RÉDACTION N° 168

COTE : NBR 069

TITRE : ALGÈBRE
CHAPITRE II (NOUVELLE VERSION)
ALGÈBRE LINÉAIRE

ASSOCIATION DES COLLABORATEURS DE NICOLAS BOURBAKI

NOMBRE DE PAGES : 83

NOMBRE DE FEUILLES : 83

Archives
M. Cartan - Nov. 1952

NBR 069 168. 2

ALGÈBRE, Chapitre II (Nouvelle version)

Algèbre linéaire.

Sauf mention expresse du contraire, il n'est fait aucune hypothèse particulière sur les anneaux d'opérateurs qui interviennent dans ce chapitre : ils peuvent être commutatifs ou non, avoir ou non un élément unité, contenir ou non des diviseurs de zéro.

Ce chapitre est consacré à l'étude d'une catégorie particulière de groupes abéliens à opérateurs (chap. I, § 6, n°9), qu'on appelle les modules. Certaines propriétés énoncées dans les paragraphes 1,2 et 3 pour les modules valent pour tous les groupes abéliens à opérateurs ; on les signalera au passage. On verra d'ailleurs au Chapitre III que l'étude d'un groupe abélien à opérateurs est toujours équivalente à celle d'un module associé de façon convenable au groupe à opérateurs considéré.

§ 1.- Modules

1. Modules ; espaces vectoriels.

Ce numéro comprend le texte des anciens numéros 1 et 2, amputé du passage suivant : lignes 4 à 8 de la p.3 .

2. Sous-modules, modules quotients.

Soit A un anneau (resp. un anneau avec élément unité), et soit E un A-module (resp. un A-module unitaire). Si M est un sous-groupe de E stable pour les opérateurs de A (chap. I, § 6, n°10), il est immédiat que la structure de A-module de E (resp. sa structure de A-module unitaire) induit sur M une structure de A-module (resp. de A-module unitaire). L'ensemble M , muni de cette structure, est appelé un sous-module de E .

Soit E un A-module unitaire ; considérons sa structure sous-jacente de A-module (au sens de la définition 1) : pour cette structure, les sous-modules de E sont les mêmes que pour la structure de A-module unitaire.

En particulier, tout sous-module d'un espace vectoriel E est un espace vectoriel, qu'on appelle sous-espace vectoriel de E (ou simplement sous-espace de E , lorsqu'aucune confusion n'est à craindre).

Exemples.- (Comme dans l'ancien texte, p.5).

Les propriétés des sous-groupes stables des groupes abéliens à opérateurs sont applicables aux sous-modules d'un module E . En particulier, si M et N sont deux sous-modules de E , leur somme $M+N$ et leur intersection $M \cap N$ sont des sous-modules de E .

(Fin du numéro : comme dans l'ancien texte, 14 dernières lignes de la p.5 et 6 premières lignes de la p.6).

3. Applications linéaires.

DÉFINITION 4.- Soient E et F deux modules par rapport au même anneau A . On appelle application linéaire de E dans F (ou homomorphisme de E dans F) toute représentation (chap.I, §4, n°4) de E dans F .

Autrement dit, une application linéaire de E dans F est une application u telle que

$$\begin{cases} u(x+y) = u(x)+u(y) & \text{pour } x \in E,\ y \in E, \\ u(\lambda . x) = \lambda . u(x) & \text{pour } \lambda \in A,\ x \in E. \end{cases}$$

Remarque.- Lorsque E et F sont des groupes abéliens considérés comme modules sur l'anneau Z (n°1), tout homomorphisme u du groupe E **(sans opérateur) dans le groupe F (sans opérateur) est aussi une** application linéaire de E dans F , car la relation $u(n.x)=n.u(x)$ se démontre par récurrence sur n .

Exemples.- (Comme dans l'ancienne version, p.231, mais en supprimant l'exemple 1).

Rajouter les exemples suivants :

si E est un sous-module de F, l'injection de E dans F est une application linéaire ; et l'application canonique de E sur E/F est une application linéaire.

Toutes les propriétés des représentations des groupes à opérateurs (chap. I, § 6, n^{os} 12 et 13) sont valables pour les applications linéaires. Nous allons en détailler quelques-unes, sans démonstration.

PROPOSITION 1.- Pour qu'une application biunivoque u d'un A-module E sur un A-module F soit un isomorphisme, il faut et il suffit que u soit une application linéaire ; s'il en est ainsi, l'application réciproque est une application linéaire.

Soient maintenant E et F deux A-modules, et u une application linéaire de E dans F. L'ensemble $N = u^{-1}(0)$ est un sous-module de E, qu'on appelle le noyau de l'homomorphisme u. L'image $u(E) \subset F$ est un sous-module de F. Le module-quotient E/N s'appelle la co-image de u ; par passage au quotient, u définit un isomorphisme de la co-image E/N sur l'image $u(E)$. L'homomorphisme u est composé des trois homomorphismes suivants :

$E \longrightarrow E/N$, application canonique d'un module sur son quotient,

$E/N \longrightarrow u(E)$, qui est un isomorphisme,

$u(E) \longrightarrow F$, injection du sous-module $u(E)$ dans le module F.

Cette décomposition s'appelle la décomposition canonique d'un homomorphisme. Enfin, on appelle conoyau de l'homomorphisme u le module quotient $F/u(E)$. Pour que u soit biunivoque, il faut et il suffit que le noyau de u soit nul ; pour que u applique E sur F, il faut et il suffit que le conoyau de u soit nul.

PROPOSITION 2.- Soient E et F deux A-modules, u une application linéaire de E dans F. L'image par u de tout sous-module de E est un sous-module de F ; l'image réciproque u^{-1} de tout sous-module de F est un sous-module de E.

COROLLAIRE.- <u>Si</u> M <u>est le sous-module engendré</u> (chap. I, § 6, n°10) <u>par une partie</u> S <u>de</u> E , u(M) <u>est le sous-module engendré par l'image</u> u(S).

En particulier, si l'image $u(x)$ de tout $x \in S$ est nulle, on a aussi $u(x)=0$ pour tout x du sous-module M engendré par S . Nous nous réfèrerons parfois à ce résultat en invoquant le "<u>principe de prolongement des identités linéaires</u>" ou "<u>principe de prolongement par linéarité</u>" .

PROPOSITION 3.- <u>Soient</u> E,F,G <u>trois</u> A-<u>modules</u>, u <u>une application linéaire de</u> E <u>dans</u> F , v <u>une application linéaire de</u> F <u>dans</u> G . <u>L'application composée</u> $v \circ u$ <u>est une application linéaire de</u> E <u>dans</u> G .

Considérons une suite (finie ou infinie) de A-modules et d'homomorphismes

$$\dots \longrightarrow E \xrightarrow{u} F \xrightarrow{v} G \longrightarrow \dots$$

DEFINITION 5.- <u>On dit qu'une telle suite est exacte si, quels que soient les homomorphismes consécutifs</u> u,v <u>de cette suite, l'image de</u> u <u>est identique au noyau de</u> v .

<u>Exemples</u>.- 1) Soit $u : E \to F$ une application linéaire ; soit N le noyau de u, et C son conoyau. On a une suite exacte

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{i} E \xrightarrow{u} F \xrightarrow{p} C \longrightarrow 0 ,$$

où i désigne l'injection de N dans E , et p l'application canonique de F sur son quotient $F/u(E)$.

2) D'une manière générale, soit donnée une suite exacte $0 \longrightarrow E' \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} E'' \longrightarrow 0$. Alors i est biunivoque et permet d'identifier E' à un sous-module de E ; p applique E sur E" et permet d'identifier E" au module quotient de E par E'.

Considérons une suite exacte

$$E_1 \xrightarrow{u_1} E_2 \xrightarrow{u_2} E_3 \xrightarrow{u_3} E_4 \quad .$$

Il est immédiat que u_2 définit un <u>isomorphisme</u>

$$\text{conoyau de } u_1 \approx \text{ noyau de } u_3 .$$

En particulier, si u_1 et u_3 sont nuls (ce qui arrive notamment lorsque E_1 et E_4 sont réduits à zéro), u_2 est un isomorphisme de E_2 sur E_3.

4. <u>Produits de modules</u>.

Soit (E_α) une famille de modules (resp. de modules unitaires) sur un même anneau A (resp. anneau A avec élément unité). On vérifie immédiatement que, sur l'ensemble produit $E = \prod_\alpha E_\alpha$, le <u>produit</u> des structures de module (resp. de module unitaire) des E_α (chap. I, § 4, n°5) est une structure de A-module (resp. de A-module unitaire). Muni de cette structure, l'ensemble E est appelé le <u>module produit</u> des modules E_α. Si $x=(x_\alpha)$, $y=(y_\alpha)$ sont deux éléments de ce module, on a

$$x+y = (x_\alpha + y_\alpha) , \qquad \lambda . x = (\lambda . x_\alpha) \text{ pour tout } \lambda \in A .$$

En particulier, le produit d'une famille d'espaces vectoriels sur un même corps K est un espace vectoriel sur K.

Un exemple important de produit de modules est celui où tous les modules facteurs E_α sont identiques au module A_s ; si I est l'ensemble des indices α, on désigne ce produit par la notation A_s^I, ou simplement A^I quand aucune confusion n'est à craindre. Les éléments de ce module sont les <u>applications de</u> I <u>dans</u> A.

Toutes les propriétés des produits de groupes à opérateurs établies au Chap. I (§ 6, n^{os}5, 6 et 15) sont applicables aux produits de modules.

Soit E le produit des modules E_α. Pour chaque α, soit p l'application $E \longrightarrow E_\alpha$ qui, à chaque $x = (x_\alpha)$ de E, associe la composante x_α ; l'application p_α est linéaire, et applique E <u>sur</u> E_α.

PROPOSITION 4.- <u>Soit</u> $E = \prod_\alpha E_\alpha$ <u>le produit des modules</u> E_α . <u>Etant donné un module</u> F <u>et une famille d'applications linéaires</u> $f_\alpha : F \to E_\alpha$, <u>il existe une application linéaire</u> f <u>de</u> F <u>dans</u> E <u>et une seule, telle que</u> $p_\alpha \circ f = f_\alpha$ <u>pour tout</u> α .

En effet, une telle f transforme nécessairement l'élément $x \in F$ dans $(f_\alpha(x))$. Effectivement, l'application $x \to (f_\alpha(x))$, qui n'est autre que l'<u>application produit</u> des f_α , <u>est linéaire</u>.

A côté des applications linéaires p_α , considérons les applications linéaires $i_\alpha : E_\alpha \to \prod_\beta E_\beta$ définies comme suit. Pour $y \in E_\alpha$, $i_\alpha(y)$ est l'élément (x_β) tel que $x_\beta = 0$ pour $\beta \neq \alpha$, et $x_\alpha = y$. L'image (biunivoque) de i_α est un sous-module E'_α du produit, dit sous-module <u>composant</u> d'indice α .

5. Sommes, sommes directes.

Soit I un ensemble d'indices quelconque, et soit $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ une famille d'éléments d'un A-module E (ou, plus généralement, d'un groupe abélien à opérateurs). Lorsque l'ensemble J des indices α tels que $x_\alpha \neq 0$ est <u>fini</u>, on convient de noter $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$ et d'appeler <u>somme</u> de la famille $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ la somme $\sum_{\alpha \in J} x_\alpha$. Lorsque $x_\alpha = 0$ pour tout $\alpha \in I$, on a $J = \emptyset$ et par suite (chap. I, § 2, n°1, déf. 2), $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha = 0$. Lorsque I est fini non vide, on retrouve bien la notion de somme d'une famille finie (définie au chap. I). On observera que la somme $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$ est la valeur commune des sommes $\sum_{\alpha \in H} x_\alpha$ pour toutes les parties finies H de I telles que $x_\alpha = 0$ pour $\alpha \notin H$.

Bien entendu, la notation $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$ n'a pas de sens pour une famille (x_α) telle que $x_\alpha \neq 0$ pour une infinité d'indices α , tout au moins tant que E n'est pas muni d'une structure topologique (cf. <u>Top.gén.</u>, chap. III, § 4). Lorsque, dans ce chapitre, nous emploierons la notation $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$, il sera toujours sous-entendu que $x_\alpha = 0$ sauf pour un nombre fini d'indices.

On vérifie aussitôt les formules

$$(1) \qquad \sum_{\alpha \in I} (x_\alpha + y_\alpha) = \sum_{\alpha \in I} x_\alpha + \sum_{\alpha \in I} y_\alpha$$

$$(2) \qquad \sum_{\alpha \in I} (\lambda . x_\alpha) = \lambda . \sum_{\alpha \in I} x_\alpha \quad \text{pour } \lambda \in A .$$

PROPOSITION 5.- *Le sous-module engendré par la réunion d'une famille $(E_\alpha)_{\alpha \in I}$ de sous-modules d'un module E, est identique à l'ensemble des sommes $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$, où $x_\alpha \in E_\alpha$ pour tout α, et $x_\alpha = 0$ sauf pour un nombre fini d'indices.*

En effet, tout sous-module de E qui contient la réunion des E_α contient toutes ces sommes ; d'autre part les formules (1) et (2) montrent que l'ensemble de ces sommes est un sous-module de E.

Lorsque l'ensemble d'indices I est fini, le sous-module engendré par la réunion des E_α n'est autre que la *somme* $\sum_{\alpha \in I} E_\alpha$ des sous-modules E_α. Ce fait justifie la définition générale suivante :

DÉFINITION 6.- *On appelle somme d'une famille quelconque $(E_\alpha)_{\alpha \in I}$ de sous-modules d'un module E, et on note $\sum_{\alpha \in I} E_\alpha$, le sous-module de E engendré par la réunion des E_α.*

DÉFINITION 7.- *On dit que la somme d'une famille $(E_\alpha)_{\alpha \in I}$ de sous-modules d'un module E est directe, si tout élément de cette somme ne peut s'écrire que d'une seule manière sous la forme $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$* (avec $x_\alpha \in E_\alpha$ pour tout α, et $x_\alpha = 0$ sauf pour un nombre fini d'indices).

Cette définition généralise la définition de la somme directe d'une famille *finie* de sous-groupes à opérateurs donnée au Chap. I, § 6, n°6.

Il est immédiat qu'une condition nécessaire et suffisante pour que la somme des sous-modules E_α soit directe, est que la relation $\sum_\alpha z_\alpha = 0$, où $z_\alpha \in E_\alpha$ pour tout α, entraîne $z_\alpha = 0$ pour tout α.

PROPOSITION 6.- Pour que la somme d'une famille $(E_\alpha)_{\alpha \in I}$ de sous-modules d'un module E soit directe, il faut et il suffit que, pour tout $\alpha \in I$, l'intersection de E_α et de la somme des sous-modules E_β d'indice $\beta \neq \alpha$ se réduise à zéro.

La condition est évidemment nécessaire. Elle est suffisante, car la relation $\sum_\alpha z_\alpha = 0$ s'écrit $z_\alpha = \sum_{\beta \neq \alpha} (-z_\beta)$.

Associativité de la somme directe : comme dans l'ancien texte (p.14, lignes 17 à 24).

Si E est somme directe d'une famille (E_α) de sous-modules à tout x E correspond un élément unique (x_α) du produit $\prod_\alpha E_\alpha$, tel que $x_\alpha = 0$ sauf pour un nombre fini d'indices, et $\sum_\alpha x_\alpha = x$. Ceci définit un homomorphisme f (biunivoque) de E dans le produit $\prod_\alpha E_\alpha$. L'image de E par f est la somme directe des sous-modules composants E'_α du produit $\prod_\alpha E_\alpha$.

Ceci conduit à une définition de la somme directe d'une famille de A-modules E_α, lorsqu'on ne suppose plus que les E_α soient des sous-modules d'un module donné à l'avance. Dans le produit $\prod_\alpha E_\alpha$, la somme E des sous-modules composants E'_α est directe. Ainsi E est un module, somme directe de sous-modules E'_α respectivement isomorphes aux E_α. Par abus de langage, on dit que E est somme directe des E_α.

Considérons le cas où tous les E_α sont identiques au module A_s. Soit I l'ensemble des indices α ; on désigne la somme directe des E_α par la notation $A_s^{(I)}$, ou simplement $A^{(I)}$ quand aucune confusion n'est à craindre. Les éléments du module $A^{(I)}$ sont les applications de I dans A, nulles sauf pour un nombre fini d'éléments de I.

D'une manière générale, nous dirons qu'un A-module E est <u>somme directe de A-modules E_α relativement à une famille d'homomorphismes biunivoques</u> $i_\alpha : E_\alpha \to E$, si E est somme directe des images $i_\alpha(E_\alpha)$.

PROPOSITION 7.- <u>Soit</u> E <u>un module, somme directe de modules</u> E_α <u>relativement à des homomorphismes biunivoques</u> $i_\alpha : E_\alpha \to E$. <u>Etant donné un module</u> F <u>et une famille d'applications linéaires</u> $g_\alpha : E_\alpha \to F$, <u>il existe un homomorphisme</u> g <u>et un seul de</u> E <u>dans</u> F , <u>tel que</u> $g \circ i_\alpha = g_\alpha$ <u>pour tout</u> α . (Comparer à la prop.4).

En effet, un tel g satisfait nécessairement à la relation $g(\sum_\alpha i_\alpha(x_\alpha)) = \sum_\alpha g_\alpha(x_\alpha)$. Inversement, cette relation définit bien un homomorphisme g satisfaisant aux conditions voulues.

<u>6. Familles spectrales.</u>

Supposons donnés un A-module E , une famille de A-modules E_α , une famille d'homomorphismes $i_\alpha : E_\alpha \to E$, et une famille d'homomorphismes $p_\alpha : E \to E_\alpha$. Nous dirons que la famille (i_α, p_α) est une <u>famille spectrale</u> si elle satisfait aux relations

(3) $\quad p_\alpha \circ i_\alpha = \text{identité}, \qquad p_\alpha \circ i_\beta = 0 \quad \text{pour} \quad \alpha \neq \beta$.

Dans ce cas, i_α est une application <u>biunivoque</u> de E_α dans E , et p_α est une application de E <u>sur</u> E_α . Etant donnés un autre A-module E', et des homomorphismes $i'_\alpha : E_\alpha \to E'$, $p'_\alpha : E' \to E_\alpha$, formant une famille spectrale, on dit qu'une application linéaire f de E dans E' est compatible avec les familles spectrales si

(4) $\quad i'_\alpha = f \circ i_\alpha \quad , \qquad p_\alpha = p'_\alpha \circ f$.

<u>Exemples</u>.- 1) Soit E le produit d'une famille de modules E_α . Les projections $p_\alpha : E \to E_\alpha$, et les applications $i_\alpha : E_\alpha \to E$ définies au n°4, constituent une famille spectrale, dite <u>canoniquement attachée au produit</u> $\prod_\alpha E_\alpha$.

2) soit E la somme directe d'une famille de A-modules E_α relativement à des homomorphismes biunivoques $i_\alpha : E_\alpha \to E$. Chaque $x \in E$ s'écrit d'une seule manière $\sum_\alpha i_\alpha(x_\alpha)$, où $x_\alpha \in E_\alpha$; l'application $x \to x_\alpha$ est une application linéaire p_α de E sur E_α. La famille (i_α, p_α) est une famille spectrale, dite *canoniquement attachée à la somme directe*.

L'homomorphisme canonique de la somme directe des E_α dans le produit $\prod_\alpha E_\alpha$ (n°5) est évidemment compatible avec les familles spectrales attachées canoniquement à la somme directe et au produit.

PROPOSITION 8.- *Soit donnée une famille spectrale d'homomorphismes* $i_\alpha : E_\alpha \to E$ *et* $p_\alpha : E \to E_\alpha$. *Soit* E' *la somme directe des* E_α, E'' *le produit des* E_α. *Il existe un homomorphisme* g *et un seul* $E' \to E$ *compatible avec les familles spectrales, et un homomorphisme* f *et un seul* $E \to E''$ *compatible avec les familles spectrales* ; g *est biunivoque, et* $g \circ f$ *est l'homomorphisme canonique de la somme directe dans le produit.*

L'existence et l'unicité de g résultent de la prop.7 ; l'existence et l'unicité de f résultent de la prop.4. Le composé $g \circ f$ est compatible avec les familles spectrales, donc c'est l'homomorphisme canonique de la somme directe dans le produit.

Étant donnée une famille spectrale, on peut se demander si E est isomorphe à la somme directe (resp. au produit) des E_α ; d'une façon précise, s'il existe un isomorphisme de E sur la somme directe (resp. le produit) qui soit compatible avec les familles spectrales. Pour cela, il faut et il suffit que l'homomorphisme g (resp. f) soit un isomorphisme sur. On en déduit aussitôt les conditions suivantes :

(P) *pour tout système* $x_\alpha \in E_\alpha$, *il existe un* $x \in E$ *et un seul tel que* $p_\alpha(x) = x_\alpha$ *pour tout* α (condition pour que E soit isomorphe au produit).

(SD) E est engendré par les images $i_\alpha(E_\alpha)$ (condition pour que E soit isomorphe à la somme directe).

Examinons le cas où l'ensemble des indices α est fini. Alors l'homomorphisme de la somme directe des E_α dans le produit $\prod_\alpha E_\alpha$ est un isomorphisme sur. Les conditions (P) et (SD) deviennent donc équivalentes dans le cas d'une famille finie. En outre, chacune d'elles est équivalente à la suivante :

(PSD) $\quad \sum_\alpha i_\alpha \circ p_\alpha = \text{identité}$ (dans le cas d'une famille finie).

En effet, la condition (PSD) exprime précisément que E est la somme des images $i_\alpha(E_\alpha)$.

7. Sous-modules supplémentaires ; facteurs directs.

DÉFINITION 8.- Dans un module E, on dit que deux sous-modules E_1 et E_2 sont supplémentaires, si E est somme directe de E_1 et E_2.

