# RÉDACTION N° 172

COTE : NBR 075

TITRE : ENSEMBLES
CHAPITRE II - §§ 3 ET 6 (ÉTAT 8)

ASSOCIATION DES COLLABORATEURS DE NICOLAS BOURBAKI

NOMBRE DE PAGES : 31

NOMBRE DE FEUILLES : 31

Janv. 53
M. Dixmier

NBR075



ENSEMBLES. CHAP. II - §§ 3 et 6. Etat 8.

---

Bien que l'accord n'ait pu se faire sur les questions terminologiques, on espère que la présente rédaction permettra de se mettre d'accord sur tous les autres points (? ? ?).

---

## § 3. Correspondances.

### 1. Graphes et correspondances.

DÉFINITION 1.- <u>On dit que</u> G <u>est un graphe si tout élément de</u> G <u>est un couple, autrement dit si la relation</u>

$$(\forall z)(z \in G \Rightarrow (z \text{ est un couple}))$$

<u>est vraie</u>.

Si G est un graphe, la relation $(x,y) \in G$ s'exprime encore en disant que "y correspond à x par G" .

Soit $\underline{R}\{\underline{x},\underline{y}\}$ une relation, $\underline{x}$ et $\underline{y}$ étant des lettres distinctes. Soit $\underline{G}$ une lettre distincte de $\underline{x}$ et de $\underline{y}$ et ne figurant pas dans $\underline{R}$ . Si la relation

$$(\exists\, \underline{G})(\underline{G} \text{ est un graphe et } (\forall\, \underline{x})(\forall\, \underline{y})(\underline{R} \Leftrightarrow ((\underline{x},\underline{y}) \in \underline{G})))$$

est vraie, on dit que $\underline{R}$ <u>admet un graphe</u> (par rapport aux lettres $\underline{x}$ et $\underline{y}$). Le graphe $\underline{G}$ est alors unique en vertu de l'axiome d'extensionalité, et s'appelle le <u>graphe de</u> $\underline{R}$ (ou <u>l'ensemble représentatif de</u> $\underline{R}$) par rapport à $\underline{x}$ et $\underline{y}$ .

Soit $\underline{Z}$ une lettre distincte de $\underline{x}$ et de $\underline{y}$ et ne figurant pas dans $\underline{R}$ . Si la relation

$$(\exists\, \underline{Z})(\forall\, x)(\forall\, \underline{y})(\underline{R} \Rightarrow ((\underline{x}, \underline{y}) \in \underline{Z}))$$

est vraie, $\underline{R}$ admet un graphe : il suffit en effet de prendre pour ce graphe l'ensemble des couples $\underline{z}$ tels que $\underline{z} \in \underline{Z}$ et $\underline{R}\{\mathrm{pr}_1\underline{z},\mathrm{pr}_2\underline{z}\}$ ($\underline{z}$ étant une lettre distincte de $\underline{x},\underline{y},\underline{Z}$ et ne figurant pas dans $\underline{R}$). Cette condition est remplie si on connaît un terme $\underline{T}$, où ne figurent ni $\underline{x}$ ni $\underline{y}$ , tel que

$\underline{R} \Rightarrow ((\underline{x},\underline{y}) \in \underline{T})$ soit vraie.

PROPOSITION 1.- Soit G un graphe. Il existe un ensemble A et un seul, et un ensemble B et un seul, qui possèdent les propriétés suivantes : 1) la relation $(\exists y)((x,y) \in G)$ est équivalente à $x \in A$ ; 2) la relation $(\exists x)((x,y) \in G)$ est équivalente à $y \in B$.

Il suffit en effet de prendre pour A (resp. B) l'ensemble des objets de la forme $pr_1 z$ (resp. $pr_2 z$) pour $z \in G$ (§ 1, n°6) : de façon précise, on a $A = \mathcal{E}_x((\exists y)((x,y) \in G))$ et $B = \mathcal{E}_y((\exists x)((x,y) \in G))$ ; ces ensembles s'appellent la première et la seconde projection du graphe G ; on les désigne par $pr_1 G$ et $pr_2 G$. On vérifie aussitôt que $G \subset (pr_1 G) \times (pr_2 G)$ tout ensemble de couples est donc une partie d'un produit, et réciproquement. Si l'un des deux ensembles $pr_1 G$, $pr_2 G$ est vide, on a donc $G = \emptyset$ (§ 2, prop. 2).

Remarque.- La relation $x = y$ n'admet pas de graphe ; car la première projection de ce graphe, s'il existait, serait l'ensemble de tous les objets (cf. § 1, n°7, Remarque).

DÉFINITION 2.- On appelle correspondance entre un ensemble A et un ensemble B un triplet $\Gamma = (G,A,B)$ où G est un graphe tel que $pr_1 G \subset A$ et $pr_2 G \subset B$. On dit que G est le graphe de $\Gamma$, A l'ensemble de départ et B l'ensemble d'arrivée de $\Gamma$.

Si $(x,y) \in G$ on dit encore que "y correspond à x par la correspondance $\Gamma$". Pour tout $x \in pr_1 G$, on dit que la correspondance $\Gamma$ est définie pour l'objet x, et $pr_1 G$ est appelé l'ensemble de définition de $\Gamma$ ; pour tout $y \in pr_2 G$, on dit que y est une valeur prise par $\Gamma$ et $pr_2 G$ est appelé l'ensemble des valeurs de $\Gamma$.

Si $R\{x,y\}$ est une relation admettant un graphe $G$ (par rapport à $x$ et $y$), et si $A$ et $B$ sont deux ensembles tels que $pr_1 G \subset A$ et $pr_2 G \subset B$, on dit que $R$ est une *relation entre un élément de $A$ et un élément de $B$* (relativement aux lettres $x,y$). On dit que la correspondance $\Gamma = (G,A,B)$ est la correspondance entre $A$ et $B$ définie par la relation $R$ (par rapport à $x$ et $y$).

Soient G un graphe et X un ensemble. La relation "$x \in X$ et $(x,y) \in G$" entraîne $(x,y) \in G$ et admet par suite un graphe G'. La seconde projection de G' se compose évidemment de tous les objets qui correspondent par G à des objets de X.

DÉFINITION 3.- *Soient* G *un graphe et* X *un ensemble. L'ensemble des objets qui correspondent par* G *à des éléments de* X *s'appelle l'image de* X *par* G *et se désigne par* $G\langle X\rangle$ *ou* $G(X)$.

*Soient* $\Gamma = (G,A,B)$ *une correspondance et* X *une partie de* A. *L'ensemble* $G\langle X\rangle$ *se note encore* $\Gamma\langle X\rangle$ *ou* $\Gamma(X)$ *et s'appelle l'image de* X *par* $\Gamma$.

*Remarques*.- 1) D'une manière précise, $G\langle X\rangle$ désigne l'ensemble $\mathcal{E}_y((\exists x)(x \in X \text{ et } (x,y) \in G))$. Nous ne ferons plus que rarement désormais la traduction des définitions en langage formel.

2) Les notations $G(X)$ et $\Gamma(X)$ peuvent parfois conduire à des confusions avec des notations introduites ultérieurement (cf. n°4, *Remarque* suivant la déf. 9).

Soit G un graphe. Comme la relation $(x,y) \in G$ entraîne $y \in pr_2 G$, on a $G\langle X\rangle \subset pr_2 G$ pour tout ensemble X ; comme $(x,y) \in G$ entraîne $x \in pr_1 G$, on a $G\langle pr_1 G\rangle = pr_2 G$. On a $G\langle\emptyset\rangle = \emptyset$, puisque $x \notin \emptyset$ est un théorème. Si $X \subset pr_1 G$ et $X \neq \emptyset$, on a $G\langle X\rangle \neq \emptyset$.

PROPOSITION 2.- *Soient* G *un graphe*, X *et* Y *deux ensembles* ; *la relation* $X \subset Y$ *entraîne* $G\langle X\rangle \subset G\langle Y\rangle$ .

La proposition est évidente à partir des définitions et de C50 (§ 1, n°4).

COROLLAIRE.- *Si* $A \supset pr_1 G$ , *on a* $G\langle A\rangle = pr_2 G$ .

DEFINITION 4.- *Soient* G *un graphe et* x *un objet*. *On appelle coupe de* G *suivant* x *l'ensemble* $G\langle\{x\}\rangle$ (qu'on désigne aussi parfois par G(x), par abus de langage).

Il résulte aussitôt de C43 (chap. I, § 5, n°1) que la relation $y \in G\langle\{x\}\rangle$ est équivalente à $(x,y) \in G$ . Si G et G' sont deux graphes, la relation $G \subset G'$ est donc équivalente à $(\forall x)(G\langle\{x\}\rangle \subset G'\langle\{x\}\rangle)$.

Si $\Gamma = (G,A,B)$ est une correspondance entre A et B, pour tout $x \in A$ , la coupe de G suivant x s'appelle encore la coupe de $\Gamma$ suivant x et se note également $\Gamma\langle\{x\}\rangle$ (ou $\Gamma(x)$).

