RÉDACTION N° 160

COTE : NBR 062

TITRE : LIVRE I
CHAPITRE II (ÉTAT 6) : THÉORIE DES ENSEMBLES

ASSOCIATION DES COLLABORATEURS DE NICOLAS BOURBAKI

NOMBRE DE PAGES : 49

NOMBRE DE FEUILLES : 49

LIVRE I. CHAPITRE II (Etat 6). THEORIE des ENSEMBLES.

Commentaires.- Comme convenu, la notion d'ensemble a été vidée de tout sens formel, et le couple a été pris comme signe primitif. Pour l'appli-cation aux cardinaux, il m'a paru préférable de définir, pour une famille d'ensembles, une somme bien déterminée. Pour ne pas couper le § "réunion-intersection" et le § "produit", les relations d'équivalence ont été repoussées à la fin, bien que leur théorie ne repose pas sur l'axiome de l'ensemble des parties. Les changements prévus dans la définition des entiers m'ont contraint à abandonner (à regret) la phrase de Chevalley : "L'ensemble vide joue un rôle de premier plan dans la pensée mathématique".

La rédaction suppose faites au chap.I les additions suivantes : 1. introduction de la notion $\mathcal{R}\{x,y\}$. 2. quelques compléments sur les relations fonctionnelles. 3. à côté des signes fonctionnels permettant de fabriquer des relations, il est commode (quoique non indispensable) d'avoir des signes fonctionnels permettant de fabriquer des termes ("termogènes" ; les autres pouvant être qualifiés de "termifuges").

§ 1. Relations collectivisantes.

1. La théorie des ensembles.- La théorie des ensembles est la théorie admettant les signes fonctionnels de deuxième espèce $=$, $\in$ et le signe fonctionnel de première espèce $\supset$ (tous ces signes étant de poids 2) reposant sur les schémas S1 à S7 , sur le schéma S8 qui sera introduit au n°6, et sur les axiomes explicites A1 à A5, qui seront introduits peu à peu dans ce chapitre et le suivant. Ces axiomes explicites ne contiennent pas de lettres ; autrement dit, la théorie des ensembles est une théorie sans constantes.

La théorie des ensembles est une théorie égalitaire, et les résultats du chap.I lui sont applicables.

Désormais, et sauf mention expresse du contraire, nous raisonnerons toujours dans la théorie des ensembles ou dans une théorie plus forte. Mais il sera évident dans bien des cas qu'une telle hypothèse n'est pas entièrement indispensable.

Si $\mathcal{T}$ et $\mathcal{U}$ sont des termes, l'assemblage $\in \mathcal{T}\mathcal{U}$ est une relation qui se désigne pratiquement par un symbole tel que $\mathcal{T} \in \mathcal{U}$, $(\mathcal{T}) \in (\mathcal{U})$, $\mathcal{T}$ appartient à $\mathcal{U}$, $\mathcal{T}$ est élément de $\mathcal{U}$. La relation non $(\mathcal{T} \in \mathcal{U})$ se désigne par $\mathcal{T} \notin \mathcal{U}$.

Du point de vue naif, beaucoup des êtres mathématiques peuvent être considérés commé des ensembles d'objets. Nous ne chercherons pas à formaliser cette notion, et, dans l'interprétation formaliste de ce qui suit, le mot "ensemble" doit être considéré comme strictement synonyme de "terme" ; en particulier, des phrases telles que "soit X un ensemble" sont, en principe, totalement superflues puisqu'une lettre est un terme. L'utilité de telles locutions est de faciliter la traduction du texte en langage intuitif.

2. *L'inclusion.*- *Définition 1. La relation désignée par* $(\forall z)(z \in x \Rightarrow z \in y)$, *dans laquelle les seules lettres sont* x *et* y , *se représente par la notion* $x \subset y$ (*ou* $y \supset x$, *ou* "*x est contenu dans* y", *ou* "y *contient* x" , *ou* "x *est une partie de* y" *ou* "x *est un sous-ensemble de* y" . *La relation* non$(x \subset y)$ *se représente par* $x \not\subset y$.

Conformément aux usages signalés au §1, n°1 du chap.I, cette définition entraîne la convention métamathématique suivante : soient $\mathbf{T}$ et $\mathbf{U}$ des assemblages ; si, dans l'assemblage $x \subset y$, on substitue simultanément $\mathbf{T}$ à x et $\mathbf{U}$ à y , on obtient un assemblage qui sera désigné par $\mathbf{T} \subset \mathbf{U}$; si on désigne par $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ des lettres quelconques distinctes de x et y , distinctes entre elles, ne figurant ni dans $\mathbf{T}$, ni dans $\mathbf{U}$, l'assemblage $\mathbf{T} \subset \mathbf{U}$ est donc identique à $(\mathbf{T}|\boldsymbol{x})(\mathbf{U}|\boldsymbol{y})(\boldsymbol{x}|x)(\boldsymbol{y}|y)(x \subset y)$, donc, d'après CS8, CS9 et CS5 , à $(\forall \mathbf{z})(\mathbf{z} \in \mathbf{T} \Rightarrow \mathbf{z} \in \mathbf{U})$, si $\mathbf{z}$ est une lettre quelconque ne figurant ni dans $\mathbf{T}$, ni dans $\mathbf{U}$.

Désormais, quand on posera une définition mathématique, on ne signalera plus la convention métamathématique qui en résulte.

CS12.- Soient $\mathbf{T}$, $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ *des assemblages, et* $\boldsymbol{x}$ *une lettre. L'assemblage* $(\mathbf{V}|\boldsymbol{x})(\mathbf{T} \subset \mathbf{U})$ *est identique à* $(\mathbf{V}|\boldsymbol{x})\mathbf{T} \subset (\mathbf{V}|\boldsymbol{x})\mathbf{U}$.

Ceci résulte aussitôt de CS9 et CS5 .

<u>CF11</u>.- <u>Si</u> T <u>et</u> U <u>sont des termes</u>, $\mathsf{T} \subset \mathsf{U}$ <u>est une relation</u>.

Ceci résulte aussitôt de CF6 .

Désormais, nous n'expliciterons plus les critères de substitution et les critères formatifs qui devraient suivre les définitions. On notera cependant que ces critères sont souvent utilisés implicitement dans les démonstrations.

Pour démontrer dans une théorie $\mathcal{C}$ la relation $x \subset y$, il suffit, d'après C26, de démontrer $z \in y$ dans la théorie obtenue en adjoignant $z \in x$ aux axiomes de $\mathcal{C}$, z étant une lettre distincte de x, de y, et des constantes de la théorie. En pratique, on dit : "soit z un élément de x " ; et on cherche à démontrer $z \in y$.

<u>Proposition 1</u>.- $x \subset x$.

Cette proposition est immédiate. On dit que x est la <u>partie pleine</u> de x

<u>Proposition 2</u>.- $(x \subset y$ et $y \subset z) \Rightarrow (x \subset z)$.

Adjoignons les hypothèses $x \subset y$ et $y \subset z$, $u \in x$. Alors les relations $x \subset y$, $y \subset z$ sont vraies, donc les relations $u \in x \Rightarrow u \in y$, $u \in y \Rightarrow u \in z$ sont vraies, donc la relation $u \in z$ est vraie.

3. <u>L'axiome d'extensionalité</u>.- C'est le suivant :

A1.- $(\forall x)(\forall y)((x \subset y$ et $y \subset x) \Rightarrow x = y)$.

Intuitivement, cet axiome exprime que deux ensembles ayant les mêmes éléments sont égaux.

Pour démontrer que $x = y$, il suffit donc de démontrer $z \in y$ dans la théorie obtenue en adjoignant l'hypothèse $z \in x$, et $z \in x$ dans la théorie obtenue en adjoignant l'hypothèse $z \in y$, z étant une lettre distincte de x , de y et des constantes.

<u>C45</u>.- <u>Soient</u> R <u>une relation</u>, x <u>une lettre</u>, y <u>une lettre distincte de</u> x <u>et ne figurant pas dans</u> R . <u>La relation</u> $(\forall x)(x \in y \Leftrightarrow \mathsf{R})$ <u>est univoque en</u> y .

En effet, soit z une lettre distincte de x et ne figurant pas dans R. Adjoignons les hypothèses $(\forall x)(x \in y \Leftrightarrow R)$ et $(\forall x)(x \in z \Leftrightarrow R)$. Alors, on a successivement les théorèmes $(\forall x)((x \in y \Leftrightarrow R)$ et $(x \in z \Leftrightarrow R))$, $(\forall x)(x \in y \Leftrightarrow x \in z)$, $y \subset z$, $z \subset y$. D'après A1, $y = z$. Ceci établit C45.

4. <u>Relations collectivisantes</u>.- Soient R une relation, x une lettre. Si y et y' désignent des lettres distinctes de x et ne figurant pas dans R, les relations $(\exists y)(\forall x)(x \in y \Leftrightarrow R)$, $(\exists y')(\forall x)(x \in y' \Leftrightarrow R)$ sont identiques d'après CS8. La relation ainsi définie (qui ne contient pas x) se désigne par $\mathrm{Coll}_x R$.

Lorsque $\mathrm{Coll}_x R$ est un théorème d'une théorie $\mathcal{C}$, on dit que R est collectivisante en x dans $\mathcal{C}$. S'il en est ainsi, on peut introduire une constante auxiliaire a, distincte de x, des constantes de $\mathcal{C}$, et ne figurant pas dans R, avec l'axiome introducteur $(\forall x)(x \in a \Leftrightarrow R)$, ou, ce qui revient au même si x n'est pas une constante de $\mathcal{C}$, $x \in a \Leftrightarrow R$.

Intuitivement, dire que R est collectivisante en x, c'est dire qu'il existe un ensemble a tel que les objets x possédant la propriété R soient précisément les éléments de a.

<u>Exemples</u>.- 1. La relation $x \in y$ est évidemment collectivisante en x.

2. La relation $x \notin x$ n'est pas collectivisante en x, c'est-à-dire que non $\mathrm{Coll}_x(x \notin x)$ est un théorème. Raisonnons par l'absurde en supposant $x \notin x$ collectivisante. Soit a une constante auxiliaire, distincte de x et des constantes de la théorie, avec l'axiome introducteur $(\forall x)(x \notin x \Leftrightarrow x \in a)$. Alors, la relation $a \notin a \Leftrightarrow a \in a$ est vraie. La méthode de disjonction des cas prouve, d'abord que la relation $a \notin a$ est vraie, puisque la relation $a \notin a$ est vraie. D'où absurdité.

C46.- Soient R une relation, et x une lettre. Si R est collectivisante en x, la relation $(\forall x)(x \in y \Leftrightarrow R)$, où y est une lettre distincte de x ne figurant pas dans R, est fonctionnelle en y.

Ceci résulte aussitôt de C45.

Très fréquemment dans la suite, on disposera d'un théorème de la forme $\text{Coll}_x R$. On définira alors un symbole fonctionnel pour représenter le terme $\tau_y (\forall x)(x \in y \Leftrightarrow R)$. C'est de ce terme qu'il s'agira quand on parlera de "l'ensemble dont l'existence est affirmée par le théorème $\text{Coll}_x R$ ".

5. L'axiome de l'ensemble à deux éléments.- C'est le suivant :

A2.- $(\forall x)(\forall y)\ \text{Coll}_z\ (z = x \text{ ou } z = y)$

Cet axiome exprime que, si x et y sont des objets, il existe un ensemble dont les seuls éléments sont x et y.

Définition 2.- L'ensemble $\tau_u ((\forall z)(z \in u \Leftrightarrow (z = x \text{ ou } z = y)))$, dont les seuls éléments sont x et y, se note $\{x,y\}$.

On a évidemment $\{x,y\} = \{y,x\}$. L'ensemble $\{x,x\}$, qu'on désigne simplement par $\{x\}$, est l'ensemble dont le seul élément est x.

6. Le schéma de sélection-réunion.- C'est le suivant :

S8.- Soient R une relation, x et y des lettres distinctes, X et Y des lettres distinctes de x et y et ne figurant pas dans R. La relation

$$(\forall y)(\exists X)(\forall x)(R \Rightarrow x \in X) \Rightarrow (\forall Y)\ \text{Coll}_x((\exists y)(y \in Y \text{ et } R))$$

est un axiome.

