RÉDACTION N° 161

COTE : NBR 063

TITRE : OBSERVATIONS SUR L'ÉTAT 3
DES SPÉCIALISATIONS ET VALUATIONS

ASSOCIATION DES COLLABORATEURS DE NICOLAS BOURBAKI

NOMBRE DE PAGES : 36

NOMBRE DE FEUILLES : 36

OBSERVATIONS SUR L'ETAT 3 DES SPECIALISATIONS ET VALUATIONS

par C. CHEVALLEY

I. THÉORIE DES ENTIERS.

L'extension des spécialisations aux anneaux avec diviseurs de 0 est évidemment un truc très astucieux, mais l'argument que donne WEIL en faveur de sa nécessité me semble assez faible. Il s'agit, dit-il, d'avoir des démonstrations uniformes pour les propriétés des éléments entiers, s'appliquant qu'il y ait des diviseurs de 0 ou non. Il présuppose dans cet argument que ces démonstrations doivent se faire au moyen des spécialisations et valuations ; c'est là le postulat qui me paraît insuffisamment établi.

En fait, où se sert-on des spécialisations dans la théorie des entiers (état 3) ? D'abord naturellement dans la démonstration des critères d), e) du th.1 ; mais ces critères ne sont là que pour permettre l'application ultérieure de la notion de spécialisation à l'étude des entiers ; et leur présence n'empêche pas le rédacteur d'avoir à formuler les critères f),g), relatifs au cas particulier des domaines d'intégrité. Ensuite dans les démonstrations des prop.1 et 2 ; mais les démonstrations de ces propositions se font en quelques lignes (voir état 2) au moyen du critère d'intégrité c), et ces démonstrations me semblent même plus naturelles que celles qui font intervenir le marteau pilon des spécialisations. Ensuite dans la démonstrat on du cor. à la prop.4 (Cohen-Seidenberg tronqué). C'est le seul point, me semble-t-il où l'avantage des méthodes de spécialisations soit nettement apparent. Cependant, cet avantage se restreint à mes yeux du fait que je ne vois aucune raison d'éliminer les théorèmes de S.C., et surtout le premier. Il est vrai que l'on peut aussi appliquer le truc Weil avec avantage dans la démonstration du dit premier théorème de S.C., à savoir : soit B sur-anneau de A, entier sur A ; si $\mathfrak{p}$ est idéal premier de A, il y a un idéal premier $\mathfrak{P}$ de B tel que $\mathfrak{P} \cap A = \mathfrak{p}$. Cependans, ce que ne donne pas la méthode des spécialisations, et qu'il me paraît bien utile d'avoir, est le résultat suivant : A,B étant comme plus haut, soit $\mathfrak{a}$ un idéal quelconque de A et $\mathfrak{A}$ l'idéal engendré par $\mathfrak{a}$ dans B ; alors tout élément de $\mathfrak{A}$ est racine d'une équation de dépendance intégrale sur A à coefficients tous (sauf le premier naturellement) dans $\mathfrak{a}$. Ce résultat peut s'obtenir facilement en même temps que l'on démontre l'équiva lence des critères b), c) d'intégrité (cf. plus loin).

Je conclus qu'il n'y a aucun avanta ge sérieux à se servir des valuations-spécialisations dans l'établissement des propriétés élémentaires des entiers. Je voudrais donc voir ces propriétés élémentaires établies <u>avant</u> les spécialisations (mes propositions sur la manière de faire les spécialisations les utilisent). Bien entendu, il conviendra d'énoncer les propriétés des entiers relatives aux valuations dès qu'on aura ces dernières.

Pour préciser les choses, j'indique rapidement la manière dont j'envisage le n° sur les entiers.

Les conventions sur les anneaux sont les mêmes que dans l'état 3 .

Si d'abord B est une algèbre quelconque sur l'anneau A , définir la notion d'élément de B entier sur A au moyen de l'existence d'une équation de dépendance intégrale. Conséquences triviales : si B est un sur-anneau de A , et $x \in B$ est entier sur A , x est aussi entier sur tout anneau intermédiaire entre A et B ; la prop.4, état 3 . On dit que l'algèbre B est entière sur A si tout élément de B est entier sur A ; donner ici la première assertion de la prop.3, état 3 . Il conviendrait d'avoir la notion d'anneau B_S (S mult. stable du centre de B) pour une algèbre B non nécessairement commutative.

Etablir maintenant la

Proposition 1. Soient A un anneau, $\mathfrak{a}$ un idéal de A, M un module unitaire de type fini sur A, $\mathfrak{A}$ le module engendré par les xa, $x \in M$ et $a \in \mathfrak{a}$. L'algèbre $\mathfrak{L}(M)$ des endomorphismes de M est alors entière sur A ; si $t \in \mathfrak{L}(M)$ est tel que $t(M) \subset \mathfrak{A}$, t satisfait à une équation $t^n+a_1t^{n-1}+\dots+a_n = 0$ où les a_i sont tous dans $\mathfrak{a}$.

On peut représenter M sous la forme $M'/\mathfrak{M}$, où M' est un A-module libre de type fini, et $\mathfrak{M}$ un sous-module de M'. Soit $\mathfrak{L}_1(M')$ l'algèbre des endomorphismes de M' qui appliquent $\mathfrak{M}$ dans lui-même ; il y a alors un homomorphisme d'algèbre de $\mathfrak{L}_1(M')$ sur $\mathfrak{L}(M)$. Soit de plus $\mathfrak{A}'$ le module engendré par $\mathfrak{a}$ dans M' ; si $t(M) \subset \mathfrak{A}$, t est l'image par l'homomorphisme en question d'un $t' \in \mathfrak{L}_1(M')$ qui applique M' dans $\mathfrak{A}'$. Il suffit donc de démontrer la prop. 1 dans le cas où M est libre ; soit $\{x_1,\dots,x_n\}$ une base de M. Si $t \in \mathfrak{L}(M)$, on a $tx_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$, $a_{ij} \in A$, et $\mathfrak{L}(M)$ est isomorphe à l'algèbre des matrices de degré n à coefficients dans A ; de plus, si $t(M) \subset \mathfrak{A}$, t est représenté par une matrice à coefficients dans $\mathfrak{a}$. L'existence d'une relation de dépendance intégrale pour t résulte alors immédiatement de Hamilton-Cayley ; de plus, si les a_{ij} sont dans $\mathfrak{a}$, les coefficients (autres que le premier) du polynome caractéristique de la matrice (a_{ij}) sont dans $\mathfrak{a}$, car ils s'expriment comme polynomes homogènes de degrés >0 en les a_{ij}.

Corollaire 1. Soient A un anneau, $\mathfrak{a}$ un idéal de A, B une algèbre unitaire sur A et $\mathfrak{A}$ l'idéal engendré par $\mathfrak{a}$ dans B. Si B est un A-module de type fini, B est entière sur A, et tout élément x de $\mathfrak{A}$ satisfait à une équation de la forme $x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_n=0$, avec $a_i \in \mathfrak{a}$.

L'application qui à tout $y \in B$ fait correspondre l'opération de multiplication à gauche par y dans B est un isomorphisme (parce que B est unitaire) de B sur une sous-algèbre de $\mathfrak{L}(B)$. Il est clair que $\mathfrak{A}$ est le sous-module de la structure de module de B engendré par les az, $a \in \mathfrak{a}$,

$z \in B$. Le cor.1 résulte donc de la prop.1.

<u>Proposition 2</u>. <u>Soit B une algèbre unitaire sur un anneau A</u> . <u>Pour qu'un $x \in B$ soit entier sur A, il faut que $A[x]$ soit A-module de type fini, et il suffit que x appartienne à une sous-algèbre de B qui soit un A-module de type fini</u>.

Supposons x entier ; soit $x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0$ $(a_i \in A)$ une relation de dépendance intégrale de x . On a $x^{n+p} = -a_1x^{n+p-1} - \dots - a_nx^p$; il en résulte que, pour tout $p \geqq 0$, x^{n+p} appartient à $\sum_{i=0}^{n+p-1} Ax^i$; d'où on déduit tout de suite par récurrence sur k que $x^k \in \sum_{i=0}^{n-1} Ax^i$ pour tout $k \geqq 0$; $A[x] = \sum_{i=0}^{n-1} Ax^i$ est donc un A-module de type fini. Si on suppose que x appartient à une sous-algèbre de B qui est un A-module de type fini, il est clair que x appartient aussi à une sous-algèbre unitaire de B qui est A-module de type fini ; x est entier sur A en vertu du cor. à la prop.1.

<u>Lemme 1</u>. <u>Soient A un anneau, B un sur-anneau de A , $x_1, \dots, x_h$ des éléments de B ; posons $x_0 = 1$, $A_i = A[x_0, \dots, x_i]$ $(0 \leqq i \leqq h)$. Supposons que, pour $1 \leqq i \leqq h$, x_i soit entier sur A_{i-1} ; A_h est alors un A-module de type fini</u>.

Montrons par récurrence sur i que A_i est A-module de type fini. C'est vrai si $i=0$. Supposons que $i > 0$ et que ce soit vrai pour i-1. Soit $A_{i-1} = \sum_{k=1}^{p} Au_k$; puisque x_i est entier sur A_{i-1} , A_i est un A_{i-1} module de type fini (prop.2) ; soit $A_i = \sum_{\ell=1}^{q} A_{i-1}v_\ell$. On a alors $A_i = \sum_{k,\ell=1}^{p,q} Au_kv_\ell$, et A_i est A-module de type fini.

<u>Proposition 3</u>.- <u>Soient A un anneau, B un sur-anneau de A . L'ensemble A' des éléments de B entiers sur A est un sous-anneau de B contenant A . Tout élément de B entier sur A' l'est aussi sur A . Si $x_1, \dots, x_h$ sont dans A' , $A[x_1, \dots, x_h]$ est un A-module de type fini</u>.

Soient $x_1, \dots, x_h$ des éléments de A' ; $A[x_1, \dots, x_h]$ est A-module de type fini en vertu du lemme 1 . Les éléments de $A[x_1, \dots, x_h]$ sont donc dans A' (prop.2) ; il en résulte immédiatement que A' est un sous-anneau de B contenant A . Soit $x \in B$ entier sur A' ; il y a alors une relation $x^n+y_1x^{n-1}+\dots+y_n=0$, $y_i \in A'$, et x est entier sur $A[y_1,\dots,y_n]$. Il résulte donc du lemme 1 que $A[y_1,\dots,y_n,x]$ est A-module de type fini et par suite que x est entier sur A .

Insérer ici un contre-exemple pour montrer que, si B est une algèbre non commutative sur A , les éléments de B entier sur A ne forment en général pas une sous-algèbre de B .

Définition de la fermeture intégrale d'un anneau A dans un sus-anneau B ; deuxième partie de la prop.3 de l'état 3 .

<u>Proposition 4</u>. <u>Soient</u> A <u>un anneau</u>, B <u>un sur-anneau de</u> A <u>entier sur</u> A , $\mathfrak{a}$ <u>un idéal de</u> A <u>et</u> $\mathfrak{A}$ <u>l'idéal engendré par</u> $\mathfrak{a}$ <u>dans</u> B . <u>Tout</u> $x \in \mathfrak{A}$ <u>satisfait à une équation de la forme</u> $x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_n=0$ <u>où les</u> a_i <u>sont dans</u> $\mathfrak{a}$. <u>Si</u> $\mathfrak{a}$ <u>est premier, on a</u> $\mathfrak{A} \cap A = \mathfrak{a}$, <u>et il y a un idéal premier</u> $\mathfrak{A}'$ <u>de</u> B <u>tel que</u> $\mathfrak{A}' \cap A = \mathfrak{a}$.

On a par hypothèse $x = \sum_{i=1}^{h} a_i' b_i$, $a_i' \in \mathfrak{a}$, $b_i \in B$ $(1 \leqq i \leqq h)$; x appartient donc à l'idéal engendré par $\mathfrak{a}$ dans $A[b_1,\dots,b_h]$, qui est un A-module de type fini (prop.3) ; la première assertion résulte ~~xxx~~ donc du cor. à la prop.1. Supposons $\mathfrak{a}$ premier, et $x \in \mathfrak{A} \cap A$; la relation $x^n = -\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^{n-i}$ donne alors $x^n \in \mathfrak{a}$, d'où $x \in \mathfrak{a}$; puisque $\mathfrak{A}$ contient évidemment $\mathfrak{a}$, on a $\mathfrak{A} \cap A = \mathfrak{a}$. L'ensemble des idéaux de B qui contiennent $\mathfrak{A}$ et qui ne rencontrent pas $A-\mathfrak{a}$ n'est donc pas vide ; cet ensemble, ordonné par inclusion, st évidemment inductif ; il contient donc un élément maximal $\mathfrak{A}'$. Il est clair que $\mathfrak{A}' \cap A = \mathfrak{a}$. Le fait que $\mathfrak{A}'$ est premier résulte du

<u>Lemme 2</u>. <u>Soit</u> S <u>une partie multiplicativement stable d'un anneau</u> B <u>et soit</u> $\mathfrak{P}$ <u>un idéal de</u> B <u>qui est maximal dans l'ensemble des idéaux qui ne rencontrent pas</u> S ; $\mathfrak{P}$ <u>est alors premier</u>.