D'après la prop.6, pour que E_1 et E_2 soient supplémentaires, il faut et il suffit que $E_1+E_2=E$ et $E_1 \cap E_2=0$ (cf. aussi chap.I, §6,n°6, prop.7).

PROPOSITION 9.- Soient E_1 et E_2 deux sous-modules supplémentaires de E. La restriction à E_2 de l'application canonique $E \to E/E_1$ est un isomorphisme de E_2 sur E/E_1.

La démonstration est immédiate.

Soient E_1 et E_2 deux sous-modules supplémentaires de E. Soient i_1, i_2, p_1, p_2 les homomorphismes de la famille spectrale qui leur est attachée. Les relations (3) et la condition (PSD) donnent :

$$(5)\quad \begin{cases} p_1 \circ i_1 = \text{identité}, & p_2 \circ i_2 = \text{identité}, \\ p_1 \circ i_2 = 0, & p_2 \circ i_1 = 0, \quad i_1 \circ p_1 + i_2 \circ p_2 = \text{identité}. \end{cases}$$

DÉFINITION 9.- Un endomorphisme u d'un module E est appelé un projecteur si $u \circ u = u$.

Une condition équivalente est que la restriction de u au sous-module image $u(E)$ soit l'application identique.

Si E est somme directe de deux sous-modules E_1 et E_2, posons $u_1=i_1\circ p_1$, $u_2=i_2\circ p_2$; u_1 et u_2 sont deux endomorphismes de E, et, d'après (5), ce sont des projecteurs dont la somme est l'identité. Réciproquement :

PROPOSITION 9 bis.- Soit E un module, et u_1 un projecteur de E. L'endomorphisme u_2 défini par

$$u_2(x) = x-u_1(x)$$

est un projecteur. L'image E_1 de u_1 est le noyau de u_2, l'image E_2 de u_2 est le noyau de u_1, et E est somme directe de E_1 et E_2.

Tout d'abord, on vérifie que $u_2(u_2(x))=u_2(x)$, compte tenu de l'hypothèse $u_1(u_1(x))=u_1(x)$. Si $u_2(x)=0$, alors $x=u_1(x)$ est dans l'image E_1 de u_1 ; réciproquement, E_1 est dans le noyau de u_2, car $u_2\circ u_1=0$. On montre de même que le noyau de u_1 est l'image E_2 de u_2. Enfin, la relation $x=u_1(x)+u_2(x)$ montre que E est la somme de E_1 et de E_2 ; de plus, $E_1\cap E_2$ est l'intersection des noyaux de u_1 et u_2, donc si $x\in E_1\cap E_2$, on a $x = 0+0 = 0$.

DÉFINITION 10.- On dit qu'un sous-module E_1 d'un module E est facteur direct s'il possède un sous-module supplémentaire.

Un sous-module n'admet pas toujours de supplémentaire (cf. exerc. 11 et 26). S'il en possède, il n'est pas en général unique ; toutefois tous les supplémentaires d'un sous-module donné sont isomorphes entre eux, d'après la prop. 9.

PROPOSITION 10.- Pour qu'un sous-module E_1 d'un module E soit facteur direct, il faut et il suffit qu'il existe un projecteur de E dont l'image soit E_1 ; ou encore, qu'il existe un projecteur de E dont le noyau soit E_1.

Les conditions sont nécessaires : prendre les projecteurs $i_1 \circ p_1$, resp. $i_2 \circ p_2$. Elles sont suffisantes, d'après la prop. 9 bis.

PROPOSITION 11.- Soit donnée une suite exacte

(6) $$0 \rightarrow E' \xrightarrow{i'} E \xrightarrow{p''} E'' \rightarrow 0 .$$

Pour que l'image (biunivoque) de i' soit facteur direct de E, il faut et il suffit que soit remplie l'une des deux conditions (équivalentes) suivantes :

(a) il existe un homomorphisme $p' : E \rightarrow E'$ tel que $p' \circ i' =$ identité ;

(b) il existe un homomorphisme $i'' : E'' \rightarrow E$ tel que $p'' \circ i'' =$ identité.

Faisons par exemple la démonstration pour (a). Si (a) est vérifiée, $i' \circ p'$ est un projecteur de E, ayant pour image le sous-module $i'(E')$, qui est donc facteur direct (prop. 10). Inversement, soit u_1 un projecteur de E ayant pour image $i'(E')$; il existe un homomorphisme $p' : E \rightarrow E'$ et un seul, tel que $i' \circ p' = u_1$; en exprimant que u_1 est un projecteur, on trouve que $p' i'$ est l'identité.

Lorsqu'une suite exacte telle que (6) satisfait aux conditions (a) et (b), on dit parfois que c'est une suite exacte décomposée.

8. Combinaisons linéaires ; bases d'un module.

Jusqu'à présent, on n'a pas eu à supposer que les modules envisagés étaient unitaires ; et d'ailleurs tous les résultats étaient valables pour les groupes abéliens à opérateurs. Dans les deux derniers numéros de ce paragraphe, on va donner des développements qui sont valables exclusivement pour les modules unitaires.

DÉFINITION 11.- (Recopier la déf.5, page 9 de l'ancien texte).

(Suivant les lignes 8 à 20 de la p.9 de l'ancien texte ; l'ancienne prop.2 est numérotée prop.12. Rajouter la Remarque de la p.13).

DÉFINITION 12.- Dans un A-module unitaire E , on dit qu'une famille $(a_\iota)_{\iota \in I}$ d'éléments de E est libre si la relation $\sum_{\iota \in I} \lambda_\iota a_\iota = 0$ (où $\lambda_\iota = 0$ sauf pour un nombre fini d'indices) entraîne $\lambda_\iota = 0$ pour tout ι .

(Suit l'ancienne page 10, à partir de la ligne 5 jusqu'à la fin de cette page ; et les 11 premières lignes de la page 11).

DÉFINITION 13.- On appelle base d'un module unitaire E toute famille libre qui engendre E , ou, par abus de langage, toute partie libre de E qui engendre E . On dit qu'un module unitaire est libre s'il possède une base.

Puisque tout groupe abélien G peut être considéré comme un module unitaire sur l'anneau Z des entiers, on a la notion de groupe abélien libre : c'est un groupe abélien G qui, comme Z-module, est un module libre.

Remarques.- 1) toute famille libre d'éléments d'un module unitaire E est une base du sous-module qu'elle engendre. En particulier, la famille vide est une base du sous-module $\{0\}$.

2) Tout élément e_ι d'une base d'un module E est libre. Mais un module libre peut avoir des éléments $\neq 0$ qui ne sont pas libres : par exemple, si l'anneau A admet un élément unité, le A-module A_s est libre, mais les diviseurs de 0 (à droite) de A ne sont pas des éléments libres de A_s .

3) Il existe des modules unitaires non libres. Par exemple, soit n un entier $\geqslant 2$; le groupe additif des entiers modulo n , considéré comme Z-module, ne possède pas de base, car aucun élément de ce module n'est libre. Toutefois, on verra au § 2 que si A est un corps, tout espace vectoriel sur A possède une base.

La définition 13 revient à dire que des éléments $(e_\iota)_{\iota \in I}$ d'un A-module unitaire E forment une base de E si tout $x \in E$ s'écrit d'une seule manière sous la forme $\sum_{\iota \in I} \lambda_\iota e_\iota$, les $\lambda_\iota \in A$ étant nuls sauf un nombre fini. Les λ_ι s'appellent les <u>coordonnées</u> de l'élément x par rapport à la base (e_ι) ; λ_ι est la coordonnée d'indice ι.

L'application $x \rightarrow (\lambda_\iota)$ est un isomorphisme de E sur $A_s^{(I)}$, somme directe d'une famille de modules isomorphes à A_s, indexée par I.

THÉORÈME 1.- <u>Soit E un A-module unitaire ayant une base B. Pour toute application f de B dans un A-module unitaire F, il existe une application linéaire $\bar{f}$ et une seule de E dans F, qui prolonge f.</u>

Soient e_ι les éléments de la base B. L'unicité de $\bar{f}$ est évidente, car on a nécessairement

$$\bar{f}\left(\sum_\iota \lambda_\iota e_\iota\right) = \sum_\iota \lambda_\iota f(e_\iota) . \tag{9}$$

Inversement, la formule (9) définit une application $\bar{f}$ de E dans F, et il est immédiat que cette application prolonge f et est linéaire.

<u>Remarque</u>.- Le cas particulier du théorème 1, relatif au cas d'une base ayant un seul élément, entraîne le cas général, compté tenu de la prop.7.

PROPOSITION 12.- <u>Soit une suite exacte de A-modules unitaires et d'applications linéaires</u>

$$0 \longrightarrow G \xrightarrow{u} F \xrightarrow{v} E \longrightarrow 0 .$$

<u>Si E est un module libre, cette suite exacte est décomposée ; autrement dit, l'image u(G) possède un supplémentaire dans F.</u>

D'après la prop.11, il suffit de montrer l'existence d'une application linéaire $\bar{f}: E \rightarrow F$ telle que $v \circ \bar{f}$ soit l'identité. Or soit B une base de E ; puisque B est dans l'image de v, il existe une application f de B dans F, telle que $v \circ f$ soit l'identité. Soit $\bar{f}$ l'application linéaire de E dans F qui prolonge f (th.1) ; $v \circ \bar{f}$ est une application linéaire de E dans E , égale à l'identité sur B , donc, en vertu de l'unicité affirmée par le th.1, c'est l'identité.

Plus généralement :

PROPOSITION 13.- Soit u une application linéaire d'un module libre E dans un module quotient F/G (G : sous-module de F). Alors u est composée d'une application linéaire $v : E \to F$, et de l'application canonique $F \to F/G$.

On définit d'abord v sur une base de E , ce qui est possible, puis on prolonge v à E , en vertu du th.1 .

9. Module des combinaisons linéaires formelles.

On a vu que si E est un A-module libre de base $(e_\alpha)_{\alpha \in I}$, E est isomorphe au module $A_s^{(I)}$. Inversement, soient I un ensemble quelconque, et A un anneau ayant un élément unité. Soit i_α l'application canonique de A sur le sous-module composant d'indice α du produit A_s^I , et soit e_α l'image par i_α de l'élément unité de A . Il est clair que la famille (e_α) est une base du sous-module $A_s^{(I)}$ de A_s^I : on l'appelle la base canonique de $A_s^{(I)}$. L'application $\alpha \to e_\alpha$ de I sur la base canonique permet d'identifier I à la base canonique de $A_s^{(I)}$. Lorsqu'on fait cette identification, on dit que $A_s^{(I)}$ est le module des combinaisons linéaires formelles des éléments de I , à coefficients dans A .

D'après le théorème 1, toute application f de l'ensemble I dans un A-module unitaire E se prolonge d'une seule manière en une application linéaire $\bar{f}$ du module $A_s^{(I)}$ dans E . Observons qu'une application f de I dans E n'est autre qu'une famille d'éléments du module E , indexée par I . Le noyau N de l'application $\bar{f}$ s'appelle le module des relations entre les éléments de la famille considérée d'éléments de E (indexée par I).

Lorsque cette famille engendre E , on a une suite exacte

$$0 \to N \to A_s^{(I)} \longrightarrow E \to 0 ,$$

qui permet d'identifier E au quotient $A_s^{(I)}/N$. Donc :

THÉORÈME 2.- Tout A-module unitaire est isomorphe à un module quotient d'un A-module libre.

En effet, tout module E possède un système de générateurs, ne serait-ce que l'ensemble de tous les éléments de E .

Le cas où l'ensemble I a un seul élément revient à considérer un élément x d'un A-module unitaire E . Le noyau N se réduit alors à l'idéal à gauche de A , formé des λ tels que $\lambda x = 0$. On l'appelle l'annulateur de l'élément $x \in E$. (Cette définition est valable aussi pour un module non unitaire).

DÉFINITION 14.- On dit qu'un A-module unitaire est monogène s'il est engendré par un de ses éléments.

D'après ce qui précède, un tel module est isomorphe au quotient $A_s/\mathfrak{a}$, où $\mathfrak{a}$ est un idéal à gauche de l'anneau A . Réciproquement, tout quotient $A_s/\mathfrak{a}$ est un module monogène, car il est engendré par la classe de l'élément unité de A .

D'après le th.6 du chap.I, §6, tout sous-module d'un A-module monogène est isomorphe à un module quotient $\mathfrak{b}/\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ désignant deux idéaux à gauche de A tels que $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$. Tout module quotient d'un module monogène $A_s/\mathfrak{a}$ est isomorphe à $A_s/\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}$ désignant un idéal à gauche contenant $\mathfrak{a}$, et est donc monogène.

Il ne faudrait pas croire qu'un sous-module d'un module monogène soit nécessairement un module monogène. Par exemple, les idéaux non principaux d'un anneau commutatif A ayant un élément unité, sont des sous-modules non monogènes du A-module A .

(Les trivialités qui accompagnent la notion d'annulateur, dans l'ancien texte imprimé, page 17, ne me semblent pas devoir être conservées ici. Elles viendront à leur place naturelle dans le Chap. des "anneaux primitifs").

§ 2. Modules semi-simples ; espaces vectoriels.

1. Modules simples.

DÉFINITION 1.- On dit qu'un module E est simple s'il est $\neq 0$ et ne possède pas d'autre sous-module que E et $\{0\}$.

Cette définition est un cas particulier de celle que l'on peut donner pour tout groupe à opérateurs.

Si x est un élément $\neq 0$ d'un module simple E , le sous-module engendré par x est E . Donc tout module simple est monogène ; si E est un A-module simple unitaire, E est, d'après le § 1, n°2, isomorphe à $A_s/\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}$ désignant un idéal à gauche de l'anneau A .

PROPOSITION 1.- Soit A un anneau ayant un élément unité. Pour que le module $A_s/\mathfrak{a}$, où $\mathfrak{a}$ désigne un idéal à gauche de A , soit simple, il faut et il suffit que $\mathfrak{a}$ soit maximal dans l'ensemble des idéaux à gauche $\neq$ A .

Cela résulte du fait que les sous-modules de $A_s/\mathfrak{a}$ sont de la forme $\mathfrak{b}/\mathfrak{a}$, où $\mathfrak{b}$ est un idéal à gauche contenant $\mathfrak{a}$.

En particulier, pour que A_s soit un A-module simple, il faut et il suffit que A soit un corps (d'après le th. du chap. I, §). Dans ce cas, tout module simple est isomorphe à A_s .

2. Modules semi-simples.

On a donné au chap. I une définition d'un groupe à opérateurs semi-simple. Nous allons élargir cette définition dans le cas des modules :

DÉFINITION 2.- On dit qu'un module est semi-simple s'il est somme directe d'une famille (finie ou infinie) de modules simples.

Les principales propriétés des modules semi-simples découlent de la proposition suivante :

PROPOSITION 1.– *Soit E un module, somme (non nécessairement directe) de sous-modules simples S_α $(\alpha \in I)$. Soient F un sous-module de E, et L une partie de I telle que la somme de F et des S_α $(\alpha \in L)$ soit directe. Alors il existe une partie J de I contenant L, telle que E soit ~~une~~ somme directe de F et des S_α $(\alpha \in J)$.*

Désignons pour un instant par P(L) la propriété suivante d'une partie L de I : la somme de F et des S_α $(\alpha \in L)$ est directe. Les parties L qui jouissent de P(L) forment un ensemble ordonné inductif. Il suffira donc de montrer que si J est un élément maximal de cet ensemble, E est somme directe de F et des S_α $(\alpha \in J)$.

On a seulement à prouver que E est somme de F et des S_α $(\alpha \in J)$, et, pour cela, que l'on a $S_\alpha \subset F + \sum_{\beta \in J} S_\beta$ pour tout $\alpha \in I$. C'est trivial si $\alpha \in J$. Si $\alpha \notin J$, la somme de $F + \sum_{\beta \in J} S_\beta$ et de S_α n'est pas directe, puisque J est maximal ; donc l'intersection de S_α et de $F + \sum_{\beta \in J} S_\beta$ n'est pas réduite à $\{0\}$, et puisque S_α est simple, ceci implique que cette intersection est S_α ; c'est ce qu'il fallait démontrer.

Nous allons examiner deux cas particuliers de la prop.1. Supposons d'abord que la somme des S_α $(\alpha \in I)$ soit directe, et que L soit vide ; on obtient :

THÉORÈME 1.– *Soit E un module semi-simple, somme directe d'une famille de sous-modules simples S_α $(\alpha \in I)$. Tout sous-module F de E possède un supplémentaire de la forme $\sum_{\alpha \in J} S_\alpha$, où J est une partie de I.*

COROLLAIRE.– *Le sous-module F est isomorphe à* $\sum_{\alpha \notin J} S_\alpha$.

En effet, F et $\sum_{\alpha \notin J} S_\alpha$ ont même supplémentaire $\sum_{\alpha \in J} S_\alpha$, donc sont tous deux isomorphes au quotient de E par $\sum_{\alpha \in J} S_\alpha$ (§ 1, prop.9).

COROLLAIRE 2.- Si E est un module semi-simple, tout sous-module de E et tout module quotient de E sont semi-simples.

En effet, soit F un sous-module de E. On vient de voir que F est isomorphe à $\sum_{\alpha \notin J} S_\alpha$, et que E/F est isomorphe à $\sum_{\alpha \in J} S_\alpha$.

Examinons maintenant un deuxième cas particulier de la prop.1 : celui où $F = 0$. On trouve :

THÉORÈME 2.- Tout module E, somme de sous-modules simples, est semi-simple. Plus précisément, si E est somme d'une famille de sous-modules simples S_α $(\alpha \in I)$, et si L est une partie de I telle que la somme des S_α $(\alpha \in L)$ soit directe, alors il existe une partie J de I contenant L, telle que E soit somme directe des S_α $(\alpha \in J)$.

3. Caractérisation des modules semi-simples.

PROPOSITION 2.- Pour qu'un module E soit semi-simple, il faut et il suffit qu'il satisfasse à la condition suivante :

(FD) tout sous-module de E est facteur direct.

La condition est nécessaire, d'après le th.1. On va montrer qu'elle est suffisante. Tout d'abord, si E satisfait à la condition (FD), il en est de même de tout sous-module F de E. En effet, soit G un sous-module de F ; il existe un projecteur u de E ayant G pour image ; alors la restriction de u à F est un projecteur de F ayant G pour image, donc G est facteur direct de F.

Montrons maintenant que si F est un sous-module $\neq 0$ de E, F contient un module simple. Soit $x \in F$, $x \neq 0$, et soit G un élément maximal de l'ensemble des sous-modules de F ne contenant pas x. Le module F est somme directe de G et d'un sous-module G', dont on va montrer qu'il est simple. Supposons que G' ne soit pas simple ; alors, en vertu de la propriété (FD), G' serait somme directe de deux sous-modules G'_1 et G'_2 distincts de $\{0\}$, et F serait donc somme directe de G , G_1' et G_2' . La composante de x dans l'un des deux modules G_1' et G_2' n'est pas nulle ; dans G_1' par exemple. Alors $G+G_2'$ ne contient pas x , contrairement à l'hypothèse de maximalité faite sur G ; cette contradiction montre que G' est simple.

Pour montrer que E est semi-simple, il suffit, d'après le th.2, de prouver que E est somme de ses sous-modules simples. Or soit E' la somme des sous-modules simples de E , et supposons $E' \neq E$. Soit F un supplémentaire de E' dans E ; F contient un module simple, d'après ce qui précède, et ceci contre dit la définition de E'. Ceci achève la démonstration.

(Le n°3 pourrait éventuellement être reporté en exercice).

4. Isomorphisme de deux modules semi-simples.

Soit S un module semi-simple, somme directe de modules simples S_i $(i \in I)$, et soit T un module semi-simple, somme directe de modules simples T_k $(k \in K)$. S'il existe une application biunivoque f de I sur K, telle que, pour tout $i \in I$, S_i soit isomorphe à $T_{f(i)}$, les modules S et T sont évidemment isomorphes. On va voir que l'existence d'une telle application f est non seulement suffisante, mais nécessaire pour l'isomorphie des modules S et T .

THÉORÈME 3.- *Soient* E *un module*, $(S_i)_{i \in I}$ *et* $(T_k)_{k \in K}$ *deux familles de sous-modules simples de* E , *telles que* E *soit somme directe des* S_i *et somme directe des* T_k . *Alors il existe une application biunivoque* f *de* I *sur* K , *telle que, pour tout* $i \in I$; S_i *et* $T_{f(i)}$ *soient isomorphes*.

On va se borner à prouver l'existence d'une application biunivoque f de I *dans* K , telle que S_i et $T_{f(i)}$ soient isomorphes pour tout i . Le théorème en résultera ; en effet, pour tout module simple M , l'ensemble I(M) des $i \in I$ tels que S_i soit isomorphe à M aura une puissance au plus égale à celle de l'ensemble $K(M)$ des $k \in K$ tels que T_k soit isomorphe à M. En échangeant les rôles des familles (S_i) et (T_k), il s'ensuivra que $I(M)$ et $K(M)$ sont équipotents, ce qui implique le théorème à démontrer.

On utilisera la notation suivante : pour toute partie J de I, S_J désignera la somme directe $\sum_{i \in J} S_i$; définition analogue de T_L pour $L \subset K$. En outre, dans cette démonstration, on notera J' le complémentaire de J dans I.

Considérons l'ensemble $\mathcal{E}$ des couples (J,f), où J désigne une partie de I, et f une application biunivoque de J dans K, satisfaisant aux deux conditions suivantes :

(a) S_i et $T_{f(i)}$ sont isomorphes pour $i \in J$;

(b) la somme de $S_{J'}$ et de $T_{f(J)}$ est directe (autrement dit, l'intersection de $S_{J'}$ et $T_{f(J)}$ est réduite à $\{0\}$). L'ensemble $\mathcal{E}$ n'est pas vide ; il suffit de prendre $J = \emptyset$. On va montrer que $\mathcal{E}$ contient un couple (J,f) tel que $J=I$, ce qui établira le théorème.