Cette règle est bien un schéma. En effet, substituons un terme T à une lettre z dans la relation précédente, que nous désignons par S ; on peut supposer x, y, X, Y distincts de z et ne figurant pas dans T d'après CS8. Alors, $(T|z)S$ est identique à

$$(\forall y)(\exists X)(\forall x)(R' \Rightarrow x \in X) \Rightarrow (\forall Y)\ \text{Coll}_x((\exists y)(y \in Y \text{ et } R'))$$

où R' est $(T|z)R$.

Intuitivement, la relation $(\forall y)(\exists X)(\forall x)(R' \Rightarrow x \in X)$ signifie que, pour tout objet y, il existe un ensemble X, (qui peut dépendre de y), tel que les objets x qui sont dans la relation R avec l'objet y donné soient des éléments de X (mais ne constituent pas nécessairement tout l'ensemble X). Le schéma de sélection affirme que, s'il en est ainsi, et si Y est un ensemble quelconque, il existe un ensemble dont les éléments sont exactement tous les objets se trouvent dans la relation R avec un objet au moins de l'ensemble Y.

<u>C47.- Si</u> P <u>est une relation,</u> X <u>un ensemble et</u> x <u>une lettre ne figurant pas dans</u> X. <u>La relation</u> "P <u>et</u> $x \in X$" <u>est collectivisante en</u> x.

En effet, désignons par R la relation "P et $x = y$", où y est une lettre distincte de x ne figurant ni dans P ni dans X. La relation $(\forall x)(R \Rightarrow (x \in \{y\}))$ est vraie. Soit Z une lettre distincte de x et y et ne figurant pas dans P. La relation précédente est identique à $(\{y\}|Z)((\forall x)(R \Rightarrow x \in Z))$ (notamment parce que x est distinct de y), donc la relation $(\forall y)(\exists Z)(\forall x)(R \Rightarrow x \in Z)$ est vraie. Il résulte de S8 que la relation $(X|Y)(\mathrm{Coll}_x(\exists y)(y \in Y \text{ et } R))$ est vraie, et cette relation est identique à $\mathrm{Coll}_x(\exists y)(y \in X \text{ et } R)$ (notamment parce que ni x, ni y ne figurent dans X). Enfin, il suffit d'observer que la relation $(\exists y)(y \in X \text{ et } R)$ est équivalente à la relation "P et $x \in X$" (notamment parce que y ne figure pas dans P).

On voit donc que, si P est une propriété d'un objet x et X un ensemble donné, ceux des objets x qui appartiennent à X et qui possèdent la propriété P sont les éléments d'un certain ensemble, qu'on appelle <u>l'ensemble des</u> $x \in X$ <u>tels que</u> P. (* C'est ainsi qu'on parlera de l'ensemble des nombres réels tels que P.*) L'assemblage ainsi désigné ne contient pas x.

C48.- Soient T un terme, A un ensemble, x et y des lettres distinctes. On suppose que x ne figure pas dans A, et que y ne figure ni dans T ni dans A. La relation $(\exists x)(y = T \text{ et } x \in A)$ est collectivisante en y.

Soit R la relation $y = T$. La relation $(\forall y)(R \Rightarrow y \in \{T\})$ est vraie, donc il en est de même de $(\forall x)(\exists X)(\forall y)(R \Rightarrow y \in X)$, si X est une lettre distincte de y et ne figurant pas dans R. En vertu de S8, la relation $(\exists x)(x \in A \text{ et } R)$ est collectivisante en y, ce qui démontre C48.

La relation $(\exists x)(y = T \text{ et } x \in A)$ se lit souvent : " y peut se mettre sous la forme T pour un x appartenant à A ". L'ensemble dont l'existence est affirmée par C48 est généralement appelé l'ensemble des objets de la forme T pour $x \in A$. L'assemblage ainsi désigné ne contient ni x ni y, et ne dépend pas du choix de la lettre y vérifiant les conditions de C48.

7. Complémentaire d'un ensemble.- La relation $x \notin A$ et $x \in X$ est collectivisante en x d'après C47.

Définition 3.- Soit A une partie d'un ensemble X. On appelle complémentaire de A par rapport à X, et on désigne par $\complement_X A$ (ou par $\complement A$ quand aucune confusion n'est à craindre) l'ensemble des éléments de X qui n'appartiennent pas à A, c'est-à-dire l'ensemble

$$\tau_B((\forall x)(x \in B \Longleftrightarrow (x \notin A \quad \text{et} \quad x \in X))).$$

Soit A une partie d'un ensemble X. Les relations "$x \in X$ et $x \notin A$" et "$x \in \complement_X A$" sont équivalentes. Par suite, la relation "$x \in X$ et $x \notin \complement_X A$" est équivalente à "$x \in X$ et $(x \notin X$ ou $x \in A)$", donc à "$x \in A$". Autrement dit, $A = \complement_X(\complement_X A)$ est une relation vraie. On voit aussi facilement que, si B est une autre partie de A, les relations $A \subset B$ et $\complement_X B \subset \complement_X A$ sont équivalentes.

On dit qu'un ensemble X est <u>vide</u> si la relation $(\forall x)(x \notin X)$ est vraie, autrement dit si X ne possède aucun élément. D'après l'axiome d'extensionalité, deux ensembles vides sont égaux.

<u>Théorème 1</u>.- $(\exists X)(\forall x)(x \notin X)$. <u>Autrement dit, il existe un ensemble vide</u>.

En effet, $\complement_Y Y$ est évidemment un ensemble vide.

<u>Définition 4</u>.- <u>L'ensemble</u> $\tau_X((\forall x)(x \notin X))$ <u>s'appelle l'ensemble vide et se désigne par</u> $\emptyset$.

Le th.1 n'est autre que la relation $(\forall x)(x \notin \emptyset)$. On a évidemment les théorèmes $\complement_X X = \emptyset$, $\complement_X \emptyset = X$.

Il n'existe pas d'ensemble dont tous les objets soient éléments ; autrement dit, non $(\exists X)(\forall x)(x \in X)$ est un théorème. En effet, s'il existait un tel ensemble, toute relation serait collectivisante d'après C47. Or nous avons vu que la relation $x \notin x$ n'est pas collectivisante.

§ 2. <u>Couples</u>.

1. <u>L'axiome du couple</u>.- Comme nous l'avons dit au §1, n°1, le signe $\supset$ est, dans la théorie des ensembles, un signe fonctionnel de première espèce, de poids 2. Si T, U sont des termes, l'assemblage $\supset T U$ est donc un terme, qu'on désigne pratiquement par (T, U). Ceci posé, <u>l'axiome du couple</u> est le suivant :

<u>A3</u>.- $(\forall x)(\forall x')(\forall y)(\forall y')((x,y) = (x',y') \Rightarrow (x=x' \text{ et } y=y'))$.

Comme la relation "$x=x'$ et $y=y'$" entraîne $(x,y)=(x',y')$ d'après C42, on voit que la relation $(x,y)=(x',y')$ est <u>équivalente</u> à "$x=x'$ et $y=y'$".

On dit que z <u>est un couple</u> si la relation $(\exists x)(\exists y)(z=(x,y))$ est <u>vraie</u>. Si z est un couple, les relations $(\exists y)(z=(x,y))$ et $(\exists x)(z=(x,y))$ sont fonctionnelles par rapport à x et y respectivement, comme il résulte aussitôt de A3. Les symboles fonctionnels correspondants sont $pr_1 z$ et $pr_2 z$, qu'on appelle respectivement première coordonnée (ou première projection) et seconde coordonnée (ou seconde projection) du couple z . Si z est un couple, la relation $(\exists y)(z=(x,y))$ est donc équivalente à $x = pr_1 z$, et la relation $(\exists x)(z=(x,y))$ à $y=pr_2 z$; il en résulte que la relation $z=(x,y)$ est équivalente à $x = pr_1 z$ et $y = pr_2 z$, et par suite que la relation $z=(pr_1 z , pr_2 z)$ est vraie.

On pourrait convenir que les symboles abréviateurs $pr_1 z$ et $pr_2 z$ représentent dans tous les cas les termes $\tau_x((\exists y)(z=(x,y)))$ et $\tau_y((\exists x)(z=(x,y)))$. Mais les propriétés précédentes ne sont plus exactes dans le cas général. Beaucoup de symboles fonctionnels que nous introduirons ultérieurement (comme déjà le symbole $\complement_X A$) pourraient faire l'objet de remarques analogues.

Soient R une relation, x et y des lettres figurant dans R ; soit z une lettre distincte de x et y et ne figurant pas dans R . Désignons par S la relation $(\exists x)(\exists y)(z=(x,y)$ et $R)$. C'est une relation qui contient une lettre de moins que R , et R est évidemment équivalente à la relation $(\exists z)(z=(x,y)$ et $S)$. Cela signifie qu'on peut interprèter une relation entre les objets x et y comme une propriété du couple formé par ces objets.

2. <u>Produit de deux ensembles</u>.- <u>Théorème 1</u>.-

$(\forall X)(\forall Y)(\exists Z)(\forall z)(z\in Z \Leftrightarrow (\exists x)(\exists y)(z=(x,y)$ et $x\in X$ et $y\in Y))$.

<u>Autrement dit</u>, <u>quels que soient</u> X <u>et</u> Y , <u>la relation</u> "<u>z est un couple et</u> $pr_1 z\in X$ <u>et</u> $pr_2 z\in Y$ " <u>est collectivisante en</u> z .

En effet, désignons par A_y l'ensemble des objets de la forme (x,y) avec $x\in X$. Soit R la relation $z\in A_y$, qui est équivalente à $(\exists x)(z=(x,y)$ et $x\in X)$. Il est clair que la relation $(\forall y)(\exists A)(\forall z)(R \Rightarrow z\in A)$ est vraie. Il résulte de S8 que la relation $(\exists y)(y\in Y$ et $R)$ est collectivisante en z . Or, cette relation est équivalente à $(\exists y)(\exists x)(y\in Y$ et $x\in X$ et $z=(x,y))$. D'où le théorème.

Définition 1.- Etant donnés deux ensembles X et Y , l'ensemble dont l'existence est affirmée par le th.1 s'appelle le produit (ou produit cartésien) de X et Y et se désigne par $X \times Y$.

D'une manière précise, $X \times Y$ représente donc le terme $\tau_z((\forall z)(z \in Z \Leftrightarrow (\exists x)(\exists y)(z=(x,y)$ et $x \in X$ et $y \in Y)))$. La relation $z \in X \times Y$ équivaut à : "z est un couple et $pr_1 z \in X$ et $pr_2 z \in Y$ ". Les ensembles X et Y sont dits les ensembles facteurs de $X \times Y$.

Proposition 1.- Soient A, B, A', B' des ensembles non vides. La relation $A' \times B' \subset A \times B$ est alors équivalente à $A' \subset A$ et $B' \subset B$.

Supposons que $A' \times B' \subset A \times B$ (désormais, nous ne signalerons plus toujours explicitement que les relations écrites sont vraies). Soit x' un élément de A' ; puisque $B' \neq \emptyset$, il y a un objet y' qui est élément de B'. On a $(x',y') \in A' \times B'$, d'où $(x',y') \in A \times B$, et par suite $x' \in A$, ce qui montre que $A' \subset A$; on verrait de même que $B' \subset B$. Réciproquement, si A' est une partie de A et B' une partie de B , la relation $(x',y') \in A' \times B'$ entraîne $(x',y') \in A \times B$, d'où $A' \times B' \subset A \times B$.

Proposition 2.- Soient A et B des ensembles. Pour que $A \times B = \emptyset$, il faut et il suffit que ou bien $A = \emptyset$, ou bien $B = \emptyset$.

C'est évident.

§ 3. Correspondances.

1. Définition d'une correspondance.- **Définition 1**.- On dit que Γ est une correspondance si Γ est un ensemble de couples, autrement dit si $(\forall z)(z \in \Gamma \Rightarrow z$ est un couple).

Si Γ est une correspondance, on dit qu'un objet y correspond à un objet x par Γ si $(x,y) \in \Gamma$.

Soit $R\{x,y\}$ une relation, x et y étant des lettres distinctes. Soit Γ une lettre distincte de x et y et ne figurant pas dans R .

Si la relation

NBR 062 12

$(\exists \Gamma)(\Gamma$ est une correspondance et $(\forall x)(\forall y)(R \Leftrightarrow (x,y) \in \Gamma))$

est vraie, on dit que R <u>admet un graphe</u> (par rapport aux lettres x et y). La correspondance Γ est alors évidemment unique et s'appelle le graphe de R par rapport à x et y.