Soient x et y des éléments de $B-\mathfrak{P}$; les idéaux $\mathfrak{P}+Bx$ et $\mathfrak{P}+By$, qui contiennent strictement $\mathfrak{P}$, rencontrent S . Soit $s \in (\mathfrak{P}+Bx) \cap S$, $t \in (\mathfrak{P}+By) \cap S$; st est dans S et dans $(\mathfrak{P}+Bx)(\mathfrak{P}+By) \subset \mathfrak{P}+Bxy$. Puisque st n'est pas dans $\mathfrak{P}$, Bxy n'est pas dans $\mathfrak{P}$, et xy n'est pas dans $\mathfrak{P}$.

Faire ici le cor. à la prop.4 et la prop.5 de l'état 2 .

Propriétés des anneaux intégralement clos.

Définition des anneaux intégralement clos. Faire la prop.6, état 2, qui est un cor. trivial de la 2ème partie de la prop.3, état 3 .

Proposition 5. Tout domaine d'intégrité principal est intégralement clos.

Soient A un domaine d'intégrité principal, K son corps des fractions, x un élément de K entier sur A . Soit $x = y/z$, où y et z sont des éléments de A étrangers l'un à l'autre. On a une relation $x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=0$, $a_i \in A$, d'où $y^n=-z \sum_{i=1}^{n} a_iy^{n-i}z^{i-1}$, ce qui montre que z divise y^n . Or z est aussi étranger à y^n ; c'est donc une unité, et $x \in A$.

Proposition 6. Soient A un anneau intégralement clos, K son corps des fractions, h(X) un polynome unitaire de $A[X]$ et f(X) un polynome unitaire de $K[X]$ qui divise h(X) dans $K[X]$. On a alors $f(X) \in A[X]$ et f divise h dans $A[X]$.

Il y a un sur-corps L de K dans lequel f(X) se décompose en facteurs linéaires : $f(X) = \prod_{i=1}^{n} (X-x_i)$. On a $h(x_i)=0$ $(1 \leqq i \leqq n)$; les x_i sont donc entiers sur A . Il en est de même des coefficients de f , qui sont dans $A[x_1,\ldots,x_n]$; mais ces coefficients sont dans K ; ils sont donc dans A , d'où $f \in A[X]$. Si $g = hf^{-1}$, g est unitaire et divise h dans $K[X]$, d'où $g \in A[X]$, et f divise h dans $A[X]$.

Il conviendrait peut ^tre de généraliser ici la notion de polynome minimal aux algèbres sur un corps K . Si B est une algèbre unitaire sur K , et $x \in B$, les polynomes $f \in K[X]$ tels que $f(x)=0$ forment un idéal qui est

 8

engendré par un polynome unitaire bien déterminé, le polynome minimal de x . Plus généralement, soit B une algèbre unitaire sur un domaine d'intégrité A telle qu'aucun élément $\neq 0$ de A ne soit un diviseur de zéro dans B ; si S est l'ensemble des éléments $\neq 0$ de A , B_S est une algèbre sur le corps des fractions de A , soit K , d'où la notion de polynome minimal d'un $x \in B$.

<u>Proposition 7</u>. <u>Soit</u> B <u>une algèbre unitaire sur un domaine d'intégrité intégralement clos</u> A ; <u>supposons qu'aucun élément</u> $\neq 0$ <u>de</u> A <u>ne soit diviseur de</u> 0 <u>dans</u> B . <u>Si</u> x <u>est un élément de</u> B <u>entier sur</u> A , <u>son polynome minimal</u> f <u>par rapport au corps des fractions</u> K <u>de</u> A <u>est dans</u> $A[X]$.

Il y a par hypothèse un polynome h unitaire de $A[X]$ tel que $h(x)=0$; f divise h dans $K[X]$, d'où $f \in A[X]$ (prop.6).

Mettre ici le cor.1 à la prop.5 de l'état 3 .

<u>Remarque</u>. La prop.6 (due à S.C.) est un peu plus précise que la prop.5, état 3, et me parait pouvoir être utile. Si on recule devant l'extension de la notion de polynome minimal, on peut si on veut se limiter à faire le deuxième th. de S.C. pour les domaines d'intégrité.

A ce point, on a tous les éléments pour donner la démonstration S.C. de leur deuxième théorème qui est très courte puisqu'on a déjà la prop.4, le lemme 2 et la prop.6 .

<u>Proposition 8</u>. <u>Soient</u> A <u>un domaine d'intégrité</u>, K <u>le corps des fractions de</u> A , L <u>une extension algèbrique de</u> K. B <u>la fermeture intégrale de</u> A <u>dans</u> L . <u>Le corps des fractions de</u> B <u>est alors</u> L . <u>Si on suppose de plus que</u> A <u>est noethérien et intégralement clos</u>, <u>et que</u> L <u>est séparable et de degré fini sur</u> K , B <u>est un</u> A<u>-module de type fini</u>.

Soit $x \in L$ et soit $f(X) = X^n + c_1 X^{n-1} + \ldots + c_n$ le polynome minimal de x par rapport à K. Il y a un $a \in A$ $a \neq 0$ tel que $ac_i \in A$ $(1 \leqq i \leqq n)$; on a $(ax)^n + (ac_1)(ax)^{n-1} + \ldots + (ac_n)a^{n-1} = 0$, d'où $ax \in B$. Supposons que A soit noethérien et L séparable de degré fini sur K ; soit $\{x_1, \ldots, x_n\}$ une base de L/K. Il y a des $a_i \neq 0$ de A tels que $y_i = a_i x_i$ soit dans B $(1 \leqq i \leqq n)$; $\{y_1, \ldots, y_n\}$ est donc une base de L/K composée d'éléments de B ; son discriminant D est un élément $\neq 0$ de K. Soit $y \in B$, $y = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i$. On a $\mathrm{Tr}\,(yy_j) = \sum_{i=1}^{n} c_i \,\mathrm{Tr}\,(y_i y_j)$, $\mathrm{Tr}\, yy_j \in A$, $\mathrm{Tr}\,(y_i y_j) \in A$. Résolvant les équations linéaires précédentes par rapport aux c_i, nous obtenons que $Dc_i \in A$ $(1 \leqq i \leqq n)$, d'où $B \subset \sum_{i=1}^{n} A(D^{-1} c_i)$. Le second membre de cette inclusion est un module de type fini sur A ; A étant noethérien, B est lui-même de type fini sur A.

Il se pose ici la question du conducteur : faut-il en parler dans Bourbaki ? La notion peut être utile à l'occasion ; la relation entre conducteur et différente n'est pas sans intérêt. Par ailleurs, les conducteurs interviennent dans la théorie de la multiplication complexe et dans la théorie fine des points singuliers des courbes. Je me contente de soulever la question, n'ayant pas d'avis bien net.

Il faudra également décider à quel endroit on introduira la notion de différente ; c'est également une question que je laisse ouverte.

II. SPECIALISATIONS.

J'ai déjà dit que le truc WEIL ne me semblait pas nécessaire. Je propose donc de le renvoyer en appendice, et je vais exposer maintenant la manière dont je vois la théorie des spécialisations.

Les applications de cette théorie sont manifestement surtout d'ordre géomètrique ; il me semble donc approprié de lui donner dès le début un tour plus géomètrique. L'emploi des spécialisations dans les corps projectifs signifie, du point de vue géomètrique, que l'on se propose de spécialiser des points appartenant à des produits de droites projectives. Je ne vois aucune raison de se limiter à cela. WEIL a protesté autrefois avec raison contre la tendance des géomètres à ne vouloir complèter à l'infini les variétés affines que dans des espaces projectifs. Mais il n'y a pas plus de raison de ne vouloir avoir <u>que</u> des produits de droites projectives qu'il n'y en a à ne connaître <u>que</u> des espaces projectifs. C'est pourquoi je propose la manière de faire suivante.

1. <u>Espaces multiprojectifs</u>.

Appelons espace multiprojectif (sur un corps de base K) tout produit (fini ou infini) $E = \prod_{i \in I} P_i$ d'espaces projectifs P_i sur K (de dimensions finies), chacun de ces espaces étant muni (pour simplifier ?) d'un repère bien déterminé, de sorte qu'on peut parler de coordonnées homogènes d'un point. Tout produit d'espaces multiprojectifs est donc un espace multiprojectif.

Soit $n_i = \dim P_i$; on dira que le <u>type</u> de l'espace projectif E est déterminé par l'ensemble d'indices I et par la famille $(n_i)_{i \in I}$. Deux espaces multiprojectifs de même type ne diffèrent que par leurs corps de base. Si K' est un sur-corps de K , E s'identifie canoniquement à une partie de l'espace multiprojectif de même type que E sur K' .

A l'espace E on associe un anneau de formes $\mathfrak{o}_Z(E)$ défini comme suit : pour chaque i on introduit n_i lettres $X_{i;k}$ $(0 \leqq k \leqq n_i)$, et $\mathfrak{o}_Z(E)$ est l'anneau $Z[\ldots, X_{i,k}, \ldots]$ gradué comme suit : $P \in \mathfrak{o}(E)$ est dit homogène si, pour tout i, P est homogène par rapport aux lettres $X_{i;k}$ $(0 \leqq k \leqq n_i)$; si d_i est le degré de P par rapport à ces lettres (supposant $P \neq 0$), on dit que P est de degré $(d_i)_{i \in I} \in Z^I$. Deux espaces multiprojectifs de même type ont même anneau de formes (ou, en tous cas, des anneaux canoniquement isomorphes) ; $\mathfrak{o}_Z(E \times F)$ est $\mathfrak{o}_Z(E) \otimes \mathfrak{o}_Z(F)$. De même, si L est un sous-corps de K, on introduit $\mathfrak{o}_L(E) = L[\ldots, X_{i;k}, \ldots]$, gradué de la même manière que plus haut (anneau de formes de E sur L) ; $\mathfrak{o}_Z(E)$ s'applique de manière canonique, homomorphe et homogène dans $\mathfrak{o}_L(E)$, et $\mathfrak{o}_L(E)$ dans $\mathfrak{o}_{L'}(E)$ si $L \subset L' \subset K$. Si L est un sous-corps commun des corps de base de deux espaces multiprojectifs E, E' de même type, E et E' ont même anneau de formes sur L.

Soit $M = (M_i)_{i \in I}$ un point de E. Choisissons pour chaque i un système de coordonnées homogènes $(y_{i;k})_{0 \leqq k \leqq n_i}$ de M_i. Si P est un élément homogène de $\mathfrak{o}_Z(E)$ (ou de $\mathfrak{o}_L(E)$, L un sous-corps de K), on dit que M est un zéro de P si P s'annulle par la substitution $X_{i;k} \to y_{i;k}$ $(i \in I,\ 0 \leqq k \leqq n_i)$ (cette condition ne dépend pas du choix des coordonnées, puisque P est homogène). On appelle idéal de M dans $\mathfrak{o}_Z(E)$ (resp.: $\mathfrak{o}_L(E)$) l'idéal $\mathfrak{A}_Z(M)$ (resp.: $\mathfrak{A}_L(M)$) engendré par les éléments homogènes admettant M comme zéro ; c'est un idéal premier homogène, et tous ses éléments homogènes admettant M comme zéro.
On dit que M est un zéro d'un idéal homogène $\mathfrak{A}$ de $\mathfrak{o}_Z(E)$ (resp.: $\mathfrak{o}_L(E)$) si $\mathfrak{A}$ est contenu dans $\mathfrak{A}_Z(M)$ (resp.: $\mathfrak{A}_{L}(M)$).

2. **Spécialisations.**

Définition. Soient E, E' des espaces multiprojectifs de même type, M un point de E, M' un point de E'. On dit que M' est une spécialisation de M si $\mathcal{A}_Z(M) \subset \mathcal{A}_Z(M')$. Si L est un sous-corps commun des corps de base de E, E', on dit que M' est une L-spécialisation de M si on a $\mathcal{A}_L(M) \subset \mathcal{A}_L(M')$.

On fait bien entendu trotter l'âne sur cette définition : transitivité - toute L-spécialisation est une spécialisation et aussi une L'-spécialisation si L' est sous-corps de L.