Définissons dans $\mathcal{E}$ une relation d'ordre, en posant $(J_1,f_1) \subset (J_2,f_2)$ si $J_1 \subset J_2$ et f_2 prolonge f_1. Il est immédiat que l'ensemble ordonné $\mathcal{E}$ est inductif. Soit (J,f) un élément maximal de $\mathcal{E}$; il s'agit de montrer que $J=I$.

Supposons $J \neq I$. Soit $i_0 \notin J$, et posons $J_0 = J \cup \{i_0\}$, donc $J'_0 = J' - \{i_0\}$. Appliquons le théorème 1 au sous-module $S_{J'} + T_{f(J)}$ du module $\sum_{k \in K} T_k$; on trouve qu'il existe une partie L de K, contenant $f(J)$, et telle que E soit somme directe de $S_{J'}$ et T_L. Le sous-module $S_{J'_0} + T_L$ a pour supplémentaire S_{i_0}. D'après le théorème 1, il a aussi pour supplémentaire une somme de modules T_k tels que $k \notin L$.

Le module simple S_{i_0} est isomorphe à cette somme, ce qui exige que cette somme ait un seul terme T_{k_0}, avec $k_0 \notin f(J)$. Prolongeons alors f en une application f_0 de J_0 dans K, en posant $f_0(i_0)=k_0$. Il est évident que le couple (J_0,f_0) satisfait aux conditions (a) et (b), donc appartient à l'ensemble $\mathcal{E}$.

On a ainsi prouvé que si $J \neq I$, le couple (J,f) n'est pas un élément maximal de $\mathcal{E}$, ce qui achève la démonstration du théorème.

<u>Remarque</u>.- Lorsque les ensembles I et K sont <u>finis</u>, le théorème 3 résulte de la prop.13, du chap.I, § 6 (n°15), qui est elle-même une conséquence immédiate du théorème de Jordan-Hölder. Le corollaire du th. de Jordan-Hölder (chap.I, § 6, cor. du th.8) montre qu'il est impossible que I soit fini et K infini.

5. <u>Espaces vectoriels</u> : <u>théorèmes fondamentaux</u>.

Jusqu'à la fin de ce paragraphe, on supposera que l'anneau d'opérateurs est un <u>corps</u> K (commutatif ou non).

Soit E un espace vectoriel (à gauche) sur K, et x un élément $\neq 0$ de E. L'application linéaire $\lambda \longrightarrow \lambda x$ de K dans E définit une application linéaire biunivoque du module K_s sur un sous-module simple de E ; c'est le sous-module engendré par x.

Pour qu'une famille d'éléments non nuls x_α ($\alpha \in L$) soit un système <u>libre</u> (§ 1, n°8, déf.12), il faut et il suffit que la somme des sous-modules qu'ils engendrent soit une <u>somme directe</u> : cela résulte immédiatement des définitions.

Appliquons le théorème 2 à un espace vectoriel ; on obtient :

THÉORÈME 4.- <u>Tout espace vectoriel possède une base</u>. D'une façon plus précise : <u>soient</u> I <u>un système de générateurs de</u> E , <u>et</u> L <u>une partie libre de</u> I ; <u>alors il existe une base</u> B <u>de</u> E , <u>telle que</u> $L \subset B \subset I$.

<u>Exemple</u>.- Tout anneau contenant un corps K , et ayant un élément unité identique à l'élément unité de K , est un espace vectoriel sur K , et admet donc une base par rapport à K . En particulier, tout <u>surcorps</u> d'un corps K possède une base par rapport à K . *C'est ainsi que <u>le corps des nombres réels R</u> admet une base (infinie) par rapport <u>au corps des nombres rationnels</u> Q ; une telle base s'appelle <u>base de Hamel</u>. *

Dans le cas général, il faut distinguer entre les deux structures d'espace vectoriel d'un surcorps de K : la structure d'espace vectoriel à gauche, et la structure d'espace vectoriel à droite.

Appliquons maintenant le théorème 1 :

THÉORÈME 5.- <u>Tout sous-espace vectoriel</u> F <u>d'un espace vectoriel</u> E <u>est facteur direct de</u> E . D'une facon précise : <u>si</u> B <u>est une base de</u> E , F <u>possède un supplémentaire ayant pour base une partie de</u> B .

Enfin, le théorème 3 entraîne :

THÉORÈME 6.- <u>Deux bases d'un même espace vectoriel sont équipotentes</u>.

En raison de l'importance de ce théorème, nous allons en donner une nouvelle démonstration dans un cas particulier. D'une façon précise, on va démontrer la proposition suivante :

<u>Si un espace vectoriel</u> E <u>a une base finie de n éléments, toute autre base de</u> E <u>a n éléments</u>.

Dans la démonstration qui suit, on n'utilise pas le théorème 3, mais seulement le th.5, c'est-à-dire en définitive le th.1, de démonstration facile.

Il suffit de montrer ceci : si B et B' sont deux bases de E, et si B a n éléments, B' a au plus n éléments. Cette assertion étant triviale pour $n=0$, on va la prouver par récurrence sur n. Soit donc $n \geqslant 1$; B' n'est pas vide, donc on peut prendre un élément $a \in B'$. En vertu du th.5, il existe une partie C de B, telle que $a \notin C$ et que $\{a\} \cup C$ soit une base de E. Alors C n'est pas une base de E, donc $C \neq B$, et par suite C a au plus $n-1$ éléments. Les sous-espaces engendrés par C et par $B'-\{a\}$ respectivement ont tous deux pour supplémentaire la droite engendrée par a, donc ils sont isomorphes (§ 1, prop.9). En vertu de l'hypothèse de récurrence, ceci implique que $B'-\{a\}$ contient au plus $n-1$ éléments, donc B' contient au plus n éléments.

Remarques.- 1) Cette méthode de démonstration peut, convenablement développée, servir au calcul explicite des coordonnées d'un élément d'une base B par rapport à une base B', quand on se donne explicitement les coordonnées des éléments de B' par rapport à B. Nous développerons ce calcul sous une forme équivalente à propos de la théorie des matrices (§ ,).

2) On peut donner des exemples de modules admettant deux bases finies qui n'ont pas le même nombre d'éléments (cf. exerc.8). Toutefois, on verra au Chap.III que si un module unitaire sur un anneau commutatif A possède une base de n éléments, toute autre base a n éléments.

6. Dimension d'un espace vectoriel.

Le théorème 6 conduit à la définition suivante :

DÉFINITION 3.- On appelle dimension d'un espace vectoriel E sur un corps K, le nombre cardinal d'une base quelconque de E. La dimension se note $\dim_K E$, ou simplement $\dim E$. Si M est une partie quelconque de E, on appelle rang de M la dimension du sous-espace vectoriel engendré par M.

 27

Remarque.- Lorsque E est un surcorps de K , le mot "dimension" et la notation $\dim_K E$ sont à éviter, car ils peuvent prêter à confusion avec un autre sens du mot "dimension" (voir chap.V,). Si on veut éviter toute ambiguité, on dira de préférence rang de E par rapport à K .

Lorsque la dimension d'un espace vectoriel E sur un corps K est finie, on désigne aussi la dimension de E par la notation $[E:K]$.

PROPOSITION 3.- Pour qu'un espace vectoriel à gauche sur K soit de dimension finie n , il faut et il suffit qu'il soit isomorphe à K_s^n . Si $m \neq n$, les espaces K_s^m et K_s^n ne sont pas isomorphes.

Cela résulte aussitôt de la définition de la dimension, et du théorème 6 .

PROPOSITION 4.- Dans un espace vectoriel E de dimension finie n , tout système de générateurs a au moins n éléments ; un système de générateurs de E qui a n éléments est une base de E .

Cela résulte du fait que tout système de générateurs contient une base (th.4) et que toute base a n éléments.

PROPOSITION 5.- Dans un espace vectoriel E de dimension finie n , toute partie libre de E a au plus n éléments ; une partie libre de E qui a n éléments est une base de E .

En effet, toute partie libre est contenue dans une base (th.4) et toute base de E a n éléments.

PROPOSITION 6.- Si un espace vectoriel E est somme directe d'une famille de sous-espaces E_α , on a

$$\dim E = \sum_\alpha \dim E_\alpha .$$

En effet, soit B_α une base de E ; la réunion des B_α est une base de E .

PROPOSITION 7.- Si F est un sous-espace d'un espace vectoriel E, la dimension de F et celle de E/F sont au plus égales à la dimension de E.

En effet, soit G un supplémentaire de F ; G a même dimension que E/F, et par suite la prop.6 entraîne

(1) $\dim F + \dim E/F = \dim E$,

d'où la proposition à démontrer.

PROPOSITION 8.- Si un espace vectoriel E est somme d'une famille de sous-espaces E_α, on a

$$\dim E \leqslant \sum_{\alpha} \dim E_\alpha .$$

Car E est isomorphe à un quotient d'une somme directe de sous-espaces isomorphes aux E_α ; l'assertion résulte alors des prop.6 et 7.

COROLLAIRE.- Si un espace vectoriel E est somme d'une famille finie de sous-espaces de dimension finie, E est de dimension finie.

DÉFINITION 4.- On appelle codimension d'un sous-espace F d'un espace vectoriel E, la dimension de l'espace quotient E/F. On la note $\operatorname{codim}_E F$, ou simplement $\operatorname{codim} F$.

On notera que la codimension de F ne peut être nulle que si $F=E$. Dans tous les cas, la codimension de F est égale à la dimension de tout sous-espace supplémentaire de F. La relation (1) s'écrit

(2) $\dim F + \operatorname{codim}_E F = \dim E$.

Lorsque E est de dimension finie, la prop.7 se complète comme suit :

PROPOSITION 9.- Si E est un espace vectoriel de dimension finie n, la dimension d'un sous-espace F ne peut être égale à n que si $F=E$, et la codimension de F ne peut être égale à n que si $F=\{0\}$.

Cela résulte aussitôt de la relation (2).

PROPOSITION 10.- <u>Soient</u> F' <u>et</u> F'' <u>deux sous-espaces d'un espace vectoriel</u> E . <u>On a les relations</u>

(3) $\quad \dim(F'+F'') + \dim(F' \cap F'') = \dim F' + \dim F''$

(4) $\quad \operatorname{codim}(F'+F'') + \operatorname{codim}(F' \cap F'') = \operatorname{codim} F' + \operatorname{codim} F''$.

En effet, soient : B une base de $F' \cap F''$; B' une base d'un supplémentaire de $F' \cap F''$ dans F' ; B'' une base d'un supplémentaire de $F' \cap F''$ dans F'' ; B_0 une base d'un supplémentaire de $F'+F''$ dans E . Alors $B \cup B'$ est une base de F', $B \cup B''$ est une base de F'', et $B \cup B' \cup B''$ est une base de $F'+F''$; d'où la relation (3). De même, $B_0 \cup B'$ est une base d'un supplémentaire de F'' (dans E), $B_0 \cup B''$ est une base d'un supplémentaire de F', et $B_0 \cup B' \cup B''$ est une base d'un supplémentaire de $F' \cap F''$; d'où la relation (4).

COROLLAIRE.- <u>Si</u> F <u>est l'intersection d'une famille finie de sous-espaces</u> F_i <u>d'un espace vectoriel, on a</u>

$$\operatorname{codim} F \leqslant \sum_i \operatorname{codim} F_i \quad .$$

Démonstration par récurrence sur le nombre des F_i , à partir de la relation (4).

(La fin du numéro, comme dans le texte ancien imprimé : 10 dernières lignes de la p.38, et 13 premières lignes de la p.39).

7. <u>Rang d'une application linéaire</u>.

(Reprendre, à ε près, le texte ancien : pages 39 et 40).

---

§ 3. Module des applications linéaires de E dans F ; dualité.

1. Définition de $\mathcal{L}(E,F)$.

Etant donnés deux A-modules à gauche (resp. à droite) E et F , nous noterons $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F . Lorsqu'il sera bon de préciser que l'anneau d'opérateurs est A , on écrira aussi $\mathcal{L}_A(E,F)$. Si u et v sont deux éléments de $\mathcal{L}(E,F)$, $-u$ et $u+v$ sont aussi des applications linéaires de E dans F ; l'ensemble $\mathcal{L}(E,F)$ est donc muni d'une structure de groupe abélien, sous-groupe de l'ensemble F^E des applications de E dans F muni de la structure de groupe abélien définie par la structure de groupe abélien de F (cf....).

On prendra garde qu'en général, aucune structure de A-module n'est définie dans $\mathcal{L}(E,F)$. Voir le n°2 .

Soient E' et F' deux autres A-modules, et soient données des applications linéaires $f : E' \to E$, $g : F \to F'$. Si, à tout élément $\varphi \in \mathcal{L}(E,F)$, on associe l'élément $g \circ \varphi \circ f$ de $\mathcal{L}(E',F')$, on définit une application $\mathcal{L}(E,F) \to \mathcal{L}(E',F')$, qui est un homomorphisme de groupes abéliens, comme on le vérifie aussitôt. Si on note $\mathcal{L}(f,g)$ cet homomorphisme, on vérifie sans peine que si on a des applications linéaires $f : E' \to E$ et $f' : E'' \to E'$, $g : F \to F'$ et $g' : F' \to F''$, on a

$$\mathcal{L}(f \circ f', g' \circ g) = \mathcal{L}(f',g') \circ \mathcal{L}(f,g) .$$

De plus, si $E=E'$ et $F=F'$, et si f et g sont l'identité, alors $\mathcal{L}(f,g)$ est l'application identique de $\mathcal{L}(E,F)$. Enfin, si f_1 et f_2 sont des applications linéaires de E' dans E , g_1 et g_2 des applications linéaires de F dans F', on a

$$(2)\quad \begin{cases} \mathcal{L}(f_1+f_2,g) = \mathcal{L}(f_1,g)+\mathcal{L}(f_2,g) \\ \mathcal{L}(f,\ g_1+g_2) = \mathcal{L}(f,g_1)+\mathcal{L}(f,g_2)\ , \end{cases}$$

d'où il résulte que $\mathcal{L}(f,g)=0$ dès que f <u>ou</u> g est nul.

On exprime l'ensemble des faits précédents en disant que $\mathcal{L}(E,F)$ est un foncteur additif des A-modules E et F , <u>contravariant</u> en E et <u>covariant</u> en F . On notera que si f est un isomorphisme de E' sur E , et g un isomorphisme de F sur F', $\mathcal{L}(f,g)$ est un isomorphisme de $\mathcal{L}(E,F)$ sur $\mathcal{L}(E',F')$. L'isomorphisme réciproque est $\mathcal{L}(f^{-1},g^{-1})$.

2. <u>Opérateurs dans</u> $\mathcal{L}(E,F)$.

Soit f un endomorphisme du A-module E (c'est-à-dire un endomorphisme du groupe abélien sous-jacent, qui commute avec les "homothéties" de E). D'après la fin du n°1, f définit un endomorphisme du groupe abélien $\mathcal{L}(E,F)$; si f et f' sont deux endomorphismes de E , l'endomorphisme de $\mathcal{L}(E,F)$ associé à f f' s'obtient en effectuant d'abord l'endomorphisme associé à f , ensuite celui associé à f'. Si $f=f_1+f_2$, l'endomorphisme associé à f est la somme des endomorphismes associés à f_1 et f_2. En particulier, si E est muni, non seulement de sa structure de A-module (à gauche ou à droite), mais d'une structure de module <u>à gauche</u> sur un anneau B (de manière que les opérations de A et de B commutent), alors $\mathcal{L}(E,F)$ est muni d'une structure de module <u>à droite</u> sur B ; en explicitant, on a

$$(\varphi.\beta)(x) = \varphi(\beta.x) \qquad \text{pour} \quad \beta\in B\ .$$

De même, si E est muni d'une structure de B-module à droite (de manière que les opérations de A et de B commutent), $\mathcal{L}(E,F)$ est muni d'une structure de B-module à gauche, définie par

$$(\beta.\varphi)(x) = \varphi(x.\beta) \qquad \text{pour} \quad \beta\in B\ .$$

Si la structure de B-module de E est <u>unitaire</u>, $\mathcal{L}(E,F)$ est un B-module unitaire.

Soit maintenant g un endomorphisme du A-module F ; g définit un endomorphisme du groupe abélien $\mathcal{L}(E,F)$. Si g et g' sont deux endomorphismes de F , l'endomorphisme de $\mathcal{L}(E,F)$ associé à $g' \circ g$ s'obtient en effectuant d'abord l'homomorphisme associé à g puis celui associé à g'. Si F est muni d'une structure de C-module <u>à gauche</u> (de manière que les opérations de A et de C commutent), $\mathcal{L}(E,F)$ est muni d'une structure de C-module <u>à gauche</u>. Si C opère à droite dans F, C opère à droite dans $\mathcal{L}(E,F)$. Si F est un C-module unitaire, $\mathcal{L}(E,F)$ est un C-module unitaire.

Supposons enfin que E soit un B-module et F un C-module sous les conditions précédentes. Alors B et C opèrent dans $\mathcal{L}(E,F)$; en outre, tout opérateur de B commute avec tout opérateur de C . En effet, d'une facon généra-le, si f est un endomorphisme du A-module E et g un endomorphisme du A-module F , désignons par f' l'automorphisme identique de E , par g' l'automorphisme identique de F ; alors $\mathcal{L}(f,g')$ et $\mathcal{L}(f',g)$ commutent, car la formule (1) montre que leur composé (dans un ordre quelconque) est $\mathcal{L}(f,g)$.

Soient de nouveau E et F deux A-modules (à gauche par exemple). Si Γ désigne le <u>centre</u> de l'anneau A , les "homothéties" définies dans E par les éléments de Γ sont des endomorphismes de la structure de A-module, puisque $\gamma.(\alpha.x) = \alpha(\gamma.x)$ pour $\alpha \in A$, $\gamma \in \Gamma$. D'après ce qui précède, $\mathcal{L}(E,F)$ possède une structure de Γ-module, définie par les opérations de Γ dans E . De même, les opérations de Γ dans F définissent sur $\mathcal{L}(E,F)$ une structure de Γ-module.
<u>Ces deux structures de Γ-module sont les mêmes</u>, à cause de la relation $\varphi(\gamma.x) = \gamma.\varphi(x)$ pour $\gamma \in \Gamma$.

Ainsi $\mathcal{L}(E,F)$ est canoniquement muni d'une structure de module sur l'anneau (commutatif) Γ , centre de l'anneau d'opérateurs A . Lorsqu'on parlera de la structure de Γ-module de $\mathcal{L}(E,F)$, c'est toujours de cette structure qu'il s'agira.

En particulier, lorsque l'anneau A est commutatif, on a $\Gamma = A$; donc $\mathcal{L}(E,F)$ est un A-module lorsque l'anneau A est commutatif. On a alors

$$(\alpha.\varphi)(x) = \alpha.\varphi(x) = \varphi(\alpha.x) \quad \text{pour } \varphi \in \mathcal{L}(E,F), \quad \alpha \in A, \quad x \in E .$$

Revenons au cas général d'un anneau A quelconque, et de quatre A-modules à gauche E,F,E',F'. Soient de nouveau f une application A-linéaire de E' dans E, et g une application A-linéaire de F dans F'. Supposons que E et E' soient en outre munis d'une structure de B-module à droite (resp. à gauche), les opérations de B commutant avec celles de A , dans E et dans E'.

PROPOSITION 1.- Si l'application A-linéaire f est aussi B-linéaire, l'application $\mathcal{L}(f,g)$ de $\mathcal{L}(E,F)$ dans $\mathcal{L}(E',F')$ est B-linéaire pour les structures de B-module à gauche (resp. à droite) de ces modules.

En effet, soient φ et φ' les endomorphismes de E et E' définis par un même élément de B . Par hypothèse, on a $\varphi \circ f = f \circ \varphi'$; d'où, en notant e l'automorphisme identique de F , et e' l'automorphisme identique de F' :

$$\mathcal{L}(f,g) \circ \mathcal{L}(\varphi,e) = \mathcal{L}(\varphi \circ f,g) = \mathcal{L}(f \circ \varphi',g) = \mathcal{L}(\varphi',e') \circ \mathcal{L}(f,g),$$

ce qu'il fallait démontrer.

Supposons maintenant que F et F' soient des C-modules à gauche (resp. à droite), et que les opérations de C commutent avec celles de A, dans F et dans F'. Alors :

PROPOSITION 1 bis.- Si l'application A-linéaire g est aussi C-linéaire, l'application $\mathcal{L}(f,g)$ de $\mathcal{L}(E,F)$ dans $\mathcal{L}(E',F')$ est C-linéaire pour les structures de C-module à gauche (resp. à droite) de ces modules.

La démonstration est analogue à celle de la prop.1 .

COROLLAIRE.- L'application $\mathcal{L}(f,g)$ de $\mathcal{L}(E,F)$ dans $\mathcal{L}(E',F')$ est linéaire pour les structures de module sur le centre Γ de l'anneau A .

3. Propriétés de $\mathcal{L}(E,F)$ vis-à-vis des suites exactes.

PROPOSITION 2.- Soit $\{0\} \longrightarrow E' \xrightarrow{v} E \xrightarrow{u} E'' \longrightarrow \{0\}$ une suite exacte de A-modules et d'applications linéaires. La suite des homomorphismes associés

$$\{0\} \longrightarrow \mathcal{L}(E'',F) \xrightarrow{\overline{u}} \mathcal{L}(E,F) \xrightarrow{\overline{v}} \mathcal{L}(E',F)$$

est exacte.