Soit Z une lettre distincte de x et y et ne figurant pas dans R. Si la relation

$$(\exists Z)(\forall x)(\forall y)(R \Rightarrow (x,y) \in Z)$$

est vraie, R admet un graphe : il suffit de prendre pour ce graphe l'ensemble des couples z tels que $z \in Z$ et $R\{pr_1 z, pr_2 z\}$ (z étant une lettre distincte de Z ne figurant pas dans R). Cette condition est remplie si on connait un ensemble T, ne contenant ni x ni y, tel que $R \Rightarrow (x,y) \in T$.

<u>Proposition 1</u>.- <u>Soit</u> Γ <u>une correspondance</u>. <u>Il existe des ensembles</u> A <u>et</u> B <u>qui possèdent les propriétés suivantes</u> : 1) <u>la relation</u> $(\exists y)((x,y) \in \Gamma)$ <u>est équivalente à</u> $x \in A$; 2) <u>la relation</u> $(\exists x)((x,y) \in \Gamma)$ <u>est équivalente à</u> $y \in B$.

En effet, on peut prendre pour A (resp. B) l'ensemble des objets de la forme $pr_1 z$ (resp. $pr_2 z$) pour $z \in \Gamma$.

Les ensembles A et B de la prop. 1 sont uniquement déterminés. Ils s'appellent suivant les cas <u>l'ensemble de définition</u> et <u>l'ensemble des valeurs</u> de Γ, ou bien <u>la première et la seconde projection</u> de Γ. D'une manière précise, ce sont les ensembles $\tau_X((\forall x)(x \in X \Leftrightarrow (\exists y)((x,y) \in \Gamma)))$ et $\tau_Y((\forall y)(y \in Y \Leftrightarrow (\exists x)((x,y) \in \Gamma)))$. Si un objet x appartient à A (resp. B), on dit que Γ est définie au point x (resp. que x est une valeur prise par Γ).

La relation $x=y$ n'admet pas de graphe ; car la première projection de ce graphe, s'il existait, serait l'ensemble de tous les objets.

Si on se donne à l'avance deux ensembles C et D , on appelle correspondance entre C et D une correspondance dont l'ensemble de définition est égale à C et l'ensemble des valeurs à D .

Soient Γ une correspondance, et x un objet. Si B est l'ensemble des valeurs de Γ , la relation $(x,y)\in\Gamma$ entraîne $y\in B$; il existe donc un ensemble dont les éléments sont tous les objets qui correspondent à x par Γ .

Définition 2.- Soient Γ une correspondance et x un objet. On appelle coupe de Γ suivant x et on désigne par $\Gamma\{x\}$ l'ensemble des objets qui correspondent à x par Γ .

Soient Γ une correspondance et X un ensemble. La relation "$x\in X$ et $(x,y)\in\Gamma$" entraîne $(x,y)\in\Gamma$ et admet par suite un graphe Γ'. L'ensemble des valeurs de Γ' se compose évidemment de tous les objets qui correspondent par Γ à des objets de X .

Définition 3.- Soient Γ une correspondance, et X un ensemble. L'ensemble des objets qui correspondent par Γ à des éléments de X s'appelle l'image de X par Γ et se désigne par $\Gamma\langle X\rangle$ ou $\Gamma(X)$.

D'une manière plus précise, $\Gamma\langle X\rangle$ désigne donc l'ensemble $\tau_A((\forall y)(y\in A \Longleftrightarrow (\exists x)(x\in X \text{ et } (x,y)\in\Gamma)))$.

Désormais, nous ne ferons plus que rarement la traduction des définitions en langage formel.

2. Correspondance réciproque d'une correspondance.- Soient Γ une correspondance, A son ensemble de définition, B son ensemble des valeurs. La relation $(y,x)\in\Gamma$ entraîne $(x,y)\in B\times A$; cette relation admet donc un graphe, qui se compose de tous les couples (x,y) tels que $(y,x)\in\Gamma$.

Définition 4. Soit Γ une correspondance. La correspondance qui se compose de tous les couples (x,y) tels que $(y,x)\in\Gamma$ s'appelle la correspondance réciproque de Γ , et se désigne par $\overset{-1}{\Gamma}$.

Si X est un ensemble, $\overset{-1}{\Gamma}\langle X\rangle$ s'appelle l'image réciproque de X par Γ.

Il est évident que la correspondance réciproque de $\overset{-1}{\Gamma}$ est Γ, et que l'ensemble de définition (resp. des valeurs) de $\overset{-1}{\Gamma}$ est égal à l'ensemble des valeurs (resp. de définition) de Γ.

3. <u>Composée de deux correspondances</u>.- Soient Γ et Δ des correspondances. Désignons par A l'ensemble de définition de Γ et par D l'ensemble des valeurs de Δ. La relation $(\exists y)((x,y)\in\Gamma$ et $(y,z)\in\Delta)$ entraîne $(x,z)\in A\times D$; elle admet donc un graphe par rapport à x et z.

<u>Définition 5.- Soient Γ et Δ des correspondances. On appelle composée de Δ et de Γ, et on désigne par $\Delta\circ\Gamma$, le graphe par rapport à x et z de la relation $(\exists y)((x,y)\in\Gamma$ et $(y,z)\in\Delta)$.</u>

<u>Proposition 2.- Soient Γ et Δ des correspondances. La correspondance réciproque de $\Delta\circ\Gamma$ est $\overset{-1}{\Gamma}\circ\overset{-1}{\Delta}$.</u>

En effet, la relation "$(x,y)\in\Gamma$ et $(y,z)\in\Delta$" est équivalente à "$(z,y)\in\overset{-1}{\Delta}$ et $(y,x)\in\overset{-1}{\Gamma}$".

<u>Proposition 3.- Soient Γ_1, Γ_2, Γ_3 des correspondances. On a alors $(\Gamma_3\circ\Gamma_2)\circ\Gamma_1=\Gamma_3\circ(\Gamma_2\circ\Gamma_1)$.</u>

La relation $(x,t)\in(\Gamma_3\circ\Gamma_2)\circ\Gamma_1$ est équivalente à la relation

$$(\exists y)((x,y)\in\Gamma_1 \text{ et } (\exists z)((y,z)\in\Gamma_2 \text{ et } (z,t)\in\Gamma_3))$$

donc (d'après C32 notamment) à la relation

$$(1)\qquad (\exists y)(\exists z)((x,y)\in\Gamma_1 \text{ et } (y,z)\in\Gamma_2 \text{ et } (z,t)\in\Gamma_3).$$

On voit de même que la relation $(x,t)\in\Gamma_3\circ(\Gamma_2\circ\Gamma_1)$ est équivalente à

$$(2)\qquad (\exists z)(\exists y)((x,y)\in\Gamma_1 \text{ et } (y,z)\in\Gamma_2 \text{ et } (z,t)\in\Gamma_3).$$

Or, on sait que les relations (1) et (2) sont équivalentes, ce qui démontre la prop.3.

La correspondance $\Gamma_3\circ(\Gamma_2\circ\Gamma_1)$ se désigne par $\Gamma_3\circ\Gamma_2\circ\Gamma_1$. De même, si Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4 sont des correspondances, on pose $\Gamma_4\circ(\Gamma_3\circ\Gamma_2\circ\Gamma_1)=\Gamma_4\circ\Gamma_3\circ\Gamma_2\circ\Gamma_1$.

Etc...

Proposition 4.- Soient Γ et Δ des correspondances, et B l'ensemble des valeurs de Γ. L'ensemble des valeurs de $\Delta \circ \Gamma$ est alors $\Delta\langle B \rangle$.

En effet, la relation $(\exists x)((x,z) \in \Delta \circ \Gamma)$ est équivalente à $(\exists x)(\exists y)((x,y) \in \Gamma$ et $(y,z) \in \Delta)$, donc aussi à $(\exists y)((y,z) \in \Delta$ et $(\exists x)((x,y) \in \Gamma))$, c'est-à-dire encore à $(\exists y)((y,z) \in \Delta$ et $y \in B)$, donc à $z \in \Delta\langle B \rangle$.

Corollaire.- Soient Γ et Δ des correspondances, et C l'ensemble de définition de Δ. L'ensemble de définition de $\Delta \circ \Gamma$ est $\overset{-1}{\Gamma}\langle C \rangle$.

Définition 6.- Si A est un ensemble, l'ensemble des objets de la forme (x,x), pour $x \in A$, s'appelle la correspondance identique de A, ou encore la diagonale de l'ensemble $A \times A$.

L'ensemble de définition et l'ensemble des valeurs de la correspondance identique de A sont égaux à A. De plus, la correspondance identique de A est sa propre réciproque.

Soient Γ une correspondance, A un ensemble, et I la correspondance identique de A. L'ensemble $\Gamma\langle A \rangle$ est égal à l'ensemble des valeurs de $\Gamma \circ I$.

Proposition 5.- Soient Γ et Δ des correspondances, et A un ensemble. On a : $(\Delta \circ \Gamma)\langle A \rangle = \Delta\langle \Gamma\langle A \rangle\rangle$.

Soit I la correspondance identique de A. L'ensemble $(\Delta \circ \Gamma)\langle A \rangle$ est égal à l'ensemble des valeurs de $(\Delta \circ \Gamma) \circ I = \Delta \circ (\Gamma \circ I)$; or $\Gamma\langle A \rangle$ est égal à l'ensemble des valeurs de $\Gamma \circ I$. La prop.5 résulte donc de la prop.4.

4. Définition d'une fonction.- Définition 7.- On dit que f est une correspondance fonctionnelle, ou fonction, si f est une correspondance et si, pour tout x, il existe un objet au plus correspondant à x par f. Autrement dit, la correspondance f est une fonction si, pour tout x de l'ensemble de définition A de f, la relation $(x,y) \in f$ est fonctionnelle

en y ; l'objet unique correspondant à x par f s'appelle la valeur prise par f au point x et se désigne par $f(x)$ ou par f_x .

Remarques.- 1. Il faut prendre garde aux confusions que risque d'entraîner l'emploi simultané de la notation $f(x)$ et de la notation $\Gamma(X)$ introduite dans la déf.3 .

2. Dans la conception naïve de la théorie des ensembles, une fonction f est l'opération qui fait passer de x à $f(x)$; et on appelle graphe, ou ensemble représentatif de f un objet qui, dans la conception formaliste, n'est autre que la fonction elle-même.

Soient A et B des ensembles ; on appelle application de A une fonction dont l'ensemble de définition est égal à A ; application de A dans B une application de A dont l'ensemble des valeurs est contenu dans B ; application de A sur B , ou transformation de A en B , une application de A dont l'ensemble des valeurs est égal à B

Dans certains cas, une fonction s'appelle aussi une famille ; l'ensemble de définition s'appelle alors l'ensemble des indices, et l'ensemble des valeurs s'appelle l'ensemble des éléments de la famille ; c'est dans ce cas notamment qu'on utilise la notation f_x pour désigner la valeur de f au point x .

On dit que deux fonctions f et g coïncident sur un ensemble E si la relation "$x \in E$ et $(x,y) \in f$ " est équivalente à "$x \in E$ et $(x,y) \in g$ " .

Soient f et g deux fonctions. Dire que $f \subset g$ revient à dire que l'ensemble de définition A de f est contenu dans l'ensemble de définition de g , et que g coïncide avec f sur A ; on dit alors que g est un prolongement de f , ou que g prolonge f , ou que f est une restriction de g . Lorsque g est appelée une famille, on dit aussi que f est une sous-famille de g . Dire que $f=g$ revient à dire que f et g ont même ensemble de définition A et coïncident sur A .

Quand on dit que f et g ont <u>même</u> ensemble de définition, on entend par là, bien entendu, que f et g ont des ensembles de définition <u>égaux</u>. Nous ferons constamment des abus de langage de ce genre.

On dit qu'une fonction f est <u>constante</u> si, pour tout x et tout x' de l'ensemble de définition de f , $f(x)=f(x')$. On dit qu'un élément x de l'ensemble de définition de f est <u>invariant</u> par f si $f(x)=x$.

<u>Exemples de fonctions</u>.- 1. L'ensemble vide est évidemment une fonction ; c'est la seule fonction dont l'ensemble de définition (ou l'ensemble des valeurs) soit vide ; on l'appelle la fonction vide.

2. Si A est un ensemble, la correspondance identique I de A est une application de A, qu'on appelle <u>application identique de</u> A . Si $A \subset B$, I s'appelle aussi <u>l'application canonique</u> de A dans B .

