u>sur</u> P tout fibré principal de base ${}^AV$ déduit de ${}^AP$ par restriction à G du groupe structural, et vérifiant diverses conditions que nous allons exposer.

Remarquons tout d'abord que, d'après les résultats du § précédent, une connexion est définie par la donnée d'une application Θ de ${}^AP$ dans l'espace homogène ${}^AG/G$ vérifiant $\Theta(u'.g') = \Theta(u').g'$. Or dans ${}^AG$ l'application π est un homom. de groupe sur G ; il s'ensuit immédiatement que l'espace homogène ${}^AG/G$ se réalise comme sous-groupe de ${}^AG$, à savoir comme l'<u>ensemble des points de</u> ${}^AG$ <u>proches de</u> e ; nous désignerons ce sous-groupe de ${}^AG$ par la notation $L_A(G)$ (L = Lie ...); ce sous-groupe est bien entendu <u>invariant dans</u> ${}^AG$, et si on le considère comme espace homogène modulo G on voit que ${}^AG$ opère sur $L_A(G)$ ~~par les automorphismes intérieurs.~~

comme suit: la transformation de $L_A(G)$ définie par $g' \in {}^AG$ est $h' \to g^{-1}h'g'$ où $g = \pi(g')$ est la "partie finie" de g'. En conséquence, <u>une connexion</u> ~~d~~ <u>d'espèce</u> A <u>sur</u> P <u>est définie par la donnée d'une application</u> Θ ("applic. structurale" de la connexion) <u>de</u> ${}^AP$ <u>dans</u> $L_A(G)$ <u>vérifiant l'identité</u>

(1) $$\Theta(u'.g') = g^{-1}\Theta(u')g' \quad ,$$

laquelle se décompose évidemment en deux:

(2) $$\Theta(u'.g) = g^{-1}\Theta(u')g \qquad \text{pour} \quad g \in G \ ;$$

(3) $$\Theta(u'.g') = \Theta(u').g' \qquad \text{pour} \quad g' \in L_A(G).$$

Une telle application Θ étant donnée, le fibré obtenu par restriction à G du groupe structural de ${}^AP$ s'identifie à l'ensemble des u' tels que $\Theta(u') = e$. Si l'on veut que ce fibré "prolonge" P on doit donc supposer en outre que

(4) $$\Theta(u) = e \qquad \text{pour } u \in P \ .$$

(Lorsque A est l'algèbre des nombres duaux, on écrit $\Theta(u+du) = e + \omega(u;du)$ et ω est la forme différentielle structurale de la connexion au sens de Weil ; on reviendra naturellement en détail sur ce cas par la suite).

2 - Désignons par Q l'ensemble des u' tels $\Theta(u') = e$. C'est un fibré principal de base ${}^AV$ et de groupe G qui, au-dessus de V, se réduit à P. Etant donné x' voisin de $x \in V$, nous dirons que la fibre de x' dans Q est <u>proche</u> de la fibre de x dans P. Soient $G(x)$ et $G(x')$ les fibres de x et x' dans Q. Pour $u' \in G(x')$ il existe un $u \in G(x)$ dont u' est proche; il est clair que si l'on remplace u' par $u'.g$ ($g \in G$), u est remplacé par $u.g$; donc $u' \to u$ = partie finie de u' définit un isomorphisme de la fibre $G(x')$ sur la fibre $G(x)$ (on les considère comme espaces homogènes de G), d'où, en sens inverse un <u>isomorphisme de</u> $G(x)$ <u>sur</u> $G(x')$; pour $u \in G(x)$ et x' proche de x, le $u' \in G(x')$ proche de u sera dit être <u>obtenu par transport parallèle de</u> u <u>de</u> x <u>en</u> x'

On utilisera parfois la notation

$$u' = \tau_x^{x'}(u)$$

pour désigner ce point.

3- Pour obtenir des choses raisonnables, il est enfin utile d'imposer une autre condition aux connexions, à savoir: si l'on soumet x' à une spécialisation (i.e. si on le compose avec un endomorphisme α de l'algèbre locale A) alors le point déduit de u par transport parallèle en x' doit subir la même spécialisation. C'est le cas, évidemment, si l'application structurale θ est compatible avec les spécialisations, i.e. vérifie

(5) $$\theta(\alpha \circ u') = \alpha \circ \theta(u')$$

pour tout endomorphisme α de A.

(En réalité, il doit y avoir plus. Il est clair, du point de vue naif tout au moins, que l'ensemble des A-points d'une variété proches d'un point donné est une variété algébrique, probablement munie de structures canulées; par exemple, pour A = nb. duaux, c'est canoniquement un espace affine. Il faudrait alors supposer que la forme structurale θ est compatible avec ces structures. Le rédacteur ne les ayant pas découvertes serait bien en peine de préciser plus sa pensée).

4- Bien entendu, la donnée d'une connexion θ sur P permet de définir le transport parallèle dans tout fibré E, de fibre F, associé à P: pour transporter de x en x' le point de E représenté dans le "repère" $u \in P$ par le point ξ de F, on transporte u en u' (et on ne change pas ξ).

5- Notons encore le résultat trivial mais important que voici. Soient P_1 et P_2 deux fibrés principaux de base V, de groupes G_1 et G_2, et formons le produit direct fibré P (ensemble des couples (u_1, u_2) qui se projettent au même point de V). Pour se définir une connexion θ sur P, il est

6 - Soit Θ une connexion sur un fibré principal P de base V et de groupe G, Θ d'espèce A. Comme on l'a vu, Θ définit un fibré principal de base ${}^{A}V$ et de même groupe G ; on l'appellera extension d'espèce A de P définie par la connexion Θ. De façon analogue on a, pour tout fibré E de fibre F associé à P, une extension à ${}^{A}V$, qui est un fibré de fibre F associé à l'extension de P. Cela dit, considérons une section $x \to \sigma(x)$ de E au-dessus de V. Par prolongement il lui correspond une section $x' \to \sigma(x')$ de ${}^{A}E$ au-dessus de ${}^{A}V$ (§5, n°3) ; mais en général il est clair que $x' \to \sigma(x')$ n'est pas une section de l'extension d'espèce A de E. Pour obtenir une section de cette extension, il suffit de poser

$$\bar{\sigma}(x') = \tau_x^{x'}[\sigma(x)]$$

pour x' proche de x. La section $\bar{\sigma}$ du fibré $\bar{E}$, extension d'espèce A de E définie par la connexion Θ, sera appelée extension covariante d'espèce A de σ définie par la connexion Θ.

7 - Il est facile de calculer $\bar{\sigma}(x')$, comme suit. Soit U un ouvert de V au-dessus duquel exite une section $x \to u(x)$ de P ; soit U' l'image réciproque de U dans ${}^{A}V$; $x \to u(x)$ se prolonge en une section $x' \to u(x')$ de ${}^{A}P$ au-dessus de U' (on aura soin de distinguer l'opération de prolongement, qui est indépendante de toute connexion, de celle d'extension covariante); d'autre part on a une extension covariante de cette section, qui consiste à associer à chaque $x' \in U'$ l'élément $\bar{u}(x')$ de ${}^{A}P$ déduit de $u(x)$ par transport parallèle. Comme $u(x')$ et $\bar{u}(x')$ sont tous deux proches de $u(x)$, et se projettent au même point x' de ${}^{A}V$, on a évidemment une relation de la forme $\bar{u}(x') = u(x').g'$ où $g' \in {}^{A}G$ est proche de e, i.e. ou $g' \in L_A(G)$; il s'ensuit que

$$\Theta(\bar{u}(x')) = \Theta(u(x')).g'$$

et comme le premier membre vaut e (n°1, éq.(4)) il vient

$$g' = \Theta(u(x'))^{-1} \quad .$$

Donc

(1) $$\bar{u}(x') = u(x').\Theta(u(x'))^{-1} \quad ;$$

cela dit, soit $\xi(x) \in F$ la "composante" de $\sigma(x)$ suivant le repère $u(x)$; par définition du transport parallèle, $\bar{\sigma}(x')$ a $\xi(x)$ pour composante par rapport à $\bar{u}(x')$; utilisant (1) on en conclut que la composante de $\bar{\sigma}(x')$ dans le repère $u(x')$ est $\Theta(u(x'))^{-1}.\ \xi(x)$ (noter que G opérant sur F, ${}^AG$ opère sur ${}^AF$; par ailleurs, cette composante est dans ${}^AF$ et non , en général dans F , alors que $\bar{\sigma}(x')$ est un élément d'un fibré de fibre F ; cette contradiction apparente tient évidemment au fait qu'on calcule $\bar{\sigma}(x')$ dans un repère élément de ${}^AP$ et non dans un repère élément du fibré principal $\bar{P}$, extension d'espèce A de P définie par la connexion!).

(Dans ~~XXX~~ le cas ou A = algèbre des nombres duaux, on pose comme il a été dit $\Theta(u+du) = e + \omega(u;du)$, ω forme différentielle sur P à valeurs dans l'algèbre de Lie de G ; au lieu de $\Theta(u(x'))^{-1}.\ \xi(x)$ on a alors évidemment $\xi(x) - \omega(u;du).\ \xi(x)$, ou du se clacule par la condition que $x \rightarrow u(x)$ se prolonge en $x+dx \rightarrow u(x)+du$; par ailleurs, la section $x \rightarrow u(x).\ \xi(x)$ de E se prolonge en ~~XXXX~~ $x+dx \rightarrow (u+du)(\xi+d\xi) = u(x)\xi(x) + u(x).d\xi(x;dx) + du(x;dx).\ \xi(x)$; la différence entre les composantes dans $u(x+dx)$ des sections $\sigma(x')$ et $\bar{\sigma}(x')$ est alors $d\xi(x;dx) + \omega(u;du).\ \xi(x)$, formule qui conduit à la différentielle covariante de la section considérée).

§ 9 - Connexions. II : le cas non trivial.

1 - Sur une variété V, soit $\mathcal{A}$ un système fibré d'algèbres locales de type A, assovié à un fibré principal R de base V et de groupe G(A). Soit d'autre part P un fibré principal de base V et de groupe G. On a vu (§6) que la variété prolongée $^{\mathcal{A}}P$ est un fibré de base $^{\mathcal{A}}V$, et de ~~gxxx~~ fibre ^{A}G, associé à un fibré principal Q de base $^{\mathcal{A}}V$ ayant pour groupe structural le produit tordu $^{A}G \times G(A)$.

Ici encore, nous appellerons <u>connexion d'espèce</u> $\mathcal{A}$ <u>sur</u> P tout fibré de base $^{\mathcal{A}}V$ déduit de $^{\mathcal{A}}P$ par restriction à G du groupe structural, et vérifiant des conditions supplémentaires analogues à celles du § précédent.

Le procédé le plus simple (et sans doute unique) pour obtenir une telle connexion est de restreindre à G le groupe structural du fibré principal Q. Or Q est l'ensemble des couples (u', σ), $u' \in {}^{A}P, \sigma \in R$, avec u' et σ se projetant au même point de V ; donc pour se donner une connexion il faut avoir une application Θ de Q dans l'espace homogène $({}^{A}G \times G(A))/G$, compatible avec les opérations du groupe tordu $^{A}G \times G(A)$.