Cet énoncé comporte deux affirmations, que nous allons traduire en identifiant E' à un sous-module de E, et E" au module quotient E/E' ; la première dit que l'application $\mathcal{L}(E/E',F) \longrightarrow \mathcal{L}(E,F)$ est biunivoque la deuxième dit que les applications linéaires de E dans F dont la restriction à E' est nulle, sont exactement celles qui sont les images d'éléments de $\mathcal{L}(E'',F)$. L'ensemble de ces deux assertions permet de définir un isomorphisme (dit canonique) du groupe des applications linéaires de E/E' dans F, sur le sous-groupe de $\mathcal{L}(E,F)$ formé des applications linéaires de E dans F dont la restriction à E' est nulle.

Pour démontrer la proposition, observons d'abord que l'application composée $\overline{v}\circ\overline{u}$ est nulle, puisqu'elle est associée à $u\circ v$ qui est nulle. Par conséquent, $\overline{u}$ applique $\mathcal{L}(E'',F)$ dans le noyau N de $\overline{v}$; soit f cette application de $\mathcal{L}(E'',F)$ dans N . On veut montrer que f est un isomorphisme sur. Pour cela, on va définir une application linéaire g de N dans $\mathcal{L}(E'',F)$, telle que $f\circ g$ et $g\circ f$ soient l'identité.

Soit donné un élément de N , c'est-à-dire une application linéaire φ de E dans F , dont la restriction à E' soit nulle. On définit $g(\varphi)\in\mathcal{L}(E'',F)$ comme suit : pour tout $x''\in E''$, soit $x\in E$ tel que $u(x)=x''$; l'élément $\varphi(x)\in F$ ne dépend que de x'', non du choix de x . L'application $x''\rightarrow\varphi(x)$ est une application linéaire de E" dans F ; c'est, par définition, $g(\varphi)$. On vérifie aussitôt que $g(\varphi)$ est une fonction additive de φ . Enfin, il est immédiat que $g\circ f$ est l'application identique de $\mathcal{L}(E'',F)$, et $f\circ g$ l'application identique de N . Ceci achève la démonstration.

On notera que, en général, la suite complète

$$\{0\}\rightarrow\mathcal{L}(E'',F)\rightarrow\mathcal{L}(E,F)\rightarrow\mathcal{L}(E',F)\rightarrow\{0\}$$

<u>n'est pas exacte</u> : l'homomorphisme $\mathcal{L}(E,F)\rightarrow\mathcal{L}(E',F)$ n'est pas, en général, un homomorphisme du premier groupe <u>sur</u> le second. En d'autres termes : si l'on identifie E' à un sous-module de E , une application linéaire de E' dans F ne peut pas toujours se prolonger en une application linéaire de E dans F .

Il y a cependant des cas où ce prolongement est possible :

PROPOSITION 3.- <u>Si une suite exacte</u>

(3) $\{0\}\rightarrow E'\xrightarrow{v}E\xrightarrow{u}E''\rightarrow\{0\}$

<u>est décomposée</u> (autrement dit, <u>si l'image de E' est facteur direct de E</u>), <u>la suite correspondante</u>

(4) $\{0\}\rightarrow\mathcal{L}(E'',F)\xrightarrow{\bar{u}}\mathcal{L}(E,F)\xrightarrow{\bar{v}}\mathcal{L}(E',F)\rightarrow\{0\}$

<u>est exacte</u>. <u>Il en est notamment ainsi lorsque</u> E" <u>est un module libre</u>.

Si la suite exacte (3) est décomposée, on a (§ 1,prop.11) une application linéaire v': $E\rightarrow E'$, telle que $v'\circ v$ soit l'identité .

Il lui correspond un homomorphisme $\overline{v}'$: $\mathcal{L}(E',F) \longrightarrow \mathcal{L}(E,F)$, tel que $\overline{v}\circ\overline{v}'$ soit l'identité, et par conséquent $\overline{v}$ est un homomorphisme de $\mathcal{L}(E,F)$ <u>sur</u> $\mathcal{L}(E',F)$; donc la suite (4) est exacte (et d'ailleurs décomposée). Si E" est libre, la suite exacte (3) est décomposée, en vertu de la prop. 12 du § 1 ; ceci achève la démonstration.

[<u>Exercice</u> : si, pour tout module F , $\overline{v}$ est <u>sur</u>, la suite (3) est décomposée].

On a des propositions analogues aux propositions 2 et 3, mais qui concernent la variable covariante de $\mathcal{L}(E,F)$. D'une façon précise :

PROPOSITION 4.- <u>Soit</u> $\{0\} \longrightarrow F' \xrightarrow{u} F \xrightarrow{v} F'' \longrightarrow \{0\}$ <u>une suite exacte de A-modules et d'applications linéaires. La suite des homomorphismes associés</u>

$$\{0\} \longrightarrow \mathcal{L}(E,F') \xrightarrow{\overline{u}} \mathcal{L}(E,F) \xrightarrow{\overline{v}} \mathcal{L}(E,F'')$$

<u>est exacte</u>.

En effet, l'application $\overline{v}\circ\overline{u}$ est nulle, puisqu'elle est associée à $v\circ u = 0$. Par conséquent, $\overline{u}$ définit une application f de $\mathcal{L}(E,F')$ dans le noyau N de $\overline{v}$. Il faut montrer que f est un isomorphisme sur ; pour cela, on définit une application linéaire g de N dans $\mathcal{L}(E,F')$, telle que $f\circ g$ et $g\circ f$ soient l'identité. On laisse au lecteur le soin d'achever la démonstration.

En général, v <u>n'est pas</u> un homomorphisme de $\mathcal{L}(E,F)$ <u>sur</u> $\mathcal{L}(E,F'')$. En d'autres termes : si l'on identifie F" à un module quotient de F , il peut exister des applications linéaires de E dans le quotient F", qui ne peuvent pas être "remontées" en applications linéaires de E dans F .

PROPOSITION 5.- *Si une suite exacte*

$$(5) \qquad \{0\} \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow F'' \longrightarrow \{0\}$$

est décomposée, la suite correspondante

$$(6) \qquad \{0\} \longrightarrow \mathscr{L}(E,F') \longrightarrow \mathscr{L}(E,F) \longrightarrow \mathscr{L}(E,F'') \longrightarrow \{0\}$$

est exacte. Il en est ainsi, notamment, quand F'' *est libre.*

Démonstration analogue à celle de la prop.3 .

[*Exercice* : si, pour tout module E , $\mathscr{L}(E,F) \longrightarrow \mathscr{L}(E,F'')$ est *sur*, la suite (5) est décomposée] .

PROPOSITION 6.- *Si* E *est un module libre, la suite* (6) *est exacte chaque fois que la suite* (5) *est exacte.*

C'est une conséquence immédiate de la prop.13 du § 1 .

On exprime le contenu des propositions 2 et 4 en disant que $\mathscr{L}(E,F)$ est un foncteur *exact à gauche* : ceci veut dire que, dans chacune des situations des prop.2 et 4, on obtient une suite exacte avec un zéro à gauche (mais pas, en général, avec un zéro à droite).

4. Propriétés de $\mathscr{L}(E,F)$ vis-à-vis des sommes directes et des produits.

Considérons deux familles spectrales de A-modules (cf. § 1, n°6)

$$E_\alpha \xrightarrow{i_\alpha} E \xrightarrow{p_\alpha} E_\alpha \quad , \quad F_\beta \xrightarrow[j_\beta]{} F \xrightarrow{q_\beta} F_\beta \ ,$$

avec

$$(7) \qquad \begin{cases} p_\alpha \circ i_\alpha = \text{identité}, & p_\alpha \circ i_{\alpha'} = 0 \ \text{ si } \ \alpha \neq \alpha' \\ q_\beta \circ j_\beta = \text{identité}, & q_\beta \circ j_{\beta'} = 0 \ \text{ si } \ \beta \neq \beta' . \end{cases}$$

Considérons les homomorphismes $k_{\alpha\beta} = \mathscr{L}(p_\alpha, j_\beta)$, qui envoient $\mathscr{L}(E_\alpha, F_\beta)$ dans $\mathscr{L}(E,F)$; et les homomorphismes $r_{\alpha\beta} = \mathscr{L}(i_\alpha, q_\beta)$ qui envoient $\mathscr{L}(E,F)$ dans $\mathscr{L}(E_\alpha, F_\beta)$. Ce sont des homomorphismes pour la structure de module sur le centre Γ de l'anneau A . On a

$r_{\alpha\beta}\circ k_{\alpha\beta} = \mathscr{L}(p_\alpha\circ i_\alpha, q_\beta\circ j_\beta) =$ identité,

$r_{\alpha\beta}\circ k_{\alpha'\beta'} = \mathscr{L}(p_{\alpha'}\circ i_\alpha\ ,\ q_\beta\circ j_{\beta'}) = 0$ si le couple (α,β) est distinct du couple (α',β').

Par conséquent les homomorphismes $k_{\alpha\beta}$ et $r_{\alpha\beta}$ constituent une famille spectrale ; en particulier, $k_{\alpha\beta}$ permet d'identifier $\mathscr{L}(E_\alpha,F_\beta)$ à un sous-module de $\mathscr{L}(E,F)$, et $r_{\alpha\beta}$ permet d'identifier $\mathscr{L}(E_\alpha,F_\beta)$ à un module quotient de $\mathscr{L}(E,F)$.

On va envisager le cas spécial où la famille spectrale (i_α,p_α) satisfait à la condition (SD) du § 1 (n°6), tandis que la famille spectrale (j_β,q_β) satisfait à la condition (P) (même référence). On dira alors, par abus de langage, que E est <u>somme directe</u> des E_α, et que F est <u>produit</u> des F_β.

PROPOSITION 7.- <u>Si</u> E <u>est somme directe des</u> E_α, <u>et</u> F <u>est produit des</u> F_β, <u>la famille spectrale</u> $(k_{\alpha\beta},r_{\alpha\beta})$ <u>satisfait à la condition</u> (P), <u>et définit donc un isomorphisme de</u> $\mathscr{L}(E,F)$ <u>sur le produit</u> $\prod_{\alpha,\beta}\mathscr{L}(E_\alpha,F_\beta)$.

Donnons-nous en effet arbitrairement un système d'éléments $z_{\alpha\beta}\in\mathscr{L}(E_\alpha,F_\beta)$. On va montrer qu'il existe un homomorphisme f de E dans F, et un seul, tel que $r_{\alpha\beta}(f)=z_{\alpha\beta}$ quels que soient α et β. Pour cela, cherchons $f(x)$ pour un $x\in E$. On a $x=\sum_\alpha i_\alpha(x_\alpha)$, les $x_\alpha\in E_\alpha$ étant nuls sauf un nombre fini ; pour chaque x_α il existe un seul $y_\alpha\in F$ tel que $q_\beta(y_\alpha)=z_{\alpha\beta}(x)$ pour tout β. Si on pose $f(x)=\sum_\alpha y_\alpha$, on définit un homomorphisme f de E dans F, tel que $q_\beta\circ f\circ i_\alpha = z_{\alpha\beta}$; et c'est visiblement le seul possible.

5. <u>Un isomorphisme canonique</u>.

Les numéros précédents (1 à 4) se généralisent à des groupes abéliens à opérateurs. A partir de maintenant, et jusqu'à la fin de ce paragraphe, on supposera d'une manière essentielle qu'il s'agit de modules sur un anneau A .

Soit F un A-module à gauche ; $\mathcal{L}(A,F)$ désignera le module des applications linéaires de A (muni de sa structure de A-module à gauche) dans F . Mais A est aussi un A-module à droite, et les opérations de A à droite commutent avec les opérations de A à gauche. Donc, d'après le n°2, $\mathcal{L}(A,F)$ est un A-module à gauche.

A chaque élément $x \in F$ associons l'application linéaire f_x de A dans F , définie par $f_x(\lambda)=\lambda x$. L'application $x \longrightarrow f_x$ de F dans $\mathcal{L}(A,F)$ est une application linéaire pour les structures de A-module à gauche, comme on le vérifie immédiatement ; on l'appelle l'application canonique de F dans $\mathcal{L}(A,F)$.

Si F est muni en outre d'une structure de B-module (les opérations de B dans F commutant avec celles de A), l'application canonique de F dans $\mathcal{L}(A,F)$ est B-linéaire.

PROPOSITION 8.- Si F est un A-module unitaire, l'application canonique de F dans $\mathcal{L}(A,F)$ est un isomorphisme sur.

En effet, soit φ cette application canonique. Définissons une application ψ : $\mathcal{L}(A,F) \longrightarrow F$, en associant à chaque application linéaire f de A dans F , l'élément $f(1) \in F$. On vérifie aussitôt que $\varphi\circ\psi$ et $\psi\circ\varphi$ sont l'identité ; donc φ est un isomorphisme sur .

Ce qui précède se traduit aisément dans le cas où F est un A-module à droite. Si ce module est unitaire, $\mathcal{L}(A,F)$ est un A-module à droite, canoniquement isomorphe à F .

6. Formes linéaires ; dual d'un module.

Soit E un A-module à gauche ; $\mathcal{L}(E,A)$ désignera le module des applications linéaires de E dans A, A étant muni de sa structure de A-module à gauche. Mais A est aussi un A-module à droite ; donc, d'après le n°2, $\mathcal{L}(E,A)$ est un A-module à droite.

DÉFINITION 1.- Pour tout A-module à gauche E , le A-module à droite $\mathcal{L}(E,A)$ s'appelle le module dual de E (ou simplement le dual de E). Les éléments de $\mathcal{L}(E,A)$ s'appellent les formes linéaires sur E .

Définition analogue dans le cas d'un A-module à droite E ; le dual $\mathcal{L}(E,A)$ est alors un A-module à gauche.

(Placer ici une note de bas de page, comme dans le texte imprimé, p.42).

Exemple.- *Sur l'espace vectoriel (par rapport au corps R) des fonctions numériques continues dans un intervalle $[a,b]$, l'application $x \longrightarrow \int_a^b x(t)dt$ est une forme linéaire.*

Insérer ici les lignes 7 à 21 de la page 43, concernant la forme bilinéaire canonique et la notation $\langle x,x' \rangle$.

Cherchons le dual de E dans le cas où E est l'anneau A muni de sa structure de A-module à gauche. C'est $\mathcal{L}(A,A)$, c'est-à-dire $\mathcal{L}(A,F)$, avec F=A . Si l'anneau A possède un élément unité, le A-module à gauche F=A est unitaire ; d'après la prop.8, $\mathcal{L}(A,A)$ est canoniquement isomorphe à A . Mais puisqu'il s'agit d'un dual, on s'intéresse à la structure de module à droite de $\mathcal{L}(A,A)$ définie par la structure de module à droite de la variable covariante ; par l'isomorphisme de $\mathcal{L}(A,A)$ sur A, cette structure se transporte dans la structure de A-module à droite de A . En résumé :

PROPOSITION 9.- *Si* A *est un anneau avec élément unité, le dual du module* A_s *est canoniquement isomorphe au module* A_d .

Si on identifie A_d au dual de A_s, la forme bilinéaire canonique s'explicite comme suit : pour $x \in A_s$ et $x' \in A_d$, on a

$$\langle x,x' \rangle = xx' \quad \text{(produit dans l'anneau A).}$$

De même, le dual de A_d s'identifie canoniquement à A_s ; avec cette identification, on a, pour $x \in A_d$, $x' \in A_s$:

$$\langle x',x \rangle = x'x \quad .$$

7. Transposition.

Il résulte du n°1 que le dual $\mathcal{L}(E,A)$ d'un A-module à gauche E est un *foncteur contravariant* de E : à chaque application linéaire u de E dans un A-module à gauche F , est associée une application du dual F^* dans le dual E^* , à savoir celle qui, à toute forme linéaire f sur F , associe la forme linéaire $f\,u$ sur E . Cette application de F^* dans E^* n'est autre que $\mathcal{L}(u,g)$, g désignant l'application identique de A dans A . En vertu de la prop.1 bis, cette application est linéaire pour les structures de A-modules à droite des duals $\mathcal{L}(F,A)$ et $\mathcal{L}(E,A)$.

DÉFINITION 2.- *On appelle transposée d'une application linéaire* u *d'un A-module* E *dans un A-module* F , *et on note* ${}^t u$, *l'application* $f \to f\circ u$ *du dual de* F *dans le dual de* E ; *elle est A-linéaire*.

Les relations (1) et (2) du n°1 donnent ici :

$$(12) \qquad {}^t(u\circ v) = {}^t v \circ {}^t u \quad , \qquad {}^t(u_1+u_2) = {}^t(u_1)+{}^t(u_2) \quad .$$

L'application $\mathcal{L}(E,F) \longrightarrow \mathcal{L}(F^*,E^*)$ définie par la transposition est linéaire pour les structures de Γ-module de $\mathcal{L}(E,F)$ et $\mathcal{L}(F^*,E^*)$, Γ désignant le *centre* de A . Autrement dit, on a

$$(13) \qquad {}^t(\gamma u) = \gamma({}^t u) \quad \text{pour} \quad \gamma \in \Gamma \quad .$$

Avec la notation $\langle x,x'\rangle$ de la forme bilinéaire fondamentale, la transposée ${}^t u$ de l'application linéaire $u : E \to F$ est définie par la formule

(14) $\quad \langle u(x),y'\rangle = \langle x,{}^t u(y')\rangle \quad$ pour $\quad x\in E$, $y'\in F^*$.

Conformément à ce qu'on a vu en général (n°1), si u est un isomorphisme de E sur F , ${}^t u$ est un isomorphisme de F^* sur E^* ,et l'isomorphisme réciproque est le transposé de u^{-1} .

DEFINITION 3.- <u>Etant donné un isomorphisme</u> u <u>d'un module</u> E <u>sur un module</u> F , <u>on appelle isomorphisme contragrédient de</u> u (ou <u>application contragrédiente de</u> u), <u>et on note</u> $\check{u}$, <u>le transposé de l'isomorphisme réciproque de</u> u , qui est égal à l'isomorphisme réciproque de ${}^t u$.

L'isomorphisme $\check{u}$ est donc caractérisé par l'identité

(15) $\quad \langle u(x),\check{u}(x')\rangle = \langle x,x'\rangle \quad$ pour $\quad x\in E$, $x'\in E^*$.

L'isomorphisme contragrédient de $u\circ v$ est $\check{u}\circ\check{v}$ (si v est un isomorphisme de E sur F , et u un isomorphisme de F sur G).

8. Dual d'un quotient, dual d'une somme directe.

Appliquons la proposition 2 (n°3) au cas particulier où F est l'anneau A, muni de sa structure de A-module à gauche :

PROPOSITION 10.- <u>Soit</u> $0 \to E_1 \xrightarrow{v} E \xrightarrow{u} E_2 \to 0$ <u>une suite exacte de A-modules à gauche et d'applications linéaires</u>. <u>La suite des applications transposées</u>

$$0 \to (E_2)^* \xrightarrow{{}^t u} E^* \xrightarrow{{}^t v} (E_1)^*$$

<u>est exacte</u>.

Lorsqu'on identifie E_1 à un sous-module de E , et E_2 à E/E_1 , la prop.10 permet d'identifier le dual de E/E_1 à un sous-module du dual de E , formé des formes linéaires (sur E) qui s'annulent sur E_1 .

En général, t_v n'est pas une application de E^* sur $(E_1)^*$.

Appliquons maintenant la proposition 7 :

PROPOSITION 11 .- Si un module E est somme directe de modules E_α relativement à une famille d'applications biunivoques i_α , les trans- transposées $^t(i_\alpha)$ définissent un isomorphisme du dual E^* sur le produit $\prod_\alpha (E_\alpha)^*$.

Si on identifie E au sous-module du produit $\prod_\alpha E_\alpha$ formé des systèmes (x_α) tels que $x_\alpha \in E_\alpha$ et $x_\alpha = 0$ sauf pour un nombre fini d'indices, et si on identifie le dual de E au produit des duals $(E_\alpha)^*$, la forme bilinéaire fondamentale définissant la dualité est donnée par la formule

$$(16) \qquad \langle (x_\alpha),(x'_\beta) \rangle = \sum_\alpha \langle x_\alpha, x'_\alpha \rangle .$$

La proposition 11 trouve à s'appliquer lorsque E est un module unitaire ayant une base (e_α). La donnée de cette base définit un isomorphisme de E sur la somme directe $A_s^{(I)}$, I désignant l'ensemble d'indices de la base. D'après la prop.11 et la prop.9, le dual de $A_s^{(I)}$ est canoniquement isomorphe au produit A_d^I . Soit, dans le dual E^* de E , e'_α l'élément qui correspond canoniquement à l'élément de A_d^I dont toutes les composantes sont nulles sauf celle d'indice α égale à 1 . D'après (16), les e'_α sont caractérisés par les relations

$$(17) \qquad \langle e_\alpha, e'_\beta \rangle = 0 \quad \text{si} \quad \alpha \neq \beta \ , \ 1 \text{ si } \alpha = \beta \ .$$

Examinons le cas particulier où E est un module libre ayant une base finie (e_α) . L'ensemble d'indices I est alors fini, et les e'_α constituent unee base de E^* . Donc :

PROPOSITION 12.- Le dual d'un module libre ayant une base formée de n éléments est un module libre ayant une base formée de n éléments.

DÉFINITION 4.- Si E est un module libre ayant une base finie (e_α), on appelle base duale la base (e'_α) du module dual définie par les formules (17).

9. Bidual.

Soit E un A-module à gauche ; son dual E^* est un A-module à droite, donc il possède un dual $(E^*)^*$, noté aussi E^{**}, qui est un A-module à gauche. On l'appelle le bidual de E. Associons à chaque $x \in E$ la forme linéaire sur E^* définie par $x' \to \langle x, x' \rangle$. On définit ainsi une application, dite canonique, de E dans E^{**} ; il est immédiat qu'elle est linéaire pour les structures de A-module à gauche.