<u>5. Composée de deux fonctions, fonction réciproque</u>.- <u>Proposition 6</u>.- <u>Si</u> f <u>et</u> g <u>sont des fonctions,</u> $g \circ f$ <u>est une fonction</u>.

Soient x, z et z' des objets tels que $(x,z) \in g \circ f$, $(x,z') \in g \circ f$. Il existe des objets y, y' tels que $(x,y) \in f$, $(x,y') \in f$, $(y,z) \in g$, $(y',z') \in g$. Puisque f est une fonction, on a $y=y'$, donc $(y,z') \in g$. Puisque g est une fonction, on en déduit $z = z'$.

Si f est une fonction et I l'application identique d'un ensemble A , la fonction $f \circ I$ est une restriction de f qu'on appelle <u>la restriction de f à l'ensemble A</u> .

La correspondance réciproque d'une fonction n'est pas en général une fonction. On a cependant la proposition suivante :

<u>Proposition 7</u>.- <u>Soient</u> f <u>une fonction</u>, B <u>son ensemble des valeurs</u>. <u>La correspondance</u> $f \circ \overset{-1}{f}$ <u>est la correspondance identique de</u> B .

Si $(x,z) \in f \circ \overset{-1}{f}$, on a $x \in B$ (cor. de la prop.4). D'autre part, il existe un objet y tel que $(x,y) \in \overset{-1}{f}$ et $(y,z) \in f$, d'où $x = f(y)$ et $z = f(y)$, et par suite $z = x$.

Définition 8.- On dit que la fonction f est une fonction univalente, ou une correspondance biunivoque, si $\overset{-1}{f}$ est encore une fonction. Une application d'un ensemble qui est univalente s'appelle une application biunivoque de cet ensemble. Une application biunivoque d'un ensemble A sur lui-même s'appelle une permutation de A .

Si f est une correspondance biunivoque entre A et B , on dit encore que f met A et B en correspondance biunivoque. Lorsqu'il en est ainsi, $\overset{-1}{f}$ est évidemment univalente, $\overset{-1}{f} \circ f$ est la correspondance identique de A , $f \circ \overset{-1}{f}$ est la correspondance identique de B . Si une permutation est identique à la permutation réciproque, on dit qu'elle est involutive.

Proposition 8.- Si f est une application biunivoque de A sur un ensemble B, et g une application biunivoque de B sur un ensemble C , $g \circ f$ est une application biunivoque de A sur C .

La correspondance réciproque de $g \circ f$ est $\overset{-1}{f} \circ \overset{-1}{g}$, qui est une fonction puisque $\overset{-1}{f}$ et $\overset{-1}{g}$ sont des fonctions. On a de plus $(g\circ f)\langle A\rangle = g\langle f\langle A\rangle\rangle = g\langle B\rangle = C$, et $(\overset{-1}{f} \circ \overset{-1}{g})\langle C\rangle = \overset{-1}{f}\langle \overset{-1}{g}\langle C\rangle\rangle = \overset{-1}{f}\langle B\rangle = A$, d'où la proposition.

Ainsi, lorsque f et g sont des permutations d'un ensemble A , $g \circ f$ et $\overset{-1}{f}$ sont également des permutations de A .

Proposition 9.- Soient A et B des ensembles, f une application de A dans B, g une application de B dans A . Si l'application $g \circ f$ est l'application identique de A , f est biunivoque, et g est une application de B sur A . Si de plus $f \circ g$ est l'application identique de B , f est une application biunivoque de A sur B , et on a $g = \overset{-1}{f}$.

Supposons que $g\circ f$ soit l'application identique de A . Si $x \in A$, on a alors $x = g(f(x))$. Il en résulte d'une part que x est une valeur prise par g , donc que g applique B sur A , et d'autre part que les conditions $x \in A$, $x' \in A$, $f(x)=f(x')$ entraînent $x=x'$, ce qui montre que f est biunivo- que

Si de plus $f \circ g$ est l'application identique de B , il est clair en vertu de ce qui précède que f est une application biunivoque de A sur B ; de plus, la relation $y = f(x)$ est équivalente à $x = g(y)$, d'où $g = \overset{-1}{f}$.

<u>Proposition 10.- Soient</u> f <u>une fonction,</u> E <u>un ensemble et</u> A <u>une partie de</u> E . On a $\overset{-1}{f}\langle \complement_E A\rangle = \complement_{\overset{-1}{f}\langle E\rangle} \overset{-1}{f}\langle A\rangle$.

En effet, pour que x appartienne à $\overset{-1}{f}\langle \complement_E A\rangle$, il faut et il suffit que f(x) appartienne à E mais non à A , c'est-à-dire que x appartienne à $\overset{-1}{f}\langle E\rangle$ mais non à $\overset{-1}{f}\langle A\rangle$.

<u>Corollaire.- Soient</u> f <u>une fonction univalente,</u> E <u>un ensemble et</u> A <u>une partie de</u> E . <u>On a alors</u> $f\langle \complement_E A\rangle = \complement_{f\langle E\rangle} f\langle A\rangle$.

6. <u>Définition d'une fonction par un terme</u>. <u>C.49</u>.- <u>Soient</u> T <u>un terme,</u> A <u>un ensemble,</u> x <u>et</u> y <u>des lettres distinctes. On suppose que</u> x <u>ne figure pas dans</u> A , <u>et que</u> y <u>ne figure ni dans</u> T <u>ni dans</u> A . <u>Soit</u> R <u>la relation</u> "$x \in A$ et $y = T$" . <u>Alors, la relation</u> R <u>admet un graphe par rapport aux lettres</u> x <u>et</u> y ; <u>ce graphe est une fonction donc la valeur au point</u> x <u>est égale à</u> T ; <u>son ensemble de définition est</u> A , <u>son ensemble des valeurs est l'ensemble des objets de la forme</u> T <u>pour</u> $x \in A$.

En effet, soit B l'ensemble des objets de la forme T pour $x \in A$. On a $R \Rightarrow (x, y) \in A \times B$; comme l'assemblage désigné par $A \times B$ ne contient ni x , ni y , R admet un graphe f par rapport aux lettres x et y . Il est clair que la relation "$(x, y) \in f$ et $(x, y') \in f$" entraîne $y = y'$, donc f est une fonction. Le reste du critère est évident.

La fonction que nous venons de définir se désigne souvent par la notation $x \rightarrow T (x \in A)$ ou $(T)_{x \in A}$, l'assemblage correspondant de la mathématique formelle ne contient ni x , ni y , et ne dépend pas du choix de la lettre y vérifiant les conditions de C49. Quand le contexte est suffisamment explicite, on se contente des notations $x \to T$, ou parfois simplement T. * Ainsi, on peut parler de la fonction x^3, si le contexte indique clairement qu'il s'agit de la fonction $x \to x^3$, x complexe. *

Exemples.- 1. Si f est une fonction admettant A pour ensemble de définition, f est égale à la fonction $x \to f(x)$ $(x \in A)$. Avec d'autres notations, $f = (f_x)_{x \in A}$; (c'est surtout quand on utilise cette notation qu'on parle de "famille" au lieu de "fonction").

2. Soient f et g des fonctions, A l'ensemble de définition de f. La fonction $x \to f(g(x))$ $(x \in \overset{-1}{g}\langle A \rangle)$ est égale à $f \circ g$.

3. Soit Γ un ensemble de couples. Les fonctions $z \to pr_1 z$ $(z \in \Gamma)$ et $z \to pr_2 z$ $(z \in \Gamma)$ s'appellent respectivement la première et la seconde fonction coordonnée sur Γ ; ce sont des applications de Γ sur sa première et sa seconde projection. Pour que la première fonction coordonnée soit univalente, il faut et il suffit que Γ soit une fonction.

4. Soit Γ un ensemble de couples. La fonction $z \to (pr_2 z, pr_1 z)$ $(z \in \Gamma)$ est une application biunivoque de Γ sur $\overset{-1}{\Gamma}$.

7. Fonctions de deux arguments.- On appelle fonction de deux arguments une fonction dont l'ensemble de définition est un ensemble de couples. Soit f une telle fonction ; si (x,y) est un élement de l'ensemble de définition de f, la valeur $f((x,y))$ de f au point (x,y) se désigne en général par $f(x,y)$.

Soient f une fonction de deux arguments, Γ son ensemble de définition, C son ensemble des valeurs. Soient A et B la première et la seconde projection de Γ. La relation $((x,y),z) \in f$ entraîne $(x,z) \in A \times C$ et admet donc un graphe φ par rapport aux lettres x et z. De plus, la relation "$((x,y),z) \in f$ et $((x,y),z') \in f$" entraîne $z=z'$, de sorte que φ est une fonction

On dit que φ est <u>l'application partielle de f relative à la valeur y du second argument</u>. On a $\varphi(x) = f(x,y)$ pour tout x tel que $(x,y) \in \Gamma$. De même, la relation $((x,y),z) \in f$ admet un graphe par rapport aux lettres y et z , et ce graphe est une fonction qu'on appelle <u>l'application partielle de f relative à la valeur x du premier argument</u>. Si ψ est cette application, on a $\psi(x) = f(x,y)$ pour tout y tel que $(x,y) \in \Gamma$.

Si, pour tout y (resp. x), l'application partielle φ (resp. ψ) est une application constante, on dit que f <u>ne dépend pas</u> de son premier (resp. second) argument.

Soient u et v des fonctions, A et B leurs ensembles de définition, C et D leurs ensembles des valeurs. La fonction $z \rightarrow (u(pr_1 z), v(pr_2 z))$ $(z \in A \times B)$ se désigne par la notation $[u,v]$, ou (u,v) (malgré la confusion qui peut en résulter avec le couple (u,v)). C'est une application de $A \times B$ sur $C \times D$. Si u et v sont univalentes, $[u,v]$ est univalente, et la fonction réciproque de $[u,v]$ est $[\overset{-1}{u}, \overset{-1}{v}]$.

§ 4. <u>Réunion et intersection des familles d'ensembles</u>.

<u>1. Définition de la réunion et de l'intersection d'une famille d'ensembles</u>

Soient X une famille, I son ensemble des indices. (Pour faciliter l'interprétation naïve de ce qui suit, nous dirons (cf. § 3, n°6) : soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles). La relation $(\forall i)(\exists Z)(\forall x)((i \in I \text{ et } x \in X_i) \Rightarrow x \in Z)$ est évidemment vraie. Il résulte donc de S8 que la relation $(\exists i)(i \in I \text{ et } x \in X_i)$ est collectivisante en x .

<u>Définition 1. Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles. On appelle réunion de cette famille, et on désigne par $\bigcup_{i \in I} X_i$ l'ensemble des x tels que</u>

$(\exists i)(i \in I$ et $x \in X_i)$, <u>c'est-à-dire qui appartiennent à un ensemble au moins de la famille</u> $(X_i)_{i \in I}$.

Supposons maintenant $I \neq \emptyset$. Si a est un élément de I , la relation $(\forall i)(i \in I \Rightarrow x \in X_i)$ entraîne $x \in X_a$, donc est collectivisante en x .

<u>Définition 2.- Soit</u> $(X_i)_{i \in I}$ <u>une famille d'ensembles dont l'ensemble d'indices n'est pas vide</u>. <u>On appelle intersection de cette famille, et on désigne par</u> $\bigcap_{i \in I} X_i$ <u>l'ensemble des</u> x <u>tels que</u> $(\forall i)(i \in I \Rightarrow x \in X_i)$, <u>c'est-à-dire qui appartiennent à tous les ensembles de la famille</u> $(X_i)_{i \in I}$.

Si $I=\emptyset$, la relation $(\forall i)(i \in I \Rightarrow x \in X_i)$ n'est pas collectivisante ; en effet, c'est une relation vraie, et il n'existe pas d'ensemble X tel que $x \in X$ soit une relation vraie : ce serait l'ensemble de tous les objets.

<u>Proposition 1.- Soit</u> $(X_i)_{i \in I}$ <u>une famille d'ensembles, et soit f une application d'un ensemble</u> J <u>sur</u> I . <u>On a alors</u> $\bigcup_{j \in J} X_{f(j)} = \bigcup_{i \in I} X_i$, <u>et si</u> $I \neq \emptyset$ $\bigcap_{j \in J} X_{f(j)} = \bigcap_{i \in I} X_i$.