2. *Correspondance réciproque d'une correspondance*.

Soient G un graphe, $A = pr_1 G$ , $B = pr_2 G$ ses projections. La relation $(y,x) \in G$ entraîne $(x,y) \in B \times A$ ; cette relation admet donc un graphe, qui se compose des couples $(x,y)$ tels que $(y,x) \in G$ .

DEFINITION 5.- *Soit* G *un graphe*. *Le graphe dont les éléments sont les couples* $(x,y)$ *tels que* $(y,x) \in G$ *s'appelle le graphe réciproque de* G *et se désigne par* $\overset{-1}{G}$ .

Pour tout ensemble X , $\overset{-1}{G}\langle X\rangle$ s'appelle *l'image réciproque de* X *par* G.

Il est évident que le graphe réciproque de $\overset{-1}{G}$ est G , et que l'on a $pr_1 \overset{-1}{G} = pr_2 G$ , $pr_2 \overset{-1}{G} = pr_1 G$ . En particulier, si X et Y sont deux ensembles, on a $\overset{-1}{\widehat{X \times Y}} = Y \times X$ . On dit qu'un graphe G est *symétrique* si $\overset{-1}{G} = G$ .

Soit $\Gamma = (G,A,B)$ une correspondance entre A et B . Comme $pr_1 \overset{-1}{G} \subset B$ et $pr_2 \overset{-1}{G} \subset A$ , le triplet $(\overset{-1}{G},B,A)$ est une *correspondance entre* B *et* A ,

qu'on appelle la <u>correspondance réciproque</u> de $\Gamma$ et qu'on note $\overset{-1}{\Gamma}$ .
Il est évident que la correspondance réciproque de $\overset{-1}{\Gamma}$ est $\Gamma$ .

<u>3. Composée de deux correspondances.</u>

Soient G et G' deux graphes. Désignons par A l'ensemble $pr_1 G$ et par C l'ensemble $pr_2 G'$. La relation $(\exists y)((x,y)\in G$ et $(y,z)\in G')$ entraîne $(x,z)\in A\times C$ ; elle admet donc un graphe par rapport à x et z .

DÉFINITION 6.- <u>Soient</u> G <u>et</u> G' <u>des graphes. On appelle composé de</u> G' <u>et de</u> G , <u>et on désigne par</u> $G'\circ G$ , <u>le graphe par rapport à</u> x <u>et</u> z <u>de la relation</u> $(\exists y)((x,y)\in G$ et $(y,z)\in G')$.

PROPOSITION 3.- <u>Soient</u> G <u>et</u> G' <u>deux graphes. Le graphe réciproque de</u> $G'\circ G$ <u>est</u> $\overset{-1}{G}\circ\overset{-1}{G'}$ .

En effet, la relation "$(x,y)\in G$ et $(y,z)\in G'$ " est équivalente à "$(z,y)\in G'$ et $(y,x)\in G$ " .

PROPOSITION 4.- <u>Soient</u> $G_1,G_2,G_3$ <u>des graphes. On a alors</u> $(G_3\circ G_2)\circ G_1=G_3\circ(G_2\circ G_1)$.

En effet, la relation $(x,t)\in(G_3\circ G_2)\circ G_1$ est équivalente à la relation

$$(\exists y)((x,y)\in G_1 \text{ et } (\exists z)((y,z)\in G_2 \text{ et } (z,t)\in G_3))$$

donc (notamment d'après C33 (chap.I, § 4, n°3)) à la relation

(1) $(\exists y)(\exists z)((x,y)\in G_1$ et $(y,z)\in G_2$ et $(z,t)\in G_3)$.

On voit de même que la relation $(x,t)\in G_3\,(G_2\circ G_1)$ est équivalente à

(2) $(\exists z)(\exists y)((x,y)\in G_1$ et $(y,z)\in G_2$ et $(z,t)\in G_3)$ .

Or on sait que les relations (1) et (2) sont équivalentes, ce qui démontre la prop.4 .

Le graphe $G_3\circ(G_2\circ G_1)$ se désigne par $G_3\circ G_2\circ G_1$ . De même, si $G_1,G_2,G_3,G_4$ sont des graphes, on pose $G_4\circ(G_3\circ G_2\circ G_1)=G_4\circ G_3\circ G_2\circ G_1$ . Etc..

PROPOSITION 5.- Soient G et G' des graphes et A un ensemble. On a

$$(G'\circ G)\langle A\rangle = G'\langle G\langle A\rangle\rangle \quad .$$

En effet, en vertu de C33 (chap.I, § 4, n°3), la relation $z\in(G'\circ G)\langle A\rangle$ est équivalente à

$$(\exists y)((\exists x)(x\in A \text{ et } (x,y)\in G) \text{ et } (y,z)\in G')$$

donc à $(\exists y)(y\in G\langle A\rangle \text{ et } (y,z)\in G')$, ce qui démontre la proposition.

COROLLAIRE.- Si G et G' sont deux graphes, on a $pr_2(G'\circ G)=G'\langle pr_2 G\rangle$ et $pr_1(G'\circ G)=\overset{-1}{G}\langle pr_1 G'\rangle$.

Il est clair que si $G_1, G_2, G'_1, G'_2$ sont des graphes, les relations $G_1\subset G_2$ et $G'_1\subset G'_2$ entraînent $G'_1\circ G_1\subset G'_2\circ G_2$.

Soient maintenant $\Gamma=(G,A,B)$ et $\Gamma'=(G',B,C)$ deux correspondances telles que l'ensemble d'arrivée de $\Gamma$ soit identique à l'ensemble de départ de $\Gamma'$. En vertu du corollaire de la prop.4, on a $pr_1(G'\circ G)\subset pr_1 G\subset A$ et $pr_2(G'\circ G)\subset pr_2 G'\subset C$ ; on peut donc poser la définition suivante :

DÉFINITION 7.- Soient $\Gamma=(G,A,B)$ et $\Gamma'=(G',B,C)$ deux correspondances telles que l'ensemble d'arrivée de $\Gamma$ soit identique à l'ensemble de départ de $\Gamma'$. On appelle composée de $\Gamma'$ et de $\Gamma$, et on note $\Gamma'\circ\Gamma$, la correspondance $(G'\circ G, A, C)$.

Il résulte aussitôt de la prop.5 que si X est une partie de A, on a $(\Gamma'\circ\Gamma)\langle X\rangle=\Gamma'\langle\Gamma\langle X\rangle\rangle$. En outre, comme l'ensemble d'arrivée de $\overset{-1}{\Gamma'}$ est identique à l'ensemble de départ de $\overset{-1}{\Gamma}$, la correspondance réciproque de $\Gamma'\circ\Gamma$ est $\overset{-1}{\Gamma}\circ\overset{-1}{\Gamma'}$, en vertu de la prop.3.

DÉFINITION 8.- Si A est un ensemble, l'ensemble $\Delta_A$ des objets de la forme $(x,x)$, pour $x\in A$, s'appelle la diagonale de $A\times A$.

NBR075 8



Il est clair que l'on a $pr_1(\Delta_A) = pr_2(\Delta_A) = A$ . La correspondance $I_A = (\Delta_A, A, A)$ est appelée la correspondance identique de A ; elle est sa propre réciproque.

Si $\Gamma$ est une correspondance entre A et B , $I_A$ la correspondance identique de A , $I_B$ la correspondance identique de B , on a $\Gamma \circ I_A = I_B \circ \Gamma = \Gamma$ .

4. Fonctions.

DÉFINITION 9.- On dit qu'un graphe F est un graphe fonctionnel si pour tout x , il existe un objet au plus correspondant à x par F . On dit qu'une correspondance $f=(F,A,B)$ est une fonction si son graphe F est un graphe fonctionnel, et si son ensemble de départ A est égal à son ensemble de définition $pr_1 F$ . Autrement dit, une correspondance $f=(F,A,B)$ est une fonction si, pour tout x appartenant à l'ensemble de départ A de f , la relation $(x,y) \in F$ est fonctionnelle en y ; l'objet unique correspondant à x par f s'appelle la valeur de f pour l'élément x et se désigne par $f(x)$ ou $f_x$ (ou $F(x)$, ou $F_x$).

Si f est une fonction, F son graphe et x un élément de l'ensemble de définition de f , la relation $y=f(x)$ est donc équivalente à $(x,y) \in F$ (chap.I, § 5,n°3,critère C46).

Remarque.- Il faut prendre garde aux confusions que risque d'entraîner l'emploi simultané de la notation $f(x)$ et de la notation $f(X)$ (synonyme de $f\langle X \rangle$) introduite dans la déf.3. Considérons par exemple le graphe réduit au seul élément $(\emptyset, \{0\})$ ; il est immédiat que c'est le graphe d'une fonction f , dont $\{\emptyset\}$ est l'ensemble de définition et $\{\{\emptyset\}\}$ l'ensemble des valeurs. En donnant à $f(x)$ le sens de la déf.9, on a donc $f(\emptyset)=\{\emptyset\}$ ; mais

mais on a d'autre part $f\langle\emptyset\rangle=\emptyset$ , et l'emploi de la notation $f(\emptyset)$ pour désigner $f\langle\emptyset\rangle$ conduirait ici à une confusion (cf.exerc.11).