Il est tout d'abord clair que cet espace homogène peut se réaliser comme produit direct $L_A(G) \times G(A)$; ceci fait, la loi de multiplication dans le groupe $^{A}G \times G(A)$ montre que celui-ci opère sur $L_A(G) \times G(A)$ suivant la formule

$$(s', \alpha).(t', \beta) = (t^{-1}s'(\alpha_{\circ} t'), \alpha\beta)$$

$(s' \in L_A(G),\ t' \in {}^{A}G,\ \alpha, \beta \in G(A))$. Donc la fonction Θ se décompose en deux applications :

$$\Theta(u', \sigma) = (\varphi(u', \sigma),\ \psi(u', \sigma))$$

la première φ étant à valeurs dans $L_A(G)$ et la seconde ψ à valeurs dans G(A) de plus, la compatibilité avec les opérations s'exprime par les formules suivantes:

(1) $$\varphi(u'.g',\sigma) = g^{-1}\varphi(u',\sigma)[\psi(u',\sigma)g'] \quad ;$$
(1') $$\varphi(\alpha \circ u',\sigma) = \varphi(u',\sigma\circ\alpha) \quad ;$$
(2) $$\psi(u'g',\sigma) = \psi(u',\sigma) \quad ;$$
(2') $$\psi(u',\sigma\circ\alpha) = \psi(u'\circ\alpha,\sigma)\circ\alpha \quad .$$

Ces relations généralisent les relations (2) et (3) du n°1 du § précédent.

2 - Pour nous borner à un seul cas intéressant nous supposerons que $\mathcal{A}$ est le système fibré $D^{(m)}(V)$, formé des algèbres locales $D^{(m)}(V;x)$; le fibré principal R est ici $P^{(m)}(V)$, ensemble des repères d'ordre m aux différents points de V . Au lieu de la notation $D^{(m)}(V)_P$ nous utiliserons la notation ${}^{(m)}P$; un élément de ${}^{(m)}P$ est donc un point proche d'un $u \in P$, d'espèce $D^{(m)}(V;x)$ ou $x = \pi(u)$.

Considérons alors une connexion sur ${}^{(m)}P$. En restreignant à G la fibre et le groupe structural de ${}^{(m)}P$ on obtient, comme au § précédent, une extension de P qui permet de définir un transport parallèle . En particulier prenons un $u \in P$ se projettant en ~~x~~ $x \in V$; on peut le transporter par parallèlisme à tout point d'espèce $D^{(m)}(V;x)$ proche de x; on peut donc le transporter par parallèlisme au point $\underline{\underline{x}}^{(m)}$ <u>canonique</u> de rang m proche de x (§1,n°7), ce qui donne un élément $\Phi(u)$ de la variété prolongée ${}^{(m)}P$ se projettant en $\underline{\underline{x}}^{(m)}$, et proche de u. La donnée de l'application $u \to \Phi(u)$ de P dans ${}^{(m)}P$ définit entièrement la connexion; en effet, celle-ci doit être compatible avec les spécialisations; étant donné que tout point d'espèce $D^{(m)}(V;x)$ proche de x est une spécialisation de $\underline{\underline{x}}^{(m)}$, i.e. est de la forme $\alpha \circ \underline{\underline{x}}^{(m)}$ pour un endomorphisme α de l'algèbre locale $D^{(m)}(V;x)$, on voit donc que la donnée de l'application permet de transporter u en tout point proche de x, par spécialisation.

Bien entendu, la connexion devant aussi être compatible avec le groupe struc tural de P, l'application ϕ doit vérifier l'identité

$$\phi(u.g) = \phi(u).g \quad .$$

(Le lecteur reconnaitra là un cas particulier de la notion de transformation infinitésimale étudiée plus loin; une connexion sur ${}^{(m)}P$ est une trans. inf. $u \rightarrow \phi(u)$ sur P, à valeurs dans ${}^{(m)}P$; ceci semble résoudre le problème de l'analogie entre connexions et trans.inf. posé à Pelvoux; il y a, non pas analogie, mais pratiquement identité!).

3 - Les hypothèses restant celles du n°2 , considérons une connexion sur P, définie par une application ϕ dans ${}^{(m)}P$; soit de plus A une algèbre locale de rang $\leqslant$ m; alors on peut déduire de ϕ une connexion d'espèce A sur P. Il suffit évidemment, pour un $u \in P$ tel que $\pi(u) = x$ et pour un $x' \in {}^{A}V$ proche de x, de définir l'élément $\tau_x^{x'}(u)$ de ${}^{A}P$ obtenu par transport parallèle de u de x en x'. Or comme A est de rang $\leqslant$ m, x' est de la forme $\alpha \circ \underline{x}^{(m)}$ où α est un homom. de $D^{(m)}(V;x)$ dans A ; nous poserons alors

$$\tau_x^{x'}(u) = \alpha \circ \phi(u) \quad ;$$

on vérifie immédiatement que le parallèlisme ainsi défini possède les propriétés requises (compatibilité avec les spécialisations et les opérations de G), d'où la connexion d'espèce A cherchée.

(Si par exemple m = 1, la donnée d'une connexion sur ${}^{(1)}P$ détermine une connexion sur P d'espèce A = nb. duaux, autrement dit d'une connexion au sens Weil ; il est remarquable que, dans ce cas particulier, la réciproque soit vraie; autrement dit, si on sait "relever" les vecteurs tangents à V on sait aussi, par un procédé évident, relever le point proche canonique de rang 1 ; il s'ensuit que la notion de connexion au sens Weil se ramène bien à celle de transformation infinitésimale, à valeurs, il est vrai, dans une variété prolongée "tordue").

4 - Considérons maintenant un fibré E de fibre F associé à P, et une section $\sigma(x)$ dudit fibré. Si A est de rang $\leqslant$ m, nous pouvons, d'après le n° et le § précédents, définir ~~XX~~ l'extension covariante d'espèce A de σ, qui est une section $\bar{\sigma}$ d'un fibré $\bar{E}$ de base ${}^{A}V$ et de groupe G. Pour la calculer, prenons un $x' \in {}^{A}V$ proche de x et un $u \in P$ tel que $\pi(u) = x$; si $\sigma(x)$ a pour composante dans le repère u l'élément ξ de F, on sait que $\bar{\sigma}(x')$ a pour composante ξ dans le repère $\tau_x^{x'}(u)$ déduit de u par transport parallèle en x'. Mais en posant $x' = \alpha \circ \underline{x}^{(m)}$ on a par définition $\tau_x^{x'}(u) = \alpha \circ \phi(u)$; introduisons alors la variété prolongée ${}^{(m)}E$, prolongement de E défini par le système fibré d'algèbres locales $D^{(m)}(V)$ (i.e. par l'image réciproque de celui-ci dans E); comme dans ${}^{(m)}P$, on a un transport parallèle dans ${}^{(m)}E$, ce qui permet en particulier de transporter $\sigma(x)$ de x en $\underline{x}^{(m)}$, d'ou un élément $\bar{\sigma}(x^{(m)})$ de ${}^{(m)}E$ se projettant en $\underline{x}^{(m)}$; cela dit, puisque la connexion sur ${}^{A}P$ est obtenue par spécialisation à partir de la connexion sur ${}^{(m)}P$ il est clair qu'on a le résultat suivant:

$$x' = \alpha \circ \underline{x}^{(m)} \quad \text{implique} \quad \bar{\sigma}(x') = \alpha \circ \bar{\sigma}(\underline{x}^{(m)}) \quad .$$

Pour cette raison nous désignerons l'expression $\bar{\sigma}(\underline{x}^{(m)})$ comme suit: ce sera la <u>partie principale covariante d'ordre</u> m <u>en</u> x <u>de la section</u> σ <u>de</u> E.

Archives
Mr Godement
Avril 1953

VARIETES DIFFERENTIABLES III

Sommaire.

Commentaires .

Ce Chapitre, troisième pierre d'un grandiose édifice, a pour but l'étude générale des transformations infinitésimales d'une variété, et présente du reste, de ce point de vue, la particularité de n'en presque pas parler. On s'est en effet aperçu du fait que celles-ci ne jouent de rôle que dans la mesure ou ce sont des applications $V \rightarrow {}^{A}V$ proches d'un automorphisme (pas nécessairement identique!) de V ; ce qui permet de traiter simultanément les transf.inf. et les transf.finies.

On s'est assez sensiblement écarté de Weil, tout d'abord en passant totalement sous silence l'engendrement des transf.inf. à partir des transf. finies - ce qui oblige, et c'est un avantage, à mieux dévisser le mécanisme algébrique du fourbi - ensuite en donnant des résultats nettement plus fort sur les relèvements canoniques. En particulier on a démontré complètement la formule $(S^{(m)})^{F} = (S^{F})^{(m)}$ pour les sections d'un espace fibré associé à un $P^{(r)}(V)$ (et même à des fibrés principaux généraux), formule que l'on peut considérer comme étant le seul résultat réellement non trivial de ce Chapitre. La difficulté réside du reste, non pas dans la théorie des transf. inf. , mais dans l'étude détaillée des "éléments de sections d'un espace fibré" (§5) , étude dont on ne trouve pas trace chez Weil et qui avait été abordée par Chevalley dans ses compléments à la rédaction Weil(dans le seul cas, d'ailleurs, de fibrés associés à un $P^{(r)}(V)$). On verra apparaitre dans ce § des opérations canulées sur les fibrés et leurs prolongements, et le rédacteur estime que la question est encore loin d'être bien éclaircie.

Bien entendu, comme dans le Chapitre II, on se place exclusivement "dans le rang m" ; le rang 1 fera l'objet du Chapitre suivant.

Le rédacteur aurait désiré exposer la théorie dans le cadre des systèmes fibrés d'algèbres locales. Mais des tentatives malheureuses pour y parvenir l'ont contraint à rentrer dans la voie vulgaire de la trivialité. Il n'empèche que le problème se pose.

On n'a pas non plus essayé de traiter des problèmes plaisans et délectables tels que le suivant: soit E un fibré de base V; on forme le fibré $D^{(p)}_E(V)$ des éléments de section d'ordre p de E, puis le fibré

$$D^{(q)}_{D^{(p)}_E}(E)$$

des éléments de section d'ordre q du second, puis le fibré

$$D^{(r)}_{D^{(q)}_{D^{(p)}_E}}(V)$$

des éléments de section d'ordre r du troisième, puis.....; qu'est-ce qu'on trouve?

§1 - Prolongements successifs.

1 - Soient V une variété, A et B deux algèbres locales. Toute fonction $f \in D(V)$ se prolonge en une application ${}^A f$ de ${}^A V$ dans A ; celle-ci se prolonge à son ~~XXXXX~~ tour en une application ${}^B({}^A f)$ de ${}^B({}^A V)$ dans $B \otimes A$ et en vertu de II,§4,n°7 l'application $f \to {}^B({}^A f)$ est un homomorphisme d'algèbres. Si de plus f est nulle au voisinage d'un $x \in V$ et si x'' est un point de ${}^B({}^A V)$ proche d'un $x' \in {}^A V$ lui-même proche de x, alors il est clair que ${}^A f$ est nulle au voisinage de x' et par suite que ${}^B({}^A f)$ est nulle en x''. Par conséquent <u>l'application</u> $f \to {}^B({}^A f)(x'')$ <u>définit un</u> $B \otimes A$-<u>point</u> $\tilde{x}''$ <u>de</u> V.