Soit x un élément de $\bigcup_{i \in I} X_i$. Il existe donc un indice i tel que $x \in X_i$. Puisque $f\langle J \rangle = I$, il existe un indice j tel que $j \in J$ et $i = f(j)$, d'où $x \in X_{f(j)}$ et par suite $x \in \bigcup_{j \in J} X_{f(j)}$. Réciproquement, si $x \in \bigcup_{j \in J} X_{f(j)}$, il existe un $j \in J$ tel que $x \in X_{f(j)}$, d'où , puisque $f(j) \in I$, $x \in \bigcup_{i \in I} X_i$. On a donc $\bigcup_{j \in J} X_{f(j)} = \bigcup_{i \in I} X_i$.
Supposons maintenant $I \neq \emptyset$ et soit x un élément de $\bigcap_{i \in I} X_i$. Pour tout élément j de J , on a $f(j) \in I$, d'où $x \in X_{f(j)}$ et $x \in \bigcap_{j \in J} X_{f(j)}$.
Soit réciproquement x un élément de $\bigcap_{j \in J} X_{f(j)}$. Si i est un élément quelconque de I , il existe un élément j de J tel que $i=f(j)$, d'où $x \in X_i$, et par suite $x \in \bigcap_{i \in I} X_i$. On a donc $\bigcap_{j \in J} X_{f(j)} = \bigcap_{i \in I} X_i$.

<u>Définition 3.- Soit</u> E <u>un ensemble d'ensembles, et soit</u> $\mathcal{F}$ <u>la famille d'ensembles constituée par l'application identique de</u> E . <u>La réunion des ensembles de</u> $\mathcal{F}$ <u>et</u> (<u>si</u> $\mathcal{F}$ <u>est non vide</u>) <u>l'intersection des ensembles</u>

<u>de $\mathcal{F}$ s'appellent respectivement la réunion et l'intersection des ensembles de E , et se désignent par $\bigcup_{X \in E} X$ et $\bigcap_{X \in E} X$.</u>

Il résulte tout de suite de la prop.1 que, si $(X_i)_{i \in I}$ est une famille d'ensembles, la réunion et (si $I \neq \emptyset$) l'intersection de cette famille sont respectivement égales à la réunion et à l'intersection des ensembles de l'ensemble des éléments de la famille.

Si A et B sont deux ensembles, on pose :

$$A \cup B = \bigcup_{X \in \{A,B\}} X \qquad A \cap B = \bigcap_{X \in \{A,B\}} X .$$

Il est clair que $A \cup B$ est l'ensemble des objets qui appartiennent soit à A soit à B , tandis que $A \cap B$ est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A et à B . En particulier, $\{x,y\} = \{x\} \cup \{y\}$.

Posons : $\{x,y,z\} = \{x,y\} \cup \{z\}$. L'ensemble $\{x,y,z\}$ est l'ensemble dont les seuls éléments sont x,y et z . On pose de même :

$\{x,y,z,t\} = \{x,y,z\} \cup \{t\}$. Etc.

Si maintenant A,B,C,D sont des ensembles, on pose :

$$A \cup B \cup C = \bigcup_{X \in \{A,B,C\}} X \qquad A \cap B \cap C = \bigcap_{X \in \{A,B,C\}} X$$

$$A \cup B \cup C \cup D = \bigcup_{X \in \{A,B,C,D\}} X \qquad A \cap B \cap C \cap D = \bigcap_{X \in \{A,B,C,D\}} X$$

Etc...

<u>2. Propriétés de la réunion et de l'intersection.</u>- Si $(X_i)_{i \in I}$ et $(X'_i)_{i \in I}$ sont des familles d'ensembles ayant le même ensemble d'indices I, et si on a $X'_i \subset X_i$ pour tout $i \in I$, on voit tout de suite que l'on a $\bigcup_{i \in I} X'_i \subset \bigcup_{i \in I} X_i$, et (si $I \neq \emptyset$) $\bigcap_{i \in I} X'_i \subset \bigcap_{i \in I} X_i$.

Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles. Si $J \subset I$, on a $\bigcup_{j \in J} X_j \subset \bigcup_{i \in I} X_i$, et (si J est non vide) $\bigcap_{j \in J} X_j \supset \bigcap_{i \in I} X_i$.

<u>Proposition 2.- Soit</u> $(X_i)_{i \in I}$ <u>une famille d'ensembles dont l'ensemble d'indices I est la réunion d'une famille</u> $(J_a)_{a \in A}$ <u>d'ensembles. On a</u>

alors $\bigcup_{i\in I} X_i = \bigcup_{a\in A}(\bigcup_{i\in J_a} X_i)$, et (si $A \neq \emptyset$ et $J_a \neq \emptyset$ pour tout $a\in A$), $\bigcap_{i\in I} X_i = \bigcap_{a\in A}(\bigcap_{i\in J_a} X_i)$.

Soit x un élément de $\bigcup_{i\in I} X_i$. Il existe un indice $i\in I$ tel que $x\in X_i$. Puisque I est la réunion de la famille $(J_a)_{a\in A}$, il existe un indice $a\in A$ tel que $i\in J_a$, d'où $x\in\bigcup_{i\in J_a} X_i$, et par suite $x\in\bigcup_{a\in A}(\bigcup_{i\in J_a} X_i)$. Soit inversement x un élément de l'ensemble $\bigcup_{a\in A}(\bigcup_{i\in J_a} X_i)$. Il existe un indice $a\in A$ tel que $x\in\bigcup_{i\in J_a} X_i$, d'où il résulte qu'il existe un indice $i\in J_a$ (donc $i\in I$) tel que $x\in X_i$; on en conclut que $x\in\bigcup_{i\in I} X_i$. Supposons maintenant $A\neq\emptyset$, et $J_a\neq\emptyset$ pour tout $a\in A$; alors $I\neq\emptyset$. Soit x un élément de $\bigcap_{i\in I} X_i$. Si $a\in A$, on a $x\in X_i$ pour tout $i\in J_a$ (puisque $J_a\subset I$), d'où $x\in\bigcap_{i\in J_a} X_i$. Ceci étant vrai pour tout $a\in A$, on en conclut que x appartient à $\bigcap_{a\in A}(\bigcap_{i\in J_a} X_i)$. Soit réciproquement x un élément de ce dernier ensemble, et soit i un élément quelconque de I. Il existe un $a\in A$ tel que $i\in J_a$; puisque $x\in\bigcap_{i\in J_a} X_i$, on a $x\in X_i$. Ceci étant vrai pour tout $i\in I$, on a $x\in\bigcap_{i\in I} X_i$. La prop.2 est donc démontrée.

<u>Proposition 3.</u>- <u>Soit</u> $(X_i)_{i\in I}$ <u>une famille d'ensembles, et soit</u> Γ <u>une correspondance. On a alors</u> $\Gamma\langle\bigcup_{i\in I} X_i\rangle = \bigcup_{i\in I}\Gamma\langle X_i\rangle$, <u>et, si</u> $I\neq\emptyset$, $\Gamma\langle\bigcap_{i\in I} X_i\rangle\subset\bigcap_{i\in I}\Gamma\langle X_i\rangle$.

La relation $(\exists x)(x\in\bigcup_{i\in I} X_i$ et $(x,y)\in\Gamma)$ <u>est équivalente</u> à $(\exists x)(\exists i)(i\in I$ et $x\in X_i$ et $(x,y)\in\Gamma)$, donc à $(\exists i)(i\in I$ et $y\in\Gamma\langle X_i\rangle)$, c'est-à-dire à $y\in\bigcup_{i\in I}\Gamma\langle X_i\rangle$, ce qui démontre la première formule. Supposons maintenant $I\neq\emptyset$. La relation

$(\exists x)(x\in\bigcap_{i\in I} X_i$ et $(x,y)\in\Gamma)$ est équivalente à $(\exists x)(\forall i)((i\in I\Rightarrow x\in X_i)$ et $(x,y)\in\Gamma)$, laquelle entraîne $(\forall i)(\exists x)((i\in I\Rightarrow x\in X_i)$ et $(x,y)\in\Gamma)$, donc aussi $(\forall i)(\exists x)((i\Rightarrow I)\Rightarrow$ $\Rightarrow(x\in X_i$ et $(x,y)\in\Gamma))$, laquelle est équivalente à $(\forall i)(i\in I\Rightarrow(\exists x)(x\in X_i$ et $(x,y)\in\Gamma))$ et par suite à $y\in\bigcap_{i\in I}\Gamma\langle X_i\rangle$ ceci démontre la seconde formule.

Si Γ est une correspondance quelconque, la formule $\Gamma\langle\bigcap_{i\in I} X_i\rangle=\bigcap_{i\in I}\Gamma\langle X_i\rangle$ est en général fausse. (Faut-il un exemple de 3è espèce ?). On a cependant le résultat important que voici :

<u>Proposition 4. Soient</u> f <u>une fonction et</u> $(X_i)_{i\in I}$ <u>une famille d'ensembles dont l'ensemble d'indices I n'est pas vide. On a alors</u> :

$$\overset{-1}{f}\langle\bigcap_{i\in I} X_i\rangle=\bigcap_{i\in I}\overset{-1}{f}\langle X_i\rangle .$$

Soit $x\in\bigcap_{i\in I}\overset{-1}{f}\langle X_i\rangle$. On a $f(x)\in X_i$ pour tout $i\in I$, d'où $f(x)\in\bigcap_{i\in I} X_i$, et par suite $x\in\overset{-1}{f}\langle\bigcap_{i\in I} X_i\rangle$. Donc $\bigcap_{i\in I}\overset{-1}{f}\langle X_i\rangle\subset\overset{-1}{f}\langle\bigcap_{i\in I} X_i\rangle$, ce qui, avec la prop.3, achève la démonstration.

<u>Corollaire</u>.- <u>Si</u> f <u>est une fonction</u> univalente <u>et si</u> $(X_i)_{i\in I}$ <u>est une famille d'ensembles dont l'ensemble d'indices</u> I <u>n'est pas vide, on a</u>

$$f\langle\bigcap_{i\in I} X_i\rangle=\bigcap_{i\in I} f\langle X_i\rangle .$$

La fonction f est en effet la correspondance réciproque de la fonction $\overset{-1}{f}$.

<u>Proposition 5.</u>- <u>Soit</u> $(X_i)_{i\in I}$ <u>une famille de parties d'un ensemble</u> E. <u>Si</u> $I\neq\emptyset$, <u>on a</u> $\complement_E(\bigcup_{i\in I} X_i)=\bigcap_{i\in I}\complement_E X_i$ et $\complement_E(\bigcap_{i\in I} X_i)=\bigcup_{i\in I}\complement_E X_i$.

Soit $x \in \complement_E(\bigcup_{i\in I} X_i)$. On a $x \in E$, et, pour tout $i \in I$, $x \notin X_i$, donc $x \in \complement_E X_i$; par suite, $x \in \bigcap_{i\in I} \complement_E X_i$. Réciproquement, soit $x \in \bigcap_{i \in I} \complement_E X_i$; soit a un élément de I (qui n'est pas vide) ; on a $x \in \complement_E X_a$, donc $x \in E$; en outre, si on avait $x \in \bigcup_{i\in I} X_i$, on aurait $x \in X_i$ pour un $i \in I$, ce qui est contraire à l'hypothèse $x \in \bigcap_{i\in I} \complement_E X_i$; donc $x \in \complement_E(\bigcup_{i\in I} X_i)$. Ceci achève la démonstration de la première formule. La seconde en résulte immédiatement.

Soient A, B, C des ensembles, Γ une correspondance, f une fonction, E un ensemble contenant A et B. Les propositions précédentes entraînent en particulier les formules suivantes :

$$A \cup B = B \cup A \qquad\qquad A \cap B = B \cap A$$

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C \qquad\qquad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C$$

$$\Gamma\langle A \cup B\rangle = \Gamma\langle A\rangle \cup \Gamma\langle B\rangle, \ \Gamma\langle A \cap B\rangle \subset \Gamma\langle A\rangle \cap \Gamma\langle B\rangle \qquad \overset{-1}{f}\langle A \cap B\rangle = \overset{-1}{f}\langle A\rangle \cap \overset{-1}{f}\langle B\rangle$$

$$\complement_E(A \cup B) = (\complement_E A) \cap (\complement_E B) \qquad\qquad \complement_E(A \cap B) = (\complement_E A) \cup (\complement_E B).$$

3. Recouvrements.-

Définition 4.- *On dit qu'une famille d'ensembles* $(X_i)_{i\in I}$ *est un recouvrement d'un ensemble* E *si* $E \subset \bigcup_{i\in I} X_i$. *Si* $(X_i)_{i\in I}$ *et* $(Y_j)_{j\in J}$ *sont des recouvrements de* E, *on dit que le second de ces recouvrements est plus fin que le premier* (*ou que le premier est moins fin que le second*) *si, pour tout* $j \in J$, *il existe un* $i \in I$ *tel que* $Y_j \subset X_i$.