3. Spécialisations et homomorphismes.

Soient E, E' des espaces multiprojectifs de même type, M un point de E et M' une spécialisation de M dans E'. Soit $E = \prod_{i\in I} P_i$, $E' = \prod_{i\in I} P'_i$, les P_i, P'_i étant des espaces projectifs. Soit $M = (M_i)_{i\in I}$, $M' = (M'_i)_{i\in I}$; choisissons pour chaque i un système de coordonnées homogènes $y_{i;k}$ de M_i et un système de coordonnées homogènes $y'_{i;k}$ de M'_i. Il est bien entendu faux en général qu'il y ait un homomorphisme de l'anneau $Z[\dots, y_{i;k}, \dots]$ sur $Z[\dots, y'_{i;k}, \dots]$ qui applique $y_{i;k}$ sur $y'_{i;k}$ pour tout (i,k). On a cependant les résultats suivants. Introduisons pour chaque i une nouvelle lettre T_i, et formons l'anneau $\mathcal{R}^T(M) = Z[\dots, T_i y_{i,k}, \dots] \subset K[\dots, T_i, \dots]$; faute d'un meilleur nom, j'appelle provisoirement cet anneau l'anneau transcendant du point M. Il y a un homomorphisme de cet anneau sur $Z[\dots, y_{i;k}, \dots]$ qui applique $T_i y_{i;k}$ sur $y_{i;k}$ (pour tout (i,k)). Soit en effet F un polynome en des lettres $X_{i;k}$ (i.e. un élément de $\mathcal{O}_Z(E)$, mais pas nécessairement homogène) tel que $F(\dots, T_i y_{i;k}, \dots) = 0$. Soit F' le polynome déduit de F par les substitutions $X_{i;k} \rightarrow T_i Y_{i;k}$; si nous écrirons $F' = \sum_j \theta_j G_j$, les θ_j étant les monomes en les T_i et les $G_j \in Z[\dots, Y_{i;k}, \dots]$

chaque G_j est manifestement homogène par rapport à $Y_{i;0},\dots,Y_{i;n_i}$ (pour tout i). Puisque $F(\dots,T_i y_{i;k},\dots)=0$, on a $G_j(\dots,y_{i;k},\dots)=0$ pour tout j, d'où $F(\dots,y_{i;k},\dots)=0$, ce qui démontre notre assertion. De plus, puisque M' est spécialisation de M, on a aussi $G_j(\dots,y'_{i;k},\dots)=0$, et il en résulte qu'*il y a un homomorphisme de* $\mathcal{R}^T(M)$ sur $\mathcal{R}^T(M')$ *qui applique* $T_i y_{i;k}$ *sur* $T_i y'_{i;k}$ (pour tout (i,k)). Il y a donc aussi un homomorphisme de $\mathcal{R}^T(M)$ sur $Z[\dots,y'_{i;k},\dots]$ qui applique $T_i y_{i;k}$ sur $y'_{i;k}$ (pour tout $(i;k)$).

Supposons maintenant que, pour tout i, il y ait un $k(i)$ (entre 0 et n_i) tel que $y_{i;k(i)}=y'_{i;k(i)}=1$. Il y a alors un homomorphisme de $Z[\dots,y_{i;k},\dots]$ sur $Z[\dots,y'_{i;k},\dots]$ qui applique $y_{i;k}$ sur $y'_{i;k}$ pour tout (i,k). Soit en effet $F\in Z[\dots,Y_{i;k},\dots]$ tel que $F(\dots,y_{i;k},\dots)=0$. Soit F_1 le polynome qu'on en déduit en y remplaçant les $Y_{i;k(i)}$ par 1 ; faisons dans F_1 la substitution $Y_{i;k}\rightarrow X_{i;k}/X_{i;k(i)}$ $(k\neq k(i))$. Nous obtenons ainsi une fraction rationnelle R, et il y a un monome $\prod_{i\in I} X_{i;k(i)}^{a(i)}=Z$ tel que ZR soit un élément homogène de $\mathfrak{o}(E)$, soit F_3. Il est clair que M est un zéro de F_3 ; il en est donc de même de M'. Les $y'_{i;k(i)}$ étant $=1$, on en déduit d'abord que R s'annulle par la substitution $X_{i;k}\rightarrow y'_{i;k}$ $(k\neq k(i))$, puisque $F(\dots,y'_{i;k},\dots)=0$, ce qui démontre notre assertion.

Soient K un corps et $(a_i)_{i\in I}=\mathfrak{a}$ une famille quelconque d'éléments de K. Pour chaque $i\in I$, soit D_i une droite projective sur K, et soit M_i le point de coordonnées homogènes $(a_i,1)$ de D_i. Nous dirons que $M_{\mathfrak{a}}=(M_i)_{i\in I}$ est le *point représentatif* de la famille $\mathfrak{a}$. Si A est une partie de K, nous appellerons point représentatif de A le point représentatif de la famille constituée par l'application identique de A dans K.

Soit $\mathfrak{a}'$ une famille d'éléments d'un corps K' admettant même ensemble d'indices que $\mathfrak{a}$; soit $\mathfrak{a}'=(a'_i)_{i\in I}$. *Pour qu'il y ait un homomorphisme de*

$Z[\ldots,a_i,\ldots]$ <u>sur</u> $Z[\ldots,a'_i,\ldots]$ <u>qui applique</u> a_i <u>sur</u> a'_i <u>pour tout</u> $i \in I$, <u>il faut et suffit que</u> $M_{a'}$ <u>soit spécialisation de</u> M_a. La condition est suffisante en vertu de ce qu'on vient de démontrer plus haut ; elle est évidemment nécessaire.

La notion de point représentatif permet de plus de ramener les L-spécialisations aux spécialisations. Soient en effet E et E' des espaces multiprojectifs de même type sur des corps K et K' et L un sous-corps commun de K et K'. Le point représentatif de L, comme sous-corps de K, est dans un produit F de droites projectives sur K ; soit M_L ce point ; le point représentatif de L comme sous-corps de K' est dans un produit F' de droites projectives sur K', de même type que F ; soit M'_L ce point. Soit $M \in E$, $M' \in E'$; pour que M' soit L-spécialisation de M, il faut et suffit, comme on le voit tout de suite, que $(M',M'_L) \in E' \times F'$ soit spécialisation de $(M,M_L) \in E \times F$.

4. <u>Le Nullstellensatz.</u>

<u>Théorème.</u> <u>Soit</u> K <u>un corps algébriquement clos, et soit</u> $\mathfrak{A}$ <u>un idéal de l'algèbre de polynomes</u> $K[X_1,\ldots,X_n]$ <u>qui ne contient pas</u> 1. <u>Cet idéal admet au moins un zéro dans</u> K.

Pour établir ce théorème, nous utiliserons le lemme suivant, dont la démonstration repose sur la théorie élémentaire des entiers :

<u>Lemme 1.</u> <u>Soient</u> L <u>un corps</u>, L' <u>un sur-corps de</u> L. <u>S'il y a des éléments</u> $x_1,\ldots,x_n$ <u>en nombre fini de</u> L' <u>tels que</u> $L' = L[x_1,\ldots,x_n]$, L' <u>est algébrique sur</u> L.

Démonstration par récurrence sur n. C'est évident si $n=0$ (i.e. si $L'=L$). Supposons que le lemme soit vrai pour $n=1$. Alors L' est algébrique sur $L(x_1)$, et il suffit de montrer que x_1 est algébrique sur L. Supposons qu'il n'en soit pas ainsi. Le corps des fractions de la fermeture intégrale de $L[x_1]$ dans L' étant L', il y a un un polynôme $f_o \neq 0$ à coefficients dans L tel que les $x_i f_o(x_1)$ soient entiers sur $K[x_1]$ $(1 \leqq i \leqq n)$; on a $f_o(x_1) \neq 0$ puisque x_1 est transcendant sur L . Soit g un polynome irréductible à coefficients dans L ; on a donc $(g(x_1))^{-1} = F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, F étant un polynome à coefficients dans L . Il en résulte immédiatement qu'il y a un exposant $k > 0$ tel que $f_o^k(x_1)(g(x_1))^{-1} \in L[x_1 f_o(x_1), \ldots, x_n f_o(x_1)]$, donc soit entier sur $L[x_1]$. Mais $L[x_1]$, qui est principal, est intégralement clos, d'où $f_o^k(x_1)(g(x_1))^{-1} \in L[x_1]$. Puisque g est irréductible, g divise f_o ; f_o est donc divisible par tous les polynomes irréductibles à coefficients dans L . Mais il y a toujours une infinité de ces polynomes qui sont mutuellement non associés, d'où contradiction.

Ceci dit, passons à la démonstration du théorème. Puisque 1 n'est pas dans $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}$ est contenu dans un idéal maximal $\mathfrak{P}$; soit x_i la classe de X_i modulo $\mathfrak{P}$. On a donc $K[X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{P} = K[x_1, \ldots, x_n]$. Mais, $\mathfrak{P}$ étant maximal, cet anneau est un corps ; il résulte donc du lemme que les x_i sont algébriques sur K , donc y sont contenus puisque K est algébriquement clos. Le point $(x_1, \ldots, x_n)$ est un zéro de $\mathfrak{A}$.

Soit maintenant P un espace projectif sur un corps K et soit $\mathfrak{o}_K(P) = K[X_o, \ldots, X_n]$ son anneau de formes sur K . On dit qu'un idéal homogène $\mathfrak{A}$ de $\mathfrak{o}_K(P)$ est <u>impropre</u> quand il y a un $m > 0$ tel que $\mathfrak{A}$ contienne tous les monomes de degré m en $X_o, \ldots, X_n$.

<u>Théorème</u>. <u>Les notations étant comme ci-dessus, si $\mathfrak{A}$ est un idéal homogène non impropre de $\mathfrak{o}_K(P)$ et si K est algébriquement clos, $\mathfrak{A}$ admet au moins un zéro dans P .</u>

Montrons qu'il y a au moins un i tel qu'aucune puissance de X_i ne soit dans $\mathfrak{A}$. Sinon, il y aurait un $m > 0$ tel que $X_i^m \in \mathfrak{A}$ $(0 \leqq i \leqq n)$, et il est clair que tout monome de degré $\geqq m(n+1)$ en les X_i serait dans $\mathfrak{A}$

Supposons par exemple qu'aucune puissance de X_o ne soit dans $\mathfrak{A}$. La substitution $X_o \to 1$ donne un homomorphisme f de $K[X_o,\ldots,X_n]$ sur $K[X_1,\ldots,X_n]$; $f(\mathfrak{A})$ est un idéal $\mathfrak{A}'$ de $K[X_1,\ldots,X_n]$. Je dis que $\mathfrak{A}'$ ne contient pas 1 ; en effet, il y aurait autrement un $F \in \mathfrak{A}$ tel que $F(1,X_1,\ldots,X_n)=1$. Soit F_k la composante homogène de degré k de F ; on a $F_k(X_o,\ldots,X_n)= X_o^k F_k(1,X_1/X_o,\ldots,X_n/X_o)$. Or on a $\sum_k F_k(1,X_1/X_o,\ldots,X_n/X_o)=1$; si $F_k=0$ pour $k>m$, il vient $X_o^m = \sum_k X_o^{m-k}F_k(X_o,\ldots,X_n)$. Or, $\mathfrak{A}$ étant homogène, les F_k sont dans $\mathfrak{A}$, d'où $X_o^m \in \mathfrak{A}$, ce qui n'est pas. Il y a donc un zéro $(x_1,\ldots,x_n)$ de $\mathfrak{A}'$ dans K ; il est clair que $(1,x_1,\ldots,x_n)$ est un zéro de $\mathfrak{A}$ dans P.

Remarque. Les notations étant comme ci-dessus, soit L un sous-corps de K et $\mathfrak{A}_o$ un idéal homogène non impropre de $L[X_o,\ldots,X_n]$; l'idéal $\mathfrak{A}$ engendré par $\mathfrak{A}_o$ dans $K[X_o,\ldots,X_n]$ n'est alors pas impropre.

Supposons en effet qu'il y ait un $m>0$ tel que tous les monomes M_r $(1 \leqq r \leqq s)$ de degré m en les X_i soient dans $\mathfrak{A}$. Il est clair que toute base d'espace vectoriel de $\mathfrak{A}_o$ sur L en est une de $\mathfrak{A}$ sur K ; il résulte donc du théorème des éléments primitifs que les M_r seraient dans $\mathfrak{A}_o$.

5. Le théorème de prolongement.

Théorème. Soient E,F des espaces multiprojectifs sur un corps, K, E',F' des espaces multiprojectifs sur un corps algébriquement clos K' de mêmes types respectifs que E,F, M un point de E, M' une spécialisation de M dans E' et N un point de F. Il y a alors un point $N' \in F'$ tel que (M',N') soit spécialisation de (M,N).