Soient A et B deux ensembles ; on appelle <u>application de</u> A <u>dans</u> B une fonction f dont l'ensemble de départ (égal à l'ensemble de définition) est égal à A et dont l'ensemble d'arrivée est égal à B ; on dit aussi qu'une telle fonction est <u>définie dans</u> A <u>et prend ses valeurs dans</u> B .

On dit encore que f transforme x en f(x) (pour tout $x \in A$), ou que f(x) est le transformé de x par f, ou (par abus de langage) l'<u>image</u> de x par f .

Dans certains cas, un graphe fonctionnel s'appelle aussi une <u>famille</u> ; l'ensemble de définition s'appelle alors l'<u>ensemble des indices</u>, et l'ensemble des valeurs s'appelle, par abus de langage, <u>l'ensemble des éléments de la famille</u> ; c'est surtout dans ce cas qu'on utilise la rotation indicielle $f_x$ pour désigner la valeur de f pour l'élément x . Pour faciliter l'interprétation intuitive du texte, on dit parfois "famille d'ensembles" au lieu de "famille". Lorsque l'ensemble des indices est le produit de deux ensembles, on dit souvent qu'on a une <u>famille double</u>.

De même, une fonction dont l'ensemble d'arrivée est E s'appelle parfois une <u>famille d'éléments de</u> E. Lorsque tout élément de E est une partie d'un ensemble F , on dit aussi qu'on a une <u>famille de parties de</u> F .

Nous emploierons souvent, dans la suite de ce Traité, le mot "fonction" comme synonyme de "graphe fonctionnel", sans qu'il en résulte de confusion. Toutefois, nous éviterons cet abus de langage dans le présent chapitre.

<u>Exemples de fonctions</u>.- 1. L'ensemble vide est évidemment un graphe fonctionnel ; toute fonction dont le graphe est vide a pour ensemble de définition et pour ensemble des valeurs l'ensemble vide ; celle de ces

fonctions dont l'ensemble d'arrivée est vide est appelée la <u>fonction vide</u>.

2. Si A est un ensemble, la correspondance identique de A (n°3) est une fonction qu'on appelle <u>l'application identique de</u> A .

> A tout ensemble A est ainsi associée une famille, constituée par l'application identique de A , dont A est l'ensemble des indices et l'ensemble des éléments. Par abus de langage, on désigne parfois un ensemble sous le nom de "famille" ; c'est alors de la famille ainsi associée à l'ensemble considéré qu'il est question.

On dit qu'une fonction f est <u>constante</u> si, quels que soient x et x' dans l'ensemble de définition de f , on a $f(x)=f(x')$.

Soit f une application de l'ensemble E dans l'ensemble E ; On dit qu'un élément x de E est <u>invariant par</u> f si $f(x)=x$ .

On dit que deux fonctions f et g <u>coïncident dans</u> E si E est contenu dans les ensembles de définition de f et de g , et si $f(x)=g(x)$ pour tout $x \in E$ . Deux fonctions ayant même graphe coïncident dans leurs ensembles de définition. Dire que $f = g$ revient à dire que f et g ont même ensemble de définition A , même ensemble d'arrivée B , et coïncident dans A .

> Quand on dit que f et g ont <u>même</u> ensemble de définition, on entend par là, bien entendu, que f et g ont des ensembles de définition égaux. Nous ferons constamment des abus de langage de ce genre.

Soient $f=(F,A,B)$ et $g=(G,C,D)$ deux fonctions. Dire que $F \subset G$ revient à dire que l'ensemble de définition A de f est contenu dans l'ensemble de définition C de g , et que g coïncide avec f dans A . Si en outre $B \subset D$ , on dit que g est un <u>prolongement</u> de f (ou, de façon plus précise, un prolongement de f à C), ou que g prolonge f (à C). Lorsque g est appelée une famille d'éléments de E, on dit aussi que f est une <u>sous-famille</u> de g.

Soient f une fonction, A une partie de l'ensemble de définition de f. Il est immédiat que la relation "$x \in A$ et $y = f(x)$" admet un graphe G par rapport à x et y , et que ce graphe est fonctionnel ; on dit que la fonction de graphe G et ayant même ensemble d'arrivée que f est la <u>restriction</u> de f à A , et on la note parfois $f_A$ . Une fonction est un prolongement d'une quelconque de ses restrictions. Si deux fonctions f,g ont même ensemble d'arrivée et coïncident dans un ensemble E , leurs restrictions à E sont égales.

5. <u>Définition d'une fonction par un terme</u>.- C54.- <u>Soient</u> T <u>et</u> A <u>deux termes</u>, x <u>et</u> y <u>des lettres distinctes. On suppose que</u> x <u>ne figure pas dans</u> A , <u>et que</u> y <u>ne figure ni dans</u> T <u>ni dans</u> A . <u>Soit</u> R <u>la relation</u> "$x \in A$ <u>et</u> $y = T$ ". <u>La relation</u> R <u>admet un graphe</u> F <u>par rapport aux lettres</u> x <u>et</u> y . <u>Ce graphe est fonctionnel</u>. <u>Sa première projection est</u> A , <u>sa deuxième projection est l'ensemble des objets de la forme</u> T <u>pour</u> $x \in A$ . <u>Pour tout</u> $x \in A$ , <u>on a</u> $F(x) = T$ .

En effet, soit B l'ensemble des objets de la forme T pour $x \in A$ . On a $R \Rightarrow ((x,y) \in A \times B)$ ; comme l'assemblage désigné par $A \times B$ ne contient ni $\underline{x}$ , ni $\underline{y}$ , $\underline{R}$ admet un graphe $\underline{F}$ par rapport aux lettres $\underline{x}$ et $\underline{y}$ (n°1). Il est clair que la relation "$(\underline{x},\underline{y}) \in \underline{F}$ et $(\underline{x},\underline{y}') \in \underline{F}$" entraîne $\underline{y}=\underline{y}'$ , donc $\underline{F}$ est un graphe fonctionnel. Le reste du critère est évident.

Si C est un ensemble contenant l'ensemble $\underline{B}$ des objets de la forme $\underline{T}$ pour $\underline{x} \in \underline{A}$ ($\underline{y}$ ne figurant pas dans $\underline{C}$), la fonction $(\underline{F},\underline{A},\underline{C})$ se désigne aussi par la notation $\underline{x} \to \underline{T}$ $(\underline{x} \in \underline{A}, \underline{T} \in \underline{C})$ ; l'assemblage correspondant de la mathématique formelle ne contient ni $\underline{x}$ ni $\underline{y}$ , et ne dépend pas du choix de la lettre $\underline{y}$ vérifiant les conditions précédentes.

 12



Quand le contexte est suffisamment explicite, on se contente des notations $\underline{x} \to \underline{T}$ ($\underline{x} \in \underline{A}$) , $(\underline{T})_{\underline{x} \in \underline{A}}$ , $\underline{x} \to \underline{T}$ , ou parfois simplement $\underline{T}$ ou $(\underline{T})$ .

* Ainsi, on peut parler de la fonction $x^3$, si le contexte indique clairement qu'il s'agit de l'application $x \to x^3$ de l'ensemble des nombres complexes dans lui-même.*

<u>Exemples</u>.- 1) Si f est une application de A dans B , la fonction f est égale à la fonction $x \to f(x)$ $(x \in A, f(x) \in B)$, qu'on écrit simplement $x \to f(x)$, ou aussi $(f_x)_{x \in A}$ (c'est surtout quand on utilise la dernière notation qu'on parle de "famille d'éléments" au lieu de "fonction").

2) Soient f et g des fonctions, telles que l'ensemble d'arrivée de g soit égal à l'ensemble de définition de f . La fonction $x \to f(g(x))$ est égale à $f \circ g$ .

3) Soit G un ensemble de couples. Les fonctions $z \to pr_1 z$ $(z \in G$ , $pr_1 z \in pr_1 G)$ et $z \to pr_2 z$ $(z \in G$ , $pr_2 z \in pr_2 G)$ s'appellent respectivement <u>la première</u> et <u>la seconde fonction coordonnée</u> sur G ; ce sont des applications de G sur sa première et sa seconde projection respectivement, qu'on désigne par $pr_1$ et $pr_2$ quand il n'en résulte pas de confusion. Pour que la première fonction coordonnée soit univalente, il faut et il suffit que G soit un graphe fonctionnel.

6. <u>Composée de deux fonctions</u>. <u>Fonction réciproque</u>.- <u>Proposition 6</u>.- <u>Si</u> f <u>est une application de</u> A <u>dans</u> B , <u>et</u> g <u>une application de</u> B <u>dans</u> C , $g \circ f$ <u>est une application de</u> A <u>dans</u> C .