Soient $(X_i)_{i\in I}$ et $(Y_j)_{j\in J}$ des recouvrements d'un ensemble E. La famille d'ensembles $(X_i \cap Y_j)_{(i,j)\in I\times J}$ est encore un recouvrement de E. En effet, si $x \in E$, il existe des indices $i \in I$ et $j \in J$ tels que $x \in X_i$ et $x \in Y_j$, d'où $x \in X_i \cap Y_j$. De plus, il est clair que le recouvrement $(X_i \cap Y_j)_{(i,j)\in I\times J}$ est plus fin que chacun des recouvrements $(X_i)_{i\in I}$ et $(Y_j)_{j\in J}$. Soit réciproquement $(Z_k)_{k\in K}$ un recouvrement de E qui est plus fin que chacun des recouvrements $(X_i)_{i \in I}$ et $(Y_j)_{j \in J}$; si $k \in K$, il existe alors des indices $i \in I$ et $j \in J$ tels que $Z_k \subset X_i$ et $Z_k \subset Y_j$, d'où $Z_k \subset X_i \cap Y_j$, ce qui montre que le recouvrement $(Z_k)_{k \in K}$ est plus fin que le recouvrement $(X_i \cap Y_j)_{(i,j) \in I \times J}$.

Soit $(X_i)_{i \in I}$ un recouvrement d'un ensemble E , et soit f une application de E sur un ensemble F . La famille $(f\langle X_i \rangle)_{i \in I}$ est alors un recouvrement de F (prop.3), qui s'appelle <u>l'image du recouvrement</u> $(X_i)_{i \in I}$ <u>par f</u> . Si g est une application d'un ensemble G dans l'ensemble E , la famille $(\overset{-1}{g}\langle X_i \rangle)_{i \in I}$ est un recouvrement de G , qu'on appelle <u>l'image réciproque du recouvrement</u> $(X_i)_{i \in I}$ <u>par</u> g .

Soient E et F des ensembles, $(X_i)_{i \in I}$ un recouvrement de E et $(Y_j)_{j \in J}$ un recouvrement de F . La famille $(X_i \times Y_j)_{(i,j) \in I \times J}$ est alors un recouvrement de $E \times F$ qu'on appelle le <u>produit</u> des recouvrements $(X_i)_{i \in I}$ de E et $(Y_j)_{j \in J}$ de F .

4. Partitions.-

<u>Définition 5.- On dit que des ensembles A et B sont disjoints si</u> $A \cap B = \emptyset$; <u>s'il n'en est pas ainsi, on dit que ces ensembles se rencontrent. Soit</u> $(X_i)_{i \in I}$ <u>une famille d'ensembles ; on dit que les ensembles de cette famille sont mutuellement disjoints si les conditions</u> $i \in I$, $j \in J$, $i \neq j$ <u>entraînent</u> $X_i \cap X_j = \emptyset$.

Si E est un ensemble d'ensembles, on dit de même que les ensembles de E sont mutuellement disjoints si les conditions $X \in E$, $Y \in E$, $X \neq Y$ entraînent $X \cap Y = \emptyset$. Il revient au même de dire que la famille constituée par l'application identique de E est une famille d'ensembles mutuellement disjoints.

Si $(X_i)_{i \in I}$ est une famille d'ensembles mutuellement disjoints, et si f est une fonction, les ensembles de la famille $(\overset{-1}{f}\langle X_i \rangle)_{i \in I}$ sont mutuellement disjoints (en vertu de la prop.4). Mais il n'en est pas en général de même pour les ensembles de la famille $(f\langle X_i \rangle)_{i \in I}$.

Proposition 6.- Soient E un ensemble, et $(X_i)_{i \in I}$ un recouvrement de E. Si deux applications f et g de E sont telles que, pour tout $i \in I$, la restriction de f à X_i coïncide avec celle de g, on a $f=g$. Supposons maintenant que les X_i sont deux à deux disjoints, et soit $(f_i)_{i \in I}$ une famille de fonctions telle que, pour tout $i \in I$, l'ensemble de définition de f_i soit X_i. Il existe alors une application f de E, et une seule, qui prolonge toutes les applications f_i, $i \in I$.

Soit x un élément quelconque de E ; il y a donc un $i \in I$ tel que $x \in X_i$. Les restrictions de f et de g à X_i étant identiques, on a $f(x)=g(x)$. Supposons maintenant que $(X_i)_{i \in I}$ soit une partition de E. Si $x \in E$, posons $g(x) = \tau_i$ ($i \in I$ et $x \in X_i$) ; la relation $(\exists i)(i \in I$ et $x \in X_i)$ étant vraie, on a $g(x) \in I$, $x \in X_{g(x)}$. Soit f l'application $x \to f_{g(x)}(x)$ $(x \in E)$. Si $x \in X_i$, on a $x \in X_i \cap X_{g(x)}$, d'où $i = g(x)$ puisque les ensembles de la famille $(X_i)_{i \in I}$ sont mutuellement disjoints. Il en résulte que $f(x) = f_i(x)$, donc que f prolonge chacune des applications f_i. L'unicité de f résulte de la première assertion de la proposition.

Définition 6.- On appelle partition d'un ensemble E une famille de parties non vides et mutuellement disjointes de E qui est un recouvrement de E.

Si $(X_i)_{i \in I}$ est une partition d'un ensemble E, l'application de I qu'elle définit est une application biunivoque de I sur l'ensemble $\mathfrak{F}$ des parties de la partition. La donnée de $\mathfrak{F}$ définit donc la famille à une correspondance biunivoque près des ensembles d'indices.

5. Somme d'une famille d'ensembles.-

Proposition 7.- Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles. On peut trouver un ensemble X possédant la propriété suivante : il existe une famille $(X'_i)_{i\in I}$ d'ensembles mutuellement disjoints telle que $X = \bigcup_{i\in I} X'_i$ et telle que, pour tout $i \in I$, il existe une application biunivoque de X_i sur X'_i.

Soit $A = \bigcup_{i\in I} X_i$. Si $i \in I$, l'application $x \to (x,i)(x \in X_i)$ est une application biunivoque de X_i sur une partie X'_i de $A \times I$. De plus, l'image de X'_i par la seconde fonction coordonnée sur $A \times I$ est contenue dans l'ensemble $\{i\}$; il en résulte que $X'_i \cap X'_j = \emptyset$ si $i \neq j$. Il suffit alors de poser $X = \bigcup_{i\in I} X'_i$.

Définition 7. Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles. On appelle somme de cette famille l'ensemble $\tau_X(R)$ si R désigne la relation : "il existe une famille $(X'_i)_{i\in I}$ d'ensembles deux à deux disjoints telle que $X = \bigcup_{i\in I} X'_i$ et telle que, pour tout $i \in I$, il existe une application biunivoque de X_i sur X'_i".

Proposition 8.- Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles mutuellement disjoints. Soient A sa réunion et X sa somme. Il existe une application biunivoque de A sur X.

Soient $(X'_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles deux à deux disjoints telle que $X = \bigcup_{i\in I} X'_i$, et $(f_i)_{i\in I}$ une famille d'applications biunivoques de X_i sur X'_i. D'après la prop. 1, il existe une application f de A qui prolonge simultanément toutes les applications f_i. On voit tout de suite que f est une application biunivoque de A sur X.

§ 5. Produit de familles d'ensembles.

1. L'axiome de l'ensemble des parties.- C'est le suivant :

A4.- $(\forall X)\ \mathrm{Coll}_Y\,(Y \subset X)$

Cet axiome signifie que, X étant un ensemble, il existe un ensemble dont les éléments sont toutes les parties de X. Cet ensemble s'appelle <u>l'ensemble des parties</u> de X, et se désigne par $\mathfrak{P}(X)$. Il est clair que, si $X' \subset X$, on a $\mathfrak{P}(X') \subset \mathfrak{P}(X)$.

Soient Γ une correspondance, E un ensemble, et $F = \Gamma\langle E\rangle$. La <u>fonction</u> $X \to \Gamma\langle X\rangle$ ($X \in \mathfrak{P}(E)$) s'appelle <u>l'extension canonique</u> de Γ à $\mathfrak{P}(E)$; c'est une application de $\mathfrak{P}(E)$ dans $\mathfrak{P}(F)$.

Soient Γ, Δ des correspondances, et E un ensemble. Désignons par $\hat{\Gamma}$ l'extension canonique de Γ à $\mathfrak{P}(E)$, par G un ensemble contenant $\Gamma\langle E\rangle$ et par $\hat{\Delta}$ l'extension de Δ à $\mathfrak{P}(G)$. Il résulte alors tout de suite de la prop. 5 du § 3 que l'extension canonique de $\Delta \circ \Gamma$ à $\mathfrak{P}(E)$ est $\hat{\Delta} \circ \hat{\Gamma}$.

<u>Proposition 1. Si</u> f <u>est une application biunivoque d'un ensemble</u> E <u>sur un ensemble</u> F, <u>l'extension canonique</u> $\hat{f}$ <u>de</u> f <u>à</u> $\mathfrak{P}(E)$ <u>est une application biunivoque de</u> $\mathfrak{P}(E)$ <u>sur</u> $\mathfrak{P}(F)$.

La correspondance $f \circ \overset{-1}{f}$ est l'application identique de f. Si Y est une partie de E, on a donc $Y = f\langle \overset{-1}{f}\langle Y\rangle\rangle$, d'où $Y \in \hat{f}\langle \mathfrak{P}(E)\rangle$, ce qui montre que $\hat{f}$ applique $\mathfrak{P}(E)$ <u>sur</u> $\mathfrak{P}(F)$. (Ce raisonnement n'utilise d'ailleurs pas l'hypothèse que f est biunivoque). De plus, si X est une partie de E telle que $f\langle X\rangle = Y$, on a $X = \overset{-1}{f}\langle Y\rangle$, ce qui montre que $\hat{f}$ est biunivoque.

<u>2. Ensemble des applications d'un ensemble dans un autre.</u>- Soient E et F des ensembles. Toute application de E dans F est une partie de $E \times F$. L'ensemble des éléments de $\mathfrak{P}(E \times F)$ qui possèdent la propriété d'être des applications de E dans F est donc un ensemble dont les éléments sont toutes les applications de E dans F.

Définition 1.- Si E et F sont des ensembles, on désigne par F^E l'ensemble des applications de E dans F .

Soient E, E', F et F' des ensembles. Soient u une application de E' dans E et v une application de F dans F' . L'application $f \to v \circ f \circ u$ $(f \in F^E)$ est une application de F^E dans $F'^{E'}$; désignons-là par φ . Soient u' une application d'un ensemble E'' dans E' et v' une application de F' dans un ensemble F'' . L'application $f' \to v' \circ f' \circ u'$ $(f' \in F'^{E'})$ est une application de $F'^{E'}$ dans $F''^{E''}$. Les applications $\psi \circ \varphi$ et $f \to (v' \circ v) \circ f \circ (u \circ u')$ $(f \in F^E)$ sont des applications de F^E dans $F''^{E''}$. Ces applications sont égales, comme il résulte aisément d'applications répétées de la prop.3 du §3 .

Proposition 2.- Soient u une application biunivoque d'un ensemble E' sur un ensemble E et v une application biunivoque d'un ensemble F sur un ensemble F' . L'application $f \to v \circ f \circ u$ $(f \in F^E)$ est alors une application biunivoque de F^E sur $F'^{E'}$.

Soient φ cette application, et ψ l'application $f' \to \overset{-1}{v} \circ f' \circ \overset{-1}{u}$ $(f' \in F'^{E'})$. D'après ce qui a été dit plus haut, $\psi \circ \varphi$ est l'application identique de F^E et $\varphi \circ \psi$ est l'application identique de $F'^{E'}$. On conclut alors au moyen de la prop.8 du §3 .