2 - <u>L'application</u> $x'' \to \tilde{x}''$ <u>est un isomorphisme de</u> ${}^B({}^A V)$ <u>sur</u> ${}^{B\otimes A}V$. Soit en effet ξ un isomorphisme d'un ouvert U de V sur R^n ; l'application ${}^A\xi$ est alors un isomorphisme de l'ouvert $U' = \overset{-1}{\pi}(U) \subset {}^A V$ sur $A \otimes R^n$, de sorte que l'application ${}^B({}^A\xi)$ est un isomorphisme de l'ouvert $U'' = \overset{-1}{\pi}(U') \subset {}^B({}^A V)$ sur $B \otimes (A \otimes R^n)$; enfin l'application ${}^{B\otimes A}\xi$ est un isomorphisme de l'ouvert $\tilde{U}'' = \overset{-1}{\pi}(U) \subset {}^{B\otimes A}V$ sur $(B \otimes A) \otimes R^n$; comme la correspondance entre x'' et $\tilde{x}''$ est donnée par ${}^B({}^A\xi)(x'') = {}^{B\otimes A}\xi(\tilde{x}'')$ il est clair que notre assertion est démontrée.

Dans la suite on identifiera toujours la variété ${}^B({}^A V)$ à la variété ${}^{B\otimes A}V$ au moyen de l'isomorphisme $x'' \to \tilde{x}''$ (dit canonique). Si V est vectoriel (ou est une algèbre) cette identification est bien entendu compatible avec les structures algébriques définies dans II,§4 sur les variétés prolongées.

3 - Soit λ : $b \otimes a \to a \otimes b$ l'isomorphisme canonique de $B \otimes A$ sur $A \otimes B$; il est clair que les variétés ${}^B({}^A V) = {}^{B\otimes A}V$ et ${}^{A\otimes B}V = {}^A({}^B V)$ sont isomorphes, les points de la seconde s'obtenant en composant ceux de la première avec λ. En conséquence, on voit que <u>le</u> A-<u>prolongement de</u> ${}^B V$ <u>s'identifie can</u>

<u>niquement au B-prolongement de</u> ${}^{A}V$.

4 - Reprenons l'identification canonique ${}^{B}({}^{A}V) = {}^{B\otimes A}V$; puisque d'une manière générale X est identifiée à une partie de ${}^{B}X$, cette identification implique l'identification de ${}^{A}V$ à une partie de ${}^{B\otimes A}V$, et plus précisément implique l'existence d'une projection canonique de ${}^{B\otimes A}V$ sur ${}^{A}V$. Il est immédiat de voir que l'immersion de ${}^{A}V$ dans ${}^{B\otimes A}V$ s'obtient en identifiant le A-point x' de V au $B\otimes A$-point $f \to 1\otimes f(x')$, et que la projection de ${}^{B\otimes A}V$ sur ${}^{A}V$ s'obtient par "spécialisation" à partir de l'homom. $b\otimes a \to b_o a$ (b_o = partie finie de b) de $B\otimes A$ sur A.

5 - (Remords de II) Soient V une variété et σ un homom. d'une algèbre locale B dans une algèbre locale A ; σ détermine alors une application

$$\sigma_V : {}^{B}V \to {}^{A}V$$

consistant à associer, à tout B-point x" de V, le A-point x' donné par

(*) $$f(x') = \sigma(f(x"))$$

- ce qui s'écrit encore

(**) $${}^{A}f \circ \sigma_V = \sigma \circ {}^{B}f \qquad \text{pour} \quad f \in D(V).$$

Considérons maintenant une autre variété W et une application θ de V dans W; alors il est immédiat de voir que (**) se généralise sous la forme

(***) $${}^{A}\theta \circ \sigma_W = \sigma_W \circ {}^{B}\theta \quad .$$

Nous utiliserons constamment (***) sous le nom de <u>principe de compatibilité des prolongements et des spécialisations</u>.

6 - Soient une variété V et trois algèbres locales A,B,C avec un homom. σ de B dans A. L'application σ_V de ${}^{B}V$ dans ${}^{A}V$ se prolonge en une application ${}^{C}(\sigma_V)$ de ${}^{C\otimes B}V$ dans ${}^{C\otimes A}V$; d'autre part, σ se prolonge en une application ${}^{C}\sigma$ de ${}^{C}B = C\otimes B$ dans ${}^{C}A = C\otimes A$ (évidemment donnée par $c\otimes b \to c\otimes\sigma(b)$); cela dit nous allons démontrer la formule

$$^{C}(\sigma_V) = (^{C}\sigma)_V \quad .$$

Partons en effet de la relation

$$(**) \qquad {}^{A}f \circ \sigma_V = \sigma \circ {}^{B}f \qquad \text{pour } f \in D(V)$$

et prolongeons-la; il vient d'après le théorème des fonctions composées

$$^{C\otimes A}f \circ {}^{C}(\sigma_V) = {}^{C}\sigma \circ {}^{C\otimes B}f \quad ;$$

mais de façon analogue à (**) , en remplaçant σ par $^{C}\sigma$, on a aussi

$$^{C\otimes A}f \circ ({}^{C}\sigma)_V = {}^{C}\sigma \circ {}^{C\otimes B}f \quad ,$$

d'où immédiatement la relation cherchée.

§2 - A-applications d'une variété dans une autre .

1 - Soient X et Y deux variétés et A une algèbre locale. On appelle _A-application de X dans Y_ toute application F de X dans ^{A}Y. On dit que F est _proche_ d'une application f de X dans Y si, pour tout x, F(x) est proche de f(x). En particulier on appelle _transformation infinitésimale d'espàce_ A de X toute A-application de X dans X proche de l'application identique; ce n'est pas autre chose qu'une _section_ de l'espace fibré ^{A}X de base X.

2 - Soient F une A-application de X dans Y et σ l'homom. canonique

$$\sigma : a'\otimes a'' \to a'a''$$

de $A\otimes A$ sur A. Par prolongement, on obtient une application ^{A}F de ^{A}X dans $^{A\otimes A}Y$, d'où en spécialisant par σ une application

$$\tilde{F} = \sigma_Y \circ {}^{A}F$$

de ^{A}X dans ^{A}Y. Celle-ci _prolonge l'application_ F _de_ X _dans_ ^{A}Y . Soit en effet $x \in X$; comme ^{A}F prolonge F modulo l'immersion canonique et générique de V dans ^{A}V, on obtient $^{A}F(x)$ en composant F(x) avec l'homom. $a \to 1\otimes a$ de A dans $A\otimes A$ (§1,n°4); si l'on compose le résultat obtenu avec σ il est clair qu'on retrouve F(x) comme annoncé.

58

Dans la suite on dira que $\tilde{F}$ est l'<u>extension canonique de</u> F. Si F est une transf. inf. d'espèce A de X, son extension canonique est une application de ${}^{A}X$ dans ${}^{A}X$ (et en fait, comme on le verra, un autom. de ${}^{A}X$). Si F applique X dans Y, son extension canonique n'est autre que ${}^{A}F$.

3 - Soient X, Y, Z des variétés et considérons des A-applications F et G de X dans Y et Y dans Z; on appellera "<u>composée</u>" de F et G la A-application

(1) $$G*F = \tilde{G}\circ F = \sigma_{Z}\circ {}^{A}G\circ F$$

de X dans Z. Il est clair que la "composée" de deux transf. inf. d'espèce A de X en une troisième (vous en êtes un autre, etc...); plus généralement si F et G sont proches de f et g alors leur "composée" est proche de $g\circ f$.

4 - La loi de composition précédente est <u>associative</u>. Soient en effet des A-applications F, G, H de X dans Y, Y dans Z, Z dans T; d'après la formule (1) du n°3 on a

$$H*(G*F) = \sigma_{T}\circ {}^{A}H\circ \sigma_{Z}\circ {}^{A}G\circ F$$

et de même

$$(H*G)*F = \sigma_{T}\circ {}^{A}(\sigma_{T}\circ {}^{A}H\circ G)\circ F = \sigma_{T}\circ {}^{A}(\sigma_{T})\circ {}^{A\otimes A}H\circ {}^{A}G\circ F \quad ;$$

tout revient donc à établir la relation

$$\sigma_{T}\circ {}^{A}H\circ \sigma_{Z} = \sigma_{T}\circ {}^{A}(\sigma_{T})\circ {}^{A\otimes A}H \quad ;$$

or posons $U = {}^{A}T$, de sorte que H applique Z dans U; d'après le principe de compatibilité des prolongements et des spécialisations on a

$$\sigma_{U}\circ {}^{A\otimes A}H = {}^{A}H\circ \sigma_{Z} \quad ;$$

dans ces conditions il est clair que tout revient à vérifier l'identité

$$\sigma_{T}\circ {}^{A}(\sigma_{T}) = \sigma_{T}\circ \sigma_{U} \qquad (U = {}^{A}T)$$

et puisque c'est purement local on peut supposer T vectoriel; alors:

$$^A(\sigma_T) : a\otimes a'\otimes a''\otimes t \rightarrow a\otimes a'a''\otimes t$$
$$\sigma_T : a\otimes a'a''\otimes t \rightarrow aa'a''\otimes t ;$$
$$\sigma_U : a\otimes a'\otimes a''\otimes t \rightarrow aa'\otimes a''\otimes t$$
$$\sigma_T : aa'\otimes a''\otimes t \rightarrow aa'a''\otimes t ,$$

comme annoncé.

Ne pas croire qu'on ait aussi $\sigma_U = {}^A(\sigma_T)$ ...

5 - Soient F, G des A-applications de X dans Y, Y dans Z ; alors l'extension canonique de l'appliction "composée" est composée des extensions canoniques de F et G, ce qui en langage clair veut dire qu'on a la formule

$$\widetilde{G*F} = \tilde{G}\circ\tilde{F} .$$

En effet, σ désignant toujours l'homom. canonique $A\otimes A \rightarrow A$, et posant $H = G*F$, on a

$$\tilde{H} = \sigma_Z\circ {}^AH = \sigma_Z\circ {}^A(\sigma_Z\circ {}^AG\circ F) = \sigma_Z\circ {}^A(\sigma_Z)\circ {}^{A\otimes A}G\circ {}^AF$$

et d'autre part

$$\tilde{G}\circ\tilde{F} = \sigma_Z\circ {}^AG\circ\sigma_Y\circ {}^AF \quad ;$$

tout revient donc à établir l'identité $\sigma_Z\circ {}^A(\sigma_Z)\circ {}^{A\otimes A}G = \sigma_Z\circ {}^AG\circ\sigma_Y$ -laquelle, aux notations près, a été démontrée au n° précédent.

§3 - Le groupe des transformations infinitésimales.

1 - Soient V une variété et A une algèbre locale. On désignera par D l'algèbre associative des fonctions(réelles) différentiables sur V; alors l'algèbre des fonctions à valeurs dans A s'identifie canoniquement à $D\otimes A$, et l'application $a \rightarrow a_o$ = partie finie de a, de A dans R, s'étend en un homom. $\mathcal{E}$ de $D\otimes A$ sur D, que nous qualifierons de canonique.

Soit alors F une transf.inf. d'espèce A de V; à $f\in D$ associons l'élément

$$\phi(f) = {}^Af\circ F$$

dX

de $D \otimes A$; on définit ainsi une application ϕ de D dans $D \otimes A$, qui est évidemment un <u>homomorphisme</u> d'algèbres, et qui, composée avec l'homom. canonique de $D \otimes A$ sur D, se réduit à l'identité:

(1) $$\varepsilon \circ \phi = 1.$$

Il est clair réciproquement que tout homom. ϕ de D dans $D \otimes A$ vérifiant (1) provient d'une transf.inf. F, le A-point $F(x)$ étant l'homom. $f \to \phi(f)(x)$ de D dans ~~$D\otimes A$~~. A.