Le bidual E^{**} est un foncteur covariant de E : si on a une application linéaire u de E dans un module F, il lui correspond une application linéaire de E^{**} dans F^{**}, à savoir la transposée de la transposée ${}^t u$. On notera que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{u} & F \\ \downarrow & & \downarrow \\ E^{**} & \xrightarrow{{}^t{}^t u} & F^{**} \end{array}$$

les flèches verticales désignant les homomorphismes canoniques qui viennent d'être définis.

Examinons le cas particulier où E est le module A_s (l'anneau A ayant un élément unité) ; alors E^* est canoniquement isomorphe à A_d (prop.9), donc E^{**} est canoniquement isomorphe à A_s. Si on identifie ainsi E^{**} à A_s, l'application canonique de E dans E^{**} devient l'application identique de A_s dans A_s. En effet, elle associe à $x \in A_s$ l'application $x' \to xx'$ de A_d dans A, c'est-à-dire l'élément du dual A_s de A_d défini précisément par l'élément $x \in A_s$.

De ce cas on passe aisément à celui où E est un module libre ayant une base finie : une telle base (e_α) permet d'identifier E à A_s^I , dont le dual est A_d^I , et dont le bidual est donc A_s^I ; l'application canonique de E dans son bidual E^{**} est l'application identique de A_s^I . Ainsi :

PROPOSITION 13.- Lorsque E est un module libre de base finie, l'application canonique de E dans son bidual E^{**} est un isomorphisme de E sur E^{**} .

Si on identifie E^{**} à E par cet isomorphisme, les formules (17) montrent que si (e'_α) est la base duale de la base finie (e_α), la base duale de (e'_α) est (e_α) .

Soit F un autre module libre de base finie, et identifions aussi F à F^{**} . Si u est une application linéaire de E dans F , la transposée $^t(^tu)$ devient une application de E dans F ; la relation (14) montre que

$$\langle {}^{tt}u(x), y' \rangle = \langle u(x), y' \rangle \quad \text{pour } x \in E , \ y' \in F^* ,$$

d'où il résulte facilement que $^{tt}u = u$; la transposée de ^tu est identique à u .

10. Dual d'un espace vectoriel.

THÉORÈME 1.- La dimension du dual E^* d'un espace vectoriel E est au moins égale à la dimension de E . Si E est de dimension finie n , E^* est aussi de dimension n .

En effet, E possède une base $(e_\alpha)_{\alpha \in I}$, et est donc isomorphe à $K_s^{(I)}$, K désignant le corps d'opérateurs. D'après la prop.11 et la prop.9, le dual de E est isomorphe au produit K_s^I . Or $K_s^{(I)}$ se plonge canoniquement dans K_s^I , et par suite E est isomorphe à un sous-espace de E^* (cet isomorphisme dépend d'ailleurs du choix de la base de E). D'après la prop.7 du § 2, la dimension de E est au plus égale à celle de E^* .

Si E est de dimension finie, la proposition 12 est applicable, et montre que E^* a même dimension que E .

COROLLAIRE.- *Pour un espace vectoriel* E , *les conditions* $E=\{0\}$ *et* $E^*=\{0\}$ *sont équivalentes.*

Rappelons que, dans un espace vectoriel, tout sous-espace est facteur direct (§ 2,th.5). Alors les propositions 3 et 5 entraînent immédiatement:

THÉORÈME 2.- *Si on a des suites exactes d'espaces vectoriels (sur un même corps* K*) et d'applications linéaires*

$$0 \to E_1 \to E \to E_2 \to 0$$

$$0 \to F_1 \to F \to F_2 \to 0 \quad ,$$

les suites qui leur correspondent

$$0 \to \mathcal{L}(E_2,F) \to \mathcal{L}(E,F) \to \mathcal{L}(E_1,F) \to 0$$

$$0 \to \mathcal{L}(E,F_1) \to \mathcal{L}(E,F) \to \mathcal{L}(E,F_2) \to 0$$

sont exactes.

COROLLAIRE.- *Pour toute suite exacte* $0 \to E_1 \xrightarrow{v} E \xrightarrow{u} E_2 \to 0$, *la suite des applications transposées* $0 \to (E_2)^* \xrightarrow{u} E^* \xrightarrow{{}^t v} (E_1)^* \to 0$ *est exacte.*

Ce corollaire montre que si on identifie E_1 à un sous-espace vectoriel de E , le dual $(E_1)^*$ s'identifie au quotient de E^* par le sous-espace $(E_2)^*$ des formes linéaires (sur E) qui s'annulent sur E_1 . Il prouve aussi que toute forme linéaire sur E_1 est induite par une forme linéaire sur E .

THÉORÈME 3.- *L'application canonique d'un espace vectoriel* E *dans son bidual* E^{**} *est biunivoque ; si* E *est de dimension finie, c'est un isomorphisme de* E *sur* E^{**} .

La première assertion signifie que si un $x \in E$ est tel que toute forme linéaire s'annule sur x, alors $x=0$. Et en effet, si E_1 désigne le sous-espace engendré par x, on sait que toute forme linéaire sur E_1 est induite par une forme linéaire sur E ; l'hypothèse entraîne donc que le dual de E_1 est nul, et par suite (cor. du th.1) E_1 est réduit à 0. D'autre part, si E est de dimension finie, la prop.13 lui est applicable, d'où la deuxième assertion du théorème à démontrer.

11. Transposition dans les espaces vectoriels.

Soient E et F deux espaces vectoriels sur le corps K, et u une application linéaire de E dans F. Désignons par I l'image de u, par N et C le noyau et le conoyau de u. On a des suites exactes

(18) $\quad 0 \to N \to E \to I \to 0 , \quad 0 \to I \to F \to C \to 0 .$

En transposant, on obtient, d'après le cor. du th.2, des suites exactes

(19) $\quad 0 \to C^* \to F^* \to I^* \to 0 , \quad 0 \to I^* \to E^* \to N^* \to 0 .$

L'application composée de $F^* \to I^*$ et $I^* \to E^*$ est la transposée ${}^t u$ de u. Les suites exactes (19) définissent donc des isomorphismes (canoniques) de C^* sur le noyau de ${}^t u$, de I^* sur l'image de ${}^t u$, et de N^* sur le conoyau de ${}^t u$. Ainsi :

THÉORÈME 4.- *Si u est une application linéaire d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F, le noyau de la transposée ${}^t u$ est canoniquement isomorphe au dual du conoyau de u ; le conoyau de ${}^t u$ est canoniquement isomorphe au dual du noyau de u ; l'image de ${}^t u$ est canoniquement isomorphe au dual de l'image de u.*

Compte tenu du cor. du th.1, on obtient :

COROLLAIRE 1.- *Pour que u soit biunivoque, il faut et il suffit que ${}^t u$ soit une application de F^* sur E^*.*

COROLLAIRE 2.- <u>Pour que</u> u <u>soit une application de</u> E <u>sur</u> F , <u>il faut et il suffit que</u> ${}^t u$ <u>soit biunivoque</u>.

COROLLAIRE 3.- <u>Le rang de</u> ${}^t u$ <u>est au moins égal au rang de</u> u , <u>et lui est égal si ce rang est fini</u>.

Pour obtenir le corollaire 3 du théorème 4, il suffit d'appliquer le th.1 à l'image de u .

<u>Remarque</u>.- Le fait que le noyau de ${}^t u$ est canoniquement isomorphe au dual du conoyau de u , est vrai pour des modules sur un anneau quelconque.

12. <u>Orthogonalité</u>.

Nous dirons que deux A-modules (à gauche ou à droite) E et E' <u>sont en dualité</u> si l'on s'est donné une application d de l'ensemble $E \times E'$ dans l'anneau A , satisfaisant aux mêmes conditions que la "forme bilinéaire canonique" entre un module et son dual, à savoir :

pour chaque $x' \in E'$, $d(x,x')$ est une fonction linéaire de x ;

pour chaque $x \in E$, $d(x,x')$ est une fonction linéaire de x' .

Le système formé d'un A-module à gauche E , de son dual E^*, et de la forme bilinéaire canonique, donne un exemple de couple de modules en dualité.

Supposons donnés E et E' en dualité par une fonction $d(x,x')$. On dit que deux éléments $x \in E$ et $x' \in E'$ sont <u>orthogonaux</u> si $d(x,x')=0$; qu'une partie $M \subset E$ et une partie $M' \subset E'$ sont orthogonales si tout élément de M et tout élément de M' sont orthogonaux. Etant donnée une partie M de E , l'ensemble des $x' \in E'$ orthogonaux à M (c'est-à-dire orthogonaux à tous les éléments de M) est évidemment un <u>sous-module</u> de E'. Dans cette assertion, on peut évidemment échanger les rôles de E et de E'.

Les faits suivants sont évidents : si $M \subset N$, le sous-module orthogonal à M contient le sous-module orthogonal à N . Le sous-module orthogonalà la réunion d'une famille de parties M_α est l'intersection des sous-modules orthogonaux aux M_α . Si M' est le sous-module orthogonal à une partie $M \subset E$, le sous-module M'' de E , orthogonal à M', contient M ; M'' peut être distinct de M , même lorsque M est déjà un sous-module (cf. exercices ...). Le sous-module orthogonal à M'' est toujours M' .

Supposons désormais que E soit un <u>espace vectoriel</u> (à gauche) sur un corps K , et que E' soit le dual E^*, la fonction d étant la forme bilinéaire fondamentale. Si F est un sous-espace de E, son orthogonal dans E^* est canoniquement isomorphe au dual de E/F (prop.10).

THÉORÈME 5.- <u>Pour tout sous-espace</u> F <u>de l'espace vectoriel</u> E , <u>soit</u> $O(F)$ <u>son orthogonal dans le dual</u> E^*. <u>Alors</u> :

(a) <u>la dimension de</u> $O(F)$ <u>est au moins égale à la codimension de</u> F , <u>et lui est égale si la codimension de</u> F <u>est finie</u> ;

(b) <u>l'orthogonal de</u> $O(F)$ <u>est</u> F ;

(c) <u>tout sous-espace</u> F' <u>de dimension finie de</u> E^* <u>est l'orthogonal d'un sous-espace</u> F <u>de</u> E (de codimension finie et égale à la dimension de F').

Démontrons (a). D'après le th.1, la dimension de $(E/F)^*$ est au moins égale à celle de E/F , et lui est égale si E/F est de dimension finie. Comme $O(F) \approx (E/F)^*$, on obtient (b).

Démontrons (b). L'orthogonal F_1 de $O(F)$ contient F, et $O(F_1)=O(F)$. Il s'ensuit que l'application $(E/F_1)^* \longrightarrow (E/F)^*$ est un isomorphisme sur. D'après les cor.1 et 2 du th.4, l'application $E/F \rightarrow E/F_1$ est un isomorphisme sur, donc $F=F_1$.

Démontrons (c). Soit F' un sous-espace de dimension finie de E^*. Son orthogonal F est de codimension p au plus égale à la dimension p' de F' ; en effet, soient p' éléments $e'_i \in E^*$ formant une base de F' ; F est le noyau de l'application $x \to (\langle x, e'_i \rangle)$ de E dans $K^{p'}$, application dont le rang est au plus égal à p'. Or ce rang est la codimension de F (§ 2, n°7, prop.). Considérons maintenant l'orthogonal $O(F)$, qui est de dimension p d'après (b). Puisque $O(F)$ contient F' et est de dimension p inférieure à la dimension de F', il s'ensuit que $p=p'$, et $O(F)=F'$, ce qui achève la démonstration.

COROLLAIRE 1.- *Si un sous-espace* F *de* E *est défini comme l'ensemble des zéros communs à un système fini de formes linéaires* x'_i , *toute forme linéaire qui s'annule sur* F *est combinaison linéaire des* x'_i . (conséquence immédiate de (c)).

COROLLAIRE 2.- *Soit* E *un espace vectoriel de dimension finie* n , *et soit* E^* *son dual. Pour tout sous-espace* F *de* E , *de dimension* $n-p$, *l'orthogonal* $O(F)$ *est de dimension* p , *et* F *est l'orthogonal de* $O(F)$. *Pour tout sous-espace* F' *de* E^* , *de dimension* p , *l'orthogonal* $O(F')$ *est de dimension* $n-p$, *et l'orthogonal de* $O(F')$ *est* F .

COROLLAIRE 3.- *Soient* F_1 *et* F_2 *deux sous-espaces de* E , *de codimensions finies ; l'orthogonal* $O(F_1 \cap F_2)$ *est la somme* $O(F_1)+O(F_2)$.

Il suffit de montrer que la codimension de $F_1 \quad F_2$ est finie, et égale à la dimension de $O(F_1)+O(F_2)$, car ce dernier est contenu dans l'orthogonal $O(F_1 \cap F_2)$, et il suffira alors d'appliquer (a). Or on a les relations

$$\mathrm{codim}(F_1 \cap F_2) = \mathrm{codim}\, F_1 + \mathrm{codim}\, F_2 - \mathrm{codim}(F_1+F_2)$$

$$\dim(O(F_1)+O(F_2)) = \dim O(F_1)+\dim O(F_2)-\dim(O(F_1)\cap O(F_2))$$

en vertu de la prop.10 du § 2 . Les termes des deux seconds membres sont respectivement égaux, car $O(F_1) \cap O(F_2)$ est l'orthogonal de F_1+F_2 . Donc les premiers membres sont égaux, ce qu'il fallait démontrer.

Le th.5 permet de caractériser les hyperplans d'un espace vectoriel E , c'est-à-dire les sous-espaces de codimension 1 :

PROPOSITION 14.- Pour tout hyperplan H de l'espace vectoriel E , il existe une forme linéaire x' telle que H soit l'ensemble des zéros de x' ; cette forme linéaire est unique à un facteur scalaire non nul près. Réciproquement, pour toute forme linéaire x' non identiquement nulle, l'ensemble des zéros de x' est un hyperplan.

En effet, on n'a fait que traduire (a) et (b) pour un F de codimension 1, et (c) pour un F' de dimension 1 .

Si H est un hyperplan, et x' une forme linéaire non identiquement nulle s'annulant sur H , on dit que la relation $x'(x)=0$, qui caractérise les éléments x de H , est une équation de H . Plus généralement, si (x'_α) est une famille de formes linéaires sur E , et si F désigne le sous-espace vectoriel des $x \in E$ tels que $x'_\alpha(x)=0$ pour tout α , on dit que les relations $x'_\alpha(x)=0$ forment un système d'équations du sous-espace F . D'après le th.5, (b), tout sous-espace vectoriel F de E peut être défini par un système d'équations. Si F est de codimension finie p , F peut être défini par un système de p équations dont les premiers membres sont des formes linéairement indépendantes ; cela résulte des points (a) et (b) du th.5 . Réciproquement, tout système de p équations dont les premiers membres sont des formes linéairement indépendantes, définit un sous-espace de codimension p , d'après la partie (c) du th.5 .

13. Equations linéaires.

On peut reprendre, tel quel ou à peu près, l'ancien n°7, pp.51-54. (On demande la signification du n°2 placé devant l'exemple de la page 53, en petits caractères).

14. Equations linéaires dans les espaces vectoriels.

Soit une équation linéaire $u(x)=y_0$, u désignant une application linéaire de l'espace vectoriel E dans l'espace vectoriel F , et y_0 un point donné de F . On peut appliquer à u le théorème 4 et ses corollaires. Avec les notations utilisées dans la démonstration du th.4, soit I l'image u(E) ; cherchons à quelle condition y_0 appartient à I . Pour cela, il faut et il suffit que y_0 soit orthogonal aux formes linéaires qui s'annulent sur I (d'après le th.5, (b)) ; mais on a vu, dans la démonstration du th.4, que l'ensemble des formes linéaires qui s'annulent sur I est C^* , noyau de l'application transposée ${}^tu$ de F^* dans E^* . Ainsi :

PROPOSITION 15.- Pour que l'équation $u(x)=y_0$ ait au moins une solution, il faut et il suffit que y_0 soit orthogonal au noyau de l'application transposée ${}^tu$.

Bornons-nous désormais à l'étude des systèmes d'équations linéaires scalaires

(n) $$\langle x,x'_\iota\rangle = \eta_\iota \qquad (\iota \in I)$$

c'est-à-dire, en explicitant à l'aide d'une base :

(n+1) $$\sum_{\lambda\in L} \xi_\lambda \alpha_{\lambda\iota} = \eta_\iota \qquad (\iota\in I) ,$$

où les coefficients et les inconnues sont dans le corps K .

DÉFINITION 5.- Etant donné un système d'équations linéaires (n), où l'inconnue x est dans un espace vectoriel E , et les x'_ι sont dans le dual E^* de E , on appelle rang de ce système la dimension du sous-espace F' de E^* engendré par les x'_ι .

Lorsque ce rang est fini, c'est aussi le rang de l'application linéaire $x \longrightarrow (\langle x, x'_\iota \rangle)$ de E dans K_s^I. En effet, le noyau de cette application est l'orthogonal F de F' ; la codimension de ce noyau est d'une part égale au rang de l'application, d'autre part, en vertu du th.5, égale à la dimension de F'.

THÉORÈME 6.- *Soit*

$$(n) \qquad \langle x, x'_\iota \rangle = \eta_\iota \qquad (\iota \in I)$$

un système d'équations linéaires scalaires où l'inconnue x *est dans un espace vectoriel* E, *sur un corps* K, *et les* x'_ι *dans le dual* E^*. *Pour que ce système ait au moins une solution, il faut que toute relation* $\sum_\iota x'_\iota \lambda_\iota = 0$ *à coefficients* λ_ι *dans* K (nuls sauf un nombre fini) *entraîne* $\sum_\iota \eta_\iota \lambda_\iota = 0$. *Si le rang du système* (n) *est fini, cette condition nécessaire est aussi suffisante.*

La condition est évidemment nécessaire. Elle exprime qu'il existe une application linéaire f du sous-espace F' de E^*, engendré par les x'_ι, dans le corps K, application qui satisfasse à $f(x'_\iota) = \eta_\iota$. Une telle f est un élément du dual de F'. Puisqu'on suppose F' de dimension finie, F' est l'orthogonal d'un sous-espace F de E, de codimension finie égale à la dimension de F' (th.5). F' s'identifie au dual $(E/F)^*$, donc f à un élément du bidual $(E/F)^{**}$. Comme E/F est de dimension finie, l'application canonique $E/F \longrightarrow (E/F)^{**}$ est un isomorphisme sur (th.3). Il existe donc un élément $y \in E/F$ et un seul qui définisse l'application f. Ceci exprime que les éléments x de E ayant y pour image, et ceux-là seulement, satisfont au système (n).

Z

<u>Remarque</u>.- Lorsque le rang du système (n) est <u>infini</u>, la condition du th.6 n'est plus suffisante. Par exemple, supposons que les x'_ι soient les <u>formes coordonnées</u> de l'espace $E = K_s^{(I)}$, I étant infini ; alors la condition du th.6 est vérifiée quels que soient les seconds membres, mais le système (n) n'a de solutions que si les seconds membres sont nuls à l'exception d'un nombre fini.

Un système (n) est toujours de rang fini s'il n'a qu'un nombre fini d'équations (son rang est alors au plus égal au nombre des équations). De même, si E est de dimension finie n (ce qui, dans le système (n+1), correspond au cas où le nombre des inconnues est n), son dual E^* est de dimension n , donc le rang du système est au plus égal à n . On déduit de là :

(Suit le texte, inchangé, des corollaires 1,2 et 3 de la page 56 du texte imprimé).

§ 4. Produits tensoriels.

1. Préliminaires.

Soient A un anneau, E un A-module à droite, F un A-module à gauche. Pour tout groupe abélien G , $\mathcal{L}_Z(E,G)$ est muni d'une structure de A-module à gauche (§ 3, n°2), tandis que $\mathcal{L}_Z(F,G)$ est muni d'une structure de A-module à droite. On peut donc considèrer le groupe $\mathcal{L}_A(E,\mathcal{L}_Z(F,G))$ et le groupe $\mathcal{L}_A(F,\mathcal{L}_Z(E,G))$. On va voir qu'ils sont canoniquement isomorphes. On sait en effet qu'une application de E dans l'ensemble des applications de F dans G (où E,F,G désignent 3 ensembles quelconques) s'identifie à une application de l'ensemble-produit $E \times F$ dans G . Chacun des deux groupes précédents s'identifie donc à un sous-ensemble de l'ensemble des applications de $E \times F$ dans G . Soit alors f une application de $E \times F$ dans G ; écrivons que f définit un élément de $\mathcal{L}_A(E, \mathcal{L}_Z(F,G))$; on trouve les conditions nécessaires et suffisantes

$$(1)\begin{cases} f(x_1+x_2,y) = f(x_1,y)+f(x_2,y), \quad f(x,y_1+y_2) = f(x,y_1)+f(x,y_2), \\ f(x\lambda,y) = f(x,\lambda y) \end{cases}$$

pour $x,x_1,x_2 \in E$; $y,y_1,y_2 \in F$; $\lambda \in A$.

Si on exprime que f définit un élément de $\mathcal{L}_A(F, \mathcal{L}_Z(F,G))$, on trouve exactement les mêmes conditions. Ainsi chacun des groupes $\mathcal{L}_A(E, \mathcal{L}_Z(F,G))$ et $\mathcal{L}_A(F, \mathcal{L}_Z(E,G))$ est canoniquement isomorphe au groupe additif des applications $f : E \times F \to G$ qui satisfont à (1). Quant à ce dernier groupe, on va voir qu'il est canoniquement isomorphe au groupe des applications linéaires, dans G , d'un certain groupe abélien qui ne dépend que de E et F , (non de G) ; le "produit tensoriel" du A-module à droite E et du A-module à gauche F .