1. Nous supposerons d'abord que F est un espace projectif de dimension n. Nous poserons $E = \prod_{i\in I} P_i$, $E' = \prod_{i \in I} P_i'$, P_i et P_i' étant des espaces projectifs de dimension n_i. Nous désignerons par $X_{i;k}$

$(0 \leqq k \leqq n_i)$ les lettres qui se rapportent à P_i et à P'_i, par $X_o,\dots,X_n$ celles qui se rapportent à F et F'. Soit $M = (M_i)_{i\in I}$, $M' = (M'_i)_{i\in I}$; nous désignerons par $(y_{i;0},\dots,y_{i;n_i})$ un système de coordonnées homogènes de M_i, par $(y'_{i;0},\dots,y'_{i;n_i})$ un système de coordonnées homogènes de M'_i, par $(x_o,\dots,x_n)$ un système de coordonnées homogènes de N. Nous désignerons par $\mathfrak{A}$ l'idéal du point (M,N) dans $\mathfrak{o}_Z(E\times F)$. Soit $\mathfrak{R}^T$ l'anneau transcendant du point M, formé au moyen des lettres T_i, $i\in I$. Il existe un homomorphisme f de $\mathfrak{R}^T$ sur $Z[\dots,y'_{i;k},\dots]$ tel que $f(T_i y_{i;k}) = y'_{i;k}$ pour tout (i,k). Soit $\mathfrak{P}$ le noyau de cet homomorphisme, et soit $\mathfrak{S}$ l'anneau des fractions de $\mathfrak{R}^T$ relatif à $\mathfrak{P}$; nous prolongerons d'abord f en un homomorphisme de $\mathfrak{S}$ dans K', puis en un homomorphisme f de $\mathfrak{S}[X_o,\dots,X_n]$ dans $K'[X_o,\dots,X_n]$. L'ensemble $f(\mathfrak{S})$ n'est autre que le corps des fractions L' de $Z[\dots,y'_{i;k},\dots]$, et f applique $\mathfrak{S}[X_o,\dots,X_n]$ sur $L'[X_o,\dots,X_n]$; le noyau de f est l'ensemble $\mathfrak{Q}[X_o,\dots,X_n]$ des polynomes en les X_i dont les coefficients appartiennent au noyau $\mathfrak{Q}$ de la restriction de f à $\mathfrak{S}$; on a d'ailleurs $\mathfrak{Q} = \mathfrak{P}\mathfrak{S}$.

La substitution $X_{i;k} \to y_{i;k}T_i$ (pour tous les (i,k)) définit un homomorphisme g de $\mathfrak{o}(E\times F)$ dans $\mathfrak{S}[X_o,\dots,X_n]$, qui applique tout élément homogène de $\mathfrak{o}(E\times F)$ sur un polynome homogène de $\mathfrak{S}[X_o,\dots,X_n]$. L'image de $\mathfrak{o}(E\times F)$ par g est $\mathfrak{R}^T[X_o,\dots,X_n]$; $g(\mathfrak{A})$ est donc un idéal homogène de $\mathfrak{R}^T[X_o,\dots,X_n]$, qui engendre un idéal homogène $\mathfrak{A}_1$ de $\mathfrak{S}[X_o,\dots,X_n]$; les éléments de $\mathfrak{A}_1$ sont les produits d'éléments de $g(\mathfrak{A})$ par des éléments de $\mathfrak{S}$. L'image $f(\mathfrak{A}_1)$ de $\mathfrak{A}_1$ par f est un idéal homogène de $L'[X_o,\dots,X_n]$. <u>Nous allons montrer que l'idéal $f(\mathfrak{A}_1)$ n'est pas impropre</u>. Supposons en effet qu'il en soit autrement ; il y a alors un $m>0$ tel que les monomes $Z_1,\dots,Z_r$ de de degré m en $X_o,\dots,X_n$ soient tous dans $f(\mathcal{A}_1)$. Il y a donc des $F_j \in \mathcal{A}_1$ tel que les polynomes $Z_j-F_j = G_j$ soient dans $\mathcal{Q}[X_o,\dots,X_n]$. L'idéal $\mathcal{A}_1$ étant homogène, on peut manifestement supposer que les F_j sont homogènes de degré m en $X_o,\dots,X_n$, et il en est alors de même des G_j.

Observons maintenant que tout polynome homogène $H \in \mathcal{A}$ s'annulle par la substitution $X_{i;k} \to y_{i;k}$ (pour tout (i,k)), $X_k \to x_k$ $(0 \leqq k \leqq n)$. Il résulte alors de l'homogénéité de H que H s'annulle aussi par la substitution $X_{i;k} \to y_{i;k}T_i$, $X_k \to x_k$. On en conclut que tout élément de $g(\mathcal{A})$ s'annulle par la substitution $X_k \to x_k$ $(0 \leqq k \leqq n)$, donc qu'il en est de même de tout élément de $\mathcal{A}_1$. Soit z_j le résultat de la substitution $X_k \to x_k$ $(0 \leqq k \leqq n)$ dans le monôme X_j ; puisque G_j est homogène de degré m, on a $G_j = \sum_{\ell=1}^{r} q_{j\ell} Z_\ell$, les $q_{j\ell}$ étant dans $\mathcal{Q}$. Puisque $Z_j-F_j = F\, G_j$, $F_j(x_o,\dots,x_n)=0$, il vient

$$z_j = \sum_{\ell=1}^{r} q_{j\ell}\, z_\ell \quad .$$

Soit D le déterminant de la matrice $(q_{j\ell} - \delta_{j\ell})$; il résulte des relations précédentes que $Dz_j = 0$ $(1 \leqq j \leqq r)$. Mais l'un au moins des x_k est $\neq 0$, et les x_k^m figurent parmi les z_j ; il vient donc $D = 0$. Par ailleurs, on a manifestement $D \equiv \pm 1$ (mod $\mathcal{Q}$), d'où $1 \in \mathcal{Q}$, ce qui est manifestement impossible car les $y'_{i;k}$ ne sont pas tous nuls. Nous sommes donc arrivés à une contradiction.

L'idéal $\mathcal{A}_2$ engendré par $f(\mathcal{A}_1)$ dans $K'[X_o,\dots,X_n]$ n'est donc pas impropre et admet par suite un zéro N' dans F' (cf. n°4). Je dis que (M',N') est une spécialisation de (M,N). Soit U homogène dans $\mathcal{A}$. Le résultat de la substitution $X_{i;k} \to y'_{i;k}$ (pour tout (i,k)) dans U est $f(g(U))$, qui est dans $f(\mathcal{A}_1)$, donc dans $\mathcal{A}_2$ et admet par suite le zéro N', ce qui signifie que (M',N') est un zéro de U, et notre assertion est démontrée.

2. Passons maintenant au cas général. Soit $F = \prod_{j \in J} Q_j$, $F' = \prod_{j \in J} Q'_j$, Q_j et Q'_j étant des espaces projectifs de même dimension sur K et K'. Si J' est une partie de J, nous désignerons par $F_{J'}$ et $F'_{J'}$ les espaces $\prod_{j \in J'} Q_j$, $\prod_{j \in J'} Q'_j$. Si $J' \subset J'' \subset J$, $F_{J''} = F_{J'} \times F_{J''-J'}$, $F'_{J''} = F'_{J'} \times F'_{J''-J'}$. Nous désignerons par $N_{J'}$ la projection de N sur le facteur $F_{J'}$ de F. Considérons l'ensemble $\mathcal{Z}$ des couples $(J', N'_{J'})$, où $J' \subset J$ et $N'_{J'}$ est un point de $F'_{J'}$ tel que $(M', N'_{J'})$ soit une spécialisation de $(M, N_{J'})$. Cet ensemble n'est pas vide en vertu de la première partie. Nous l'ordonnerons par la règle suivante : $(J', N'_{J'}) \leqq (J'', N'_{J''})$ si $J' \subset J''$ et $N'_{J'}$ est la projection de $N'_{J''}$ sur le facteur $F'_{J'}$ de $F'_{J''}$; cette règle définit évidemment une relation d'ordre dans $\mathcal{Z}$. Soit $\mathcal{Z}_0$ une partie totalement ordonnée de $\mathcal{Z}$, et soit J'' la réunion des J' qui figurent dans les couples $(J', N'_{J'}) \in \mathcal{Z}_0$. Si $j \in J''$, et $j \in J' \subset J''$, $(J', N'_{J'}) \in \mathcal{Z}_0$, la j-ième coordonnée N'_j de $N'_{J'}$ ne dépend pas du choix de J' puisque $\mathcal{Z}_0$ est totalement ordonné. Soit $N'_{J''} = (N'_j)_{j \in J''}$. Je dis que $(M', N'_{J''})$ est spécialisation de $(M, N_{J''})$. Soit en effet H un polynome homogène de $\mathfrak{o}(E \times F_{J''})$ qui admet $(M, N_{J''})$ comme zéro. Puisque F ne contient qu'un nombre fini de lettres, il y a un $(J', N'_{J'}) \in \mathcal{Z}_0$ tel que $F \in \mathfrak{o}(E \times F_{J'})$. Puisque $(M', N'_{J'})$ est une spécialisation de $(M, N_{J'})$, c'est un zéro de F ; il en est donc de même de $(M', N'_{J''})$, ce qui démontre notre assertion. L'ensemble $\mathcal{Z}$ est donc inductif, et admet un élément maximal $(J', N'_{J'})$. Je dis que $J'=J$. Car sinon, soit $j \in J-J'$, $J'' = J' \cup \{j\}$. Il y a en vertu de la première partie un $N'_j \in Q'_j$ tel que $(M', N'_{J'}, N'_j)$ soit une spécialisation de $(M, N_{J'}, N_j)$; si on pose $N'_{J''} = (N'_{J'}, N'_j)$, $(M', N'_{J''})$ est spécialisation de $(M, N_{J''})$, et $(J'', N'_{J''})$ est dans $\mathcal{Z}$ et strictement $>(J', N'_{J'})$, d'où contradiction. Le théorème est donc démontré.

Corollaire. *Les notations étant les mêmes que plus haut, supposons de plus que* K *et* K' *aient un corps* L *commun et que* M' *soit une* L*-spécialisation de* M . *Il existe alors un* $N' \in F'$ *tel que* (M',N') *soit une* L*-spécialisation de* (M,N).

Soient M_L et M'_L les points représentatifs de L considéré comme sous-corps de K et de K' respectivement. (M'_L, M') est donc une spécialisation de (M_L, M). Il y a donc $N' \in F'$ tel que (M'_L, M', N') soit spécialisation de (M_L, M, N), d'où le résultat.

6. Spécialisations complètes.

Définition. *On appelle spécialisation complète d'un corps* K *une spécialisation du point représentatif* M_K *de* K , *considéré comme sous-corps de lui-même.*

Si $a \in K$, désignons par D_a une droite projective sur K et par M_a le point de coordonnées homogènes $(a,1)$ de D_a , d'où $M_K = (M_a)_{a\in K}$. Soit $M' = (M'_a)_{a\in K}$ une spécialisation de M_K , M'_a étant un point d'une droite projective D'_a sur un corps K' . On peut supposer que M'_a a un système de coordonnées projectives $(f(a),g(a))$ tel que ou bien $g(a)=1$ ou bien $f(a)=1$, $g(a)=0$. Soit A l'ensemble des $a \in K$ tels que $g(a)=1$.
Alors A *est un sous-anneau de* K *et* f *induit un homomorphisme de* A *dans* K' . Soient a,b des éléments de A. Soient X_a, Y_a les lettres affectées à D_a dans $o_Z(\prod_{a\in K} D_a)$. Alors, la forme $X_{a+b}Y_aY_b - X_aY_{a+b}Y_b - X_bY_aY_{a+b}$ admet M_K , donc aussi M' , comme zéro, d'où $f(a+b)-g(a+b)(f(a)+f(b))=0$; il est impossible que $f(a+b)=1$, $g(a+b)=0$, d'où $g(a+b)=1$, $f(a+b)=f(a)+f(b)$ (excuses : remplacer + par - dans ce qui précède). De même $X_{ab}Y_aY_b - X_aX_bY_{ab}$ admet M_K , donc M' , pour zéro, d'où $f(ab)=f(a)f(b)g(ab)$ et par suite $g(ab)=1$, $f(ab) = f(a)f(b)$.

La forme X_1-Y_1 admet M_K, donc M', pour zéro, d'où $f(1)=g(1)$, $f(1)=1$, $g(1)=0$, et $1\in A$, d'où $A\neq\emptyset$.

<u>De plus</u>, <u>si</u> $b\in K$ <u>n'est pas dans</u> A, b^{-1} <u>y est</u>, <u>et</u> $f(b^{-1})=0$. Posons $c=b^{-1}$; $X_1Y_bY_c-X_bX_cY_1$ admet M_K, donc M', pour zéro, et $g(b)=0$, $f(b)=1$, $g(1)=1$, d'où $f(c)=0$, d'où $c=b^{-1}\in A$.