Soient F et G les graphes de f et g . Soient x,z,z' des objets tels que $(x,z) \in G \circ F$ , $(x,z') \in G \circ F$ . Il existe des objets y,y' tels que $(x,y) \in F$ , $(x,y') \in F$ , $(y,z) \in G$ , $(y',z') \in G$ . Puisque F est un graphe fonctionnel, on a $y=y'$, donc $(y,z') \in G$ . Puisque G est un graphe fonctionnel, on en déduit que $z=z'$. Donc $G \circ F$ est un graphe fonctionnel.

D'autre part, l'ensemble de définition de $g \circ f$ est évidemment A , ce qui achève la démonstration.

Avant de recherche si la correspondance réciproque d'une fonction est une fonction, introduisons la définition suivante :

DÉFINITION 10.- Soit f une application de A dans B . On dit que f est une injection, ou que f est une application injective, si deux éléments distincts de A ont des images distinctes par f . On dit que f est une projection, ou que f est une application projective, si $f(A)=B$ . On dit que f est une ambijection, ou que f est une application ambijective, si f est injective et projective.

Au lieu de dire que f est injective, on dit parfois que f est biunivoque. Au lieu de dire que f est projective, on dit parfois que f est une application de A sur B , ou une transformation de A en B , ou une représentation paramètrique de B au moyen de A (dans ce dernier cas, A s'appelle l'ensemble des paramètres de cette représentation, et ses éléments prennent le nom de paramètres). Si f est ambijective, on dit aussi que f met A et B en correspondance biunivoque. Une ambijection de A sur A s'appelle aussi une permutation de A .

Exemples.- 1. Si $A \subset B$ , l'application de A dans B dont le graphe est la diagonale de A est injective, et s'appelle l'application canonique ou l'injection canonique de A dans B .

2. Soit A un ensemble. L'application $x \rightarrow (x,x)$ de A dans la diagonale $\Delta_A$ de $A \times A$ est une application ambijective appelée application diagonale de A .

3. Soit G un ensemble de couples. L'application $z \rightarrow (pr_2 z \, , pr_1 z)$ de G dans $\overset{-1}{G}$ est une application ambijective (dite canonique).

4. Soit A un ensemble. L'application $x \rightarrow (x,b)$ de A dans $A \times \{b\}$ est une application ambijective.

PROPOSITION 7.- Soit $f$ une application de $A$ dans $B$ . Pour que $\overset{-1}{f}$ soit une fonction, il faut et il suffit que $f$ soit ambijective.

En effet, si $\overset{-1}{f}$ est une fonction, son ensemble de départ $B$ est égal à son ensemble de définition, c'est-à-dire à $f(A)$. D'autre part, soient $x$ et $y$ deux éléments de $A$ tels que $f(x)=f(y)$. Si $F$ désigne le graphe de $f$ , on a $(f(x),x) \in \overset{-1}{F}$ et $(f(y),y) \in \overset{-1}{F}$ , donc $(f(x),y) \in \overset{-1}{F}$ , donc $x=y$ , de sorte que $f$ est injective, et par suite ambijective. Réciproquement, si $f$ est ambijective, il est immédiat que $\overset{-1}{F}$ est fonctionnel, et que l'ensemble de définition de $\overset{-1}{f}$ est égal à $B$ .

Lorsque $f$ est ambijective, il en est de même de $\overset{-1}{f}$ , $\overset{-1}{f} \circ f$ est l'application identique de $A$ , et $f \;\; f$ est l'application identique de $B$ .

Si une permutation est identique à sa permutation réciproque, elle est dite *involutive*.

PROPOSITION 8.- Soit $f$ une application de $A$ dans $B$ . S'il existe une application $r$ (resp. $s$) de $B$ dans $A$ telle que $r \circ f$ (resp. $f \circ s$) soit l'application identique de $A$ (resp. $B$), $f$ est injective (resp. projective). Réciproquement, si $f$ est projective, il existe une application $s$ de $B$ dans $A$ telle que $f \circ s$ soit l'application identique de $B$ . Si $f$ est injective, et si $A \neq \{0\}$, il existe une application $r$ de $B$ dans $A$ telle que $r \circ f$ soit l'application identique de $A$ .

En effet, s'il existe une application $r$ de $B$ dans $A$ telle que $r \circ f$ soit l'application identique de $A$ , l'égalité $f(x)=f(y)$, où $x \in A$ et $y \in A$ , entraîne $x = r(f(x)) = r(f(y)) = y$ , donc $f$ est injective. S'il existe une application $s$ de $B$ dans $A$ telle que $f \;\; s$ soit l'application identique de $B$ , on a $B = f(s(B)) \subset f(A) \subset B$ , donc $f$ est projective. Si $f$ est projective, désignons par $T$ le terme $\tau_y(y \in A$ et $f(y)=x)$ , on a $f(T)=x$ pour $x \in B$ ; si on désigne par $s$ l'application

$x \to T(x \in B\ ,\ T \in A)$, $f \circ s$ est l'application identique de B . Enfin, supposons f injective, et $A \neq \emptyset$ ; soit a un élément de A ; la relation "$(y \in A$ et $x = f(y))$ ou $(y = a$ et $x \in B - f\langle A \rangle)$" entraîne $(x,y) \in B \times A$ , donc admet un graphe R par rapport aux lettres x et y ; on a $R(x)=a$ si $x \in B - f\langle A \rangle$ , et $f(R(x))=x$ si $x \in f\langle A \rangle$. Donc la fonction $r = (R,B,A)$ est telle que $r \circ f$ soit l'application identique de A .

COROLLAIRE.- Soient A et B des ensembles, f une application de A dans B , g une application de B dans A . Si $g \circ f$ est l'application identique de A et $f \circ g$ l'application identique de B , f et g sont ambijectives, et on a $g = \overset{-1}{f}$ .

DÉFINITION 11.- Soit f une application injective (resp. projective) de A dans B . Toute application r (resp. s) de B dans A , telle que $r \circ f$ (resp. $f \circ s$) soit l'application identique de A (resp. B) est appelée une rétraction (resp. section) associée à f .

Au lieu de rétraction (resp. section), on dit parfois inverse à gauche (resp. à droite).

Si f est injective (resp. projective), et si r (resp. s) est une rétraction (resp. section) associée à f , f est une section (resp. rétraction) associée à r (resp. s). Donc une rétraction est projective, une section est injective.

Si f est projective, et si s,s' sont deux sections associées à f , telles que $s\langle B \rangle = s'\langle B \rangle$, on a $s=s'$ ; en effet, si $x \in B$ , il existe un $y \in B$ tel que $s(x)=s'(y)$, et on a $x=f(s(x)) = f(s'(y))=y$ , donc $s(x)=s'(x)$, de sorte que $s=s'$. Ainsi, une section s est déterminée de manière unique par l'ensemble $s\langle B \rangle$, de sorte que, par abus de langage, l'ensemble $s\langle A \rangle$ lui-même s'appelle parfois une section associée à f .

<u>Théorème 1.- Soient</u> $f$ <u>une application de</u> A <u>dans</u> B, $f'$ <u>une application de</u> B <u>dans</u> C , <u>et</u> $f_1 = f' \circ f$ . <u>Alors</u> :

a) <u>Si</u> $f$ <u>et</u> $f'$ <u>sont des injections</u>, $f_1$ <u>est une injection</u> ; <u>si</u> $r, r'$ <u>sont des rétractions associées à</u> $f$ <u>et</u> $f'$, $r \circ r'$ <u>est une rétraction associée à</u> $f_1$ .

b) <u>Si</u> $f$ <u>et</u> $f'$ <u>sont des projections</u>, $f_1$ <u>est une projection</u> ; <u>si</u> $s, s'$ <u>sont des sections associées à</u> $f$ <u>et</u> $f'$, $s \circ s'$ <u>est une section associée à</u> $f_1$.

c) <u>Si</u> $f_1$ <u>est une injection</u>, $f$ <u>est une injection</u> ; <u>si</u> $r_1$ <u>est une rétraction associée à</u> $f_1$, $r_1 \circ f'$ <u>est une rétraction associée à</u> $f$ .

d) <u>Si</u> $f_1$ <u>est une projection</u>, $f'$ <u>est une projection</u> ; <u>si</u> $s_1$ <u>est une section associée à</u> $f_1$, $f' \circ s_1$ <u>est une section associée à</u> $f'$ .

e) <u>Si</u> $f_1$ <u>est une projection et</u> $f'$ <u>une injection</u>, $f$ <u>est une projection</u> ; <u>si</u> $s_1$ <u>est une section associée à</u> $f_1$, $s_1 \circ f'$ <u>est une section associée à</u> $f$ .

f) <u>Si</u> $f_1$ <u>est une injection et</u> $f$ <u>une projection</u>, $f'$ <u>est une injection</u> ; <u>si</u> $r_1$ <u>est une rétraction associée à</u> $f_1$, $f \circ r_1$ <u>est une rétraction associée à</u> $f'$ .