Soient maintenant E, F deux ensembles, et f une fonction de deux arguments admettant $E \times F$ pour ensemble de définition. Si y est un objet quelconque, soit f/y l'application partielle de f relative à la valeur y du second argument. Soit D un ensemble contenant l'ensemble des valeurs de f . La fonction $y \to f/y$ $(y \in F)$ est alors une application de F dans D^E . Réciproquement, si φ est une application d'un ensemble F dans un ensemble de la forme D^E , où D et E sont des ensembles, l'application $(x,y) \to (\varphi(y))(x)$ $((x,y) \in E \times F)$ est une fonction f de deux arguments dont l'ensemble de définition est $E \times F$ et dont l'ensemble des valeurs est contenu dans D ; de plus, on a , pour $y \in F$, $f/y = \varphi(y)$. On peut faire des remarques analogues dans le cas où on considère les applications partielles d'une fonction de deux arguments relatives à des valeurs du premier argument.

3. Définition du produit d'une famille d'ensembles.-

Définition 2.- Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles. L'ensemble des applications de I dans $\bigcup_{i \in I} X_i$ telles que $f(i) \in X_i$ pour tout $i \in I$ s'appelle le produit de la famille d'ensembles $(X_i)_{i \in I}$ et se désigne par $\prod_{i \in I} X_i$. Si $i \in I$, X_i s'appelle le facteur d'indice I du produit. L'application $f \to f(i)$ $(f \in \prod_{i \in I} X_i)$ s'appelle la fonction coordonnée d'indice i sur le produit. L'image d'une partie A de $\prod_{i \in I} X_i$ par la fonction coordonnée d'indice i s'appelle la projection d'indice i de A.

Si $I = \emptyset$, il est clair que $\prod_{i \in I} X_i$ possède exactement un élément, à savoir la fonction vide.

Si tous les facteurs X_i du produit sont égaux à un même ensemble X, on a $\prod_{i \in I} X_i = X^I$. En effet, si $I \neq \emptyset$, on a $\bigcup_{i \in I} X_i = X$; et, si $I = \emptyset$, il suffit d'appliquer la remarque précédente. En particulier, si $I = \{i\}$, on a $\prod_{j \in I} X_j = X_i^{\{i\}}$. Or, l'application $f \to f(i)$ est évidemment une application biunivoque de $X_i^{\{i\}}$ sur X_i ; nous identifierons toujours $\prod_{i \in \{i\}} X_i$ avec X_i au moyen de cette application.

Les "identifications" se pratiquent très fréquemment. Leur usage se justifie par la nécessité de ne pas augmenter indûment la complexité des notations. Il est naturellement facile de déduire une absurdité de formules qui n'ont été écrites qu'en vertu de certaines identifications ; seuls un certain flair logique et une grande habitude du raisonnement permettent d'évaluer ces formules à leur vraie valeur.

Nous allons maintenant montrer que la notion de produit que nous venons de définir peut être considérée comme une généralisation de celle de produit cartésien de deux ensembles. (Ici, définition de 1 et 2, et observation que $1 \neq 2$). Soit I l'ensemble $\{1,2\}$. Si z est un couple, posons $a = pr_1 z$, $b = pr_2 z$; il existe une application f et une seule de I telle que $f(1)=a$, $f(2)=b$, à savoir l'ensemble $\{(1,a),(2,b)\}$; de plus, a et b, donc z, sont uniquement déterminés par f. Il apparaît donc naturel de faire la convention suivante : <u>nous identifierons désormais tout couple</u> (a,b) <u>avec l'application f de l'ensemble</u> $\{1,2\}$ <u>définie par</u> $f(1)=a$, $f(2)=b$.

Ceci dit, soient A et B des ensembles. Le couple (A,B) est alors une famille d'ensembles dont l'ensemble d'indices est $I = \{1,2\}$, et le produit de cette famille d'ensembles est l'ensemble des applications f de I telles que $f(1) \in A$, $f(2) \in B$; ce produit est donc l'ensemble des couples (a,b) tels que $a \in A$ et $b \in B$: c'est le produit cartésien $A \times B$ des ensembles A et B. Soient u une application de A sur un ensemble C, v une application de B sur un ensemble D. Le couple (u,v) peut être identifié à une famille $(u_i)_{i \in I}$; ceci fait, l'application $[u_i]_{i \in I}$ est identique à l'application $[u,v]$ définie au § 3, n°7.

Nous définirons aussi au chap. III le terme 3, et nous verrons que $3 \neq 1$, $3 \neq 2$. Si a,b,c sont des objets quelconques, on désigne par (a,b,c) l'application $\{(1,a),(2,b),(3,c)\}$, c'est-à-dire l'application f de $\{1,2,3\}$ telle que $f(1)=a$, $f(2)=b$, $f(3)=c$. Un objet de la forme (a,b,c) s'appelle un triplet ; on dit que a est sa première coordonnée, b sa seconde coordonnée et c sa troisième coordonnée. Si (A,B,C) est un triplet d'ensembles, c'est une famille d'ensembles admettant l'ensemble $\{1,2,3\}$ comme ensemble d'indices ; on désigne le produit de cette famille d'ensembles par $A \times B \times C$: c'est l'ensemble des triplets (a,b,c) tels que $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$.

Utilisant le terme 4 du chap. III, on définit de manière analogue les quadruplets comme étant les applications de l'ensemble $\{1,2,3,4\}$, puis les produits $A\times B\times C\times D$ de quadruplets (A,B,C,D) d'ensembles. Etc.

<u>Théorème 1.- Soient</u> $(X_i)_{i\in I}$ <u>et</u> $(X'_i)_{i\in I}$ <u>des familles d'ensembles qui ont le même ensemble d'indices</u> I. <u>Si on a</u> $X_i\subset X'_i$ <u>pour tout</u> $i\in I$, <u>on a</u> $\prod_{i\in I} X_i\subset\prod_{i\in I} X'_i$. <u>Réciproquement, si</u> $\prod_{i\in I} X_i\subset\prod_{i\in I} X'_i$, <u>et si</u> $X_i\neq 0$ <u>pour tout</u> $i\in I$, <u>on a</u> $X_i\subset X'_i$ <u>pour tout</u> $i\in I$.

La première assertion est évidente. Supposons maintenant $\prod_{i\in I} X_i\subset\prod_{i\in I} X'_i$, et $X_i\neq\emptyset$ pour tout $i\in I$. Si $I=\emptyset$, l'assertion à démontrer est évidente. Sinon, soit i un élément de I ; nous voulons montrer que $X_i\subset X'_i$. Soit x un élément de X_i. Soit f la fonction

$$j\longrightarrow\tau_y((j=i\Rightarrow y=x)\text{ et }(j\neq i\Rightarrow y\in X_j))\quad(j\in I).$$

Adjoignons l'hypothèse $j\in I$, et désignons par T_y le terme $\tau_y(y\in X_j)$. Comme $X_j\neq\emptyset$, on a $T_j\in X_j$. Si $j=i$, les relations $j=i\Rightarrow x=x$, $j\neq i\Rightarrow x\in X_j$ sont vraies, donc la relation $(\exists y)((j=i\Rightarrow y=x)$ et $(j\neq i\Rightarrow y\in X_j))$ est vraie ; si $j\neq i$, les relations $j=i\Rightarrow T_j=x$, $j\neq i\Rightarrow T_j\in X_j$ sont vraies, donc la relation $(\exists y)((j=i\Rightarrow y=x)$ et $(j\neq i\Rightarrow y\in X_j))$ est encore vraie. D'où la relation

$$(j\in I)\Rightarrow(\exists y)((j=i\Rightarrow y=x)\text{ et }(j\neq i\Rightarrow y\in X_j)).$$

Comme $f(j)=\tau_y((j=i\Rightarrow y=x)$ et $(j\neq i\Rightarrow y\in X_j))$, on en déduit la relation

$$(j\in I)\Rightarrow((j=i\Rightarrow f(j)=x)\text{ et }(j\neq i\Rightarrow f(j)\in X_j)).$$

Donc $f(i)=x$ et $(j\in I)\Rightarrow(f(j)\in X_j)$, de sorte que $f\in\prod_{i\in I}X_i$. On en conclut que $f\in\prod_{i\in I}X'_i$, d'où $x=f(i)\in X'_i$, et par suite $X_i\subset X'_i$.

<u>Corollaire 1.- Soit</u> $(X_i)_{i\in I}$ <u>une famille d'ensembles. Pour que</u> $\prod_{i\in I}X_i=\emptyset$, <u>il faut et il suffit qu'il existe un</u> $i\in I$ <u>tel que</u> $X_i=\emptyset$.

La condition est évidemment suffisante. Supposons maintenant $\prod_{i\in I} X_i = \emptyset$. On a d'abord $I \neq \emptyset$. Soit $(Y_i)_{i\in I}$ la famille d'ensembles $i \rightarrow \emptyset$ $(i \in I)$. On a $\prod_{i\in I} X_i \subset \prod_{i\in I} Y_i$. Si $X_i \neq \emptyset$ pour tout $i \in I$, le th.1 entraîne $X_i \subset Y_i = \emptyset$ pour tout $i \in I$, ce qui est absurde puisque $I \neq \emptyset$. Donc $X_i = \emptyset$ pour un $i \in I$.

Le corollaire 1 montre que, si on a une famille d'ensembles $(X_i)_{i\in I}$ telle que X_i soit non vide pour tout $i \in I$, on peut introduire (à titre de constante auxiliaire) une application f de I qui possède la propriété que $f(i) \in X_i$ pour tout $i \in I$.

<u>Corollaire 2.-</u> <u>Soit</u> $((X_{i,j})_{j\in J_i})_{i\in I}$ <u>une famille</u> (<u>admettant</u> I <u>pour ensemble d'indices</u>) <u>de familles d'ensembles</u>. <u>On suppose</u> $I \neq \emptyset$, <u>et</u> $J_i \neq \emptyset$ <u>pour tout</u> $i \in I$. <u>Soit</u> $J = \prod_{i\in I} J_i \neq \emptyset$. <u>On a</u>

$$\bigcup_{i\in I} \left(\bigcap_{j\in J_i} X_{i,j}\right) = \bigcap_{f\in J} \left(\bigcup_{i\in I} X_{i,f(i)}\right)$$

<u>et</u>

$$\bigcap_{i\in I} \left(\bigcup_{j\in J_i} X_{i,j}\right) = \bigcup_{f\in J} \left(\bigcap_{i\in I} X_{i,f(i)}\right) .$$

Soit x un élément de $\bigcup_{i\in I} \left(\bigcap_{j\in J_i} X_{i,j}\right)$. Soit f un élément quelconque de J . Il existe un indice i tel que $x \in \bigcap_{j\in J_i} X_{i,j}$; on a donc $x \in X_{i,f(i)}$ et par suite $x \in \bigcup_{i\in I} X_{i,f(i)}$. Ceci étant vrai pour tout $f \in J$, on a $x \in \bigcap_{f\in J} \left(\bigcup_{i\in I} X_{i,f(i)}\right)$. Soit maintenant x un objet qui n'appartient pas à l'ensemble $\bigcup_{i\in I} \left(\bigcap_{j\in J_i} X_{i,j}\right)$. Il en résulte que, pour tout $i \in I$, $x \notin \bigcap_{j\in J_i} X_{i,j}$, ce qui signifie que, pour tout $i \in I$, l'ensemble J_i' des $j \in J_i$ tels que $x \notin X_{i,j}$ est non vide. D'après le cor.1, il existe une application f de I telle que, pour tout $i \in I$, $f(i) \in J_i'$. On a donc $f \in J$ et, pour tout $i \in I$, $x \notin X_{i,f(i)}$. Donc $x \notin \bigcup_{i\in I} X_{i,f(i)}$ et par suite $x \notin \bigcap_{f\in J} \left(\bigcup_{i\in I} X_{i,f(i)}\right)$.

La première formule est donc démontrée. La ~~xxxxx~~ seconde se démontre d'une manière analogue, comme nous laissons au lecteur le soin de le vérifier.

En particulier, si A,B,C sont des ensembles, on a les formules suivantes :

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \qquad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) .$$

4. Propriétés du produit des familles d'ensembles.-

Définition 3.- Soient $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles, et $(g_i)_{i \in I}$ une famille de fonctions admettant le même ensemble d'indices ; supposons que, pour tout $i \in I$, g_i soit une application de X_i dans un ensemble Y_i. Si $f \in \prod_{i \in I} X_i$, la fonction $i \to g_i(f(i)) (i \in I)$ est un élément de $\prod_{i \in I} Y_i$; désignons-le par h_f. La fonction $f \to h_f$ $(f \in \prod_{i \in I} X_i)$ est alors une application de $\prod_{i \in I} X_i$ dans $\prod_{i \in I} Y_i$, qu'on désigne par $[g_i]_{i \in I}$ (ou même, s'il n'y a pas de danger de confusion avec la famille $(g_i)_{i \in I}$, par $(g_i)_{i \in I}$).