2. Produit tensoriel de deux modules.

Soient toujours A un anneau, E un A-module à droite, F un A-module à gauche. Soit I l'ensemble-produit $E \times F$, et considérons le groupe abélien C, module des combinaisons linéaires formelles d'éléments de I, à coefficients dans l'anneau Z des entiers (cf. § 1, n°9). Une base de C est donc formée des couples (x,y), où $x \in E$ et $y \in F$. Soit D le sous-groupe de C engendré par les éléments de la forme

$$(2) \quad \begin{cases} (x_1+x_2,y)-(x_1,y)-(x_2,y), \quad (x,y_1+y_2)-(x,y_1)-(x,y_2), \\ (x\lambda,y)-(x,\lambda y), \end{cases}$$

où $x, x_1, x_2 \in E$; $y, y_1, y_2 \in F$; $\lambda \in A$.

DÉFINITION 1.- <u>On appelle produit tensoriel du A-module à droite</u> E <u>et du A-module à gauche</u> F, <u>et on note</u> $E \otimes_A F$ (<u>ou simplement</u> $E \otimes F$ <u>si aucune confusion n'est à craindre</u>), <u>le groupe abélien</u> C/D (quotient du groupe C des combinaisons linéaires formelles d'éléments de $E \times F$, à coefficients entiers, par le sous-groupe D engendré par les éléments de la forme (2)). <u>Pour</u> $x \in E$ <u>et</u> $y \in F$, <u>on note</u> $x \otimes y$ <u>l'élément de</u> $E \otimes F$, <u>image canonique, dans</u> C/D, <u>de l'élément</u> (x,y) <u>de la base de</u> C. <u>L'application</u> $(x,y) \longrightarrow x \otimes y$ <u>de</u> $E \times F$ <u>dans</u> $E \otimes F$ <u>s'appelle l'application canonique de</u> $E \times F$ <u>dans</u> $E \otimes F$.

Cette application satisfait aux conditions

$$(3) \quad \begin{cases} (x_1+x_2)\otimes y = x_1 \otimes y + x_2 \otimes y, \quad x \otimes (y_1+y_2) = x \otimes y_1 + x \otimes y_2, \\ (x\lambda)\otimes y = x \otimes (\lambda y) \end{cases}$$

qui résultent aussitôt des définitions. Autrement dit, si on désigne pour un instant par f l'application canonique de $E \times F$ dans $E \otimes F$, f satisfait précisément aux conditions (1).

Soit maintenant g une application linéaire du groupe abélien $E \otimes_A F$ dans un groupe abélien G. La composée de l'application canonique de $E \times F$ dans $E \otimes_A F$ et de l'application g est l'application

$$(x,y) \longrightarrow g(x \otimes y) .$$

C'est une application f qui satisfait évidemment aux conditions (1). On va montrer que, réciproquement, toute application f satisfaisant à (1) est de ce type. D'une façon précise :

THÉORÈME 1.- Soient E un A-module à droite, F un A-module à gauche, f une application de $E \times F$ dans un groupe abélien G, satisfaisant aux conditions (1). Il existe un homomorphisme g de $E \otimes_A F$ dans G, et un seul, tel que l'on ait

(4) $\qquad f(x,y) = g(x \otimes y) \quad$ pour $x \in E$, $y \in F$.

On sait (§ 1, n°8, th.1) que f détermine un homomorphisme $\overline{f}$ du groupe C (des combinaisons linéaires formelles d'éléments de $E \times F$) dans le groupe G. Les conditions (1) expriment que, dans l'application canonique $\mathcal{L}_Z(C,G) \longrightarrow \mathcal{L}_Z(D,G)$, l'image de $\overline{f}$ est nulle. Or, d'après la prop.2 du § 3, la suite

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}_Z(C/D,G) \longrightarrow \mathcal{L}_Z(C,G) \longrightarrow \mathcal{L}_Z(D,G)$$

est exacte ; donc $\overline{f}$ est l'image d'un élément unique $g \in \mathcal{L}_Z(C/D,G)$. Comme C/D est précisément $E \otimes_A F$, on obtient l'assertion à démontrer.

Le théorème 1 définit un isomorphisme canonique entre le groupe abélien des applications f de $E \times F$ dans G, satisfaisant à (1), et le groupe des homomorphismes g de $E \otimes_A F$ dans G. La correspondance entre f et g est donnée par la formule (4).

La propriété énoncée dans le th.1 caractérise le produit tensoriel $E \otimes_A F$, à un isomorphisme près. D'une façon précise :

PROPOSITION 1.- *Soient* H *un groupe abélien*, h *une application de* $E\times F$ *dans* H , *telle que*

$$h(x_1+x_2,y)= h(x_1,y)+h(x_2,y), \quad h(x,y_1+y_2)= h(x,y_1)+h(x,y_2)$$
$$h(x\lambda,y) = h(x,\lambda y) .$$

Supposons que, *pour tout groupe abélien* G *et pour toute application* f *de* $E\times F$ *dans* G , *satisfaisant à* (1), *il existe un homomorphisme* g *de* H *dans* G , *et un seul, tel que* $f = g\circ h$. *Alors il existe un isomorphisme* φ *de* $E \otimes_A F$ *sur* H , *et un seul*, *tel que le diagramme suivant soit commutatif*

$$\begin{tikzcd} & E\times F \arrow[dl] \arrow[dr, "h"] & \\ E\otimes_A F \arrow[rr, "\varphi"] & & H \end{tikzcd}$$

où la flèche de gauche désigne l'application canonique de $E\times F$ *dans* $E \otimes_A F$.

Tout d'abord, il existe un homomorphisme $\varphi : E\otimes_A F \to H$, et un seul, tel que le diagramme soit commutatif : cela résulte du th.1. Il reste à montrer que cet homomorphisme φ est un isomorphisme sur. Prenons pour G le groupe abélien $E\otimes_A F$, et pour f l'application canonique de $E\times F$ dans $E\otimes_A F$; l'hypothèse faite sur H et h implique l'existence d'un homomorphisme $\psi : H \to E\otimes_A F$, tel que le composé $\psi\circ h$ soit l'application canonique $E\times F \to E\otimes_A F$. On va montrer que $\psi\circ\varphi$ est l'application identique de $E\otimes_A F$, et que $\varphi\circ\psi$ est l'application identique de H ; ce qui établira la proposition. Or $\psi\circ\varphi\circ k = \psi\circ h = k$; l'égalité des nombres extrêmes prouve que $\psi\circ\varphi$ est l'application identique de $E\otimes_A F$, en vertu du th.1. De même, $\varphi\circ\psi\circ h = \varphi\circ k = h$; l'égalité des membres extrêmes prouve que $\varphi\circ\psi$ est l'application identique de H , en vertu de l'hypothèse d'unicité faite sur le couple (H,h). Ceci achève la démonstration.

La proposition 1 explique pourquoi l'on n'aura jamais besoin, dans la suite, de se référer à la définition explicite du produit tensoriel $E \otimes_A F$; il suffira toujours d'utiliser la propriété de $E \otimes_A F$ énoncée dans le théorème 1.

Remarque.- Lorsque l'anneau A est l'anneau Z des entiers, c'est-à-dire lorsque E et F sont simplement des groupes abéliens, la troisième des conditions (1) est une conséquence des deux premières. Le produit tensoriel $E \otimes_Z F$ est alors le quotient du groupe C par le sous-groupe engendré par les éléments de la forme

$$(x_1+x_2,y)-(x_1,y)-(x_2,y), \qquad (x,y_1+y_2)-(x,y_1)-(x,y_2) .$$

Dans le cas général d'un anneau quelconque A, le produit tensoriel $E \otimes_A F$ s'identifie évidemment à un quotient du produit tensoriel $E \otimes_Z F$, à savoir le quotient par le sous-groupe de $E \otimes_Z F$ engendré par les éléments de la forme $(x\lambda)\otimes y - x\otimes(\lambda y)$, où $\lambda \in A$.

3. Produit tensoriel de deux applications linéaires.

Soient A un anneau, E et E' deux A-modules à droite, F et F' deux A-modules à gauche, et soient données deux applications linéaires $f : E \to E'$, $g : F \to F'$. Il existe un homomorphisme h de $E \otimes F$ dans $E' \otimes F'$ et un seul, tel que

(5) $$h(x\otimes y) = f(x)\otimes g(y) \quad \text{pour } x\in E, \ y \in F .$$

En effet, cela résulte du th.1, puisque le second membre est une fonction $k(x,y)$ qui satisfait aux conditions (1) (où f serait remplacé par k) ; la vérification est immédiate.

Cet homomorphisme h, défini par f et g, se note $f\otimes g$, et s'appelle le produit tensoriel des applications linéaires f et g. Ainsi, $f\otimes g$ est un homomorphisme de $E\otimes F$ dans $E'\otimes F'$.

Le produit tensoriel $f \otimes g$ est une fonction de f et de g, à valeurs dans le groupe abélien $\mathcal{L}_Z(E \otimes F, E' \otimes F')$, et qui jouit de propriétés analogues à celles qui ont été données pour $\mathcal{L}(f,g)$ au § 3, n°1. D'une façon précise :

$$(6) \quad \begin{cases} (f_1+f_2) \otimes g = (f_1 \otimes g)+(f_2 \otimes g) \\ f \otimes (g_1+g_2) = (f \otimes g_1)+(f \otimes g_2) , \end{cases}$$

et en particulier $f \otimes g = 0$ dés que f <u>ou</u> g est nul.

Si on a des applications linéaires $f : E \rightarrow E'$ et $f' : E' \rightarrow E''$, $g : F \rightarrow F'$ et $g' : F' \rightarrow F''$, on a la relation

$$(7) \qquad (f' \circ f) \otimes (g' \circ g) = (f' \otimes g') \circ (f \otimes g) ,$$

dont la vérification est immédiate. De plus, si $E=E'$ et $F=F'$, et si f et g sont l'identité, alors $f \otimes g$ est l'application identique de $E \otimes F$; il en résulte que si f est un isomorphisme de E sur E', et g un isomorphisme de F sur F', $f \otimes g$ est un isomorphisme de $E \otimes F$ sur $E' \otimes F'$, dont l'isomorphisme réciproque est le produit tensoriel $f' \otimes g'$ des isomorphismes réciproques f' (de f) et g' (de g).

On exprime l'ensemble des faits précédents en disant que $E \otimes F$ est un <u>foncteur additif</u> des A-modules E et F, <u>covariant</u> par rapport à chacune des variables E et F.

<u>4. Opérateurs dans</u> $E \otimes F$.

Ce qu'on en va dire est tout semblable à ce qu'on a dit, au n°2 du § 3, des opérateurs dans $\mathcal{L}(E,F)$.

Si f est un endomorphisme du A-module E, f définit un endomorphisme du groupe abélien $E \otimes_A F$, à savoir $f \otimes g$, g désignant l'automorphisme identique de F. Si $f=f_1+f_2$, l'endomorphisme de $E \otimes_A F$, associé à f, est la somme des endomorphismes associés à f_1 et f_2. Si f et f' sont

sont deux endomorphismes de E , l'endomorphisme de $E \otimes_A F$ associé à $f' \circ f$ s'obtient en effectuant d'abord l'endomorphisme associé à f , puis celui associé à f'. On voit donc que si E est muni d'une structure de B-module à gauche (resp. à droite), de manière que les opérations de B commutent avec celles de A , le produit tensoriel $E \otimes_A F$ est muni d'une structure de B-module à gauche (resp. à droite). En explicitant par ex. dans le cas d'un B-module à gauche, on a :

$$\beta.(x \otimes y) = (\beta.x) \otimes y \qquad \text{pour} \quad \beta \in B .$$

Si la structure de B-module de E est <u>unitaire</u>, $E \otimes_A F$ est un B-module unitaire.

De même, si F est muni d'une structure de C-module à gauche (resp. à droite), dont les opérations commutent avec celles de A , le produit tensoriel $E \otimes_A F$ est muni d'une structure de C-module à gauche (resp. à droite). De plus, les opérations définies dans $E \otimes_A F$ par un élément de B et un élément de C commutent.

Soit Γ le <u>centre</u> de l'anneau A . Les homothéties définies dans E (resp. dans F) par les éléments de Γ sont des endomorphismes de la structure de A-module. Donc les opérations de Γ dans E définissent une structure de Γ-module sur $E \otimes_A F$; de même, les opérations de Γ dans F définissent une structure de Γ-module sur $E \otimes_A F$. <u>Ces deux structures de Γ-module sont les mêmes</u>, parce que

$$(\gamma.x) \otimes y = x \otimes (\gamma.y) \qquad \text{pour tout} \quad \gamma \in \Gamma .$$

Ainsi, $E \otimes_A F$ est canoniquement muni d'une structure de <u>module sur l'anneau</u> (<u>commutatif</u>) Γ , <u>centre de l'anneau d'opérateurs</u> A .

En particulier, lorsque l'anneau A est <u>commutatif</u>, $E \otimes_A F$ est toujours considéré comme muni de sa structure de A-module, définie par

$$\alpha.(x \otimes y) = (\alpha.x) \otimes y = x \otimes (\alpha.y) \qquad \text{pour} \quad x \in E , \ y \in F , \ \alpha \in A .$$

Revenons au cas général d'un anneau A quelconque, et de quatre A-modules E,E',F,F' (les deux premiers, modules à droite sur A , les deux derniers, à gauche). Soient de nouveau f une application A-linéaire de E dans E', et g une application A-linéaire de F dans F'. Supposons que E et E' soient en outre munis d'une structure de B-module à gauche (resp. à droite), les opérations de B commutant avec celles de A , dans E et dans E'.

PROPOSITION 2.- Si l'application A-linéaire f de E dans E' est aussi B-linéaire, l'application $f \otimes g$ de $E \otimes F$ dans $E' \otimes F'$ est B-linéaire.

C'est évident directement ; cela résulte aussi de la relation (7), par un raisonnement analogue à celui de la démonstration de la prop.1 du § 3 .

De même, si F et F' sont munis d'une structure de C-module, les opérations de A commutent avec celles de C , on a la

PROPOSITION 2 bis.- Si l'application A-linéaire g de F dans F' est aussi C-linéaire, l'application $f \otimes g$ de $E \otimes F$ dans $E' \otimes F'$ est C-linéaire.

COROLLAIRE.- L'application $f \otimes g$ de $E \otimes F$ dans $E' \otimes F'$ est linéaire pour les structures de module sur lec centre Γ de l'anneau A .

En particulier, lorsque A est un anneau commutatif, le produit tensoriel de deux applications A-linéaires est A-linéaire.

5. Deux isomorphismes canoniques.

Soit E un module à droite sur un anneau A . Considérant A comme A-module à gauche, on peut prendre le produit tensoriel $E \otimes_A A$; et puisque A est aussi un A-module à droite (les opérations de A à droite dans A commutant avec les opérations à gauche), $E \otimes_A A$ est muni d'une structure de A-module à droite. Celle-ci est définie par la relation

$$(x \otimes \lambda).\mu = x \otimes (\lambda \mu) \quad \text{pour} \quad x \in E , \quad \lambda \in A , \quad \mu \in A .$$

Il existe un homomorphisme f du groupe abélien $E \otimes_A A$ dans le groupe abélien E , tel que

$$f(x \otimes \lambda) = x . \lambda \quad .$$

En effet, cela résulte du th.1, car l'application $(x, \lambda) \longrightarrow x. \lambda$ de $E \times A$ dans E satisfait aux conditions (1). On vérifie immédiatement que f est une application linéaire pour les structures de A-module à droite de $E \otimes_A A$ et de E . Si E est en outre muni d'une structure de B-module, l'application f est B-linéaire.

PROPOSITION 3.- Si E est un A-module à droite unitaire, l'application canonique de $E \otimes_A A$ dans E est un isomorphisme sur .

Cette proposition, qui est analogue à la prop.8 du § 3, se démontre d'une manière semblable. Soit φ l'application canonique $E \otimes_A A \longrightarrow E$ précédemment définie. Considérons l'application $\psi : E \longrightarrow E \otimes_A A$ qui transforme x en $x \otimes 1$ (on note 1 l'élément unité de l'anneau A). Il est immédiat que $\varphi \circ \psi$ et $\psi \circ \varphi$ sont l'identité ; donc φ est un isomorphisme sur et ψ est l'isomorphisme réciproque.

Soit maintenant F un A-module à gauche. On définit, d'une manière analogue, l'application canonique de $A \otimes_A F$ dans F , et on montre que, lorsque F est un A-module unitaire, c'est un isomorphisme de $A \otimes_A F$ sur F.

COROLLAIRE .- Si A est un anneau avec élément unité, le produit tensoriel $A \otimes_A A$ est canoniquement isomorphe à A (avec ses structures de A-module à gauche et de A-module à droite).

L'isomorphisme en question transforme $\lambda \otimes \mu$ en $\lambda\mu$.

On va voir que le produit tensoriel $E \otimes_A F$ de deux modules sur un anneau commutatif A est une fonction symétrique de E et F .

D'une façon précise, il existe un homomorphisme u de $E \otimes F$ dans $F \otimes E$, et un seul, tel que $u(x \otimes y) = y \otimes x$, en vertu du th.1 ; et cette application est A-linéaire (vérification immédiate). De même, on a une application A-linéaire $v : F \otimes E \longrightarrow E \otimes F$, telle que $v(y \otimes x) = x \otimes y$. Il est évident que $v \circ u$ et $u \circ v$ sont l'identité. Donc u et v sont deux <u>isomorphismes</u>, réciproques l'un de l'autre. Ces isomorphismes sont dits <u>canoniques</u>.

<u>6</u>. <u>Propriétés de</u> $E \otimes F$ <u>vis-à-vis des suites exactes</u>.

Le lecteur comparera ce numéro au no3 du § 3 .

PROPOSITION 4.- <u>Soit</u>

$$(8) \qquad \{0\} \longrightarrow E' \xrightarrow{u} E \xrightarrow{v} E'' \longrightarrow \{0\}$$

<u>une suite exacte de A-modules à droite et d'applications A-linéaires</u>. <u>Pour tout A-module à gauche</u> F, <u>la suite des homomorphismes associés</u>

$$(9) \qquad E' \otimes F \xrightarrow{\overline{u}} E \otimes F \xrightarrow{\overline{v}} E'' \otimes F \longrightarrow \{0\}$$

<u>est exacte</u>.

Tout d'abord, l'application $\overline{v} \circ \overline{u}$ est nulle, puisqu'elle est associée à $v \circ u$ qui est nulle. Par conséquent, $\overline{v}$ définit, par passage au quotient, une application f, dans $E'' \otimes F$, du conoyau M de $\overline{u}$. On doit précisément montrer que f est un isomorphisme sur . Pour cela, on va définir un homomorphisme g de $E'' \otimes F$ dans M, tel que $f \circ g$ et $g \circ f$ soient l'identité.

Pour $x'' \in E''$ et $y \in F$, soit $x \in E$ tel que $v(x) = x''$; l'image de l'élément $x \otimes y \in E \otimes F$ dans le conoyau M ne dépend que de x'' et y, non du choix de x : c'est immédiat. Ceci définit une application de $E'' \times F$ dans M, et on vérifie sans peine qu'elle satisfait aux conditions requises pour qu'il existe un homomorphisme g de $E'' \otimes F$ dans M (et un seul) tel que $g(x'' \otimes y)$ soit l'image de $x \otimes y$ dans M. Il est immédiat que $f \circ g$ est l'application identique de $E'' \times F$, et que $g \circ f$ est l'application identique de M . Ceci achève la démonstration.

Si l'on identifie E' à un sous-module de E , et E'' au quotient E/E', la proposition 4 montre que $(E/E') \otimes F$ s'identifie au quotient de $E \otimes F$ par le sous-groupe, image de $E' \otimes F$ dans $E \otimes F$.

COROLLAIRE.- <u>Soit</u> F <u>un module à gauche unitaire sur l'anneau</u> A <u>et soit</u> $\mathfrak{a}$ <u>un idéal à droite de</u> A . <u>Le produit tensoriel</u> $(A/\mathfrak{a}) \otimes_A F$ <u>est canoniquement isomorphe au groupe quotient</u> $F/(\mathfrak{a} F)$, $\mathfrak{a} F$ <u>désignant le sous-groupe de</u> F <u>formé des sommes finies</u> $\sum_i \lambda_i y_i$ $(\lambda_i \in \mathfrak{a}\ , y_i \in F)$.

En effet, $(A/\mathfrak{a}) \otimes_A F$ est canoniquement isomorphe au quotient de $A \otimes_A F$ par l'image de $\mathfrak{a} \otimes_A F$; il suffit alors d'identifier $A \otimes_{\mathfrak{a}} F$ à F grâce à la prop.3, et d'observer que $\mathfrak{a} F$ est l'image de $\mathfrak{a} \otimes_A F$ dans F .

Ce corollaire s'applique notamment si F est un groupe abélien (module sur Z) et si $\mathfrak{a}$ se composé des entiers multiples d'un entier n . Alors $(A/\mathfrak{a}) \otimes_A F$ s'identifie au quotient F/nF de F par le sous-groupe des éléments de la forme ny, où $y \in F$.

Σ On notera que, en général, si E' est un <u>sous-module</u> de E , l'application de $E' \otimes F$ dans $E \otimes F$ <u>n'est pas biunivoque</u> : lorsque E' est identifié à un sous-module de E , on ne peut pas, en général, identifier $E' \otimes F$ à un sous-groupe de $E \otimes F$. Il y a néanmoins des cas où cette identification est possible :

PROPOSITION 5.- <u>Si la suite exacte</u> (8) <u>est décomposée</u>, <u>la suite correspondante</u>

$$(9) \qquad \{0\} \longrightarrow E' \otimes F \longrightarrow E \otimes F \longrightarrow E'' \otimes F \longrightarrow \{0\}$$

<u>est exacte</u> (<u>et décomposée</u>).