<u>Toute spécialisation complète de</u> K <u>définit donc un sous-anneau</u> A <u>de</u> K <u>et un homomorphisme</u> f <u>de</u> A <u>dans un corps tels que</u>, <u>si</u> $x\in K-A$, $x^{-1}\in A$ <u>et</u> $f(x^{-1})=0$. Nous dirons que A et f sont l'anneau et l'homomorphisme attachés à la spécialisation complète donnée.

Soient réciproquement A un sous-anneau de K et f un homomorphisme de A dans un corps K' tels que $x\in K-A$ entraîne $x^{-1}\in A$, $f(x^{-1})=0$. Si $x\in K$, soit D'_x la droite projective sur K' et soit M'_x le point de D'_x de coordonnées homogènes $(f(x),1)$ ou $(1,0)$ suivant que $x\in A$ ou non. Soit $M'=(M'_x)_{x\in K}$; alors M' est spécialisation de M_K. Il est en effet d'abord clair que $M'_A=(M'_x)_{x\in A}$ est spécialisation de $M_A=(M_x)_{x\in A}$. Si $\overline{K}'$ est une clôture algèbrique de K, et $\overline{D}'_x$ la droite projective sur $\overline{K}'$, il y a un point $N'\in\prod_{x\in K-A}\overline{D}'_x$ tel que $M''=(M'_A,N')$ soit spécialisation de M_K. Cette spécialisation définit un anneau A' et un homomorphisme f' de A' dans $\overline{K}'$; il est clair que $A'\supset A$ et que f' prolonge f. S'il y avait $x\in A'-A$, on aurait $x^{-1}\in A\subset A'$, $f'(x^{-1})=f(x^{-1})=0$, $f'(x)f'(x^{-1})=1$, ce qui est impossible. On a donc $A'=A$, $f'=f$, et il en résulte tout de suite que $M''=M'$. Donc les données de A et de f déterminent réciproquement une spécialisation complète.

On a donc tout ce qu'il faut pour les anneaux de valuations, et je n'ai plus rien de nouveau à proposer à ce sujet.

III. ANNEAUX NORMAUX.

Il me semble qu'il y a deux étapes successives bien distinctes dans la théorie des anneaux normaux, qu'il y aurait avantage à séparer nettement.

La première étape n'est autre que le théorème d'Artin - van der Waerden, qui affirme que, par rapport à une certaine loi de composition (distincte de la multiplication ordinaire des idéaux), les idéaux d'un certain ensemble (idéaux "inversibles" "majeurs" dans ce qui suit) d'un domaine d'intégrité intégralement clos forment un groupe.

La deuxième étape consiste à montrer que, sous certaines conditions, ce groupe est un produit de groupes cycliques infinis. Il y a deux conditions entièrement différentes d'aspect qui sont nécessaires et suffisantes pour qu'il en soit ainsi ; la première est une condition de chaînes pour les idéaux inversibles, la seconde est que l'anneau soit normal au sens de la définition des états 2 et 3 . Je proposerais donc de procéder comme suit. La première étape se ferait avec la théorie des éléments entiers, et prendrait l'aspect décrit dans ce qui suit.

n°. n (du § sur les entiers). Diviseurs.

On désignera dans ce qui suit par A un domaine d'intégrité intégralement clos et par K son corps des fractions.

Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des parties E de K qui possèdent les propriétés suivantes : E contient un élément $\neq 0$, et est contenu dans au moins un idéal fractionnaire principal. Définissons la relation "$E \sim E'$ " dans $\mathcal{E}$ comme signifiant : les idéaux fractionnaires principaux qui contiennent E sont les mêmes que ceux qui contiennent E'. C'est manifestement une relation d'équivalence.

Définition. On appelle diviseurs de A les classes d'équivalence de l'ensemble $\mathcal{E}$ relativement à la relation d'équivalence définie ci-dessus.

Si $E \in \mathcal{E}$, on désigne par $\mathfrak{D}(E)$ le diviseur dont E est élément. Pour tout diviseur $\mathfrak{A}$, l'ensemble des $E \in \mathcal{E}$ tels que $\mathfrak{D}(E) = \mathfrak{A}$, ordonné par inclusion, admet un élément maximal, à savoir l'intersection des idéaux fractionnaires principaux qui contiennent E , où E est un élément quelconque de l'ensemble (cette intersection contient E , donc au moins un élément $\neq 0$, et est manifestement contenue dans au moins un idéal principal puisqu'il en est ainsi de E). Nous désignerons cet élément maximal par $\mathfrak{m}(\mathfrak{A})$. C'est manifestement un idéal fractionnaire ; les idéaux fractionnaires qui peuvent se représenter de cette manière seront appelés "majeurs" ; ce sont tous les idéaux fractionnaires $\neq \{0\}$ qui se représentent comme intersections d'idéaux principaux ; $\mathfrak{m}(\mathfrak{D}(E))$ est le plus petit idéal majeur contenant E .

Soient $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ des diviseurs, E, F des éléments de $\mathcal{E}$ tels que $\mathfrak{A} = \mathfrak{D}(E)$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{D}(F)$; alors $EF \in \mathcal{E}$ et $\mathfrak{D}(EF)$ ne dépend que de $\mathfrak{A}$ et de $\mathfrak{B}$. Pour le montrer, observons d'abord que $EF \subset \mathfrak{m}(\mathfrak{A})\mathfrak{m}(\mathfrak{B})$. Soit par ailleurs Az un idéal fractionnaire principal qui contient EF . Si $y \in F$, $y \neq 0$, on a $E \subset Azy^{-1}$, d'où $\mathfrak{m}(\mathfrak{A}) \subset Azy^{-1}$; ceci étant vrai pour tout $y \neq 0$ de F , $\mathfrak{m}(\mathfrak{A})F \subset Az$. Prenant alors $x \neq 0$ dans $\mathfrak{m}(\mathfrak{A})$, on a $F \subset Azx^{-1}$, d'où $\mathfrak{m}(\mathfrak{B}) \subset Azx^{-1}$, et $\mathfrak{m}(\mathfrak{A})\mathfrak{m}(\mathfrak{B}) \subset Az$. Il résulte de là que $\mathfrak{D}(EF) = \mathfrak{D}(\mathfrak{m}(\mathfrak{A})\mathfrak{m}(\mathfrak{B}))$. Nous désignerons le diviseur $\mathfrak{D}(EF)$ par $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, et nous l'appellerons le <u>produit</u> de $\mathfrak{A}$ et de $\mathfrak{B}$. Cette multiplication des diviseurs est évidemment commutative. Elle est aussi associative, car, si $\mathfrak{A} = \mathfrak{D}(E)$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{D}(F)$ et $\mathfrak{C} = \mathfrak{D}(G)$ sont des diviseurs, il est clair que $(\mathfrak{A}\mathfrak{B})\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{A}(\mathfrak{B}\mathfrak{C})$ sont tous deux égaux à $\mathfrak{D}(EFG)$.

Tout idéal fractionnaire principal $Ax \neq \{0\}$ est majeur ; nous poserons $\mathfrak{D}_x = \mathfrak{D}(Ax)$, et nous appellerons $\mathfrak{D}_x$ le <u>diviseur</u> de x .

Il est manifeste que $\mathfrak{D}_{xy} = \mathfrak{D}_x \mathfrak{D}_y$ si x,y sont des éléments $\neq 0$ de K. Si $E \in \mathcal{E}$ et si x est un élément $\neq 0$ de K, on a $\mathfrak{D}(Ex) = \mathfrak{D}(E)\mathfrak{D}_x$. En effet $\mathfrak{D}(E)\mathfrak{D}_x = \mathfrak{D}(EAx)$; or $EAx \supset Ex$, et tout idéal fractionnaire principal qui contient Ex contient EAx, ce qui démontre notre assertion. De plus, si $\mathfrak{a}$ est un idéal majeur, il en est évidemment de même de $\mathfrak{a}x$, d'où $m(\mathcal{A}\mathfrak{D}_x) = x\,m(\mathcal{A})$ pour tout diviseur $\mathcal{A}$. On notera que le diviseur $\mathfrak{D}_1$ de 1 est élément unité pour la multiplication des diviseurs ; on a $m(\mathfrak{D}_1) = A$.

On peut ordonner l'ensemble des diviseurs comme suit : on convient que $\mathcal{A} \leqq \mathcal{B}$ signifie que $m(\mathcal{B}) \subset m(\mathcal{A})$. Cette relation st évidemment une relation d'ordre. Si E,F sont dans $\mathcal{E}$ et $F \subset E$, on a $\mathfrak{D}(E) \leqq \mathfrak{D}(F)$. La multiplication des diviseurs est compatible avec la relation d'ordre que nous venons d'introduire. Supposons en effet que $\mathcal{A} \leqq \mathcal{A}'$, $\mathcal{B} \leqq \mathcal{B}'$; on a $\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathfrak{D}(m(\mathcal{A})m(\mathcal{B}))$, $\mathcal{A}'\mathcal{B}' = \mathfrak{D}(m(\mathcal{A}')m(\mathcal{B}'))$ et $m(\mathcal{A}')m(\mathcal{B}') \supset m(\mathcal{A})m(\mathcal{B})$, d'où $\mathcal{A}\mathcal{B} \leqq \mathcal{A}'\mathcal{B}'$. Les diviseurs $\mathcal{A}$ tels que $\mathfrak{D}_1 \leqq \mathcal{A}$ sont dits <u>entiers</u> ; pour que $\mathcal{A}$ soit entier, il faut et suffit que $m(\mathcal{A})$ soit un idéal entier.

La relation " $\mathcal{A} \leqq \mathcal{B}$ " s'énonce aussi " $\mathcal{B}$ est multiple de $\mathcal{A}$ ". Si x est un élément de K, on dit que x <u>est multiple du diviseur</u> $\mathcal{A}$ si ou bien $x=0$ ou bien $x \neq 0$ et $\mathfrak{D}_x$ est multiple de $\mathcal{A}$. <u>L'ensemble des multiples de</u> $\mathcal{A}$ <u>n'est autre que l'idéal majeur</u> $m(\mathcal{A})$. En effet, si $x \neq 0$, la condition que x soit multiple de $\mathcal{A}$ est équivalente à " $\mathcal{A} \leqq \mathfrak{D}_x$ ", ou encore à " $m(\mathcal{A}) \supset m(\mathfrak{D}_x)$ " ; mais $m(\mathfrak{D}_x) = Ax$, et la condition " $Ax \subset m(\mathcal{A})$ " équivaut à $x \in m(\mathcal{A})$. La relation "x est multiple de $\mathcal{A}$" se note fréquemment $x \equiv 0 \pmod{\mathcal{A}}$. Les conditions $x \equiv 0 \pmod{\mathcal{A}}$ et $y \equiv 0 \pmod{\mathcal{A}}$ entraînent donc $x \pm y \equiv 0 \pmod{\mathcal{A}}$

25

et $ax \equiv 0 \pmod{\mathfrak{A}}$ pour tout $a \in A$; les conditions $x \equiv 0 \pmod{\mathfrak{A}}$ et $y \equiv 0 \pmod{\mathfrak{B}}$, où $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ sont des diviseurs, entraînent $xy \equiv 0 \pmod{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}$. Enfin, on notera que, si $y \neq 0$, la condition $x \equiv 0 \pmod{\mathfrak{D}_y}$ signifie que x est multiple de y (i.e. $x \in Ay$).

Théorème. L'ensemble des diviseurs de A forme un groupe ordonné par rapport à la multiplication et à la relation d'ordre que nous avons introduites dans cet ensemble.