2 - Soit Γ l'ensemble des homom. de D dans $D \otimes A$ vérifiant (1); comme Γ est en correspondance avec les transf.inf. de V, on a sur Γ une loi de composition, que nous allons calculer. Soient F, G des transf.inf., H leur "composée" et considérons les homom. ϕ, ψ et Θ correspondants; on a

$$\Theta(f) = {}^A f \circ H = {}^A f \circ \sigma_V \circ {}^A G \circ F = \sigma \circ {}^{A\otimes A} f \circ {}^A G \circ F = \sigma \circ {}^A({}^A f \circ G) \circ F$$

où σ est l'homom. canonique $A \otimes A \to A$; donc finalement

$$\Theta(f) = \sigma \circ {}^A(\psi(f)) \circ F \quad .$$

Prenons alors une base (a_i) de A ; on aura des relations de la forme

$$\phi : \quad f \to X^i(f) \otimes a_i$$
$$\psi : \quad f \to Y^j(f) \otimes a_j$$

où les X^i, Y^j sont des endomorphismes du vectoriel D, d'où ${}^A(\psi(f)) = {}^A(Y^j(f)) \otimes a_j$ en sorte que ${}^A(\psi(f)) \circ F = ({}^A(Y^j(f)) \circ F) \otimes a_j = X^i Y^j(f) \otimes a_i \otimes a_j$; composant avec σ on trouve le résultat cherché, à savoir

$$\Theta : \quad f \to X^i Y^j(f) \otimes a_i a_j \quad .$$

En d'autres termes, on voit que <u>si l'on identifie toute application linéaire $f \to X^i(f) \otimes a_i$ de D dans $D \otimes A$ à l'élément $X^i \otimes a_i$ de $\mathcal{L}(D) \otimes A$, alors la loi de composition des transf.inf. se transforme en l'opposée de la loi de multiplication de l'algèbre $\mathcal{L}(D) \otimes A$.</u> (Le fait qu'on trouve l'<u>opposée</u> de la multiplication est évident pour des raisons fonctorielles...)

On peut encore interpréter comme suit la loi de composition sur Γ. Soit ϕ une application linéaire de D dans $D\otimes A$; elle se prolonge en une application $\phi\otimes 1$ de $D\otimes A$ ~~X~~ dans $D\otimes A\otimes A$; d'autre part l'homom. σ de $A\otimes A$ dans A se prolonge en un homom. $1\otimes\sigma$ de $D\otimes A\otimes A$ dans $D\otimes A$; posons

$$\tilde{\phi} = (1\otimes\sigma)\circ(\phi\otimes 1) \ ;$$

c'est une application linéaire de $D\otimes A$ dans $D\otimes A$; cela dit, l'application $\phi \rightarrow \tilde{\phi}$ de Γ dans $\mathcal{L}(D\otimes A)$ transforme la multiplication dans Γ en l'opposée de la multiplication dans $\mathcal{L}(D\otimes A)$.

3 - Nous allons maintenant démontrer que Γ est un groupe. Pour cela, nous allons d'abord donner une caractérisation des éléments de $\mathcal{L}(D\otimes A)$ qui correspondent à des éléments de Γ.

Soit ϕ une application linéaire de D dans $D\otimes A$, et $\tilde{\phi}$ l'application correspondant de $D\otimes A$ dans $D\otimes A$; alors, pour que ϕ soit un homom. d'algèbre il faut et il suffit que $\tilde{\phi}$ soit un endomorphisme de l'algèbre $D\otimes A$. Désignons en effet, pour simplifier les notations, par

$$\sigma_D : f\otimes a\otimes a' \rightarrow f\otimes aa'$$

l'homom. $1\otimes\sigma$ de l'algèbre $D\otimes A\otimes A$ dans l'algèbre $D\otimes A$; $\tilde{\phi}$ est alors défini par la condition que

$$\tilde{\phi}(f\otimes a) = \sigma_D(\phi(f)\otimes a)$$

en sorte qu'on a les identités

$$\tilde{\phi}((f\otimes a).(g\otimes b)) = \sigma_D(\phi(fg)\otimes ab)$$

$$\tilde{\phi}(f\otimes a).\tilde{\phi}(g\otimes b) = \sigma_D(\phi(f)\otimes a).\sigma_D(\phi(g)\otimes b)$$

$$= \sigma_D(\phi(f)\phi(g)\otimes ab) \quad ;$$

notre assertion résulte évidemment de là .

(Noter que le calcul précédent fait intervenir, sans en avoir l'air, la commutativité de A; on utilise en effet la relation $\sigma_D(f'\otimes a)\sigma_D(g'\otimes b) = \sigma_D(f'g'\otimes ab)$ pour $f', g' \in D\otimes A$; pour la vérifier on peut supposer f' =

$f' = f\otimes a'$, $g' = g\otimes b'$ avec $f,g\in D$, $a',b'\in A$; on a alors à vérifier la relation $(f\otimes a'a).(g\otimes b'b) = fg\otimes a'b'ab$ ...)

Il résulte évidemment de là que, pour qu'une application ϕ de D dans $D\otimes A$ soit dans Γ, il est nécessaire et suffisant que $\tilde{\phi}$ soit un endomorphisme de l'algèbre $D\otimes A$ et qu'en outre (condition (1)) ϕ soit de la forme

(2) $$\phi(f) = f\otimes 1 - X(f)$$

où X est une application de D dans le sous-espace $D\otimes I$ de $D\otimes A$, où I est l'idéal maximal de A.

Pour établir que Γ est un groupe, i.e. que tout $\phi\in\Gamma$ admet un inverse dans Γ, écrivons (2) sous la forme $\phi = E-X$ où E est l'application $f\to f\otimes 1$; dans $\mathcal{L}(D\otimes A)$ on aura la relation $\tilde{\phi} = \tilde{E} - \tilde{X}$; mais il est clair que $\tilde{E}$ est l'<u>élément unité</u> de $\mathcal{L}(D\otimes A)$; d'autre part, comme X applique D dans $D\otimes I$, X^k (puissance calculée à partir de $(\tilde{X})^k$) applique D dans $D\otimes I^k$, en sorte que $\tilde{X}$ <u>est nilpotent</u> . Par suite, $\tilde{\phi}$ est inversible dans $\mathcal{L}(D\otimes A)$; soit ψ l'application de D dans $D\otimes A$ telle que $\tilde{\psi}$ soit inverse de $\tilde{\phi}$. Comme $\tilde{\phi}$ est un endomorphisme de l'algèbre $D\otimes A$, il en est de même de $\tilde{\psi}$; de plus la formule (2) donne $\tilde{\psi} = \tilde{E} + \sum_{k\geqslant 1} \tilde{X}^k$, d'où résulte que pour tout $f\in D$ on a

$$\psi(f) \equiv f\otimes 1 \pmod{D\otimes I} ;$$

par suite, ψ est dans Γ et notre assertion est démontrée.

4 - Revenons aux transf. inf. d'espèce A d'une variété V. D'après le résultat précédent, toute transf. inf. d'espèce A de V, soit F, admet une "inverse" G au sens de la "composition" des transf?inf. ; or celle-ci correspond (§2, n°5) à la composition (usuelle) des extensions canoniques $\tilde{F}$, $\tilde{G}$ de F, G à ^AV . On en conclut que <u>l'extension canonique</u> $\tilde{F}$ <u>d'une transf. inf. d'espèce A de</u> V <u>est un automorphisme de la variété</u> ^AV, <u>l'automorphisme réciproque étant</u>

l'extension l'extension canonique de la transf.inf. "réciproque" de F.

Le résultat précédent s'étend trivialement aux applications de V dans ${}^AV$ qui sont proches d'un automorphisme de V ; une telle application s'obtient en effet en composant un autom. de V avec une transf.inf.

§4 - Relèvements canoniques.

1 - Soient P un fibré principal de base V et de groupe G, et F une application de V dans ${}^AV$. Un relèvement de F à P sera une application $\hat{F}$ de P dans ${}^AP$ vérifiant

(R 1) $\qquad {}^A\pi \circ \hat{F} = F \circ \pi \qquad (\pi = \text{projection } P \to V)$

(R 2) $\qquad \hat{F}(u^{\#}.g) = \hat{F}(u).g \qquad$ pour $u \in P$, $g \in G$.

Si alors E est un fibré de fibre L associé à P, et si l'on désigne par θ l'application structurale de $P \times L$ sur E (laquelle se prolonge en l'application structurale de ${}^AP \times {}^AL$ sur ${}^AE$: II,§5,n°2) on peut définir une application $\hat{F}$ de E dans ${}^AE$ par la condition que

$$\hat{F}(\theta(u,\xi)) = {}^A\theta(\hat{F}(u),\xi) \qquad \text{pour} \quad u \in P,\ \xi \in L \ ;$$

pour des raisons évidentes, on dira que c'est le relèvement de F à E associé au relèvement donné de F à P.

Il est clair que si F est proche d'une application f de V dans V, alors l'application $\hat{f}$ de P dans P (resp.E dans E) dont $\hat{F}$ est proche est un relèvement de f à P (resp.E). ~~EMXPAKXXKMXXAKX~~

2 - Soient P,V,G comme plus haut, F une application $V \to {}^AV$, et $\hat{F}$ un relèvement de F à P. D'après le §2,n°2 on a une extension canonique $\tilde{F}$: ${}^AV \to {}^AV$; et de même une extension canonique ~~XX~~ $\tilde{\hat{F}}$: ${}^AP \to {}^AP$; on va montrer que $\tilde{\hat{F}}$ est un relèvement de $\tilde{F}$ à ${}^AP$ (considéré comme fibré principal de base ${}^AV$). Soit en effet σ l'homom. canonique $A \otimes A \to A$; on a

$$\tilde{F} = \sigma_V \circ {}^AF \quad ; \quad \tilde{\hat{F}} = \sigma_P \circ {}^A(\hat{F}) \quad ;$$

cela étant, la relation (R 1) donne par prolongement et composition avec σ_V

$$\sigma_V \circ {}^{A\otimes A}\pi \circ {}^A(\hat{F}) = \tilde{F} \circ {}^A\pi \quad ;$$

mais comme on a $\sigma_V \circ {}^{A\otimes A} = {}^A\pi \circ \sigma_P$ la relation précédente s'écrit ${}^A\pi \circ \tilde{\hat{F}} = \tilde{F} \circ {}^A\pi$, ce qui est la première condition des relèvements. Maintenant, ~~xx~~ (R 2) donne par prolongement ${}^A\hat{F}(u'.g') = {}^A\hat{F}(u').g'$ pour $u' \in {}^AP$, $g' \in {}^AG$; composant avec σ_P et tenant compte du fait qu'on a $\sigma_P(u''.g') = \sigma_P(u'').g'$ pour $u'' \in {}^{A\otimes A}P$, $g' \in {}^AG$ on trouve la seconde condition des relèvements.

On a bien entendu un résultat analogue pour les fibrés non principaux.