En effet, on a (§ 1, prop. 11) une application linéaire u' de E dans E', telle que $u' \circ u$ soit l'identité. Il lui correspond un homomorphisme $\overline{u'}: E \otimes F \rightarrow E' \otimes F$, tel que $\overline{u'} \circ u$ soit l'identité. Donc $\overline{u}$ est biunivoque, et la suite (9) est exacte (et d'ailleurs décomposée).

Les propositions 4 et 5 ont des analogues, correspondant à la deuxième variable du produit tensoriel. Nous ne les explicitons pas. On exprime le contenu de la prop. 4 (et de son analogue) en disant que le produit tensoriel $E \otimes F$ est un foncteur <u>exact à droite</u>.

On pourrait considèrer simultanément deux suites exactes

$$\{0\} \rightarrow E' \rightarrow E \rightarrow E'' \rightarrow \{0\}$$
$$\{0\} \rightarrow F' \rightarrow F \rightarrow F'' \rightarrow \{0\}$$

La proposition 4 et son analogue sont contenues dans la suivante :

PROPOSITION 6.- <u>L'homomorphisme</u> $E \otimes F \rightarrow E'' \otimes F''$ <u>applique</u> $E \otimes F$ <u>sur</u> $E'' \otimes F''$, <u>et son noyau est la somme des images de</u> $E' \otimes F$ <u>et</u> $E \otimes F'$ <u>dans</u> $E \otimes F$.

On peut donner de cette proposition, une démonstration directe analogue à la démonstration de la prop. 4. Mais on peut aussi la déduire de la prop. 4 et de son analogue, par une méthode qui est valable pour tous les foncteurs exacts à droite, et que voici. Décomposons l'homomorphisme $w: E \otimes F \rightarrow E'' \otimes F''$ en $E \otimes F \rightarrow E \otimes F''$ et $E \otimes F'' \rightarrow E'' \otimes F''$. Le noyau de w se compose des $x \in E \otimes F$ dont l'image dans $E \otimes F''$ donne zéro dans $E'' \otimes F''$, c'est-à-dire provient d'un élément $a \in E' \otimes F''$. Puisque l'homomorphisme $E' \otimes F \rightarrow E' \otimes F''$ est <u>sur</u>, il existe $b \in E' \otimes F$ ayant pour image a dans $E' \otimes F''$. Si on retranche de x l'image de b, la différence y aura une image nulle dans $E \otimes F''$, donc sera l'image d'un élément $c \in E \otimes F'$. Ainsi w est la somme des images de b et de c, ce qui démontre la proposition.

On peut aussi énoncer d'un seul coup la proposition 5 et son analogue

PROPOSITION 7.- Si E' est un sous-module de E, facteur direct de E, et si F' est un sous-module de F, facteur direct de F, alors l'application de $E'\otimes F'$ dans $E\otimes F$ est biunivoque, et son image est facteur direct de $E\otimes F$.

La démonstration, analogue à celle de la prop.5, est laissée au lecteur.

Lorsque A est un corps K, et E et F des espaces vectoriels sur K, les hypothèses des prop.5 et 7 sont toujours remplies.

7. Propriétés de $E\otimes F$ vis-à-vis des sommes directes.

Considérons deux familles spectrales de A-modules et d'homomorphismes (cf § 1, n°6) :

$$E_\alpha \xrightarrow{i_\alpha} E \xrightarrow{p_\alpha} E_\alpha\,, \qquad F_\beta \xrightarrow{j_\beta} F \xrightarrow{q_\beta} F_\beta\,,$$

les modules de la première famille étant des modules à droite, ceux de la deuxième des modules à gauche. On suppose donc

$$p_\alpha \circ i_\alpha = \text{identité}, \qquad p_\alpha \circ i_{\alpha'} = 0 \quad \text{si} \quad \alpha \neq \alpha',$$
$$q_\beta \circ j_\beta = \text{identité}, \qquad q_\beta \circ j_{\beta'} = 0 \quad \text{si} \quad \beta \neq \beta'.$$

L'homomorphisme $k_{\alpha\beta} = i_\alpha \circ j_\beta$ envoie $E_\alpha \otimes F_\beta$ dans $E\otimes F$; et l'homomorphisme $r_{\alpha\beta} = p_\alpha \otimes q_\beta$ envoie $E\otimes F$ dans $E_\alpha \otimes F_\beta$. Ce sont des homomorphismes pour la structure de module sur le centre Γ de l'anneau A. On a

$$r_{\alpha\beta} \circ k_{\alpha\beta} = (p_\alpha \circ i_\alpha)\otimes(q_\beta \circ j_\beta) = \text{identité},$$
$$r_{\alpha\beta} \circ k_{\alpha'\beta'} = (p_\alpha \circ i_{\alpha'})\otimes(q_\beta \circ j_{\beta'}) = 0 \quad \text{si le couple } (\alpha,\beta) \text{ est distinct du couple } (\alpha',\beta').$$

Par suite les homomorphismes $k_{\alpha\beta}$ et $r_{\alpha\beta}$ constituent une famille spectrale ; en particulier, $k_{\alpha\beta}$ permet d'identifier $E_\alpha \otimes F_\beta$ à un sous-module de $E\otimes F$, et $r_{\alpha\beta}$ permet d'identifier $E_\alpha\otimes F_\beta$ à un module quotient de $E\otimes F$.

Supposons maintenant que la famille (i_α, p_α) et la famille (j_β, q_β) satisfassent toutes deux à la condition (SD) du § 1 (n°6). On dira alors, pour abréger, que E est somme directe des E_α, et F somme directe des F_β.

PROPOSITION 8.- Si E est somme directe des E_α, et si F est somme directe des F_β, la famille spectrale $(k_{\alpha\beta}, r_{\alpha\beta})$ satisfait à la condition (SD), et définit donc un isomorphisme de $E \otimes F$ sur la somme directe des $E_\alpha \otimes F_\beta$.

On doit simplement prouver que tout élément de $E \otimes F$ est somme finie d'éléments de la forme $k_{\alpha\beta}(z_{\alpha\beta})$, avec $z_{\alpha\beta} \in E_\alpha \otimes F_\beta$. Comme tout élément de $E \otimes F$ est somme finie d'éléments de la forme $x \otimes y$, il suffit de prouver l'assertion pour un élément $x \otimes y$. Or, par hypothèse, x est une somme finie $\sum_\alpha i_\alpha(x_\alpha)$, et y est une somme finie $\sum_\beta j_\beta(y_\beta)$; donc $x \otimes y = \sum_{\alpha,\beta} k_{\alpha\beta}(x_\alpha \otimes y_\beta)$, la somme étant finie.

COROLLAIRE 1.- Si les modules E et F sont unitaires, et si F a une base $(b_\beta)_{\beta \in J}$, alors, pour tout élément z de $E \otimes F$, il existe un système de $x_\beta \in E_\beta$ nuls sauf un nombre fini, tel que $z = \sum_\beta x_\beta \otimes b_\beta$, et ce système est unique.

En effet, la base de F définit un isomorphisme de F sur la somme directe $A_s^{(J)}$. L'application de la prop.8 ramène à prouver le corollaire dans le cas où J a un seul élément. Dans ce cas, la prop.3 précise un isomorphisme entre $E \otimes A$ et E, et il suffit de l'expliciter pour obtenir le corollaire cherché.

Le système d'éléments x_β qui correspond à un élément de $E \otimes F$ définit un isomorphisme de $E \otimes F$ sur $E^{(J)}$, pour les structures de module sur le centre de l'anneau A.

Dans les hypothèses du corollaire 1, supposons en outre que le module E ait aussi une base $(a_\alpha)_{\alpha \in I}$. Alors, pour tout $z \in E \otimes F$, il existe un système d'éléments $\lambda_{\alpha\beta} \in A$, nuls sauf un nombre fini, tels que $z = \sum_{\alpha,\beta} a_\alpha \lambda_{\alpha\beta} \otimes b_\beta$, et ce système est unique. La donnée de la base de E et de la base de F définit donc un isomorphisme de $E \otimes_A F$ sur la somme directe $A^{(I \times J)}$, pour les structures de module sur le centre de A. En particulier, si A est *commutatif*, on obtient :

COROLLAIRE 2.- *Si* E *et* F *sont deux modules unitaires sur un anneau commutatif* A, *ayant des bases* (a_α) *et* (b_β), *le produit tensoriel est un* A-*module libre ayant pour base* $(a_\alpha \otimes b_\beta)$.

COROLLAIRE 3.- *Si* E *et* F *sont deux espaces vectoriels sur un corps commutatif* K, *le produit tensoriel est un espace vectoriel sur* K, *dont la dimension est égale au produit des dimensions de* E *et de* F.

Voici encore une application de la prop.8 :

PROPOSITION 9.- *Soit* A *un anneau* (commutatif ou non) *ayant un élément unité, et tel que la relation* $\lambda\lambda' = 0$ (où $\lambda \in A$, $\lambda' \in A$) *entraîne* $\lambda = 0$ *ou* $\lambda' = 0$. *Si* E *est un* A-*module à droite*, F *un* A-*module à gauche, et si* E *et* F *sont libres, la relation* $x \otimes y = 0$ *dans* $E \otimes F$ *entraîne* $x = 0$ *ou* $y = 0$.

En effet, soit (a_α) une base de E, et (b_β) une base de F. Si $x = \sum_\alpha a_\alpha \lambda_\alpha$ et $y = \sum_\beta \mu_\beta b_b$, $x \otimes y$ ne peut être nul que si tous les produits $\lambda_\alpha \mu_\beta$ sont nuls ; donc si l'un au moins des λ_α est $\neq 0$, tous les μ_β sont nuls.

La proposition 9 s'applique notamment à deux espaces vectoriels sur un corps K.

8. <u>Propriétés de</u> $E\otimes F$ <u>vis-à-vis des limites inductives</u>.

Le rédacteur laisse à BOURBAKI le soin de déterminer le lieu où il aura fallu définit en toute généralité la notion de <u>limite inductive</u>. En ce qui concerne les limites inductives <u>de modules</u>, il conviendrait peut-être de rajouter un numéro au § 1 .

Soit E la limite inductive d'une famille de modules E_α (indexée par un ensemble I ordonné filtrant croissant), relativement à des homomorphismes $\varphi_{\beta\alpha}: E_\alpha \to E_\beta$ définis pour $\alpha<\beta$, et satisfaisant à $\varphi_{\gamma\alpha} = \varphi_{\gamma\beta}\circ\varphi_{\beta\alpha}$ pour $\alpha<\beta<\gamma$. Soit φ_α l'homomorphisme canonique de E_α dans la limite inductive E ; on a $\varphi_\alpha = \varphi_\beta\circ\varphi_{\beta\alpha}$ pour $\alpha<\beta$. La propriété essentielle (et caractéristique) de la limite inductive est la suivante : étant donné un module F , et des homomorphismes $f_\alpha: E_\alpha \to F$ tels que, pour $\alpha<\beta$, $f_\alpha = f_\beta\circ\varphi_{\beta\alpha}$, il existe un homomorphisme $f: E\to F$ et un seul, tel que $f_\alpha = f\circ\varphi_\alpha$ pour tout α . On l'appelle l'homomorphisme associé à la famille (f_α) .

Revenons maintenant à la théorie du produit tensoriel. Soit E , limite inductive d'une famille de A-modules à droite E_α relativement à des $\varphi_{\alpha'\alpha}$; et soit F , limite inductive d'une famille de A-modules à gauche F_β relativement à des $\psi_{\beta'\beta}$. Considérons la famille des $E_\alpha\otimes F_\beta$, munie des homomorphismes $\lambda_{(\alpha',\beta'),(\alpha,\beta)} = \varphi_{\alpha'\alpha}\otimes\psi_{\beta'\beta}$ (on ordonne l'ensemble d'indices $I\times J$ en posant $(\alpha,\beta)<(\alpha',\beta')$ si $\alpha<\alpha'$ et $\beta<\beta'$). Cette famille satisfait évidemment aux conditions de transitivité qui permettent de définir la limite inductive G des $E_\alpha\otimes F_\beta$. La famille des $f_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha\otimes\psi_\beta : E_\alpha\otimes F_\beta \to E\otimes F$ définit alors un homomorphisme f de la limite inductive G dans le produit tensoriel $E\otimes F$. On vient de définir ainsi un homomorphisme (canonique) de la de la limite inductive des $E_\alpha \otimes F_\beta$ dans le produit tensoriel de la limite inductive des E_α et de la limite inductive des F_β.

PROPOSITION 10.- <u>L'homomorphisme</u> f <u>précédemment défini est un isomorphisme de la limite inductive</u> G <u>des</u> $E_\alpha \otimes F_\beta$ <u>sur le produit tensoriel</u> $E \otimes F$ <u>des limites inductives</u> E <u>et</u> F.

Pour le prouver, il suffit de définir un homomorphisme g de $E \otimes F$ dans G, tel que $f \circ g$ et $g \circ f$ soient l'identité. On va, pour cela, associer à chaque couple $(x,y) \in E \times F$, un élément $h(x,y) \in G$. Il existe un α et un $x_\alpha \in E_\alpha$ tels que $\varphi_\alpha(x_\alpha)=x$; il existe un β et un $y_\beta \in F_\beta$ tels que $\psi_\beta(y_\beta)=y$; l'élément $f_{\alpha\beta}(x_\alpha \otimes y_\beta) \in G$ ne dépend que de x et y, non des choix précédents, comme on le vérifie aussitôt. Cet élément de G sera, par définition, $h(x,y)$. La fonction $h(x,y)$ satisfait aux conditions voulues pour définir un homomorphisme g de $E \otimes F$ dans G, tel que $g(x \otimes y) = h(x,y)$ (cf. th.1). Ayant ainsi défini g, il est évident que $f \circ g$ est l'application identique de $E \otimes F$, et que $g \circ f$ est l'application identique de G. Ceci achève la démonstration.

On exprime l'énoncé de la proposition 10 en disant que <u>le produit tensoriel commute avec les limites inductives</u> : la limite inductive des produits tensoriels $E_\alpha \otimes F_\beta$ s'identifie canoniquement au produit tensoriel des limites inductives E et F.

9. <u>Quelques identifications canoniques</u>.

L'introduction, au n°1, des applications f de $E \times F$ dans G qui satisfont aux conditions (1) a conduit, compte tenu du th.1 du n°2, aux isomorphismes canoniques

(10) $\mathcal{L}_Z(E \otimes_A F, G) \approx \mathcal{L}_A(E, \mathcal{L}_Z(F,G)) \approx \mathcal{L}_A(F, \mathcal{L}_Z(E,G))$,

valables lorsque E est un A-module à droite, F un A-module à gauche, et G un groupe abélien. Chacun des trois groupes (10) est canoniquement isomorphe au groupe additif des applications f de $E \times F$ dans G qui satisfont à (1).

Supposons maintenant que F et G soient en outre des C-modules à gauche (resp. à droite), et que les opérations de C dans F commutent avec celles de A. Alors $E \otimes_A F$ est un C-module à gauche (resp. à droite), et $\mathscr{L}_C(F,G)$ est un A-module à droite. On peut donc considérer $\mathscr{L}_C(E \otimes_A F,G)$ et aussi $\mathscr{L}_A(E, \mathscr{L}_C(F,G))$. Ces deux groupes s'identifient canoniquement à des sous groupes de $\mathscr{L}_Z(E \otimes_A F,G)$ et de $\mathscr{L}_A(E, \mathscr{L}_Z(F,G))$ respectivement. Cherchons à quelle condition une $f(x,y)$ satisfaisant à (1) définit un élément de $\mathscr{L}_C(E \otimes_A F,G)$, ou un élément de $\mathscr{L}_A(E, \mathscr{L}_C(F,G))$: dans chacun des deux cas, on trouve la même condition

(11) $f(x,\mu y) = \mu . f(x,y)$ pour $\mu \in C$ (si F et G sont des C-modules à gauche)

[resp. $f(x,y\mu) = f(x,y).\mu$ si F et G sont des C-modules à droite].

Ainsi l'isomorphisme $\mathscr{L}_Z(E \otimes_A F,G) \approx \mathscr{L}_A(E, \mathscr{L}_Z(F,G))$ induit un isomorphisme

(12) $$\mathscr{L}_C(E \otimes_A F,G) \approx \mathscr{L}_A(E, \mathscr{L}_G(F,G)),$$

chacun de ces deux groupes étant canoniquement isomorphe au groupe additif des $f(x,y)$ qui satisfont à (1) et (11).

De la même manière, supposons que E et G soient des B-modules à gauche (resp. à droite), et que les opérations de B dans E commutent avec celles de A. On trouve alors un isomorphisme canonique

(13) $$\mathscr{L}_B(E \otimes_A F,G) \approx \mathscr{L}_A(F, \mathscr{L}_B(E,G)),$$

chacun de ces groupes étant canoniquement isomorphe au groupe additif des applications f de $E \times F$ dans G qui satisfont aux conditions (1) et en outre à

(14) $f(\gamma x,y) = \gamma.f(x,y)$ pour $\gamma \in B$ (si E et G sont des B-modules à gauche)

[resp. $f(x\gamma ,y) = f(x,y).\gamma$ si E et G sont des B-modules à droite].

En particulier, prenons pour B et C le <u>centre</u> Γ de l'anneau A. Alors, si G est un Γ-module, on a des isomorphismes

(15) $\mathcal{L}_{\Gamma}(E \otimes_A F,G) \approx \mathcal{L}_A(E, \mathcal{L}_{\Gamma}(F,G)) \approx \mathcal{L}_A(F, \mathcal{L}_{\Gamma}(E,G))$,

et ce sont des isomorphismes de Γ-modules. Chacun de ces trois modules est canoniquement isomorphe au Γ-module des applications f de $E\times F$ dans G qui satisfont aux conditions (1) et à

(16) $f(\gamma x,y) = \gamma.f(x,y)$, $f(x,\gamma y) = \gamma.f(x,y)$ pour $\gamma \in \Gamma$;

on observera que l'une des relations (16) est conséquence de l'autre, compte tenu des relations (1). Ceci s'applique notamment <u>lorsque l'anneau</u> A <u>est commutatif</u> : on a alors

(17) $\mathcal{L}_A(E \otimes_A F,G) \approx \mathcal{L}_A(E, \mathcal{L}_A(F,G)) \approx \mathcal{L}_A(F, \mathcal{L}_A(E,G))$

chaque fois que E,F,G sont des A-modules, et chacun de ces A-modules est canoniquement isomorphe au module des applications f de $E\times F$ dans G, telles que

(18) $\begin{cases} f(x_1+x_2,y) = f(x_1,y)+f(x_2,y), & f(x,y_1+y_2) = f(x,y_1)+f(x,y_2) , \\ f(\lambda x,y) = f(x,\lambda y) = \lambda.f(x,y) \end{cases}$

pour $x,x_1,x_2 \in E$; $y,y_1,y_2 \in F$; $\lambda \in A$. Les applications qui satisfont aux conditions (17) s'appellent <u>applications bilinéaires</u> de $E\times F$ dans G.

<u>Remarque</u>.- Dans le cas général d'un anneau A non commutatif, les applications f qui satisfont à (1) sont des applications <u>bilinéaires</u> pour les structures de Z-module.

10. <u>Un homomorphisme canonique</u>.

Soient, comme au n°3, un anneau A , deux A-modules à droite E et E', deux A-modules à gauche F et F'. On a associé, à chaque couple d'éléments $f \in \mathcal{L}_A(E,E')$, $g \in \mathcal{L}_A(F,F')$, une application de $E \otimes_A F$ dans $E' \otimes_A F'$, notée $f \otimes g$, et qui est Γ-linéaire (Γ désignant le centre de A) en vertu du cor. des prop.2 et 2 bis. Ainsi $f \otimes g$ est un élément de $\mathcal{L}_\Gamma(E \otimes_A F , E' \otimes_A F')$. L'application

$$(f,g) \longrightarrow f \otimes g$$

du produit $\mathcal{L}_A(E,E') \rightarrow \mathcal{L}_A(F,F')$ dans $\mathcal{L}_\Gamma(E \otimes_A F, E' \otimes_A F')$ définit, en vertu du th.1, une application

(19) $\quad \mathcal{L}_A(E,E') \otimes_\Gamma \mathcal{L}_A(F,F') \longrightarrow \mathcal{L}_\Gamma(E \otimes_A F, E' \otimes_A F')$

qui est Γ-linéaire.

On observera que la notation $f \otimes g$ pourrait prêter à confusion : il faut distinguer entre l'élément $f \otimes g$ du produit tensoriel $\mathcal{L}_A(E,E') \otimes_\Gamma \mathcal{L}_A(F,F')$, et son image dans $\mathcal{L}_\Gamma(E \otimes_A F, E' \otimes_A F')$, qu'on note $f \otimes g$ depuis le n°3 .

En général, l'homomorphisme (19) <u>n'est pas</u> un isomorphisme sur . (cf exerc. 3). Dans ce qui suit, on se bornera au cas où l'anneau A est <u>commutatif</u>, et où Γ est donc identique à A .

PROPOSITION 11.- <u>Soit</u> A <u>un anneau commutatif ayant un élément unité</u>. <u>Pour que l'homomorphisme canonique</u>

(20) $\quad \mathcal{L}_A(E,E') \otimes_A \mathcal{L}_A(F,F') \longrightarrow \mathcal{L}_A(E \otimes_A F, E' \otimes_A F')$

<u>soit un isomorphisme sur</u>, <u>il suffit que l'une ou l'autre des conditions suivantes soit remplie</u> :

(a) <u>les modules</u> E,E',F,F' <u>sont unitaires</u>, E <u>et</u> F <u>ont des bases finies</u> ;

(b) <u>les modules</u> E,E',F,F' <u>sont unitaires</u>, E <u>et</u> E' <u>ont des bases finies</u> ;

(c) <u>les modules</u> E, E', F, F' <u>sont unitaires</u>, F <u>et</u> F' <u>ont des bases finies</u>.