Démonstration.- Désignons, pour tout ensemble E, par $I_E$ l'application identique de E .

a) On a $r \circ f = I_A$ et $r' \circ f' = I_B$ , donc $(r \circ r') \circ (f' \circ f) = r \circ I_B \circ f = r \circ f = I_A$ Si $f$ et $f'$ sont des injections, $f_1$ est donc une injection, d'après la prop.8 si $A \neq \emptyset$ , et de façon évidente si $A = \emptyset$.

b) On a $f \circ s = I_B$ et $f' \circ s' = I_C$ , donc $(f' \circ f) \circ (s \circ s') = f' \circ I_B \circ s' = f' \circ s' = I_C$. Si $f$ et $f'$ sont des projections, $f_1$ est donc une projection d'après la prop.8 .

c) On a $r_1 \circ f_1 = I_A$ , donc $(r_1 \circ f') \circ f = r_1 \circ f_1 = I_A$ . Si $f_1$ est une injection, $f$ est donc une injection, d'après la prop.8 si $A \neq \emptyset$, et de façon évidente si $A = \emptyset$ .

d) On a $f_1\circ s_1 = I_C$ , donc $f'\circ(f\circ s_1) = f_1\circ s_1 = I_C$ . Si $f_1$ est une projection, $f'$ est donc une projection d'après la prop.8 .

e) On a $f_1\circ s_1 = I_C$ , et $f'$ est une ambijection d'après d). Donc $f\circ(s_1\circ f') = (\overset{-1}{f'}\circ f')\circ f\circ(s_1\circ f') = \overset{-1}{f'}\circ(f_1\circ s_1)\circ f' = \overset{-1}{f'}\circ I_C\circ f' = \overset{-1}{f'}\circ f' = I_B$ .
Si $f_1$ est une projection et $f'$ une injection, $f$ est donc une projection d'après la prop.8 .

f) On a $r_1\circ f_1 = I_A$ , et $f$ est une ambijection d'après c). Donc $(f\circ r_1)\circ f' = (f\circ r_1)\circ f'\circ(f\circ\overset{-1}{f}) = f\circ(r_1\circ f_1)\circ\overset{-1}{f} = f\circ I_A\circ\overset{-1}{f} = f\circ\overset{-1}{f} = I_B$ .
Si $f_1$ est une injection et $f$ une projection, $f'$ est donc une injection, d'après la prop.8 si $A \neq \emptyset$ , et de façon évidente si $A = \emptyset$ (car alors $B = f\langle A\rangle = \emptyset$) .

PROPOSITION 9.- a. <u>Soient</u> E,F,G <u>des ensembles</u>, g <u>une projection de</u> E <u>sur</u> F , f <u>une application de</u> E <u>dans</u> G. <u>Pour qu'il existe une application</u> h <u>de</u> F <u>dans</u> G <u>telle que</u> $f = h\circ g$ , <u>il faut et il suffit que la relation</u> $g(x)=g(y)$ (<u>où</u> $x\in E$ , $y\in E$) <u>entraîne la relation</u> $f(x) = f(y)$. <u>L'application h est uniquement déterminée par</u> f ; <u>si</u> s <u>est une section associée à</u> g , <u>on a</u> $h = f\circ s$ .

$$\begin{tikzcd} E \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, "f"] & \\ {} \arrow[r, "h"'] & G \end{tikzcd}$$

b. <u>Soient</u> E,F,G <u>des ensembles</u>, g <u>une injection de</u> F <u>dans</u> E , f <u>une application de</u> G <u>dans</u> E . <u>Pour qu'il existe une application</u> h <u>de</u> G dans F <u>telle que</u> $f = g\circ h$ , <u>il faut et il suffit que</u> $f(G)\subset g(F)$. <u>L'application h est uniquement déterminée par</u> f ; <u>si</u> r <u>est une rétraction associée à</u> g , <u>on a</u> $h = r\circ f$.

$$\begin{tikzcd} {} & \\ F \arrow[u, "g"] & G \arrow[ul, "f"'] \arrow[l, "h"] \end{tikzcd}$$

a. Si $f = h\circ g$ , la relation $g(x)=g(y)$ (où $x\in E$ , $y\in E$) entraîne évidemment $f(x)=f(y)$. Et l'on a, pour toute section s associée à g ,

$h = h\circ(g\circ s) = f\circ s$ , ce qui montre que $h$ est uniquement déterminée par $f$. Réciproquement, supposons que la relation $g(x)=g(y)$ entraîne $f(x)=f(y)$ ; soit $s$ une section associée à $g$ , et posons $h = f\circ s$ ; pour tout $x\in E$ , on a $g(s(g(x)))= g(x)$, donc $f(s(g(x))) = f(x)$, c'est-à-dire $h(g(x)) = f(x)$ ; on a donc bien $f = h\circ g$ .

b. Si $f = g\circ h$ , on a évidemment $f(G)\subset g(F)$, et, pour toute rétraction $r$ associée à $g$ , $h = (r\circ g)\circ h = r\circ f$ , ce qui montre que $h$ est uniquement déterminée par $f$ . Réciproquement, supposons que $f(G)\subset g(F)$ ; soit $r$ une rétraction associée à $g$ , et posons $h = r\circ f$ ; pour tout $x\in G$ , il existe un $y\in F$ tel que $f(x)=g(y)$, donc on a $g(h(x)) = g(r(f(x))) = g(r(g(y))) = g(y) = f(x)$ ; on a donc bien $f=g\circ h$ .

7. Fonctions de deux arguments.- On appelle fonction de deux arguments une fonction dont l'ensemble de définition est un ensemble de couples (ou, ce qui revient au même, une partie d'un produit). Soit $f$ une telle fonction ; si $(x,y)$ est un élément de l'ensemble de définition de $f$ , la valeur $f((x,y))$ de $f$ au point $(x,y)$ se désigne en général par $f(x,y)$.

Soit $f$ une fonction de deux arguments, $D$ son ensemble de définition, $C$ son ensemble d'arrivée. Soit $A_y$ l'ensemble des $x$ tels que $(x,y)\in D$ . L'application $x \to f(x,y)$, $x\in A_y$ , $f(x,y)\in C$ s'appelle l'application partielle déterminée par $f$ , relative à la valeur $y$ du second argument, et on la désigne par $f_{.y}$ , ou simplement $f_y$ ; on a $f_{.y}(x)=f(x,y)$ pour tout $x$ tel que $(x,y)\in D$ . De même, soit $B_x$ l'ensemble des $y$ tels que $(x,y)\in D$ . L'application $y \to f(x,y)$, $y\in B_x$ , $f(x,y)\in C$ , s'appelle l'application partielle déterminée par $f$ , relative à la valeur $x$ du premier argument, et on la désigne par $f_{x.}$ , ou simplement $f_x$ ; on a $f_{x.}(y) = f(x,y)$ pour tout $y$ tel que $(x,y)\in D$ .

Si, pour tout y (resp. x), l'application partielle $f_{.y}$ (resp. $f_{x.}$) est une application constante, on dit que f <u>ne dépend pas</u> de son premier (resp. second) argument ; cela signifie donc que $f(x,y) = f(x',y)$ si $(x,y)$ et $(x',y)$ sont dans D (resp. $f(x,y)=f(x,y')$ si $(x,y)$ et $(x,y')$ sont dans D).

Soient u une application de A dans C , v une application de B dans D . L'application $z \longrightarrow (u(pr_1 z), v(pr_2 z))$ de $A \times B$ dans $C \times D$ s'appelle <u>l'extension canonique de</u> u <u>et</u> v <u>aux ensembles produits</u>, et se désigne parfois, par la notation $u \times v$ (malgré la confusion qui peut en résulter avec le produit des ensembles u et v) ; l'ensemble de ses valeurs est $u\langle A\rangle \times v\langle B\rangle$. Si u et v sont des applications injectives (resp. projectives), $u \times v$ est une application injective (resp. projective). Si u et v sont ambijectives, $u \times v$ est ambijective, et l'application réciproque de $u \times v$ est $\overset{-1}{u} \times \overset{-1}{v}$ . Soient u' une application de C dans E , v' une application de D dans F ; on a : $(u' \times v') \circ (u \times v) = (u' \circ u) \times (v' \circ v)$ .

<u>En exercice</u> : si f est une application de A sur B , $f \circ \overset{-1}{f}$ est l'application identique de B ; on se demande pourquoi ça figurait en proposition dans les rédactions antérieures.

NBR 075 20



## § 6. Relations d'équivalence.

Nous cesserons désormais d'utiliser les lettres italiques grasses pour désigner des assemblages indéterminés ; le contexte permettra au lecteur de discerner sans peine les assertions qui s'appliquent à des lettres ou des relations indéterminées.