Il suffit de montrer que tout diviseur $\mathfrak{A}$ admet un inverse. Soit x un élément $\neq 0$ quelconque tel que $\mathfrak{m}(\mathfrak{A}) \subset Ax$. Soit $\mathfrak{n}$ l'intersection des Ay^{-1}, y parcourant les éléments $\neq 0$ de $\mathfrak{m}(\mathfrak{A})$. On a alors $x^{-1} \in \mathfrak{n}$, car, si $y \in \mathfrak{m}(\mathfrak{A})$, $y \in Ax$, d'où $x^{-1} \in Ay^{-1}$; $\mathfrak{n}$ est donc un idéal majeur. Soit $\mathfrak{A}' = \mathfrak{D}(\mathfrak{n})$, d'où $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}(\mathfrak{A}')$. On a $\mathfrak{m}(\mathfrak{A})\mathfrak{n} \subset A$, ce qui montre que $\mathfrak{A}\mathfrak{A}'$ est entier. Nous allons maintenant montrer que tout idéal fractionnaire principal Au qui contient $\mathfrak{m}(\mathfrak{A})\mathfrak{n}$ contient A, d'où il résultera que $\mathfrak{m}(\mathfrak{A}\mathfrak{A}') \supset A$, d'où $\mathfrak{m}(\mathfrak{A}\mathfrak{A}') = A$, $\mathfrak{A}\mathfrak{A}' = \mathfrak{D}_1$. Si $y \in \mathfrak{m}(\mathfrak{A})$, on a $yx^{-1} \in \mathfrak{m}(\mathfrak{A})\mathfrak{n} \subset Au$, d'où $yu^{-1} \in Ax$. Ceci étant vrai pour tout x tel que $\mathfrak{m}(\mathfrak{A}) \subset Ax$, et $\mathfrak{m}(\mathfrak{A})$ étant majeur, on a $yu^{-1} \in \mathfrak{m}(\mathfrak{A})$. Ceci étant vrai pour tout $y \in \mathfrak{m}(\mathfrak{A})$, on a $\mathfrak{m}(\mathfrak{A})u^{-1} \subset \mathfrak{m}(\mathfrak{A})$, d'où, par récurrence sur n, $\mathfrak{m}(\mathfrak{A})u^{-n} \subset \mathfrak{m}(\mathfrak{A})$ pour tout $n > 0$. Si y est un élément $\neq 0$ de $\mathfrak{m}(\mathfrak{A})$ et x un élément de K tel que $\mathfrak{m}(\mathfrak{A}) \subset Ax$, on a $u^{-n} \in Axy^{-1}$, d'où $A[u^{-1}] \subset Axy^{-1}$. Puisque Axy^{-1} est un A-module de type fini, u^{-1} est entier sur A, donc appartient à A puisque A est intégralement clos. Il en résulte immédiatement que $A \subset Au$, ce qui démontre le théorème.

Remarque. Si A est un domaine d'intégrité quelconque, il me semblerait commode (du point de vue de la géométrie algèbrique) d'appeler diviseurs de A les diviseurs de la clôture intégrale de A.

Deuxième étape. n° n+1. Anneaux normaux.

[Ce n° peut se placer soit à la suite du précédent, soit après les valuations, dans le § d'applications de ces dernières à l'étude des entiers.

Définition. Un anneau normal est un domaine d'intégrité intégralement clos A tel que tout ensemble non vide de diviseurs entiers de A contienne un élément minimal.

Il résulte immédiatement de là que tout domaine d'intégrité noethérien intégralement clós est normal.

Théorème. Soit A un anneau normal, et soit P l'ensemble des éléments minimaux de l'ensemble des diviseurs entiers distincts du diviseur unité. Le groupe des diviseurs de A est alors un groupe abélien libre, et P en est un système libre de générateurs. Si $\mathfrak{P} \in P$, l'idéal majeur $\mathfrak{m}(\mathfrak{P})$ est premier.

Soit $\mathfrak{G}$ le groupe des diviseurs ; désignons par $\mathfrak{G}_1$ le monoïde engendré dans $\mathfrak{G}$ par P et par le diviseur unité $\mathfrak{D}_1$. Montrons d'abord que tout diviseur entier appartient à $\mathfrak{G}_1$. Supposons qu'il n'en soit pas ainsi ; l'ensemble U des diviseurs entiers n'appartenant pas à $\mathfrak{G}_1$ possède alors un élément minimal $\mathfrak{A}$. On a $\mathfrak{A} \neq \mathfrak{D}_1$, et $\mathfrak{A}$ n'est pas dans P. L'ensemble des diviseurs entiers $\neq \mathfrak{D}_1$ et $\leq \mathfrak{A}$ possède un élément minimal $\mathfrak{P}$, qui est manifestement dans P. Puisque $\mathfrak{P} \leqq \mathfrak{A}$, on a $\mathfrak{D}_1 \leqq \mathfrak{P}^{-1}\mathfrak{A}$, et $\mathfrak{P}^{-1}\mathfrak{A}$ est entier ; on a $\mathfrak{P}^{-1}\mathfrak{A} < \mathfrak{A}$, d'où $\mathfrak{P}^{-1}\mathfrak{A} \in \mathfrak{G}_1$ et $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}\mathfrak{P}^{-1}\mathfrak{A} \in \mathfrak{G}_1$, d'où contradiction. Soit maintenant $\mathfrak{B}$ un diviseur quelconque ; si $x \in K$ est tel que $\mathfrak{m}(\mathfrak{B}) \subset Ax$, $\mathfrak{B}\mathfrak{D}_x^{-1}$ entier ; posons $x = y/z$, y,z dans A ; $\mathfrak{B}\mathfrak{D}_y^{-1}\mathfrak{D}_z$ est donc entier, et $\mathfrak{B}$ peut se représenter sous la forme $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2^{-1}$, avec $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ entiers. Il en résulte que $\mathfrak{B}$ est dans le groupe engendré par P ; ce dernier est donc identique à $\mathfrak{G}$.

Soit $\mathfrak{P}$ un élément de P, et soit $\mathfrak{p} = m(\mathfrak{P})$; $\mathfrak{p}$ est donc un idéal entier. Soit x un élément de $A-\mathfrak{p}$, et soit $\mathfrak{a}$ l'ensemble des $y \in A$ tels que $xy \in \mathfrak{p}$. Il est clair que $\mathfrak{a}$ est un idéal entier $\neq A$ et contenant $\mathfrak{p}$. Cet idéal est majeur, car, si Z est l'ensemble des $z \in K$ tels que $\mathfrak{p} \subset Az$, on a $\mathfrak{p} = \bigcap_{z \in Z} Az$, d'où $\mathfrak{a} = A \cap \bigcap_{z \in Z} Azx^{-1}$. Soit $\mathfrak{A} = \mathfrak{D}(\mathfrak{a})$; $\mathfrak{A}$ est entier et $\leqq \mathfrak{P}$, et on a $\mathfrak{a} = m(\mathfrak{A})$, d'où $\mathfrak{A} \neq \mathfrak{D}_1$; il résulte du caractère minimal de $\mathfrak{P}$ que $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}$, d'où $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}$, et $\mathfrak{p}$ est premier.

Ceci dit, supposons que l'on ait une relation $\prod_{\mathfrak{P} \in P} \mathfrak{P}^{n(\mathfrak{P})} = \mathfrak{D}_1$, les $n(\mathfrak{P})$ étant des entiers presque tous nuls. Soit P' l'ensemble des $\mathfrak{P}$ tels que $n(\mathfrak{P}) \geqq 0$, et soit $P'' = P - P'$; nous écrirons notre relation $\prod_{\mathfrak{P} \in P'} \mathfrak{P}^{n(\mathfrak{P})} = \prod_{\mathfrak{P} \in P''} \mathfrak{P}^{-n(\mathfrak{P})}$. Supposons pour un moment que $P'' \neq \emptyset$, et soit $\mathfrak{P}_0 \in P''$. Si $\mathfrak{P} \in P'$, on a $\mathfrak{P} \neq \mathfrak{P}_0$, d'où $m(\mathfrak{P}) \neq m(\mathfrak{P}_0)$; choisissons un $x_{\mathfrak{P}}$ appartenant à $m(\mathfrak{P})$ mais pas à $m(\mathfrak{P}_0)$, et soit $x = \prod_{\mathfrak{P} \in P'} x_{\mathfrak{P}}^{n(\mathfrak{P})}$. Si $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ sont des diviseurs, on a $m(\mathfrak{A})m(\mathfrak{B}) \subset m(\mathfrak{A}\mathfrak{B})$ d'où $x \in m(\prod_{\mathfrak{P} \in P'} \mathfrak{P}^{n(\mathfrak{P})}) =$
$= m(\prod_{\mathfrak{P} \in P''} \mathfrak{P}^{-n(\mathfrak{P})})$. Si $\mathfrak{P} \in P''$, on a $n(\mathfrak{P}) < 0$; on a donc $\mathfrak{P}_0 \leqq \prod_{\mathfrak{P} \in P''} \mathfrak{P}^{-n(\mathfrak{P})}$, d'où $m(\prod_{\mathfrak{P} \in P''} \mathfrak{P}^{-n(\mathfrak{P})}) \subset m(\mathfrak{P}_0)$ et $x \in m(\mathfrak{P}_0)$. Mais ceci est impossible puisque $m(\mathfrak{P}_0)$ est premier et qu'aucun des $x_{\mathfrak{P}}$ n'est dans $m(\mathfrak{P}_0)$. On conclut de là que tous les $n(\mathfrak{P})$ sont $\geqq 0$. On verrait de la même manière qu'ils sont tous $\leqq 0$; ils sont donc tous nuls, et le théorème dest démontré.

<u>Soient</u> $\mathfrak{A} = \prod_{\mathfrak{P} \in P} \mathfrak{P}^{n(\mathfrak{P})}$ <u>et</u> $\mathfrak{B} = \prod_{\mathfrak{P} \in P} \mathfrak{P}^{m(\mathfrak{P})}$ <u>des diviseurs. Pour que</u> $\mathfrak{A} \leqq \mathfrak{B}$, <u>il faut et suffit que</u> $n(\mathfrak{P}) \leqq m(\mathfrak{P})$ <u>pour tout</u> $\mathfrak{P} \in P$.
Il suffit évidemment de le démontrer dans le cas où $\mathfrak{A} = \mathfrak{D}_1$, i.e. $n(\mathfrak{P}) = 0$ pour tout $\mathfrak{P}$. La condition est alors manifestement suffisante. Par ailleurs, on a vu dans la démonstration du théorème précédent que tout

tout diviseur entier appartient au monoide engendré par $\mathfrak{D}_1$ et P , ce qui montre que la condition est nécessaire.

On a donc, au moyen de la théorie des groupes ordonnés, les notions de p.g.c.d. et de p.p.c.m. de deux diviseurs.

Si $\mathfrak{A}$ est un diviseur et $\mathfrak{P} \in P$, on désignera dans ce qui suit par $n(\mathfrak{A};\mathfrak{P})$ l'exposant avec lequel $\mathfrak{P}$ figure dans l'expression de $\mathfrak{A}$ comme produit de puissances des éléments de P ; on a donc $n(\mathfrak{A}\mathfrak{B};\mathfrak{P})=n(\mathfrak{A};\mathfrak{P})+$ $+n(\mathfrak{B};\mathfrak{P})$; pour que $\mathfrak{B}$ soit multiple de $\mathfrak{A}$, il faut et suffit que $n(\mathfrak{B};\mathfrak{P}) \geqq n(\mathfrak{A};\mathfrak{P})$ pour tout $\mathfrak{P}$. Si E est une partie de K qui contient un élément $\neq 0$ et qui est contenue dans un idéal fractionnaire, on posera $n(E;\mathfrak{P})= n(\mathfrak{D}(E);\mathfrak{P})$. Si x est un élément $\neq 0$ de K , on posera $n(x;\mathfrak{P})= n(\mathfrak{D}_x;\mathfrak{P})$; pour que x soit multiple d'un diviseur $\mathfrak{A}$, il faut et suffit que $n(x;\mathfrak{P}) \geqq n(\mathfrak{A};\mathfrak{P})$ pour tout $\mathfrak{P} \in P$. On a évidemment

$$n(xy;\mathfrak{P}) = n(x;\mathfrak{P})+n(y;\mathfrak{P}) \ ; \ n(x+y;\mathfrak{P}) \geqq \min\{n(x;\mathfrak{P}),n(y;\mathfrak{P})\}$$

si x,y sont $\neq 0$ dans K et si (pour la deuxième formule) $x+y \neq 0$.

<u>Proposition.</u> <u>Soit</u> E <u>une partie de</u> K <u>qui contient un élément</u> $\neq 0$ <u>et qui est contenue dans un idéal fractionnaire.</u> <u>Si</u> $\mathfrak{P} \in P$, $n(E;\mathfrak{P})$ <u>est le plus petit des</u> $n(x;\mathfrak{P})$ <u>pour tous les</u> $x\neq 0$ <u>contenus dans</u> E <u>et est le plus grand des</u> $n(y;\mathfrak{P})$ <u>pour tous les</u> $y \in K$ <u>tels que</u> $E \subset Ay$.