3 - Soient V,A et $F : V \to {}^AV$. Soit B une algèbre locale. Par prolongement on a une application ${}^BF$ de ${}^BV$ dans ${}^B({}^AV) = {}^{B\otimes A}V$; soit λ l'isomorphisme canonique $B\otimes A \to A\otimes B$; l'application

$$\hat{F} = \lambda_V \circ {}^BF$$

de ${}^BV$ dans ${}^A({}^BV) = {}^{A\otimes B}V$ est alors un relèvement, dit <u>canonique</u> , de F au fibré ${}^BV$ (la compatibilité avec le groupe structural sera établie plus loin)

4 - Les notations restant celles du n°3, considérons les extensions canoniques $\tilde{F}: {}^AV \to {}^AV$ et $\tilde{\hat{F}} : {}^A({}^BV) \to {}^A({}^BV)$; d'autre part, considérons le prolongement ${}^B(\tilde{F})$ de $\tilde{F}$ en une application de ${}^B({}^AV)$ dans ${}^B({}^AV)$; on va montrer que <u>modulo l'isomorphisme</u> λ <u>de</u> $B\otimes A$ <u>sur</u> $A\otimes B$ <u>les applications</u> $\tilde{\hat{F}}$ <u>et</u> ${}^B(\tilde{F})$ <u>sont identiques</u>. On a en effet $\tilde{F} = \sigma_V \circ {}^AF$ de sorte que

$${}^B(\tilde{F}) = {}^B(\sigma_V) \circ {}^{B\otimes A}F \quad ;$$

de façon analogue on a $\tilde{\hat{F}} = \sigma_{{}^BV} \circ {}^A(\hat{F}) = \sigma_{{}^BV} \circ {}^A(\lambda_V \circ {}^BF)$, i.e.

$$\tilde{\hat{F}} = \sigma_{{}^BV} \circ {}^A(\lambda_V) \circ {}^{A\otimes B}F \quad ;$$

tout revient donc à établir la relation

$$(1) \qquad \sigma_{{}^BV} \circ {}^A(\lambda_V) \circ {}^{A\otimes B}F = \lambda_V \circ {}^B(\sigma_V) \circ {}^{B\otimes A}F \circ (\lambda_V)^{-1} \quad ;$$

mais considérons l'isomorphisme

$$\mu \ : a\otimes b\otimes a' \to b\otimes a\otimes a'$$

de $A\otimes B\otimes A$ sur $B\otimes A\otimes A$; il est clair qu'on a

$$^{B\otimes A}F\circ(\lambda_V)^{-1} = \mu_V \circ {}^{A\otimes B}F$$

de sorte que pour établir (1) tout revient à prouver

$$\sigma_{B_V} \circ {}^A(\lambda_V) = \lambda_V \circ {}^B(\sigma_V)\circ\mu_V \quad ,$$

ce qui se fait trivialement en supposant V vectoriel.

5 - Soient V une variété, A,B,C trois algèbres locales, F une application de V dans ^AV. Soit $\hat{F}$ le relèvement canonique de F à ^BV, et $\hat{\hat{F}}$ le relèvement canonique de $\hat{F}$ à $^C(^BV) = {}^{C\otimes B}V$; alors $\hat{\hat{F}}$ <u>est le relèvement canonique de</u> F <u>à</u> $^{C\otimes B}V$. En effet, on a $\hat{F} = \lambda_V \circ {}^BF$ où λ est l'isomorphisme $B\otimes A \longrightarrow A\otimes B$; de même on a $\hat{\hat{F}} = \mu_{B_V} \circ {}^C(\hat{F}) = \mu_{B_V} \circ {}^C(\lambda_V)\circ {}^{C\otimes B}F$, où μ est l'isomorphisme $C\otimes A \longrightarrow A\otimes C$; mais si ν est l'isomorphisme $C\otimes B\otimes A \longrightarrow A\otimes C\otimes B$ le relèvement canonique de F à $^{C\otimes B}V$ est $\nu_V \circ {}^{C\otimes B}F$; donc tout revient à établir la relation

$$\nu_V = \mu_{B_V} \circ {}^C(\lambda_V)$$

ce qui est trivial pour V vectoriel.

6 - Soient F,G deux applications de V dans ^AV, H l'application "composée"; alors , pour toute algèbre locale B, le relèvement $\hat{H}$ de H à ^BV est "composé" des relèvements de F et G. En effet, en considérant les extensions canoniques, on a $\tilde{H} = \tilde{G}\circ\tilde{F}$ (§2,n°5) et d'autre part les extensions canoniques des relèvements s'identifient, modulo l'isomorphisme λ_V , aux B-prolongements de $\tilde{F},\tilde{G},\tilde{H}$ (n°4); notre assertion est donc évidente.

7 - Soit n la dimension de V, et posons $B = R_n^{(m)}$ (séries formelles modulo I^{m+1}) ; considérons le fibré principal $P^{(m)}(V)$ des repères d'ordre m sur V. Si u est un tel repère, d'origine $x\in V$, u est par définition un isomorphisme de B sur l'algèbre $D^{(m)}(V;x)$ des éléments de fonctions d'ordre m en x; u^{-1} est donc un B-point de V, qui est <u>générique</u> (par définition de ce mot).

Il est facile de voir qu'on définit de cette façon un isomorphisme de $P^{(m)}(V)$ ~~xxx~~ sur une sous-variété <u>ouverte</u> de ${}^{B}V$, et que, modulo cet isomorphisme, le groupe structural $G_n^{(m)}$ de $P^{(m)}(V)$, groupe des autom. de B, agit sur $P^{(m)}(V)$ par spécialisation .

8 - Soit alors F une application $V \to {}^{A}V$, proche d'un <u>automorphisme</u> f de V ; comme tout autom. de V transforme tout point générique de ${}^{B}V$ en un point générique, on voit que le relèvement canonique de F à ${}^{B}V$ définit, en s'induisant, un <u>relèvement canonique au fibré principal</u> $P^{(m)}(V)$ - le fait que ce relèvement vérifie effectivement la condition (R 2) du n°1 provient de ce que le relèvement $\hat{F}$ de F à ${}^{B}V$ est compatible, en un sens évident, avec les spécialisations; de façon précise, si σ est un homom. d'une algèbre locale B dans une algèbre locale C, et si l'on considère les relèvements canoniques de F à ${}^{B}V$ et ${}^{C}V$ on a la relation

$$\hat{\hat{F}} \circ \sigma_V = ({}^{A}\sigma)_V \circ \hat{F}$$

comme on le voit facilement.

Il s'ensuit aussi que, si C est une algèbre de rang $\leq m$, auquel cas ${}^{C}V$ s'identifie au fibré de fibre Hom(B,C) associé à $P^{(m)}(V)$, alors le relèvement canonique de F à ${}^{C}V$, défini directement au n°3, est identique au relèvement associé au relèvement canonique de F à $P^{(m)}(V)$.

Les résultats précédents permettent évidemment de définir des relèvements canoniques à tout espace fibré associé à un $P^{(m)}(V)$.

§5 - Eléments de sections d'un espace fibré.

1 - Etant donnée une application S d'une variété V dans une variété E, on appelle <u>partie principale d'ordre</u> m <u>de</u> S <u>en</u> $x \in V$ le $D^{(m)}(V;x)$-point de E, image par S du point $\underline{x}^{(m)}$ canoniquement proche de rang m de x ; on désigne par

$$S^{(m)}(x) = S(\underline{x}^{(m)})$$

cette partie principale.

Si $E = R$, $S^{(m)}(x)$ s'identifie à un élément de l'algèbre $\mathbb{D}^{(m)}(V;x)$ - à savoir, évidemment, à celui que nous avons déjà désigné par $S^{(m)}(x)$ au Chap.I, §6, n°8.

Plus généralement, si E est un vectoriel, de base (e_i), $S^{(m)}(x)$ s'identifie à un élément de $D^{(m)}(V;x) \otimes E$; si l'on pose $S(x) = S^i(x)e_i$ avec des $S^i \in D(V)$, on a évidemment $S^{(m)}(x) = (S^i)^{(m)}(x) \otimes e_i$.

2 - Supposons maintenant que E soit un fibré de base V et S une section de E au-dessus d'un voisinage de x; alors $S^{(m)}(x)$ s'appellera un <u>élément de section de</u> E <u>d'ordre</u> m <u>en</u> x ; l'ensemble des éléments de section d'ordre m en x sera désigné par $D^{(m)}_E(V;x)$, et la réunion de ces $D^{(m)}_E(V;x)$ par $D^{(m)}_E(V)$.

Si $E = V \times L$ est un fibré trivial on utilisera les notations $D^{(m)}_L(V;x)$ et $D^{(m)}_L(V)$. Pour $L = R$ on retrouve $D^{(m)}(V;x)$ et $D^{(m)}(V)$ modulo des identifications évidentes.

3 - Soit E un fibré de base V ; désignons par ${}^{(m)}V$ la variété prolongée d V relativement au système fibré d'algèbres locales $D^{(m)}(V)$, et par ${}^{(m)}E$ la variété prolongée de E relativement à l'image réciproque de ce système fibré par l'application π de E sur V (II, §6 et §9, n°2). L'application π se prolonge en une application ${}^{(m)}\pi$ de ${}^{(m)}E$ sur ${}^{(m)}V$.

Soit alors $S^{(m)}(x)$ un élément de $D^{(m)}_E(V)$, partie principale d'ordre m en x d'une section S autour de x. Comme $\pi \circ S = \imath$, application identique de V sur V, on a par prolongement ${}^{(m)}\pi \circ {}^{(m)}S = {}^{(m)}\imath$ = application identique de ${}^{(m)}V$, où ${}^{(m)}S$ est l'application de ${}^{(m)}V$ dans ${}^{(m)}E$ déduite de S par prolongement; mais comme on a évidemment $S^{(m)}(x) = {}^{(m)}S(\underline{x}^{(m)})$ on en conclut que l'élément $S^{(m)}(x)$ de ${}^{(m)}E$ se projette au point $\underline{x}^{(m)}$ de ${}^{(m)}V$.

Réciproquement considérons un élément de ${}^{(m)}E$ se projettant en $\underline{x}^{(m)}$, donc proche d'un $y \in E$ vérifiant $\pi(y) = x$. Cet élément est un homom. σ de $D^{(m)}(E;y)$ dans $D^{(m)}(V;x)$; le fait qu'il se projette en $\underline{x}^{(m)}$ exprime que, si on compose avec σ l'homom. $\pi^{(m)}(y)$ de $D^{(m)}(V;x)$ dans $D^{(m)}(E;y)$, on trouve l'autom. identique de $D^{(m)}(V;x)$. Pour montrer que σ est de la forme $S^{(m)}(x)$ on peut supposer, le problème étant local, que $E = V \times L$; comme alors, en posant $y = (x,\xi)$ ($\xi \in L$), l'algèbre $D^{(m)}(L;\xi)$ se plonge canoniquement dans $D^{(m)}(E;y)$ on voit que σ induit un homom. de $D^{(m)}(L;\xi)$ dans $D^{(m)}(V;x)$, lequel est évidemment la partie principale d'ordre m en x d'une application s de V dans L; la section S cherchée se construit alors à partir de l'application s.

En conséquence on voit que <u>l'ensemble $D^{(m)}_E(V)$ s'identifie canoniquement à l'ensemble des points de ${}^{(m)}E$ dont la projection est de la forme $\underline{x}^{(m)}$ pour un</u> $x \in V$.

On va en déduire l'existence sur $D^{(m)}_E(V)$ d'une structure de variété fibrée, structure d'ailleurs plus canulée qu'on ne pourrait le croire à première vue.

4 - Pour simplifier nous poserons

$$B = R^{(m)}_n ,$$

ou n est la dimension de V.