1\. Définition d'une relation d'équivalence.- Soit $R\{x,y\}$ une relation, x et y étant des lettres distinctes. On dit que la relation R est symétrique (par rapport aux lettres x et y) si la relation $R\{x,y\} \Longrightarrow R\{y,x\}$ est vraie. Les relations $R\{x,y\}$ et $R\{y,x\}$ sont alors équivalentes.

Soit z une lettre ne figurant pas dans R . On dit que la relation R est transitive (par rapport aux lettres x et y) si la relation $(R\{x,y\}$ et $R\{y,z\} \Longrightarrow R\{x,z\}$ est vraie.

Exemples.- La relation $x=y$ est symétrique et transitive. La relation $X \subset Y$ est transitive, mais non symétrique. La relation $X \cap Y = \emptyset$ est symétrique, mais non transitive.

Si $R\{x,y\}$ est à la fois symétrique et transitive, on dit que $R\{x,y\}$ est une relation d'équivalence (par rapport aux lettres x et y Dans ce cas, la notation $x \equiv y$ (mod. R) est parfois employée comme synonyme de $R\{x,y\}$ ; elle se lit "x est équivalent à y modulo R (ou suivant R)". Si R est une relation d'équivalence, on a $R\{x,y\} \Longrightarrow (R\{x,x\}$ et $R\{y,y\}$ ).

Soit $R\{x,y\}$ une relation. On dit que la relation R est réflexive dans E (par rapport aux lettres x et y) si les relations $R\{x,x\}$ et $x \in E$ sont équivalentes. S'il n'y a pas de confusion possible, sur E , on dit simplement, par abus de langage, que R est réflexive.

On appelle relation d'équivalence dans E une relation d'équivalence réflexive dans E . Si $R\{x,y\}$ est une relation d'équivalence dans E , on a $R\{x,y\} \Longrightarrow ((x,y) \in E\times E)$, donc R admet un graphe (par rapport aux lettres x et y). Réciproquement, si la relation d'équivalence $R\{x,y\}$ admet un graphe G , la relation $R\{x,x\}$, qui est équivalente à $(\exists y)R\{x,y\}$ , est aussi équivalente à $x\in pr_1 G$ , de sorte que R est une relation d'équivalence dans $pr_1 G$ .

On appelle <u>équivalence</u> dans un ensemble E une correspondance admettant E pour ensemble d'arrivée et pour ensemble de départ, et dont le graphe F est tel que la relation $(x,y)\in F$ soit une relation d'équivalence dans E

<u>Exemples</u>.- 1. La relation $x=y$ est une relation d'équivalence qui n'admet pas de graphe, car la première projection de ce graphe serait "l'ensemble de tous les objets".

2. La relation "$x=y$ et $x\in E$" est une relation d'équivalence dans E dont le graphe est la diagonale de $E\times E$ .

3. La relation "il existe une application ambijective de X sur Y" est une relation d'équivalence qui n'admet pas de graphe.

4. La relation "$x\in E$ et $y\in E$" est une relation d'équivalence dans E dont le graphe est $E\times E$ .

5. Supposons $A\subset E$ . La relation

$$(x\in E-A \text{ et } y=x) \text{ ou } (x\in A \text{ et } y\in A)$$

est une relation d'équivalence dans E .

6. * La relation "$x\in Z$ et $y\in Z$ et $x-y$ est divisible par 4 " est une relation d'équivalence dans Z.*

PROPOSITION 1.- <u>Pour qu'une correspondance</u> $\Gamma$ <u>entre</u> X <u>et</u> X <u>soit une équivalence dans</u> X , <u>il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées</u> : a) X <u>est l'ensemble de définition de</u> $\Gamma$ ; b) <u>on a</u> $\Gamma = \overset{-1}{\Gamma}$ ; c) <u>on a</u> $\Gamma\circ\Gamma = \Gamma$ .

Soient $\Gamma$ une correspondance entre X et X , et G son graphe. Si $\Gamma$ est une équivalence dans X , on a $(x,x)\in G$ pour tout $x\in X$ , donc X est l'ensemble de définition de $\Gamma$ ; la relation $(x,y)\in G$ est équivalente à $(y,x)\in G$ , donc à $(x,y)\in \overset{-1}{G}$ , de sorte que $G = \overset{-1}{G}$ , donc $\Gamma = \overset{-1}{\Gamma}$ ; les relations $(x,y)\in G$ et $(y,z)\in G$ entraînent $(x,z)\in G$ , ce qui montre que $G\circ G\subset G$ ; par ailleurs, la relation $(x,y)\in G$ entraîne $(x,x)\in G$ , donc $(x,y)\in G\circ G$ , de sorte que $G\subset G\circ G$ ; on a donc $G = G\circ G$ , et par suite $\Gamma = \Gamma\circ\Gamma$ . Réciproquement, supposons les conditions a,b,c satisfaites. La relation $(x,y)\in G$ est symétrique en vertu de b) et transitive en vertu de c) ; c'est donc une relation d'équivalence, et il résulte de a) que c'est une relation d'équivalence dans X .

2. <u>Classes d'équivalence</u> ; <u>ensemble quotient</u>.- Soient f une fonction, E son ensemble de définition, F son graphe. Il est immédiat que la relation "$x\in E$ et $y\in E$ et $f(x)=f(y)$" est une relation d'équivalence dans E ; nous dirons que cette relation est la relation d'équivalence <u>associée</u> à f . Elle est équivalente à la relation $(\exists z)((x,z)\in F$ et $(y,z)\in F)$, c'est-à-dire à $(\exists z)((x,z)\in F$ et $(z,y)\in \overset{-1}{F})$ ; son graphe est donc $\overset{-1}{F}\circ F$

Nous allons maintenant montrer que toute relation d'équivalence R dans un ensemble E équivaut à une relation du type précédent. Soit en effet G le graphe de R . Pour tout $x\in E$ , l'ensemble (non vide) $G(x)\subset E$ s'appelle la <u>classe d'équivalence de</u> x <u>suivant</u> R : c'est donc l'ensemble des $y\in E$ tels que $R\{x,y\}$ ; tout ensemble qui peut se mettre sous la forme $G(x)$ pour un $x\in E$ est appelé une classe d'équivalence (suivant R). L'ensemble des classes d'équivalence suivant R (c'est-à-dire l'ensemble des objets de la forme $G(x)$ , pour $x\in E$) s'appelle <u>l'ensemble quotient</u> de E par R et se désigne par $E/R$ ; l'application

$x \to G(x)$ $(x \in E)$ dont l'ensemble de définition est $E$ et l'ensemble des valeurs $E/R$ , s'appelle l'application canonique ou la projection canonique de $E$ sur $E/R$ ; si $f$ désigne cette application canonique, on a donc $f(x)=G(x)$ et par suite $x \in f(x)$ pour tout $x \in E$ ; pour tout $t \in E/R$ , on a $\overset{-1}{f}(t)=t$ . On a alors le critère suivant :

C55. Soient $R$ une relation d'équivalence dans un ensemble $E$ , et $f$ l'application canonique de $E$ sur $E/R$ . On a : $R\{x,y\} \Leftrightarrow (f(x)=f(y))$.

En effet (avec les notations précédentes), soient $x$ et $y$ des éléments de $E$ tels que $(x,y) \in G$ . On a d'abord $x \in E$ et $y \in E$ ; montrons que $G(x)=G(y)$. Puisque $y \in G(x)$, on a (prop.1) $G(y) \subset (G \circ G)(x)=G(x)$ . Par ailleurs, on a aussi $(y,x) \in G$ , d'où $G(x) \subset G(y)$, et par suite $G(x)=G(y)$, c'est-à-dire $f(x)=f(y)$. Réciproquement, si $G(x)=G(y)$ , on a $y \in G(y)=G(x)$, d'où $(x,y) \in G$ , ce qui démontre le critère.

Exemples.- 1) Soit $R$ la relation d'équivalence "$x \in E$ et $y \in E$ et $x=y$" dans un ensemble $E$ ; la classe d'équivalence de $x \in E$ est alors l'ensemble $\{x\}$ , et l'application canonique $x \to \{x\}$ de $E$ sur $E/R$ est biunivoque.

2) Soient $E$ et $F$ deux ensembles, et $R$ la relation d'équivalence (par rapport à $u$ et $v$) "$u \in E \times F$ et $v \in E \times F$ et $pr_1(u)= pr_1(v)$" dans $E \times F$ , associée à la fonction $pr_1$ . Les classes d'équivalence pour $R$ sont les ensembles de la forme $\{x\} \times F$ , où $x \in E$ ; l'application $x \to \{x\} \times F$ est une application biunivoque de $E$ sur $(E \times F)/R$ .

Soit $R$ une relation d'équivalence dans un ensemble $E$ . L'ensemble quotient $E/R$ est une partie de $\mathfrak{P}(E)$, et l'application identique de $E/R$ est une partition de $E$ (§4,n°4) ; en effet, si $G$ est la graphe de $R$ , on a $x \in G(x)$ pour tout $x \in E$ , et si deux classes d'équivalence $G(x)$ et $G(y)$ ont un élément commun $z$ , on a $R\{x,z\}$ et $R\{z,y\}$ , donc $R\{x,y\}$, et par suite $G(x)=G(y)$. En outre, la relation $(\exists X)(X\in E/R$ et $x\in X$ et $y\in X)$ est équivalente à $R\{x,y\}$.