Si $x\neq 0$, $x \in E$, on a $x \in \mathfrak{m}(\mathfrak{D}(E))$, x est multiple de $\mathfrak{D}(E)$, et $n(x;\mathfrak{P}) \geqq n(E;\mathfrak{P})$. Si on avait $n(x;\mathfrak{P}) \geqq n(E;\mathfrak{P})+1$ pour tout $x\neq 0$ de E , tous les éléments de E seraient multiples de $\mathfrak{P}\mathfrak{D}(E)$, et on aurait $E \subset \mathfrak{m}(\mathfrak{P}\mathfrak{D}(E))$, ce qui est impossible, car $\mathfrak{m}(\mathfrak{P}\mathfrak{D}(E)) \neq \mathfrak{m}(\mathfrak{D}(E))$ et $\mathfrak{m}(\mathfrak{D}(E))$ est le plus petit idéal majeur contenant E . Soit donc $x \in E$ tel que $n(x;\mathfrak{P})=n(E;\mathfrak{P})$. Si $E \subset Ay$, on a $n(y;\mathfrak{P}) \leqq n(x;\mathfrak{P}) =$ $= n(E;\mathfrak{P})$. Par ailleurs, il y a un $z \in \mathfrak{m}(\mathfrak{D}^{-1}(E))$ tel que $n(z;\mathfrak{P})= -n(E;\mathfrak{P})$; on a $zE \subset \mathfrak{m}(\mathfrak{D}^{-1}(E))\,\mathfrak{m}(\mathfrak{D}(E)) \subset \mathfrak{m}(\mathfrak{D}_1)=A$ d'où $E \subset Az^{-1}$ et $n(z^{-1};\mathfrak{P}) = n(E;\mathfrak{P})$, ce qui démontre la proposition.

Soient $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ des idéaux fractionnaires $\neq \{0\}$. On désigne par $\mathfrak{a} : \mathfrak{b}$ l'ensemble des $x \in K$ tels que $\mathfrak{b} x \subset \mathfrak{a}$. C'est évidemment un A-module. Si b est un élément $\neq 0$ de $\mathfrak{b}$ et y un élément de K tel que $\mathfrak{b} \subset Ay$, on a $\mathfrak{a} y^{-1} \subset \mathfrak{a} : \mathfrak{b} \subset \mathfrak{a} b^{-1}$, ce qui montre que $\mathfrak{a} : \mathfrak{b}$ est un idéal fractionnaire.

<u>Théorème</u>. <u>Soient</u> $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ <u>des idéaux fractionnaires</u> $\neq \{0\}$; <u>posons</u> $\mathcal{A} = \mathcal{D}(\mathfrak{a})$, $\mathcal{B} = \mathcal{D}(\mathfrak{b})$; $\mathcal{D}(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$ <u>est alors</u> $\mathcal{A}\mathcal{B}$, $\mathcal{D}(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})$ <u>est le</u> p.g.c.d. <u>de</u> $\mathcal{A}$ <u>et de</u> $\mathcal{B}$, $\mathcal{D}(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$ <u>est le</u> p.p.c.m. <u>de</u> $\mathcal{A}$ <u>et de</u> $\mathcal{B}$ <u>et</u> $\mathcal{D}(\mathfrak{a} : \mathfrak{b})$ <u>est</u> $\mathcal{A}\mathcal{B}^{-1}$.

On sait déjà que $\mathcal{D}(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = \mathcal{A}\mathcal{B}$. Puisque $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ contient $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$, $\mathcal{D}(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})$ divise $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, donc aussi leur p.p.c.m. $\mathcal{C}$; par ailleurs, si $x \in \mathfrak{a}$, $y \in \mathfrak{b}$, x et y sont multiples de $\mathcal{C}$, et il en est de même de $x+y$, de sorte que $\mathcal{D}(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})$ est multiple de $\mathcal{C}$ (prop.1), d'où $\mathcal{D}(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}) = \mathcal{C}$. Puisque $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ est contenu dans $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$, $\mathcal{D}(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$ est multiple de $\mathcal{A}$ et de $\mathcal{B}$, donc aussi de leur p.p.c.m. $\mathcal{M}$. Pour montrer que $\mathcal{D}(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = \mathcal{M}$, il suffit de montrer que, pour tout $\mathfrak{P} \in P$, il y a un $x \neq 0$ dans $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ tel que $n(x;\mathfrak{P}) = \max\{n(\mathfrak{a};\mathfrak{P}), n(\mathfrak{b};\mathfrak{P})\}$ (prop.1). Or il y a $y \in \mathfrak{a}$ et $z \in \mathfrak{b}$ tels que $y \neq 0$, $z \neq 0$, $n(y;\mathfrak{P}) = n(\mathfrak{a};\mathfrak{P})$, $n(z;\mathfrak{P}) = n(\mathfrak{b};\mathfrak{P})$. Soit $\mathcal{M}'$ le p.p.c.m. de $\mathcal{D}_y$ et $\mathcal{D}_z$, d'où $n(\mathcal{M}';\mathfrak{P}) = \max\{n(\mathfrak{a};\mathfrak{P}), n(\mathfrak{b};\mathfrak{P})\}$. Il y a un $x \in m(\mathcal{M}')$ tel que $n(x;\mathfrak{P}) = n(\mathcal{M}';\mathfrak{P})$; x est multiple de $\mathcal{M}'$, donc de y et de z, d'où $x \in Ay \cap Az \subset \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$, ce qui démontre notre assertion. On a $(\mathfrak{a} : \mathfrak{b})\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$, de sorte que $\mathcal{D}(\mathfrak{a} : \mathfrak{b})\mathcal{B}$ est multiple de $\mathcal{A}$. Pour montrer qu'il y a égalité, il suffit de montrer que, pour tout $\mathfrak{P} \in P$, il y a un $x \in \mathfrak{a} : \mathfrak{b}$ tel que $n(x;\mathfrak{P}) = n(\mathfrak{a};\mathfrak{P}) - n(\mathfrak{b};\mathfrak{P})$. Choisissons y comme plus haut, et soit v un élément de K tel que $\mathfrak{b} \subset Av$ et $n(v;\mathfrak{P}) = n(\mathfrak{b};\mathfrak{P})$. On a $yv^{-1}\mathfrak{b} \subset Ay \subset \mathfrak{a}$, d'où $x = yv^{-1} \in \mathfrak{a} : \mathfrak{b}$, et x possède les propriétés requises.

<u>Proposition 2.- Soit</u> $\mathfrak{A}$ <u>un diviseur, et soient</u> $\mathfrak{P}_1, \dots, \mathfrak{P}_h$ <u>des éléments de</u> P <u>distincts. Il y a alors un</u> $x \neq 0$ <u>de</u> K <u>qui est multiple de</u> $\mathfrak{A}$ <u>tel que</u> $n(x; \mathfrak{P}_i) = n(\mathfrak{A}; \mathfrak{P}_i)$ $(1 \leqq i \leqq h)$.

Soit $\mathfrak{A}_i = \mathfrak{A} \prod_{j \neq i} \mathfrak{P}_j$; $\mathfrak{A}_i$ est donc multiple de $\mathfrak{A}\mathfrak{P}_j$ si $j \neq i$, mais ne l'est pas de $\mathfrak{A}\mathfrak{P}_i$; il y a donc un $x_i \neq 0$ qui est multiple de $\mathfrak{A}_i$ mais pas de $\mathfrak{A}\mathfrak{P}_i$. Soit $x = \sum_{i=1}^{h} x_i$; les x_i étant tous multiples de $\mathfrak{A}$, il en est de même de x . Si x était multiple de $\mathfrak{A}\mathfrak{P}_i$, il en serait de même de $x_i = x - \sum_{j \neq i} x_j$, ce qui n'est pas . On a donc $x \neq 0$, et x possède les propriétés requises.

<u>Proposition 3. L'ensemble des idéaux</u> $\mathfrak{m}(\mathfrak{P})$, <u>pour tous les</u> $\mathfrak{P} \in$ P , <u>est identique à l'ensemble des idéaux premiers minimaux de</u> A .

On sait déjà que les $\mathfrak{m}(\mathfrak{P})$ sont premiers. Soit $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}(\mathfrak{P})$, et soit $\mathfrak{q}$ un idéal premier contenu dans $\mathfrak{p}$, On a $\mathfrak{D}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{D}(\mathfrak{p})\mathfrak{D}(\mathfrak{q} : \mathfrak{p})$; si on avait $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}$, on aurait évidemment $\mathfrak{q} : \mathfrak{p} = \mathfrak{q}$: c'est impossible puisque $\mathfrak{D}(\mathfrak{p}) = \mathfrak{P} \neq \mathfrak{D}_1$. Soit $\mathfrak{r}$ un idéal premier quelconque, et soit $x \in \mathfrak{r}$; soient $\mathfrak{P}_i$ $(1 \leqq i \leqq h)$ les éléments de P tels que $n(x; \mathfrak{P}_i) \neq 0$, et soit $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{m}(\mathfrak{P}_i)$. Je dis que $\mathfrak{r}$ contient l'un des $\mathfrak{p}_i$. S'il n'en était pas ainsi, il y aurait pour chaque i un $y_i \in \mathfrak{p}_i$ non contenu dans $\mathfrak{r}$; $y = \prod_{i=1}^{h} y_i^{n(x; \mathfrak{P}_i)}$ ne serait donc pas dans $\mathfrak{r}$; mais y serait manifestement multiple de x , d'où contradiction. Si donc $\mathfrak{r}$ est premier minimal, il est identique à l'un des $\mathfrak{p}_i$.

<u>Remarque</u>. J'ai oublié de dire que les éléments de P s'appellent diviseurs premiers.

<u>Conclusion</u>. On voit que les principales propriétés des anneaux normaux s'établissent aussi simplement (sinon plus) sans les valuations qu'avec. Ce n'est que dans les théorèmes de permanence que le secours des valuations est précieux ; il n'y a pas lieu de s'en étonner, puisque la force principale des valuations réside dans leur théorème de prolongement.

NBR 063 31

CONTRE-OBSERVATIONS WEIL

Je suis d'accord que mon traitement des spéc. dans les anneaux à div. de zéro demande à être amélioré (non tant à mon avis dans la substance que dans la forme) ; en particulier la définition est lourde et indigeste (cf. plus loin). Mais il faut reconnaître clairement, d'abord, qu'il y a conflit de tendances ; le débat est entre la tendance dédé-noethérienne, modules finis, anneaux empêtrés dans leurs chaînes montantes et descendantes, et celle des spécialisations et valuations. Dans une large mesure le conflit est sentimental. Du temps de notre folle jeunesse les chaînes nous ont paru une révélation, mais ce n'est pas une raison pour les traîner indéfiniment à notre suite. Spécifiquement, un entier, pour tout le monde, est un fourbi qui n'a rien au dénominateur c'est-à-dire qui n'a pas de pôles c'est-à-dire qui ne devient jamais infini. Cela a l'air imple ; mais on nous avait si bien canulé avec les modules finis que je ne m'en suis aperçu, quant à moi, qu'en écrivant le Chap.II des Foundations, et je ne pense avoir compris ce que c'est qu'un entier sur un anneau que de ce jour-là ; les modules finis sont un artifice technique, qu'il n'y a pas lieu d'expulser mais qui en définitive s'avère peu utile ; si on y revenait, la théorie des entiers serait à renvoyer avec les fourbis noethériens où elle serait mieux à sa place, mais j'y suis résolument hostile et préfèrerais au besoin renoncer aux éléments entiers dans les anneaux à div. de zéro (ce contre quoi Chevalley ne manquerait pas de protester). Je vois bien, par ailleurs, qu'on peut traiter les anneaux normaux (qui sont, ou à peu près, une invention de Chevalley) en les chargeant de chaînes ; je ne vois aucune espèce de raison de leur infliger ce traitement (on pourrait donner quelques indications sur cette méthode en exercices au chap. des noethériens) ; qu'y gagne-t-on ? Il faudrait bien entendu les renvoyer, ainsi que tout ce qui suit, au chapitre des noethériens, d'où déséquilibre général ; et il faudrait y rattraper tout de même les valuations. A quoi bon, comme disait Barrow ?

Tout ça ne me paraît guère sérieux. Ce qui l'est encore moins, c'est de venir mettre dans les spécialisations les espaces multiprojectifs (sous prétexte que ma définition est trop lourde, on l'allége d'un enrichissement substantiel que je lui apportais pour l'alourdir au moins autant par ailleurs et d'une manière tout à fait inutile). En effet, pour spécialiser un point $(a_0,a_1,\dots,a_n)$ d'un espace projectif, <u>il suffit</u> de spécialiser <u>tous</u> les quotients a_i/a_j (cf. Chap.II, prop.10 des Foundations, proposition triviale et qui le devient encore plus si possible lorsqu'on a les valuations) ; naturellement il convient de supposer qu'aucun a_i n'est 0 , ce qui ne restreint pas la généralité puisque 0 ne peut se spécialiser que sur 0 . Géomètriquement, cela veut dire qu'on peut plonger un espace projectif de dim. n dans un produit de $n(n+1)/2$ droites projectives, bien entendu d'une manière non biunivoque ; mais, si P^n est l'espace projectif et V^n son image (la correspondance est définie par le fait qu'au point générique $(x_0,\dots,x_n)$ de P^n on fait correspondre les $n(n+1)/2$ points (x_i,x_j) dans autant de droites projectives D_{ij} , $i \neq j$), à tout point de P^n dont toutes les coordonnées sont $\neq 0$ correspond un point unique de V^n , et que d'autre part à <u>tout</u> point de V^n correspond un point unique de P^n. Donc, pour spécialiser un point de P^n dont toutes les coordonnées sont $\neq 0$, on prend son image dans V^n, on spécialise celle-ci, et on projette cette spécialisation sur P^n ; si certaines coordonnées du point initialement donné sont nulles, on commence par s'en débarrasser (c'est-à-dire qu'on passe à un espace projectif de dim. $< n$). Donc, du point de vue substantiel, <u>on n'a rien gagné du tout</u> en introduisant les multiprojectifs, mais on s'est obligé à démontrer le Nullstellensatz au lieu de le recueillir comme un fruit mûr comme sous-produit des théorèmes démontrés dans mon chapitre (j'ai oublié de le signaler au passage).