Prenons un $y' \in {}^{(m)}E$ se projettant en $\underline{x}^{(m)}$, et un repère $u \in P^{(m)}(V)$

d'origine x. Comme u est un isomorphisme $B \rightarrow D^{(m)}(V;x)$ et comme y' est un $D^{(m)}(V;x)$-point de E, y' s'obtient en spécialisant par u un B-point de E. Mais soit Q le fibré principal de base V et de groupe G auquel E est associé, et soit θ l'application structurale de Q L sur E; comme ${}^{B}E$ s'identifie, par ${}^{B}\theta$, au fibré de fibre ${}^{B}L$ associé à ${}^{B}Q$, le B-point en question est de la forme ${}^{B}\theta(v', \xi')$ avec $v' \in {}^{B}Q$, $\xi' \in {}^{B}L$; donc on a

$$(1) \qquad y' = u_E \circ {}^{B}\theta(v', \xi')$$

(la notation u_E n'est autre qu'une spécialisation de la notation σ_V ...); comme la projection de y' sur ${}^{(m)}V$ est évidemment $u_V \circ {}^{B}\pi(v')$, on voit que v' est arbitraire modulo la condition que sa projection sur ${}^{B}V$ soit un B-point <u>générique</u> (ceux-ci sont en effet précisément ~~de la forme $(u^{-1})_V(\underline{x}^{(m)})$~~ obtenus en transformant $\underline{x}^{(m)}$ par un isomorphisme de $D^{(m)}(V;x)$ sur B) et que v' étant choisi, le repère u correspondant est donné par la relation

$$(2) \qquad u_V \circ {}^{B}\pi(v') = \underline{x}^{(m)} \quad .$$

Considérons alors dans ${}^{B}Q$ l'ensemble R des v' qui se projettent en des points génériques de ${}^{B}V$; comme les points génériques de ${}^{B}V$ forment une sous-variété ouverte de ${}^{B}V$, d'ailleurs isomorphe canoniquement à $P^{(m)}(V)$, on voit que R est une sous-variété ouverte de ${}^{B}Q$, et peut être considéré comme fibré principal de base $P^{(m)}(V)$ et de groupe ${}^{B}G$. Nous allons montrer qu'on peut aussi considérer R comme un fibré principal de base V.

Tout d'abord, en composant les projections $R \rightarrow {}^{B}V$ et ${}^{B}V \rightarrow V$ on a une projection de R sur V. Prenons maintenant deux éléments v',v" de R se projettant au même point x de V; soient x' et x" leurs projections sur ${}^{B}V$; comme x' et x" sont génériques et proches de x, il existe un autom. α de B, i.e. un élément α du groupe structural $G_n^{(m)} = G(B)$ de $P^{(m)}(V)$, tel que $x" = \alpha_V^{-1}(x')$; il s'ensuit que v" et $\alpha_Q^{-1}(v')$ se projettent au <u>même</u>

point de $P^{(m)}(V)$; mais comme R est fibré principal de groupe ^BG et de base $P^{(m)}(V)$ cela équivaut à l'existence dans ^BG d'un g' tel que

(3) $$v'' = \alpha_Q^{-1}(v').g' \quad .$$

Il résulte évidemment de ce qui précède que l'on peut considérer R comme un fibré principal de base V, ayant pour groupe structural le ~~gr~~ produit direct $G(B)\times {}^BG$ <u>tordu</u> suivant la formule

(4) $$(\alpha, g').(\beta, h') = (\alpha\beta, \beta_G^{-1}(g').h')$$

et agissant sur R par la formule

(5) $$v'.(\alpha, g') = \alpha_Q^{-1}(v').g' \quad .$$

Soit alors y' un point de $D^{(m)}_E(V)$ correspondant, par les formules (1) et (2), à un couple $(v', \xi') \in R \times {}^BL$; désignons par φ l'application ainsi obtenue de $R\times {}^BL$ sur $D^{(m)}_E(V)$:

$$\varphi(v', \xi') = u_E \circ {}^B\theta(v', \xi') \qquad \text{avec} \quad u_V \circ {}^B\pi(v') = \underline{x}^{(m)} \quad ,$$

et cherchons à quelles conditions deux couples (v', ξ') et (v'', ξ'') conduisent au même y'. On doit déjà avoir évidemment une relation (3), d'où résulte que

$$^B\theta(v'', \xi'') = {}^B\theta(\alpha_Q^{-1}(v').g', \xi'') = {}^B\theta(\alpha_Q^{-1}(v'), g'^{-1}.\xi'')$$
$$= \alpha_E^{-1} \circ {}^B\theta(v', \alpha_L(g'^{-1}.\xi''))$$

et que par suite la condition cherchée s'écrit

$$^B\theta(v', \xi') = {}^B\theta(v', \alpha_L(g'^{-1}.\xi'')) \quad ;$$

mais comme $^B\theta$ est l'application structurale définissant ^BE comme fibré associé à ^BQ, la relation précédente équivaut à

$$\xi' = \alpha_L(g'^{-1}.\xi'') \quad .$$

Cela étant, faisons opérer le groupe structural de R sur ^BL à l'aide de la formule

(6) $$(\alpha, g').\xi' = \alpha_{\mathbb{L}}(g'^{-1}.\xi') ,$$

alors on voit que $D^{(m)}_{E}(V)$ s'identifie canoniquement au fibré de fibre ${}^{B}L$ associé au fibré principal R.

5 - Soit S une section (globale) de E ; il lui correspond une section

$$S^{(m)} : x \longrightarrow S^{(m)}(x)$$

de $D^{(m)}_{E}(V)$. D'autre part, S correspond à un homom. $S(v)$ de Q dans la fibre L ; nous allons calculer l'homom. de R dans ${}^{B}L$ qui correspond à $S^{(m)}$.

L'application $S(x)$ de V dans E est reliée à l'homom. $S(v)$ de Q dans L par la formule

$$S\circ\pi(v) = \theta(v, S(v)) \ ;$$

par prolongement il vient

$${}^{B}S\circ{}^{B}\pi(v') = {}^{B}\theta(v', {}^{B}S(v')) \quad ;$$

mais soit $v' \in R$, et $u \in P^{(m)}(V)$ donné par la relation (2); on a

$$\begin{aligned} {}^{B}S\circ{}^{B}\pi(v') &= {}^{B}S(u_V^{-1}(\underline{x}^{(m)})) \\ &= u_E^{-1}\circ{}^{(m)}S(\underline{x}^{(m)}) = u_E^{-1}\circ S^{(m)}(x) \end{aligned}$$

et par suite il vient

$$S^{(m)}(x) = u_E\circ{}^{B}\theta(v', {}^{B}S(v')) \quad ;$$

comme le second membre de cette relation fait intervenir l'application structurale de $R\times{}^{B}L$ sur $D^{(m)}_{E}(V)$, on parvient au résultat cherché, à savoir que l'homom. de R dans ${}^{B}L$ correspondant à la section $S^{(m)}$ de $D^{(m)}_{E}(V)$ n'est autre que l'application $v' \rightarrow {}^{B}S(v')$.

6 - Considérons en particulier le cas ou E est un produit direct $V\times L$, le fibré principal Q se réduisant à V et le groupe G à son élément neutre. L'espace $D^{(m)}_{L}(V)$ s'appelle alors l'espace fibré des éléments d'applications d'ordre m de V dans L. Si S est une section de E, on peut en effet écrire $S(x) = (x, s(x))$ ou s est une application de V dans L, et réciproquement;

comme, pour toute algèbre locale A, la variété ${}^{A}E$ s'identifie canoniquement à ${}^{A}V \times {}^{A}L$, on voit que $S(\underline{x}^{(m)})$ s'identifie au couple formé de $\underline{x}^{(m)}$ et de $s(\underline{x}^{(m)})$; nous conviendrons alors d'identifier le $D^{(m)}(V;x)$-point $S^{(m)}(x)$ de E au $D^{(m)}(V;x)$-point $s(\underline{x}^{(m)}) = s^{(m)}(x)$ de L, partie principale d'ordre m en x de l'application s de V dans L.

Les résultats du n°4 appliqués à ce cas particulier montrent que le fibré principal R de la théorie générale se réduit ici à $P^{(m)}(V)$, identifié à l'ensemble des $R_n^{(m)}$-points génériques de V, et que $D_L^{(m)}(V)$ <u>est le fibré associé à</u> $P^{(m)}(V)$ <u>ayant pour fibre la variété</u>

$$L_n^{(m)} = {}^{B}L \quad , \quad B = R_n^{(m)}$$

<u>des points d'espèce</u> $R_n^{(m)}$ <u>de L</u> ; le groupe structural $G_n^{(m)}$ de $P^{(m)}(V)$ agit sur $L_n^{(m)}$ par spécialisation (i.e. par les automorphismes α_L de $L_n^{(m)}$, α automorphisme de $R_n^{(m)}$). L'application structurale de $P^{(m)}(V) \times L_n^{(m)}$ sur $D_L^{(m)}(V)$ consiste évidemment à associer, à un repère u d'origine $x \in V$ et à un $R_n^{(m)}$-point ξ' de L, le $D^{(m)}(V;x)$-point $u_L(\xi')$ de L, considéré comme partie principale d'ordre m en x d'une application de V dans L.

Soient s une application de V dans L, et S la section correspondante de E ; l'homom. de Q = V dans L qui lui correspond est évidemment l'application s elle-même; d'après le n°5, l'homom. de $R = P^{(m)}(V)$ dans $L_n^{(m)}$ qui correspond à la section $S^{(m)}$ de $D_E^{(m)}(V)$ est donc $u \to {}^{B}s(u)$ modulo l'injection canonique de $P^{(m)}(V)$ dans ${}^{B}V$; autrement dit, si l'on désigne par ι cette injection canonique, et par $s^{(m)}$ la section de $D_L^{(m)}(V)$ correspondant à l'application s, on voit que celle-ci est définie par l'homom.

$$u \to {}^{B}s \circ \iota\,(u) \qquad (B = R_n^{(m)})$$

de $P^{(m)}(V)$ dans $L_n^{(m)}$.

7 - Un autre cas important est celui ou E est associé à un fibré principal $Q = P^{(r)}(V)$. On constate alors que $D^{(m)}_E(V)$ peut être considéré comme un fibré associé à $P^{(m+r)}(V)$. La démonstration détaillée de ce fait ne pouvant s'exposer, malheureusement, que par l'A.Q.T.P.T.T. (= âne qui trotte pendant un temps transfini) et ne conduisant du reste pas à des résultats très intuitifs, nous nous bornerons ici à donner des explications sommaires.

Pour simplifier les notations nous poserons

$$B = R^{(m)}_n \quad , \quad C = R^{(r)}_n \quad , \quad A = R^{(m+r)}_n$$

ou n est la dimension de V.

Le fibré principal Q s'identifie alors, par une injection $\imath$, à l'ensemble des points génériques de ${}^C V$. Donc, ${}^B Q$ s'identifie par ${}^B \imath$ à l'ensemble des $B \otimes C$-points de V dont la projection sur ${}^B V$ est générique. Par suite le fibré principal R de la théorie générale s'identifie à l'ensemble des $B \otimes C$-points de V dont les projections sur ${}^B V$ et ${}^C V$ sont génériques ; un tel point pourrait s'appeler bi-générique . Noter que les projections de ${}^{B \otimes C} V$ sur ${}^B V$ et ${}^C V$ s'obtiennent, par spécialisation, à partir des homom. $b \otimes c \to bc_o$ et $b \otimes c \to b_o c$ de $B \otimes C$ sur B et C.