Réciproquement, soit $(X_\iota)_{\iota\in I}$ une partition d'un ensemble $E$ ; on vérifie aussitôt que la relation $(\exists\iota)(\iota\in I$ et $x\in X_\iota$ et $y\in X_\iota)$ est une relation d'équivalence $R$ dans $E$ ; les classes d'équivalence suivant $R$ ne sont autres que les ensembles $X_\iota$ de la partition, et l'application $\iota\to X_\iota$ est une application biunivoque de $I$ sur $E/R$.

3. <u>Relations compatibles avec une relation d'équivalence</u>.– Soient $R\{x,x'\}$ une relation d'équivalence, et $P\{x\}$ une relation. On dit que $P\{x\}$ est <u>compatible avec la relation d'équivalence</u> $R\{x,x'\}$ (par rapport à x), si, y désignant une lettre qui ne figure ni dans $P$, ni dans $R$, la relation

$$(P\{x\} \text{ et } R\{x,y\}) \Rightarrow P\{y\}$$

est vraie.

Par exemple, il résulte de C43 (chap.I, § 5, n°1) qu'une relation $P\{x\}$ est compatible avec la relation d'équivalence $x=x'$.

<u>C56</u>.– <u>Soient</u> $R\{x,x'\}$ <u>une relation d'équivalence dans un ensemble</u> $E$, $P\{x\}$ <u>une relation où ne figure pas la lettre</u> $x'$, <u>compatible</u> (<u>par rapport à</u> $x$) <u>avec la relation d'équivalence</u> $R\{x,x'\}$ ; <u>alors</u>, <u>si</u> $t$ <u>ne figure pas dans</u> $P\{x\}$, <u>la relation</u> "$t\in E/R$ <u>et</u> $(\exists x)(x\in t$ et $P\{x\})$" <u>est équivalente à la relation</u> "$t\in E/R$ et $(\forall x)(x\in t \Rightarrow P\{x\})$".

En effet, soit $t\in E/R$. S'il existe un $a\in t$ tel que $P\{a\}$, pour tout $x\in t$, on a $R\{a,x\}$, donc $P\{x\}$. Donc $(\exists x)(x\in t$ et $P\{x\})$ entraîne $(\forall x)(x\in t \Rightarrow P\{x\})$. La réciproque est évidente.

On dit que la relation "$t\in E/R$ et $(\exists x)(x\in t$ et $P\{x\})$ est la relation déduite de $P\{x\}$ par passage au quotient (par rapport à x) pour la relation $R$. Si on désigne cette relation par $P'\{t\}$, et si $f$ est l'application canonique de $E$ sur $E/R$ , la relation ($y \in E$ et $P'\{f(y)\}$) (où $y$ ne figure pas dans $P\{x\}$) est équivalente à ($y \in E$ et $P\{y\}$) comme on le vérifie aussitôt.

4. Parties saturées.

Soient $R\{x,y\}$ une relation d'équivalence dans un ensemble $E$ , et $A$ une partie de $E$ . On dit que $A$ est *saturé pour* $R$ si la relation $x \in A$ est compatible (par rapport à $x$) avec $R\{x,y\}$ ; il revient au même de dire que, *pour tout* $x \in A$ , *la classe d'équivalence de* $x$ *est contenue dans* $A$ . En d'autres termes, pour qu'un ensemble soit saturé pour $R$ , il faut et il suffit qu'il soit *réunion d'un ensemble de classes d'équivalence suivant* $R$ .

Soit $f$ l'application canonique de $E$ sur $E/R$ ; si $A$ est saturé pour $R$ , la classe d'équivalence de tout élément $x \in A$ , qui n'est autre que $\overset{-1}{f}\langle\{f(x)\}\rangle$ est contenue dans $A$ , donc on a $\overset{-1}{f}\langle f\langle A\rangle\rangle \subset A$ ; comme par ailleurs $A \subset \overset{-1}{f}\langle f\langle A\rangle\rangle$ , on a $A = \overset{-1}{f}\langle f\langle A\rangle\rangle$ . Réciproquement, si $A = \overset{-1}{f}\langle f\langle A\rangle\rangle$ , pour tout $x \in A$ la classe d'équivalence $K=f(x)$ de $x$ pour $R$ est un élément de $f\langle A\rangle$, et comme $K = \overset{-1}{f}\langle K\rangle$ , on a $K \subset \overset{-1}{f}\langle f\langle A\rangle\rangle = A$ . On voit donc que les parties de $E$ saturées pour $R$ sont les parties $A$ de $E$ telles que $A = \overset{-1}{f}\langle f\langle A\rangle\rangle$ . On peut dire aussi que ce sont les parties de $E$ de la forme $\overset{-1}{f}\langle B\rangle$, où $B \subset E/R$ ; en effet, la relation $A = \overset{-1}{f}\langle B\rangle$ entraîne $B=f\langle A\rangle$, d'où $A=\overset{-1}{f}\langle f\langle A\rangle\rangle$.

Si $(X_\iota)_{\iota \in I}$ est une famille de parties saturées de $E$ , les ensembles $\bigcup_{\iota \in I} X_\iota$ et $\bigcap_{\iota \in I} X_\iota$ sont saturés (§ 4, prop. 3 et 4). Si $A$ est une partie saturée de $E$ , il en est de même de $\complement_E A$ (§ 4, prop. ).

Soit maintenant $A$ une partie quelconque de $E$ . L'ensemble $\overset{-1}{f}\langle f\langle A\rangle\rangle$ contient $A$ et est saturé. Réciproquement, si une partie saturée $A'$ de $E$

contient A , on a $f\langle A'\rangle \supset f\langle A\rangle$, d'où $A' = \overset{-1}{f}\langle f\langle A'\rangle\rangle \supset \overset{-1}{f}\langle f\langle A\rangle\rangle$. On peut donc dire que $\overset{-1}{f}\langle f\langle A\rangle\rangle$ est "la plus petite" partie saturée de E contenant A (cf.chap.III) ; cet ensemble est appelé le saturé de A pour la relation R ; il est immédiat que c'est la réunion des classes d'équivalence des éléments de A . Si $(X_\iota)_{\iota\in I}$ est une famille de parties de E , $A_\iota$ le saturé de $X_\iota$ pour R , alors le saturé de $\bigcup_{\iota\in I} X_\iota$ est $\bigcup_{\iota\in I} A_\iota$ (§ 4,prop.3).

5. Applications compatibles avec des relations d'équivalence.

Soient R une relation d'équivalence dans un ensemble E , et f une fonction dont l'ensemble de définition est E . On dit que f est compatible avec la relation R si la relation $y=f(x)$ est compatible (par rapport à x) avec la relation $R\{x,x'\}$. Il revient au même, comme on le voit aussitôt, de dire que la restriction de f à toute classe d'équivalence est une application constante ; on dit encore dans ce cas que f est constante sur toute classe d'équivalence suivant R . La prop.9 du § 3 entraîne aussitôt le critère suivant :

C57.- Soient R une relation d'équivalence dans un ensemble E , et g l'application canonique de E sur E/R . Pour qu'une application f de E dans F soit compatible avec R , il faut et il suffit que f puisse se mettre sous la forme $h\circ g$ , h étant une application de E/R dans F . L'application h est uniquement déterminée par f ; si s est une section associée à g , on a $h = f\circ s$ .

On dit que h est l'application déduite de f par passage au quotient suivant R .

Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F , et soit $A = f\langle E\rangle \subset F$ . Soit R la relation d'équivalence associée à f (n°2) ;

il est clair que $f$ est compatible avec $R$ . En outre, l'application $h$ déduite de $f$ par passage au quotient est une application injective de $E/R$ dans $F$ : en effet, si $t$ et $t'$ sont des classes d'équivalence suivant $R$ telles que $h(t)=h(t')$, on a $f(x)=f(x')$ pour $x \in t$ et $x' \in t'$ , ce qui entraîne $t=t'$ par définition de $R$ . Soit $k$ l'application de $E$ sur $A$ qui a même graphe que $h$ ; $k$ est une application ambijective. Si $j$ est l'injection canonique de $A$ dans $F$ et $g$ la projection canonique de $E$ sur $E/R$ , on peut écrire $f = j \circ k \circ g$ ; cette relation est appelée <u>décomposition canonique de</u> $f$ .