En revanche, Chevalley a tout à fait raison d'insister sur le fait que les spécialisations telles que je les définis sont des spécialisations dans des droites projectives, ce que j'ai eu tort de voiler pudiquement. Il en résulte que ma définition, (avec diviseurs de zéro) peut se reformuler comme suit, ce qui me semble déjà un progrès :

Les a_i étant un ensemble d'éléments (fini ou non) d'un anneau A, on considère tous les polynomes $F(U_i,V_i)$ de $Z[U_i,V_i]$, à deux séries de variables U_i,V_i, homogènes en U_i,V_i pour chaque i, tels que $F(a_i,1)=0$; si (a_i',b_i') est un zéro de tous ces polynomes dans un corps k, tel que pour chaque i on ait $a_i'\neq 0$ ou $b_i'\neq 0$, on dira que (a_i'/b_i') est une spécialisation de (a_i). Bien entendu on pose $a_i'/b_i' = \infty$ pour $b_i' = 0$.

Il serait tentant de chercher un théorème d'extension des spécialisations opérant directement dans les droites projectives (ou, si on veut, dans les espaces projectifs, ce qui en serait une conséquence) comme suit : les (a_i,b_i) étant un ensemble de couples d'éléments de A, tel qu'on n'ait jamais $a_i = b_i = 0$, on considère les polynomes $F(U_i,V_i)$ multihomogènes comme ci-dessus, tels que $F(a_i,b_i)=0$, etc.. Malheureusement, le théorème d'extension me semble faux pour les couples dès qu'on admet les diviseurs de zéro (s'il n'y en a pas il est équivalent au précédent) ; cependant la question ne me semble pas close. En tout cas il y aurait là une source d'exercices. Le fait même que ce théorème est faux me semble un argument pour ne pas chercher à donner trop d'importance ici aux espaces projectifs (qui n'y seraient guère à leur place de toute façon). De toute manière on est dans le vague tant qu'on ne sait pas quelles applications on trouvera aux spécialisations pour les anneaux avec div. de zéro ; il me semble qu'il devrait y en avoir, p.ex. pour les complétions d'anneaux semi-locaux (méthodes Zariski-Chevalley-Chow en géométrie algébrique), mais il se peut que justement ce soit de spécialisations dans les espaces projectifs qu'on ait le plus besoin... Comme je n'entends rien à tout cela, il vaut mieux que je laisse la parole aux spécialistes. Par ailleurs, et sur un plan plus élémentaire, Chevalley semble dire que l'utilisation systématique de polynomes multi-homogènes donne une meilleure présentation de la démonstration du théorème fondamental sur les extensions de spécialisations ; je crois voir à peu près ce qu'il veut dire, et m'y rallierais bien entendu si on nous offre une bonne mise au point (à condition qu'on garde les anneaux à diviseursde zéro, et qu'on reste dans les produits de droites projectives c.à.d. les polynomes multihomg.à séries de deux var.)

OBSERVATIONS SUR LES OBSERVAGIONS DE WEIL SUR MES OBSERVATIONS.

I. Je ne vois pas très bien en quoi mes propositions aboutiraient à tout flanquer par terre. En ce qui concerne les entiers, mes propositions auraient principalement pour effet de revenir (en ce qui concerne les démonstrations) à la rédaction état 2 , avec la différence suivante : je propose de mettre avec les valuations ce qui, dans cette rédaction, concerne les applications des valuations aux entiers et qu'on peut aussi bien considérer comme des applications des entiers aux valuations ; ceci fait, on peut mettre les entiers oà on veut, et je préfèrerais les avoir avant les valuations. Je ne m'étais pas aperçu que, dans le plan présent, les noethériens viennent au chapitre après les valuations. Je me demande bien ce qu'ils y font ; il n'y a aucune espèce de raison à ne pas commencer par eux (ni d'ailleurs, je le reconnais, en faveur).

WEIL considère qu'il connaît l'essence de ce qu'il faut entendre par "entier", à savoir quelque chose qui n'a pas de pôle. De pareilles certitudes me semblent toujours marquées d'un fanatisme un peu dangereux. Plus on avancera dans Bourbaki, c'est-à-dire plus on considèrera des structures complexes, plus il faudra s'habituer à ce que les choses aient plusieurs aspects. Les entiers peuvent <u>aussi</u> être considérés comme des éléments qui satisfont à des équations de dépendance intégrale ; c'est même comme cela qu'ils ont été introduits d'abord. Que ce soient des éléments sans dénominateurs ne veut pas dire grand chose tant qu'on ne dit pas comment on exprime les entiers comme fractions. Si on prend par exemple les entiers du corps $Q(m^{1/2})$, et qu'on les exprime comme fractions avec numérateur $a+bm^{1/2}$ (a,b entiers rationnels) et dénominateurs entiers, alors les entiers ont des dénominateurs, mais leur propriété essentielle est ici que les dénominateurs restent bornés quand on exprime des sommes ou produits quelconques d'entiers.

La définition par les modules finis n'est que la transcription de ce fait dans un langage général. Dans le résumé de mes observations que j'ai envoyé à WEIL, je ne mentionnais pas les quelques mots que je dis des entiers dans les anneaux non commutatifs ; mais ils existent aussi (cf. l'arithmétique dans les alg. à division, qui a joué un assez grand rôle pendant un certain temps), et je ne vois pas bien comment ils cadrent avec la conception "valuationelle".

En ce qui concerne les anneaux normaux, mon projet de rédaction montre, me semble-t-il, que les "chaînes dont je les charge" leur laissent sensiblement plus de liberté d'allure que le marteau-pilon valuationnel sous lequel WEIL les écrase.

II. En ce qui concerne les spécialisations, il y a deux points de vue à distinguer : projectif ou pas projectif, et, si projectif, droites projectives ou espaces projectifs. Si je comprends bien, WEIL serait disposé à se rallier au point de vue projectif à condition qu'on reste dans les droites projectives. En faveur de cette manière de faire, il avance a) qu'il n'y a pas besoin de démontrer le Nullstellensatz ; b) que les spécialisations dans les espaces projectifs peuvent se raccrocher à celles dans les produits de droites projectives. En ce qui concerne a), il faudrait vraiment voir si le Nullstellensatz tombe " comme un fruit mûr " dès qu'on a les valuations. Il s'agit d'établir ce qui suit. Soit K alg. clos, et soit $A = K[x_1,\ldots,x_n]$ un domaine d'intégrité sur K , obtenu par adjonction d'un nombre fini d'éléments ; il y a alors une spécialisation de ces éléments dans K dans laquelle ils restent tous finis. Pour y arriver, je pense que WEIL entend procéder comme suit : on suppose que $x_1,\ldots,x_r$ forment une base de de transcendance de $K(x_1,\ldots,x_n)/K$, on forme un polynome $P(x_1,\ldots,x_r)\neq 0$ tel que les $x_i P(x_1,\ldots,x_r)$ soient entiers sur $K[x_1,\ldots,x_r]$, et on prolonge une spécialisation finie de $K[x_1,\ldots,x_r]$ dans K telle que $P(x_1,\ldots,x_r)$ ne se spécialise pas sur 0 . Si c'est bien cela, la démonstration n'est pas plus courte que celle que je donne sans aucun fourbi de spécialisation ; mais peut-être WEIL a-t-il un meilleur tour dans son sac. En ce qui concerne b), c'est indiscutable ; toute la question est de savoir s'il vaut mieux accrocher des wagons supplémentaires à un train en cours de route que de les avoir dès le départ. Si on fait ce que propose WEIL, il faut : formuler une deuxième fois la définition d'une spécialisation quand il s'agit d'un espace projectif, formuler une deuxième fois le théorème de prolongement pour ce cas et le démontrer en montrant qu'on peut se ramener au cas des produits de droites, avec les petits canulards relatifs au cas où il y a des coordonnées nulles, petits canulards qui ne sont pas bien sérieux mais que je vois aucune raison de ne pas éviter en posant tout de suite la définition générale, qui n'est à aucun degré plus compliquée que celle pour les produits de droites (je ne vois pas du tout en quoi la dite définition se trouve "alourdie" ; surtout que j'espère bien qu'avec la notion de spécialisation projective, qu'il s'agisse de droites ou d'espaces, on videra le truc canularesque des corps projectifs, avec leur loi de composition pas partout définie).

$[(Obs_{AW}).(Obs_{CC})]^c(\text{Spéc+Val})$ = [Fuir le fanatisme pour tomber dans l'éclectisme serait tomber de Charybde en Scylla. Il me paraît raisonnable que, pour traiter p.ex. des entiers, Bourbaki donne la priorité à un point de vue, sans négliger les autres (tous les résultats concernant le point de vue "module finis" et "équations de dépendance intégrale" se trouvaient dans ma rédaction). Le fanatique est Chevalley ; car, tandis que je donne tous les résultats relatifs aux divers points de vue, lui demande à amputer le point de vue "valuations" de tout ce qui concerne les anneaux avec diviseurs de zéro ; c'est là justement le déséquilibre qui m'avait profondément choqué dans la rédaction précédente. Quant aux entiers non commutatifs, c'est un canular : sauf erreur, quand on parle de x entier sur A dans R non commutatif, A est toujours commutatif (en général $A = Z$), et est le centre, donc $A(x)$ est commutatif et on est dans $A(x)$. Bien entendu les entiers sur A dans R non commutatif ne forment pas un anneau, ce qui place toute cette théorie(à supposer qu'elle mérite d'être faite) sur un plan tout différent ; il me paraît difficile d'en tirer argument pour notre débat] + [Pour les anneaux normaux, je ne puis juger du "projet de rédaction" Chevalley que je n'ai pas vu ; mais nous ne savons que trop qu'il n'est possible de comparer une rédaction qu'avec une autre rédaction, non avec un projet. Si Bourbaki décidait de faire une rédaction basée sur le projet Chevalley, et que celle-ci présentât des avantages assez sérieux pour la faire adopter, alors elle devrait, avec sa séquelle (Dedekind, etc..) être jointe aux noethériens ; cela ne dispenserait pas naturellement de donner tout l'essentiel des résultats concernant les valuations dans ces anneaux] + [Pour le Nullstellensatz, je n'envisage pas du tout ce que dit Chevalley, mais la démonstration par récurrence sur la dimension (cf. Foundations, Chap.II, n°2, prop.5 ; Chap.II, n°3, prop.3 ; Chap.IV, n°1, prop.3). A la prop.9, p.16, il faut ajouter (ce qui résulte de la démonstration) que, <u>ou</u> les prolongements de f sont en nombre fini, <u>ou</u> f admet aussi un prolongement dans $k(t)$, t transcendant sur k, avec $f(x) = t$. Cela fait, il n'y a que quelques mots à ajouter à la démonstration p.49 pour obtenir le théorème] + [Pour les projectifs, mes observations précédentes avaient seulement pour but de montrer qu'<u>à priori</u> la spécialisation dans les projectifs est acquise dès qu'on a la spécialisation dans les droites projectives. <u>A posteriori</u>, quand on a les valuations, c'est plus simple : pour spécialiser le point à coordonnées homogènes $(x_0, x_1, \dots, x_n)$, on met une valuation ω sur un corps contenant les x_i ; soit x_h ~~xix~~ tel que $\omega(x_h) = \min_i \omega(x_i)$; soit x_i' la valeur de x_i/x_h pour une place appartenant à la valuation ; alors $(x_0', \dots, x_n')$ est la spécialisation cherchée. C'est tellement trivial qu'il serait saugrenu de traîner perpétuellement les pro- et multipro-jectifs à sa suite uniquement pour ne pas avoir à faire cette petite remarque le moment venu. D'ailleurs dans ce chapitre on est dans la théorie des corps, et je considère qu'avec les projectifs on est nettement dans la géomètrie. Enfin, je considère la spécialisation dans les projectifs comme elle-même trop particulière, vu que j'ai besoin aussi de spécialiser dans les variétés abstraites ; ce n'est pas ici le lieu ....].

<u>Théorème</u>. <u>Il existe un entier n tel que</u> $[(Obs_{AW}).(Obs_{CC})]^n(\text{Spéc+Val})=0$.