Si l'on identifie comme il vient d'être dit R à une partie de ${}^{B \otimes C} V$, on constate facilement que le groupe structural de R opère comme suit. Ce groupe H est le produit tordu $G(B) \times {}^B G(C)$, G(C) groupe des autom. de C, i.e. groupe structural de Q; or comme G(C) agit de façon évidente sur C, on peut identifier ${}^B G(C)$ à un groupe d'autom. de ${}^B C = B \otimes C$; de même G(B) s'identifie à un groupe d'automorphismes de $B \otimes C$ (on associe à l'autom. β de B l'autom. $\beta \otimes 1$ de $B \otimes C$); de cette façon, il se trouve que H devient un groupe d'automorphismes de $B \otimes C$; cela dit, le groupe H agit sur R par spécialisation (i.e. l'autom. $x' \to x'.h$ de R défini par un $h \in H$, considéré comme autom. de $B \otimes C$

est la restriction à R de l'autom. $x' \to h_V^{-1}(x')$ de $B\otimes C_V$).

D'autre part, l'algèbre $B\otimes C$ étant de rang $m+r$, $B\otimes C_V$ est le fibré de fibre $\mathrm{Hom}(A, B\otimes C)$ associé à $P^{(m+r)}(V)$, l'application structurale corres-pondante consistant à associer à un $w \in P^{(m+r)}(V)$, isomorphisme ~~XXXXX XXXXXXXXXXXX~~ de A sur une algèbre $D^{(m+r)}(V;x)$, et à un homom. ξ de A dans $B\otimes C$, le $B\otimes C$-point de V défini par l'homom. $\xi \circ w^{-1}$ de $D^{(m+r)}(V;x)$ dans $B\otimes C$. Bien entendu, le groupe structural $G(A)$ de $P^{(m+r)}(V)$ agit sur la variété $\mathrm{Hom}(A, B\otimes C)$ de façon évidente, i.e. par composition à droite des homom. de A dans $B\otimes C$ avec les autom. de A ; d'autre part, il y a lieu de remarquer que le groupe $G(B\otimes C)$, et à fortiori son sous-groupe H, agit aussi sur $\mathrm{Hom}(A, B\otimes C)$, par composition à gauche ; de sorte que <u>les opéra-tions de</u> H <u>sur</u> $\mathrm{Hom}(A, B\otimes C)$ <u>commutent à celles de</u> $G(A)$: ce qui explique pou-quoi H, et plus généralement $G(B\otimes C)$, agit de façon naturelle sur $B\otimes C_V$.

Ceci fait, il est facile de voir que R <u>lui-même apparait comme fibré associé à</u> $P^{(m+r)}(V)$, la fibre type étant la variété $H_n^{(m,r)}$ des homom. <u>bi-génériques</u> de A dans $B\otimes C$; on appelle ainsi les homom. qui, composés avec l'homom. canonique de $B\otimes C$ sur B (resp. C), appliquent A <u>sur</u> B (resp. C) - par passage au quotient modulo I^{m+1} (resp. I^{r+1}), I idéal maximal de A, ces homom. conduisent à des automorphismes de B (resp. C). Bien entendu il est clair que la sous-variété (ouverte!) $H_n^{(m,r)}$ de $\mathrm{Hom}(A, B\otimes C)$ est invariante aussi bien par H que par $G(A)$, et de plus que H agit de façon <u>simplement transitive</u> sur $H_n^{(m,r)}$ - ceci parce qu'on sait à priori que R est fibré <u>principal</u> de groupe H (mais il ne semble pas facile d'établir le résultat en question de façon purement algébrique); et si l'on considè-re R comme fibré associé à $P^{(m+r)}(V)$, la structure de fibré principal de R provient précisément du fait précédent et de ce que le groupe H est compa tible, sur la fibre type $H_n^{(m,r)}$, avec le groupe structural $G(A)$.

Pour montrer que $D_E^{(m)}(V)$ est associé à $P^{(m+r)}(V)$, on est alors conduit à un problème de purs espaces fibrés, à savoir: soit $P = P^{(m+r)}(V)$ un fibré principal de base V et de groupe $\Sigma = G(A)$; soit $X = H_n^{(m,r)}$ une variété sur laquelle Σ opère à gauche, et sur laquelle un groupe H opère à droite (de sorte que les opérations de H commutent à celles de Σ) et de façon simplement transitive; soit R le fibré de fibre X associé à P, et considérons-le comme fibré principal de groupe H ; alors il s'agit de montrer que tout fibré associé à R est canoniquement un fibré associé à P. Ce problème se résoud de façon pratiquement triviale; il est néammoins utile d'observer que ce changement de structure change aussi la fibre-type . En effet, soit L la fibre-type du fibré E associé à R et soient θ et φ les applications structurales de $R \times L$ sur E et de $P \times X$ sur R ; on a alors une application

$$(p, \xi, \lambda) \rightarrow \theta(\varphi(p, \xi), \lambda)$$

de $P \times X \times L$ sur E , et l'on vérifie immédiatement que, p étant donné, les éléments de $X \times L$ conduisant au même élément de E que le couple (ξ, λ) sont donnés par la formule $(\xi.h, h^{-1}.\lambda)$; autrement dit, E apparait bien comme fibré associé à P, mais la fibre-type est le quotient de la variété $X \times L$ par la relation d'équivalence $(\xi, \lambda) \sim (\xi.h, h^{-1}.\lambda)$; vu que H est simplement transitif sur X, ce quotient s'identifie à L, mais pas de façon canonique (y compris dans le cas particulier dont nous sommes partis)!

Pour obtenir des résultats complets, il faudrait évidemment dévisser dans le cas des espaces $D_E^{(m)}(V)$ la construction générale qu'on vient d'expliquer. Le rédacteur propose (et pas à la légère) l'attribution d'une médaille en chocolat à celui de ses successeurs qui parviendra à le faire de façon claire et intuitive.

§6 - Transformée d'une section par un A-automorphisme.

Commentaire - Bien que la notation θ_F ne soit pas utilisée dans ce § (ceci parce que le rédacteur n'entend pas supporter les conséquences d'un péché originel qu'il n'a pas commis lui-même), il est bon de se souvenir qu'il sera constamment question ici de ces opérateurs...

1 - Rappelons qu'on appelle A-automorphisme d'une variété V toute application F de V dans ${}^AV$, proche d'un autom. de V ; qu'un tel A-automorphisme admet une extension canonique $\tilde{F}$, autom. de ${}^AV$; que si $\hat{F}$ est un relèvement de F à un fibré E de base V, alors l'extension canonique de $\hat{F}$ est aussi un relèvement de $\tilde{F}$. (Cf.§4).

Etant donnée une section S d'un fibré E de base V, et un relèvement $\hat{F}$ de F à E, on appellera <u>transformée de</u> S <u>par</u> F l'application

(1) $$S^F = \tilde{\hat{F}}^{-1} \circ {}^AS \circ F$$

de V dans ${}^AE$; c'est évidemment une <u>section de</u> ${}^AE$ <u>au-dessus de</u> V.

2 - Si E est le fibré de fibre L associé à un fibré principal P de base V et de groupe G, la section S(x) de E correspond à un homom. S(u) de P dans L. D'autre part, θ désignant l'application structurale $P \times L \rightarrow E$, on sait (II, Appendice) que la partie de ${}^AE$ située au-dessus de V s'identifie canoniquement au fibré de fibre ${}^AL$ associé à P, l'application structurale correspondante étant $(u, \xi') \rightarrow {}^A\theta(u, \xi')$, et G opérant sur ${}^AL$ par prolongement. Il s'ensuit que la section S^F correspond à un homom. de P dans ${}^AL$, que nous noterons $S^F(u)$ et que nous allons calculer en supposant le relèvement $\hat{F} = \hat{F}_E$ de F à E associé à un relèvement $\hat{F}_P$ de F à P. Nous allons voir que cet homom. n'est autre que

(2) $$u \rightarrow {}^AS \circ \hat{F}_P(u) \quad .$$

On a en effet la relation

$$S\circ\pi(u) = \theta(u,S(u))$$

d'ou par prolongement

$${}^{A}S\circ{}^{A}\pi\circ\hat{F}_P(u) = {}^{A}\theta(\hat{F}_P(u),{}^{A}S\circ\hat{F}_P(u)) \quad ;$$

mais les relèvements considérés de F étant associés on a l'identité

$${}^{A}\theta(\tilde{\hat{F}}_P(u'),\xi') = \tilde{\hat{F}}_E\circ{}^{A}\theta(u',\xi')$$

de sorte qu'il vient

$$\tilde{\hat{F}}_E^{-1}\circ{}^{A}S\circ{}^{A}\pi\circ\hat{F}_P(u) = {}^{A}\theta(u,{}^{A}S\circ\hat{F}_P(u)) \quad ;$$

comme ${}^{A}\pi\circ\hat{F}_P = F\circ\pi$ on trouve donc

$$S^F\circ\pi(u) = {}^{A}\theta(u,{}^{A}S\circ\hat{F}_P(u))$$

ce qui achève la démonstration.

3 - Soient F,G deux A-autom. de V, $H = G_*F$ le A-autom. "composé" , $\hat{F},\hat{G}$ des relèvements à P, $\hat{H} = \hat{G}_*\hat{F}$ le relèvement "composé" de H. Soit S un homom. de P dans L; on en déduit un homom. S^G de P dans ${}^{A}L$, puis un homom. $(S^G)^F$ de P dans ${}^{A\otimes A}L$; on va établir la relation

(3) $$S^{G_*F} = \sigma_L\circ(S^G)^F$$

où σ est l'homom. canonique $A\otimes A \longrightarrow A$.

On a en effet par hypothèse (§2,p.4,éq.(1))

$$\hat{H} = \sigma_P\circ{}^{A}(\hat{G})\circ\hat{F}$$

et par suite

$$S^H = {}^{A}S\circ\sigma_P\circ{}^{A}(\hat{G})\circ\hat{F} \quad ;$$

d'autre part

$$\sigma_L\circ(S^G)^F = \sigma_L\circ{}^{A}(S^G)\circ\hat{F} = \sigma_L\circ{}^{A\otimes A}S\circ{}^{A}(\hat{G})\circ\hat{F} \quad ;$$

tout revient donc à établir l'identité

$${}^{A}S\circ\sigma_P = \sigma_L\circ{}^{A}\ {}^{A}S \quad ,$$

laquelle résulte~~t~~ du principe de compatibilité des prolongements et des spécialisations.

4 - Prenons par exemple pour fibré une variété ${}^B V$, et pour $\hat{F}$ le relèvement canonique de F, donné (§4,n°3) par

(4) $$\hat{F} = \lambda_V \circ {}^B F$$

ou λ est l'isomorphisme canonique $B \otimes A \longrightarrow A \otimes B$. On peut alors définir G^F pour toute section G de V, i.e. pour toute transf.inf. d'espèce B de V; G^F est une section de ${}^A({}^B V) = {}^{A \otimes B}V$ au-dessus de V, i.e. une transf.inf. d'espèce $A \otimes B$ de V (du reste pas quelconque, car il faut considérer ${}^{A \otimes B}V$ comme fibré sur ${}^A V$, en sorte que $G^F(x)$ est un $A \otimes B$-point dont la projection sur ${}^A V$, déduite de l'homom. $a \otimes b \longrightarrow ab_o$, doit être x). Il est facile d'en faire le calcul complet à l'aide de la formule (1). Pour cela, rappelons (§4,n°4) que l'extension canonique de $\hat{F}$ est identique, modulo l'isomorphisme λ_V de ${}^{B \otimes A}V$ sur ${}^{A \otimes B}V$, au B-prolongement de l'extension canonique $\tilde{F}$ de F ; on a donc la formule

$$\tilde{\hat{F}}^{-1} = \lambda_V \circ {}^B(\tilde{F}^{-1}) \circ \lambda_V^{-1}$$

et comme $\tilde{F}^{-1}$ est l'extension canonique de ~~XX~~ l'application "inverse" $\overset{-1}{F}$, donc est donnée par $\sigma_V \circ {}^A(\overset{-1}{F})$ ou σ est l'homom. $A \otimes A \longrightarrow A$, il vient

$$G^F = \lambda_V \circ {}^B\sigma_V \circ {}^{B \otimes A}(\overset{-1}{F}) \circ \lambda_V^{-1} \circ {}^A G \circ F \quad ;$$

mais d'après le principe de compatibilité des prolongements et spécialisations on a

$$^{B \otimes A}(\overset{-1}{F}) \circ \lambda_V^{-1} = \lambda_{{}^A V}^{-1} \circ {}^{A \otimes B}(\overset{-1}{F}) \quad ;$$

d'autre part il est visible que

$$\lambda_V \circ {}^B\sigma_V \circ \lambda_{{}^A V}^{-1} = \mu_V$$

ou μ est l'homom. canonique

$$\mu : a \otimes b \otimes a' \longrightarrow aa' \otimes b \; ;$$

le résultat final est donc la formule

(5) $$G^F = \mu_V \circ {}^{A \otimes B}(\overset{-1}{F}) \circ {}^A G \circ F \quad .$$

<u>Exercice</u> - Montrer que si $A = B$, et si on spécialise G^F par $a \otimes a' \rightarrow aa'$ on retrouve $F^{-1}{}_* G_* F$ (i.e. la transformée de G par F au sens du groupe des transf. inf. d'espèce A de V). Ça mériterait peut-être d'être dans le texte?