Soient $f$ une application d'un ensemble $E$ dans un ensemble $F$ , $R$ une relation d'équivalence dans $E$ , $S$ une relation d'équivalence dans $F$ . Soient $u$ l'application canonique de $E$ sur $E/R$ , $v$ l'application canonique de $E$ sur $E/R$ , $v$ l'application canonique de $F$ sur $F/S$ . On dit que $f$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & F \arrow[d, "v"] \\ E/R \arrow[r, "h"'] & F/R \end{tikzcd}$$

est <u>compatible avec les relations d'équivalence</u> $R$ <u>et</u> $S$ si $v \circ f$ est compatible avec $R$ ; cela signifie que la relation $x \equiv x'$ (mod.$R$) entraîne $f(x) \equiv f(x')$ (mod.$S$). L'application $h$ de $E/R$ dans $F/S$ déduite de $v \circ f$ par passage au quotient suivant $R$ s'appelle alors aussi <u>l'application déduite de</u> $f$ <u>par passage aux quotients suivant</u> $R$ <u>et</u> $S$ ; elle est caractérisée par la relation $v \circ f = h \circ u$ .

## 6. <u>Image réciproque d'une relation d'équivalence</u> ; <u>relation d'équivalence induite</u>.

Soient $\varphi$ une application d'un ensemble $E$ dans un ensemble $F$ , et $S$ une relation d'équivalence dans $F$ . Si $u$ est l'application canonique de $F$ sur $F/S$ , la relation d'équivalence associée à l'application $u \circ \varphi$

de E dans $F/S$ s'appelle <u>l'image réciproque</u> de S par $\varphi$ ; si R est cette relation, $R\{x,y\}$ est équivalente à $S\{\varphi(x),\varphi(y)\}$ ; les classes d'équivalence suivant R sont les images réciproques par $\varphi$ des classes d'équivalence suivant S qui rencontrent $\varphi(E)$.

En particulier, considérons une relation d'équivalence R dans un ensemble E , et soit A une partie de E ; l'image réciproque de R par l'injection j de A dans E s'appelle la relation d'équivalence <u>induite</u> par R dans A , et se note $R_A$ . Les classes d'équivalence suivant $R_A$ sont les <u>traces</u> sur A des classes d'équivalence suivant R qui rencontrent A . L'injection j est évidemment compatible avec les relations $R_A$ et R ; l'application h de $A/R_A$ dans $E/R$ déduite de j par passage aux quotients suivant $R_A$ et R est une application <u>biunivoque</u> de $A/R_A$ dans $E/R$ : en effet, si f est l'application canonique de E sur $E/R$ , g celle de A sur $A/R_A$ , la relation $h(g(x))=h(g(x'))$, pour $x \in A$ et $x' \in A$ , équivaut à $f(x)=f(x')$, donc à $g(x)=g(x')$. L'image $h\langle A/R_A \rangle$ est égale à $f\langle A \rangle$ h et son application réciproque sont dites <u>canoniques</u>.

## 7. <u>Quotients de relations d'équivalence</u>.

Soient R se S deux relations d'équivalence, par rapport à deux lettres x,y. Nous dirons que S est <u>plus fine</u> que R (ou que R est <u>moins fine</u> que S) si la relation $S \Rightarrow R$ est vraie. Si R et S sont des relations d'équivalence dans un même ensemble E , dire que S est plus fine que R signifie que le graphe de S est contenu dans celui de R , ou encore que toute classe d'équivalence suivant S est contenue dans une classe d'équivalence suivant R ; il revient au même de dire que toute classe d'équivalence suivant R est saturée pour S .

<u>Exemples</u>.- 1) La relation "$x \in E$ et $y \in E$ et $x=y$" est plus fine que toute relation d'équivalence dans $E$ ; la relation "$x \in E$ et $y \in E$" est moins fine que toute relation d'équivalence dans $E$ .

2) Soit $R$ une relation d'équivalence dans $E$ , et $f$ une fonction dont l'ensemble de définition est $E$ . Dire que $f$ est compatible avec $R$ signifie que la relation d'équivalence associée à $f$ est moins fine que $R$ .

Soient $R$ et $S$ deux relations d'équivalence dans un même ensemble $E$ , telles que $S$ soit plus fine que $R$ . Soient $f$ et $g$ les applications canoniques de $E$ sur $E/R$ et de $E$ sur $E/S$ . La fonction $f$ est compatible avec $S$ ; soit $h$ la fonction déduite de $f$ par passage au quotient suivant $S$ ; c'est une application de $E/S$ sur $E/R$ . La relation d'équivalence associée à $h$ dans $E/S$ s'appelle le <u>quotient de</u> $R$ <u>par</u> $S$ et se désigne par $R/S$ ; la relation $x \equiv y$ (mod. $R$) est équivalente à $g(x) \equiv g(y)$ (mod. $R/S$) ; les classes d'équivalence suivant $R/S$ sont les images par $g$ des classes d'équivalence suivant $R$ . Soit $h=j \circ h_2 \circ h_1$ la démonstration canonique (n°5) de l'application $h$ ; $h_1$ est donc l'application canonique de $E/S$ sur $(E/S)/(R/S)$, $j$ est l'application identique de $E/R$, et $h_2$ est une application ambijective de $(E/S)/(R/S)$ sur $E/R$ . L'application $h_2$ et son application réciproque sont dites <u>canoniques</u>.

Considérons inversement une relation d'équivalence quelconque $T$ dans l'ensemble $E/S$ , et soit $R$ la relation d'équivalence dans $E$ , image réciproque par $g$ de la relation $T$ (n°6) ; comme la relation $x \equiv y$ (mod. $R$) est équivalente à $g(x) \equiv g(y)$ (mod. $T$), on voit que $T$ est équivalente à $R/S$ .

## 8. Produit de deux relations d'équivalence.

Soient $R\{x,y\}$ et $R'\{x',y'\}$ deux relations d'équivalence. Désignons par $S\{u,v\}$ la relation

$$(\exists x)(\exists y)(\exists x')(\exists y')(u=(x,x') \text{ et } v=(y,y') \text{ et } R\{x,y\} \text{ et }$$
$$R'\{x',y'\})$$ on vérifie aisément que $S\{u,v\}$ est une relation d'équivalence que l'on appelle *produit* de $R$ et $R'$ et qu'on désigne par $R\times R'$. Supposons que $R$ soit une relation d'équivalence dans un ensemble $E$, et $R'$ une relation d'équivalence dans un ensemble $E'$. La relation $S\{u,u\}$ est alors équivalence à

$$(\exists x)(\exists x')(u=(x,x') \text{ et } R\{x,x\} \text{ et } R'\{x',x'\})$$

c'est-à-dire à $(\exists x)(\exists x')(u=(x,x') \text{ et } x\in E \text{ et } x'\in E')$, donc à $u\in E\times E'$ ; il en résulte que $R\times R'$ est une relation d'équivalence dans $E\times E'$. Si $u=(x,x')$ est un élément de $E\times E'$, la relation $S\{u,v\}$ est équivalente à $(\exists y)(\exists y')(v=(y,y') \text{ et } R\{x,y\} \text{ et } R'\{x',y'\})$ ; si $G$ et $G'$ sont les graphes de $R$ et $R'$, cette relation est encore équivalente à $v\in G(x)\times G'(x')$. *Toute classe d'équivalence suivant* $R\times R'$ *est donc le produit d'une classe d'équivalence suivant* $R$ *et d'une classe d'équivalence suivant* $R'$, *et réciproquement*.

Soient $f$ et $f'$ les applications canoniques de $E$ sur $E/R$ et de $E'$ sur $E'/R'$, et soit $f\times f'$ l'extension canonique de $f$ et $f'$ aux ensembles produits (§ 3, n°7) ; on a donc $f\times f'(x,x')=(f(x),f'(x'))$ pour $(x,x')\in E\times E'$. L'image réciproque par $f\times f'$ d'un élément $(u,u')$ de $(E/R)\times(E'/R')$ n'est autre que le produit $u\times u'$ de la classe d'équivalence $u$ suivant $R$ et de la classe d'équivalence $u'$ suivant $R'$ ; il en résulte que la relation d'équivalence associée à $f\times f'$ est équivalente à $R\times R'$. L'application $f\times f'$ peut donc se mettre sous la forme $h\circ g$, où $g$ est l'application canonique de $(E\times E')/(R\times R')$ et où $h$ est une application biunivoque de $(E\times E')/(R\times R')$ sur $(E/R)\times(E'/R')$ ; cette application et son application réciproque sont dites <u>canoniques</u>.

<u>Remarque</u>.- Soit $P\{x,x'\}$ une relation où ne figurent pas les lettres $y$ et $y'$ ; on dit que $P$ est <u>compatible</u> avec les relations d'équivalence $R\{x,y\}$ et $R'\{x',y'\}$ (par rapport à $x$ et $x'$) si la relation ($P\{x,x'\}$ et $R\{x,y\}$ et $R'\{x',y'\}$) entraîne $P\{y,y'\}$. Soit $Q\{u\}$ la relation $(\exists x)(\exists x')(u=(x,x')$ et $P\{x,x'\})$ ; il revient au même de dire que $Q\{u\}$ est compatible (par rapport à $u$) avec la relation d'équivalence $S\{u,v\}$, produit de $R$ et $R'$.