Plaçons-nous d'abord dans l'hypothèse (a). La donnée d'une base finie de E et d'une base finie de F définit un isomorphisme de $\mathcal{L}(E,E')$ sur une somme directe finie de modules isomorphes à $\mathcal{L}(A,E')$, et un isomorphisme de $\mathcal{L}(F,F')$ sur une somme directe finie de modules isomorphes à $\mathcal{L}(A,F')$ (en vertu de la prop.7 du § 3). D'autre part, les bases de E et de F définissent une base finie de $E \otimes F$ (cor.2 de la prop.8), d'où un isomorphisme de $\mathcal{L}(E \otimes F, E' \otimes F')$ sur une somme directe finie de modules isomorphes à $\mathcal{L}(A, E' \otimes F')$. En étudiant chaque composante de ces décompositions directes, on est ramené à prouver que l'homomorphisme

$$\mathcal{L}(A,E') \otimes \mathcal{L}(A,F') \longrightarrow \mathcal{L}(A,E' \otimes F')$$

est un isomorphisme sur, lorsque E' et F' sont des modules unitaires. Or, en vertu de la prop.8 du § 3, cet homomorphisme s'identifie à l'application identique $E' \otimes F' \longrightarrow E' \otimes F'$.

Etudions maintenant l'un des cas (b) et (c), (b) par exemple. Un raisonnement analogue au précédent ramène au cas où $E = A$, $E' = A$; on considère donc l'homomorphisme $\mathcal{L}(A,A) \otimes \mathcal{L}(F,F') \longrightarrow \mathcal{L}(A \otimes F, A \otimes F')$. La prop.8 du § 3, et la prop.3 du § 4, montrent que cet homomorphisme s'identifie à l'application identique $\mathcal{L}(F,F') \longrightarrow \mathcal{L}(F,F')$.

Dans l'homomorphisme (20), considèrons le cas particulier où $F = A$ (A étant toujours un anneau <u>commutatif</u>). Si les autres modules sont unitaires, l'homomorphisme (20) devient, en identifiant $\mathcal{L}_A(A,F')$ à F', et $E \otimes_A A$ à E :

(21) $$\mathcal{L}_A(E,E') \otimes_A F' \longrightarrow \mathcal{L}_A(E, E' \otimes_A F').$$

Si on explicite, on trouve que, pour $f \in \mathcal{L}(E,E')$ et $y' \in F'$, l'homomorphisme (21) transforme $f \otimes y'$ dans l'application linéaire

$$x \to f(x) \otimes y' \quad \text{de } E \text{ dans } E' \otimes F' .$$

Ceci pourrait servir de définition à l'homomorphisme (21), même lorsque les modules ne sont pas unitaires.

La proposition 11 a pour corollaire :

COROLLAIRE.- <u>Si</u> E, E' <u>et</u> F' <u>sont des modules unitaires sur un anneau commutatif</u> A, <u>l'homomorphisme</u> (21) <u>est un isomorphisme sur, dès que l'un des modules</u> E <u>et</u> F' <u>a une base finie</u>.

11. Produit tensoriel et dualité.

Dans tout ce numéro, l'anneau A est supposé <u>commutatif avec un élément unité</u>.

Soient E et F deux A-modules. L'isomorphisme (17), dans le cas particulier où $G=A$, donne des isomorphismes canoniques

$$(22) \qquad (E \otimes F)^* \approx \mathcal{L}(E,F^*) \approx \mathcal{L}(F,E^*) ,$$

chacun de ces trois modules étant canoniquement isomorphe au module des <u>formes bilinéaires</u> sur $E \times F$ (on appelle ainsi les applications bilinéaires de $E \times F$ dans l'anneau A).

Considérons maintenant l'homomorphisme (20), dans le cas particulier où $E'=A$, $F'=A$. On obtient

$$(23) \qquad E^* \otimes F^* \longrightarrow (E \otimes F)^* .$$

Si on explicite cet homomorphisme du produit tensoriel des duals E^* et F^* dans le dual de $E \otimes F$, on trouve qu'à l'élément $x' \otimes y' \in E^* \otimes F^*$, il associe la forme linéaire $x \otimes y \to x'(x)y'(y)$ sur $E \otimes F$.

Cet homomorphisme est <u>naturel</u>, dans le sens suivant : si on a deux autres A-modules E' et F', une application linéaire $f: E \to E'$ et une application linéaire $g: F \to F'$, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} E^* \otimes F^* \arrow[r] & (E \otimes F)^* \\ E'^* \otimes F'^* \arrow[r] \arrow[u, "\alpha"] & (E' \otimes F')^* \arrow[u, "\beta"] \end{tikzcd}$$

où α est le produit tensoriel des applications transposées ${}^tf$ et ${}^tg$, et β est la transposée de l'application $f \otimes g$. La vérification est laissée au lecteur.

Les conditions (b) et (c) de la prop.11 donnent ici :

PROPOSITION 12.- Si les modules E et F sont unitaires, et si l'un d'eux a une base finie, l'homomorphisme (23) est un isomorphisme de $E^* \otimes F^*$ sur $(E \otimes F)^*$.

Si on identifie $E^* \otimes F^*$ au dual de $E \otimes F$ par cet isomorphisme, la transposée de $f \otimes g$ devient ${}^tf \otimes {}^tg$, d'après ce qui précède.

Considérons maintenant l'homomorphisme (21), dans le cas particulier où $E'=A$; écrivons F au lieu de F', supposé unitaire : On obtient un homomorphisme canonique

$$\theta : E^* \otimes F \rightarrow \mathcal{L}(E,F) .$$

En explicitant : à l'élément $x' \otimes y$ de $E^* \otimes F$, l'homomorphisme θ associe l'application linéaire $x \rightarrow \langle x,x' \rangle .y$ de E dans F. Ceci peut servir de définition à θ même si F n'est pas unitaire. Le cor. de la prop.11 entraîne ici :

PROPOSITION 13.- Si E et F sont des modules unitaires, et si l'un de ces modules a une base finie, l'homomorphisme θ est un isomorphisme de $E^* \otimes F$ sur $\mathcal{L}(E,F)$.

Lorsque E a une base finie (e_i), on peut expliciter comme suit l'isomorphisme réciproque de θ. Soit (e_i') la base duale de E^* (§ 3, déf.4). Si $x = \sum_i \xi_i e_i$, et si $u \in \mathcal{L}(E,F)$, on a

$$u(x) = \sum_i \xi_i u(e_i) = \sum_i \langle x,e_i' \rangle .u(e_i) \quad ;$$

donc l'élément de $E^* \otimes F$ que θ^{-1} associe à u est

$$\theta^{-1}(u) = \sum_i e_i' \otimes u(e_i) \quad . \tag{24}$$

Examinons le cas particulier où $F=E$, E ayant une base finie. Alors l'application identique de E dans E correspond à l'élément $\sum_i e'_i \otimes e_i$ de $E^* \otimes E$ (élément qui est donc indépendant du choix de la base (e_i)). D'autre part, la composition des endomorphismes de E définit sur $\mathcal{L}(E,E)$ une structure multiplicative ; elle se transporte par θ^{-1} à $E^* \otimes E$. Explicitons cette structure multiplicative de $E^* \otimes E$: effectuons successivement l'endomorphisme $\theta(y' \otimes y)$ puis l'endomorphisme $\theta(x' \otimes x)$; le premier transforme $z \in E$ en $\langle z,y'\rangle.y$, puis le second transforme $\langle z,y'\rangle.y$ en $\langle z,y'\rangle\langle y,x'\rangle.x$. Il en résulte

(25) $\theta(x' \otimes x) \circ \theta(y' \otimes y) = \langle y,x'\rangle.\theta(y' \otimes x)$.

DEFINITION 2.- Etant donné un anneau commutatif A ayant un élément unité et un A-module E ayant une base finie, on appelle trace d'un endomorphisme u de E , et on note Tr(u), l'image de u par l'application linéaire Tr de $\mathcal{L}(E,E)$ dans A , composée de l'isomorphisme θ^{-1} de $\mathcal{L}(E,E)$ sur $E^* \otimes E$, et de l'application de $E^* \otimes E$ définie par la forme bilinéaire canonique : $x' \otimes x \rightarrow \langle x,x'\rangle$.

On a donc

(26) $\mathrm{Tr}(\theta(x' \otimes x)) = \langle x,x'\rangle$

(27) $\mathrm{Tr}(u) = \sum_i \langle u(e_i),e'_i\rangle$ si (e_i) et (e'_i) sont deux bases duales.

PROPOSITION 14.- On a l'égalité

(28) $\mathrm{Tr}(u \circ v) = \mathrm{Tr}(v \circ u)$ pour $u \in \mathcal{L}(E,E)$, $v \in \mathcal{L}(E,E)$.

Réciproquement, si f est une application linéaire de $\mathcal{L}(E,E)$ dans l'anneau A, telle que $f(u \circ v)=f(v \circ u)$, il existe un scalaire $\alpha \in A$ tel que $f(u) = \alpha.\mathrm{Tr}(u)$ pour tout u .

En effet, d'après (25), on a

$$\mathrm{Tr}(\theta(x' \otimes x) \circ \theta(y' \otimes y)) = \langle y,x'\rangle.\mathrm{Tr}(\theta(y' \otimes x))$$
$$= \langle y,x'\rangle\langle x,y'\rangle .$$

Ceci ne change pas si on échange le couple (x',x) et le couple (y',y). On a donc $\mathrm{Tr}(u\circ v)=\mathrm{Tr}(v\circ u)$ lorsque u et v ont la forme particulière $\theta(x'\otimes x)$ et $\theta(y'\otimes y)$; c'est vrai, par suite, dans tous les cas. Réciproquement, soit f une application linéaire satisfaisant aux hypothèses de l'énoncé ; d'après (25), on a

$$f(\theta(x'\otimes x)\circ\theta(y'\otimes y)) = \langle y,x'\rangle . f(\theta(y'\otimes x)),$$

d'où, en échangeant le couple (x',x) et le couple (y',y) :

$$\langle y,x'\rangle . f(\theta(y'\otimes x)) = \langle x,y'\rangle . f(\theta(x'\otimes y)).$$

Fixons x et y' de manière que $\langle x,y\rangle=1$, ce qui est possible ; on obtient

$$f(\theta(x'\otimes y)) = \alpha.\mathrm{Tr}(\theta(x'\otimes y)),$$

avec $\alpha = f(\theta(y'\otimes x))$; d'où, en général, $f(u) = \alpha.\mathrm{Tr}(u)$.

<u>Remarque</u>.- La loi de composition (25) vaut sous des hypothèses plus générales : soient E,F,G trois A-modules dont les deux premiers ont une base finie ; si $x\in G$, $x'\in F^*$, $y\in F$, $y'\in E^*$, la formule (25) est valable pour la composition des éléments de $\mathcal{L}(E,F)$ et des éléments de $\mathcal{L}(F,G)$. Lorsqu'en outre $G=E$, $u\in\mathcal{L}(E,F)$, $v\in\mathcal{L}(F,E)$, on peut considérer $u\circ v$ et $v\circ u$. On a alors

$$\mathrm{Tr}(u\circ v) = \mathrm{Tr}(v\circ u)$$

(même démonstration que ci-dessus). Plus généralement :

PROPOSITION 15.- <u>Soit</u> A <u>un anneau commutatif ayant un élément unité, et soient</u> $E_1,\dots,E_p$ <u>des modules libres ayant chacun une base finie. Soit</u> u_i $(1\leqslant i<p)$ <u>une application linéaire de</u> E_i <u>dans</u> E_{i+1}, <u>et</u> u_p <u>une application de</u> E_p <u>dans</u> E_1, <u>on a, pour</u> $1\leqslant i\leqslant p$,

$$\mathrm{Tr}(u_p\circ\dots\circ u_2\circ u_1) = \mathrm{Tr}(u_{i-1}\circ\dots\circ u_1\circ u_p\circ\dots\circ u_i).$$

En effet, il suffit de poser $u_p\circ\dots\circ u_i = u$, $u_{i-1}\circ\dots\circ u_1 = v$, et d'écrire $\mathrm{Tr}(u\circ v) = \mathrm{Tr}(v\circ u)$.

Remarques diverses à l'usage de BOURBAKI.- Voici d'abord un exercice : si l'homomorphisme θ de $E^*\otimes E$ dans $\mathcal{L}(E,E)$ est sur, c'est un isomorphisme sur, et E est facteur direct d'un module libre de base finie (condition nécessaire et suffisante). En effet, l'application identique est $\theta(\sum_i x_i'\otimes x_i)$, d'où, pour tout $x\in E$, $x=\sum_i\langle x,x_i'\rangle\cdot x_i$; ceci prouve que E est facteur direct du module des combinaisons linéaires formelles des lettres x_i (en nombre fini). Réciproquement, si E est facteur direct d'un module libre de base finie, $E^*\otimes E\rightarrow\mathcal{L}(E,E)$ est un isomorphisme sur. Dans ce cas, on peut encore définir la trace d'un endomorphisme de E ; la démonstration de la prop.14 subsiste intégralement.

2) l'homomorphisme $\theta : E^*\otimes_A F\rightarrow\mathcal{L}_A(E,F)$ existe même si l'anneau A n'est pas commutatif ; on suppose alors que E et F sont des modules à gauche. La prop.13 est valable. D'autre part, cet homomorphisme peut être lui-même déduit d'un autre homomorphisme, qu'il faudrait peut-être mentionner dans le texte, et que voici : pour E module à droite (sur A) et F module à gauche (sur A), on a un homomorphisme canonique de $E\otimes_A F$ dans $\mathcal{L}_A(E^*,F)$, celui qui associe à $x\otimes y$ l'application $x'\rightarrow\langle x',x\rangle\cdot y$ de E^* dans F (ne pas oublier que E^* est module à gauche). Si on applique ceci en remplaçant E par le dual d'un module à gauche (qu'on va noter à nouveau E), on trouve l'homomorphisme : $E^*\otimes F\longrightarrow\mathcal{L}(E^{**},F)$; en composant avec $\mathcal{L}(E^{**},F)\rightarrow\mathcal{L}(E,F)$, on retrouve l'homomorphisme θ de $E^*\otimes F$ dans $\mathcal{L}(E,F)$.

Plus généralement, soient E et G deux A-modules à droite, F un A-module à gauche. On a un homomorphisme canonique

$$E\otimes F\longrightarrow\mathcal{L}(\mathcal{L}(E,G),G\otimes F)\ ;$$

si on fait $G=A$, on retrouve l'homomorphisme précédemment défini.

12. Associativité du produit tensoriel.

Soient E un A-module à droite, F un A-module à gauche. Pour prendre le produit tensoriel de $E \otimes_A F$ avec un G, on doit préciser les structures de module que l'on envisage sur $E \otimes_A F$ et sur G. Dans ce but, nous supposerons que F est muni d'une structure de B-module à droite, telle que les opérations de l'anneau B dans F commutent avec celles de A ; et G sera supposé muni d'une structure de B-module à gauche. Nous utiliserons le symbole $(E_A, {}_AF_B, {}_BG)$ pour indiquer les hypothèses faites sur E, F, G.

Dans cette situation, on peut considérer $(E \otimes_A F) \otimes_B G$ et $E \otimes_A (F \otimes_B G)$.

PROPOSITION 16.- *Il existe un isomorphisme φ de $(E \otimes_A F) \otimes_B G$ sur $E \otimes_A (F \otimes_B G)$, et un seul, tel que*

$$\varphi((x \otimes y) \otimes z) = x \otimes (y \otimes z) \quad \text{pour} \quad x \in E,\ y \in F,\ z \in G.$$

Cette proposition, qui peut se prouver directement, résulte aussi de ce qui va suivre.

Soit g un homomorphisme de $(E \otimes_A F) \otimes_B G$ dans un groupe abélien H. L'application $(x,y,z) \longrightarrow g((x \otimes y) \otimes z)$ est une application f de $E \times F \times G$ dans H satisfait aux conditions suivantes :

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{l} f(x_1 + x_2, y, z) = f(x_1, y, z) + f(x_2, y, z) \\ f(x, y_1 + y_2, z) = f(x, y_1, z) + f(x, y_2, z) \\ f(x, y, z_1 + z_2) = f(x, y, z_1) + f(x, y, z_2) \\ f(x\lambda, y, z) = f(x, \lambda y, z), \quad f(z, y\mu, z) = f(x, y, \mu z). \quad (\lambda \in A, \mu \in B) \end{array} \right.$$

Réciproquement :

THEOREME 2.- *Dans la situation $(E_A, {}_AF_B, {}_BG)$, soit f une application de $E \times F \times G$ dans un groupe abélien H, satisfaisant à (29). Alors il existe un homomorphisme g de $(E \otimes_A F) \otimes_B G$ dans H, et un seul, tel que*

$$(30) \quad g((x \otimes y) \otimes z) = f(x,y,z) \quad \text{pour} \quad x \in E,\ y \in F,\ z \in G.$$

En effet, pour chaque $z \in G$, $f(x,y,z)$ est une fonction du couple (x,y) qui satisfait aux conditions (1), donc (th.1) il existe un un homomorphisme g_z de $E \otimes_A F$ dans H , tel que $g_z(x \otimes y) = f(x,y,z)$ quels que soient $x \in E$ et $y \in F$. La relation (30) s'écrit alors

$$g((x \otimes y) \otimes z) = g_z(x \otimes y) ,$$

où g est l'homomorphisme cherché. Elle équivaut à $g(u \otimes z) = g_z(u)$ quels que soient $u \in E \otimes_A F$ et $z \in G$. Comme $g_z(u)$ est une fonction de u et z qui satisfait aux conditions (1), le théorème 1 assure l'existence et l'unicité de g .

La propriété de $(E \otimes_A F) \otimes_B G$ exprimée par le théorème 2 caractérise le produit tensoriel $(E \otimes_A F) \otimes_B G$, à un isomorphisme près, de même que le théorème 1 caractérisait $E \otimes_A F$ à un isomorphisme près (cf. prop.1). Or $E \otimes_A (F \otimes_B G)$ possède la même propriété caractéristique: toute application f de $E \times F \times G$ dans un groupe abélien H , qui satisfait à (29), est composée de l'application $(x,y,z) \rightarrow x \otimes (y \otimes z)$ et d'un homomorphisme (unique) de $E \otimes_A (F \otimes_B G)$ dans H . On en déduit l'existence d'un isomorphisme de $(E \otimes_A F) \otimes_B G$ sur $E \otimes_A (F \otimes_B G)$, compatible avec les applications de $E \times F \times G$ dans chacun de ces deux groupes ; et c'est précisément ce qu'exprime la prop.1 .

Par une méthode analogue à celle utilisée au n°2, on pourrait construire directement un produit tensoriel $E \otimes_A F \otimes_B G$ de trois facteurs, tel que les homomorphismes de ce produit tensoriel dans tout groupe abélien H correspondent aux applications f de $E \times F \times G$ dans H , satisfaisant à (29). On a alors les isomorphismes

$$(E \otimes_A F) \otimes_B G \approx E \otimes_A F \otimes_B G \approx E \otimes_A (F \otimes_B G) .$$

On pourra utiliser indifféremment ces trois symboles.

On peut généraliser ce qui précède au cas d'une suite finie de n-modules $E_1, \ldots, E_n$. On suppose que chaque E_i, sauf E_1 et E_n , est muni de deux structures de modules dont les opérateurs commutent ; que E_1 est un module à droite, E_n un module à gauche, et que l'anneau qui opère à droite dans E_i est le même que celui qui opère à gauche dans E_{i+1} $(1 \leqslant i \leqslant n)$. On est ainsi conduit à un produit tensoriel $E_1 \otimes \ldots \otimes E_n$, et les homomorphismes de ce produit tensoriel dans un groupe abélien H correspondent aux applications du produit $E_1 \times \ldots \times E_n$ dans H qui satisfont à des conditions qui généralisent (29). On a des isomorphismes d'<u>associativité</u>, que nous ne détaillons pas.

Examinons le cas où $E_1, \ldots, E_n$ sont des modules sur un même anneau <u>commutatif</u> A . On est bien dans les conditions précédentes, car chaque E_i peut être considéré comme A-module à gauche et comme A-module à droite. Alors le produit tensoriel $E_1 \otimes \ldots \otimes E_n$ est lui-même muni d'une structure de A-module, pour laquelle

$$\lambda . (x_1 \otimes x_2 \otimes \ldots \otimes x_n) = (\lambda . x_1) \otimes x_2 \otimes \ldots \otimes x_n = x_1 \otimes (\lambda . x_2) \otimes \ldots \otimes x_n =$$

$$= x_1 \otimes x_2 \otimes \ldots \otimes (\lambda . x_n) \quad \text{pour} \quad \lambda \in A .$$

En raisonnant comme au n°9, on montre que les applications A-linéaires g de $E_1 \otimes \ldots \otimes E_n$ dans un A-module H correspondent biunivoquement aux applications <u>A-multilinéaires</u> f de $E_1 \times \ldots \times E_n$ dans H , c'est-à-dire aux applications f telles que $f(x_1, \ldots, x_n)$ soit, pour tout i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, une fonction linéaire de x_i lorsqu'on fixe toutes les autres variables. La correspondance entre g et f est donnée par la relation

$$f(x_1, \ldots, x_n) = g(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n) .$$

Le cas où tous les E_i sont égaux à un même A-module (l'anneau A étant commutatif avec un élément unité) sera étudié en détail au Chapitre III (paragraphe consacré à l'algèbre tensorielle d'un module).