5 - Soit maintenant un fibré E de fibre L, associé à un fibré principal Q de base V et de groupe G ; supposons défini un relèvement $\hat{F}$ de F à Q . On a alors un relèvement de F à E, ce qui permet de former S^F pour toute section S de E. D'autre part, nous allons voir qu'on peut déduire canoniquement de $\hat{F}$ un relèvement de F au fibré $D^{(m)}_E(V)$; ceci nous permettra de former aussi bien $(S^{(m)})^F$ que $(S^F)^{(m)}$; nous verrons que ces sections s'identifient canoniquement (ce sont des sections de fibrés isomorphes, mais non identiques comme on va le voir). Le restant du § sera consacré à la démonstration de ce résultat, conjecturé par Weil dans sa rédaction(p. 116, N.B.).

On va tout d'abord expliquer comment on peut obtenir un relèvement de F à $D^{(m)}_E(V)$. Posons

$$B = R^{(m)}_n \quad , \quad n = \dim(V) \ ;$$

on a vu au §5,n°4 que $D^{(m)}_E(V)$ est un fibré associé à un fibré principal R construit comme suit: R est l'ensemble des points de ${}^BQ$ se projetant en des points génériques de ${}^BV$; le groupe structural H de R est le produit direct $G(B) \times {}^BG$ <u>tordu</u> , H agissant sur R par la formule

$$v'.(\beta, g') = \beta_Q^{-1}(v').g'$$

$(v' \in {}^BQ, \beta \in G(B), g' \in {}^BG)$; enfin, si L est la fibre type de E, $D^{(m)}_E$ a pour fibre type ${}^BL$, H agissant sur ${}^BL$ d'une façon que nous n'écrirons pas.

Cela dit, soit $\hat{F}$ le relèvement donné de F à Q; pour définir un relèvemen à $D^{(m)}_E(V)$ il suffit de définir un relèvement à R, ce que nous allons faire. Nous supposerons bien entendu que le relèvement à Q du A-automorphisme F de V est aussi un A-automorphisme de Q (ce qui résulte probablement de la défi

 80

nition?). Cela étant, le A-autom. $\hat{F}$ admet un relèvement canonique $\hat{\hat{F}}$ à ${}^{B}Q$; et si l'on désigne par $\hat{f}$ l'autom. de Q dont $\hat{F}$ est proche, on sait que $\hat{\hat{F}}$ est proche du relèvement canonique $\hat{\hat{f}} = {}^{B}(\hat{f})$ de $\hat{f}$ à ${}^{B}Q$; comme R est une sous-variété ouverte de ${}^{B}Q$, on aura par induction un A-autom. de R si l'on montre que R est stable par $\hat{\hat{f}}$. Mais si f est l'autom. de V dont F est proche il est clair que $\hat{\hat{f}}$ est un relèvement à ${}^{B}Q$ de ${}^{B}f$, et comme ${}^{B}f$ laisse invariant l'ensemble des points <u>génériques</u> de ${}^{B}V$ (ceci parce que f est un <u>automorphisme</u> de V) il est clair que tout marche bien.

On obtient ainsi, en se restreignant à R, un A-autom. de la <u>variété</u> R ; il faudrait encore démontrer que c'est un <u>relèvement</u> de F à R considéré comme fibré principal sur V ; c'est facile (mais non trivial si l'on ne veut pas faire d'escroquerie), et repose essentiellement sur l'existence d'un magnifique diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccccc} R & \longrightarrow & {}^{B}Q & \longrightarrow & Q \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ P^{(m)}(V) & \longrightarrow & {}^{B}V & \longrightarrow & V \end{array}$$

- $P^{(m)}(V)$ apparait modulo son identification avec l'ensemble des points génériques de ${}^{B}V$.

Nous allons maintenant démontrer l'identité $(S^{F})^{(m)} = (S^{(m)})^{F}$ annoncée. Pour cela, nous utiliserons, pour définir les sections, le point de vue " homom. du fibré principal dans la fibre-type".

Soit $v \to S(v)$ un homom. de Q dans L ; nous savons (§5,n°5) que $S^{(m)}$ correspond, modulo l'injection ι_R de R dans ${}^{B}Q$, à l'homom. $v' \to {}^{B}S(v')$ de R dans ${}^{B}L$; et nous savons que S^{F} correspond à l'homom. $v \to {}^{A}S\circ\hat{F}(v)$ dans ${}^{A}L$. En combinant ces deux résultats on voit donc que:

à $(S^{F})^{(m)}$ correspond l'homom. ${}^{B}({}^{A}S\circ\hat{F})\circ\iota_R$ de R dans ${}^{B\otimes A}L$

à $(S^{(m)})^{F}$ correspond l'homom. ${}^{A}({}^{B}S\circ\iota_R)\circ\hat{\hat{F}}$ de R dans ${}^{A\otimes B}L$.

Cela dit, et quoiqu'il en soit, nous allons démontrer que ces deux homom. sont identiques modulo l'isomorphisme canonique λ de $B\otimes A$ sur $A\otimes B$. Tout revient évidemment à établir l'identité

$$\lambda_L \circ {}^{B\otimes A}S \circ {}^{B}(\hat{F}) \circ \nu_R = {}^{A\otimes B}S \circ {}^{A}(\nu_R) \circ \hat{\hat{F}} \quad .$$

Etant donné que le principe de compatibilité des prolongements et des spécialisations donne $\lambda_L \circ {}^{B\otimes A}S = {}^{A\otimes B}S \circ \lambda_Q$ tout revient à établir

$$\lambda_Q \circ {}^{B}(\hat{F}) \circ \nu_R = {}^{A}(\nu_R) \circ \hat{\hat{F}} \quad ;$$

mais cela est trivial, puisque le relèvement canonique $\hat{\hat{F}}$ de $\hat{F}$ à ${}^{B}Q$ est $\lambda_Q \circ {}^{B}(\hat{F})$, et puisque, R s'injectant dans ${}^{B}Q$ par ν_R, ${}^{A}R$ s'injecte dans $A\otimes B_Q$ par ${}^{A}(\nu_R)$!

6 - Le cas le plus important est celui où $Q = P^{(r)}(V)$ et où l'on prend pour $\hat{F}$ le relèvement canonique de F. On est alors amené à se poser la question suivante: on sait (§5,n°7) que dans ce cas on peut considérer $D^{(m)}_{E}(V)$ soit comme fibré associé à R, soit comme fibré associé à $P^{(m+r)}(V)$; d'où à priori deux méthodes pour relever F à $D^{(m)}_{E}(V)$; donnent-elles le même résultat?

La réponse est bien entendu affirmative. Tout d'abord, il est trivial de vérifier que tout revient à montrer que le relèvement construit plus haut à R est le même que celui qu'on obtiendrait en considérant R comme fibré associé à $P^{(m+r)}(V)$. Or le relèvement à R a été défini comme suit: on forme le relèvement $\hat{F}$ de F à Q puis le relèvement canonique $\hat{\hat{F}}$ dudit à ${}^{B}Q$, puis on s'induit dans R. Donc tout revient à établir que le relèvement $\hat{\hat{F}}$ à ${}^{B}Q$ est identique à celui qu'on obtiendrait en considérant ${}^{B}Q$ comme fibré associé à $P^{(m+r)}(V)$. Mais posons $C = R^{(r)}_{n}$ le relèvement à Q s'obtient en relevant F à ${}^{C}V$ puis en injectant Q dans ${}^{C}V$; d'autre part, le relèvement canonique à ${}^{B}Q$ considéré comme associé à $P^{(m+r)}(V)$ s'obtient en relevant F à ${}^{B}\otimes{}^{C}V$ puis en injectant ${}^{B}Q$ dans cette variété. Cela étant il est clair que tout revient à établir ce qui suit: si l'on relève canoniquement à ${}^{B}({}^{C}V) = {}^{B}\otimes{}^{C}V$ le relèvement canonique de F à ${}^{C}V$, on obtient le relèvement canonique de F à ${}^{B}\otimes{}^{C}V$. Or cela a été établi au §4,n°5 .

7 - Pour terminer, en beauté, on va donner une démonstration triviale mais malheureusement pas encore correcte de la formule $(S^{(m)})^F = (S^F)^{(m)}$.

Tout d'abord considérons la variété prolongée ${}^{(m)}V$ construite à l'aide du système fibré des algèbres locales $D^{(m)}(V;x)$; c'est le fibré de fibre $Hom(B,B)$, $B = R_n^{(m)}$, associé à $P^{(m)}(V)$; l'application structurale associe à un repère u de rang m en x, isomorphisme de ${}^{(m)}$~~EXXX(XXX)~~ B sur $D^{(m)}(V;x)$ et à un homom. ξ de B dans B, le $D^{(m)}(V;x)$-point $\xi \circ u^{-1}$ de V ; par suite on a un relèvement canonique de F à ${}^{(m)}V$, ce qui permet de définir G^F pour toute section G de ${}^{(m)}V$; et en particulier pour la section <u>canonique</u>

$$\phi_m : x \to \underline{\underline{x}}^{(m)} .$$

Nous allons voir que celle-ci est <u>invariante par</u> F .

Considérons en effet l'homom. de $P^{(m)}(V)$ dans $Hom(B,B)$ qui correspond à ϕ_m ;il est assez clair qu'il applique $P^{(m)}(V)$ sur l'élément neutre de $Hom(B,B)$; vu la formule générale $S^F = {}^{A}S\circ\hat{F}$ notre assertion est triviale (modulo l'injection de $Hom(B,B)$ dans ${}^{A}(Hom(B,B))$...).

Démontrons maintenant la relation $(S^F)^{(m)} = (S^{(m)})^F$ dans le cas général (on adopte maintenant le point de vue: application de V dans le fibré). On a $S^{(m)}(x) = S(\underline{\underline{x}}^{(m)}) = S\circ\phi_m(x)$; donc

$$(S^{(m)})^F = F^{-1}\circ S\circ\phi_m\circ F = \cancel{EX} \; F^{-1}\circ S\circ F\circ\phi_m = S^F\circ\phi_m = (S^F)^{(m)} ,$$

c.q.f.d.