Cette notion généralise la notion introduite au § 3, n°7, dans le cas d'un produit de deux ensembles.

Si $(g_i')_{i \in I}$ est une nouvelle famille de fonctions, et si, pour tout $i \in I$, g_i' est une application de Y_i dans un ensemble Z_i, on vérifie aisément que l'application $[g_i' \circ g_i]_{i \in I}$ de $\prod_{i \in I} X_i$ dans $\prod_{i \in I} Z_i$ est égale à $[g_i']_{i \in I} \circ [g_i]_{i \in I}$.

Proposition 3.- Soient $(X_i)_{i \in I}$ et $(Y_i)_{i \in I}$ deux familles d'ensembles, et $(g_i)_{i \in I}$ une famille de fonctions ; supposons que, pour tout $i \in I$, g_i soit une application biunivoque de X_i sur Y_i. Alors, $[g_i]_{i \in I}$ est une application biunivoque de $\prod_{i \in I} X_i$ sur $\prod_{i \in I} Y_i$.

En effet, $[\overset{-1}{g_i}]_{i \in I} \circ [g_i]_{i \in I}$ est l'application identique de $\prod_{i \in I} X_i$, tandis que $[g_i]_{i \in I} \circ [\overset{-1}{g_i}]_{i \in I}$ est l'application identique de $\prod_{i \in I} Y_i$.

Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles, et soit E un ensemble. Désignons par p_i la fonction coordonnée d'indice i du produit $\prod_{i \in I} X_i$.

Soit φ une application de E dans $\prod_{i\in I} X_i$; $p_i \circ \varphi$ est alors une application de E dans X_i, donc un élément de X_i^E, et la fonction $i \to p_i \circ \varphi \, (i \in I)$ est un élément de $\prod_{i\in I} X_i^E$; désignons cet élément par u_φ. La fonction $\varphi \to u_\varphi$ $(\varphi \in (\prod_{i\in I} X_i)^E)$ est alors une application, dite *canonique*, de $(\prod_{i\in I} X_i)^E$ dans $\prod_{i\in I} X_i^E$.

Proposition 4.- Soit $(X_i)_{i\in I}$ *une famille d'ensembles et soit* E *un ensemble. L'application canonique de* $(\prod_{i\in I} X_i)^E$ *dans* $\prod_{i\in I} X_i^E$ *est une application biunivoque du premier de ces ensembles sur le second.*

Utilisons les mêmes notations que plus haut. Soient φ et φ' des applications de E dans $\prod_{i\in I} X_i$ telles que $u_\varphi = u_{\varphi'}$. On a donc $p_i \circ \varphi = p_i \circ \varphi'$ pour tout $i \in I$; or, si $x \in E$, il est clair que $\varphi(x)$ est la fonction $i \to (p_i \circ \varphi)(x)$ $(i \in I)$; on en conclut que $\varphi(x) = \varphi'(x)$ pour tout $x \in E$, ce qui prouve que l'application canonique est biunivoque. Soit maintenant $i \to g(i) (i \in I)$ un élément de $\prod_{i\in I} X_i^E$; $g(i)$ est donc, pour tout $i \in I$, une application de E dans X_i. Si $x \in E$, la fonction $i \to (g(i))(x)$ est un élément φ_x de $\prod_{i\in I} X_i$, et la fonction $x \to \varphi_x$ $(x \in E)$ est une application φ de E dans $\prod_{i\in I} X_i$; on voit tout de suite que $p_i \circ \varphi = g(i)$ pour tout $i \in I$; ceci montre que l'application canonique applique $(\prod_{i\in I} X_i)^E$ sur $\prod_{i\in I} X_i^E$.

Proposition 5.- Soit $(X_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ *une famille d'ensembles dont l'ensemble d'indices est le produit de deux ensembles* I *et* J. *Si* $J \neq \emptyset$, *on a* $\bigcap_{j\in J} (\prod_{i\in I} X_{i,j}) = \prod_{i\in I} (\bigcap_{j\in J} X_{i,j})$.

Les deux membres de l'égalité qu'il s'agit de démontrer sont des ensembles d'applications de I. Pour qu'une application f de I appartienne au premier membre, il faut et il suffit que, pour tout $j \in J$, $f \in \prod_{i\in I} X_{i,j}$, c'est-à-dire que, pour tout $(i,j) \in I \times J$, $f(i)$ appartienne à $X_{i,j}$. Pour que f appartienne au second membre, il faut et il suffit que, pour $i \in I$, $f(i) \in \bigcap_{j \in J} X_{i,j}$, c'est-à-dire encore que, pour tout $(i,j) \in I \times J$, $f(i)$ appartienne à $X_{i,j}$. La proposition est donc démontrée.

En particulier, si X, Y, X', Y' sont des ensembles, on a :

$$(X \times Y) \cap (X' \times Y') = (X \cap X') \times (Y \cap Y').$$

Proposition 6.- *Soit* $(X_i)_{i \in I}$ *une famille d'ensembles ; soit* $((X_{i,j})_{j \in J_i})_{i \in I}$ *une famille (admettant I comme ensemble d'indices) de familles d'ensembles. Supposons que, pour tout* $i \in I$, $(X_{i,j})_{j \in J_i}$ *soit un recouvrement de* X_i. *Soit* $J = \prod_{i \in I} J_i$; *si* $\varphi \in J$, *soit* P_φ *l'ensemble* $\prod_{i \in I} X_{i,\varphi(i)}$. *La famille* $(P_\varphi)_{\varphi \in J}$ *est alors un recouvrement de* $\prod_{i \in I} X_i$. *Si, pour chaque* $i \in I$, $(X_{i,j})_{j \in J_i}$ *est une partition de* X_i, *la famille* $(P_\varphi)_{\varphi \in J}$ *est une partition de* $\prod_{i \in I} X_i$.

Soit $f \in \prod_{i \in I} X_i$. Si $i \in I$, on a $f(i) \in X_i$, donc il existe un élément j de J_i tel que $f(i) \in X_{i,j}$; en d'autres termes, l'ensemble des j tels que "$j \in J$ et $f(i) \in X_{i,j}$" n'est pas vide. D'après le cor.1 du th.1, il existe un $\varphi \in J$ tel que $f(i) \in X_{i,\varphi(i)}$ pour tout $i \in I$, d'où $f \in P_\varphi$. Ceci prouve que $(P_\varphi)_{\varphi \in J}$ est un recouvrement de $\prod_{i \in I} X_i$. Supposons maintenant que, pour tout $i \in I$, $(X_{i,j})_{j \in J_i}$ soit une partition de X_i. On a d'abord $X_{i,j} \subset X_i$ pour tout $i \in I$ et tout $j \in J_i$, d'où $P_\varphi \subset \prod_{i \in I} X_i$ pour tout $\varphi \in J$. D'autre part, $P_\varphi \neq \emptyset$ pour tout $\varphi \in J$ (cor.1 du th.1). Enfin, soient φ et φ' des éléments distincts de J. Il existe un $i \in I$ tel que $\varphi(i) \neq \varphi'(i)$, d'où $X_{i,\varphi(i)} \cap X_{i,\varphi'(i)} = \emptyset$. Donc $P_\varphi \cap P_{\varphi'} = \emptyset$, ce qui montre que $(P_\varphi)_{\varphi \in J}$ est une partition de $\prod_{i \in I} X_i$.

5. Applications canoniques d'un produit.-

Proposition 7.- Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles ; soit u une application biunivoque d'un ensemble J sur l'ensemble I . L'application $f \to f\circ u$ $(f\in \prod_{i\in I} X_i)$ est alors une application biunivoque de $\prod_{i\in I} X_i$ sur $\prod_{j\in J} X_{u(j)}$.

Soit $A = \bigcup_{i\in I} X_i = \bigcup_{j\in J} X_{u(j)}$ (prop.1, § 4). L'application $f \to f\circ u$ $(f\in A^I)$ est une application biunivoque de A^I sur A^J (prop.2). Il est évident que la condition "pour tout $i\in I$, $f(i)\in X_i$" est équivalente à "pour tout $j\in J$, $(f\circ u)(j)\in X_{u(j)}$", ce qui démontre la proposition

Les notations étant celles de la prop.7, on dit que l'application $f \to f\circ u$ $(f\in \prod_{i\in I} X_i)$ est l'application canoniquement associée à u ; les applications d'un produit $\prod_{i\in I} X_i$ qui sont canoniquement associées aux permutations de I s'appellent des applications canoniques de ce produit. Considérant en particulier le cas où $I = \{1,2\}$, on voit facilement qu'il existe exactement deux permutations de I , l'une qui est l'application identique et l'autre qui applique 1 sur 2 et 2 sur 1 . Les applications correspondantes d'un produit $A\times B$ de deux ensembles sont d'une part l'application identique, d'autre part l'application g de $A\times B$ sur $B\times A$ qui est définie par $g(x,y)=(y,x)$ si $x\in A$ et $y\in B$. Dans le cas où $I = \{1,2,3\}$, nous laissons au lecteur le soin de vérifier qu'il existe six applications canoniques d'un produit $A\times B\times C$ et qu'elles appliquent $A\times B\times C$ sur les ensembles suivants :

$$A\times B\times C \ , \quad B\times C\times A \ , \quad C\times A\times B \ , \quad B\times A\times C \ , \quad A\times C\times B \ , \quad C\times B\times A \ .$$

Proposition 8.- Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles, et soit $(J_a)_{a\in A}$ une partition de I . Posons $P = \prod_{i\in I} X_i$, et, pour $a\in A$, $Q_a = \prod_{i\in J_a} X_i$. Si $f\in P$, soit f_a la restriction de f à J_a , et soit $\varphi(f)$ l'élément $a \to f_a$ $(a\in A)$ de $\prod_{a\in A} Q_a$. L'application $f \to \varphi(f)$ $(f\in P)$ est alors une application biunivoque P sur $\prod_{a\in A} Q_a$.

Puisque $(J_a)_{a\in A}$ est un recouvrement de I , les conditions $f\in P$, $f'\in P$, $f_a=f'_a$ pour tout $a\in A$ entraînent $f=f'$, ce qui montre que φ est biunivoque. Soit maintenant g un élément de $\prod_{a\in A}Q_a$. Si $a\in A$, $g(a)$ est une application de J_a telle que $(g(a))(i)\in X_i$ pour $i\in J_a$. Puisque $(J_a)_{a\in A}$ est une partition de I , il existe une application f de I qui prolonge toutes les applications $g(a)$ pour $a\in A$ (prop.6, § 4) donc telle que $f\in P$. Il est clair que $\varphi(f)=g$, ce qui montre que φ applique P sur $\prod_{a\in A} Q_a$.

L'application φ de la prop.8 s'appelle l'application de P canoniquement associée à la partition $(J_a)_{a\in A}$ de I . D'une manière générale, nous conviendrons d'appeler <u>canoniques</u> les applications de produits d'ensembles qui peuvent s'obtenir en composant de toutes les manières possibles des applications canoniquement associées à des permutations ou à des partitions d'ensembles des indices.

Considérons par exemple un triplet d'ensembles (A,B,C). L'application canoniquement associée à la partition $(\{1,2\},\{3\})$ de l'ensemble d'indices $\{1,2,3\}$ est une application biunivoque F de $A\times B\times C$ sur $(A\times B)\times C$; on a $F(x,y,z)=((x,y),z)$ si $x\in A$, $y\in B$, $z\in C$. Composant F avec l'application canonique de $(A\times B)\times C$ sur $C\times(A\times B)$ attachée à la permutation de $\{1,2\}$ qui échange 1 et 2, on obtient une application canonique F' de $A\times B\times C$ sur $C\times(A\times B)$ telle que $F'(x,y,z)=(z,(x,y))$.

§ 6. <u>Relations d'équivalence</u>.

<u>1. Définition d'une relation d'équivalence</u>.- Soit $R\{x,y\}$ une relation, x et y étant des lettres distinctes. On dit que la relation R est <u>symétrique</u> (par rapport aux lettres x et y) si la relation $R\{x,y\}\Rightarrow R\{y,x\}$ est vraie. S'il en est ainsi, il est clair que les relations

$\mathcal{R}\{x,y\}$ et $\mathcal{R}\{y,x\}$ sont équivalentes.

Soit z une lettre ne figurant pas dans $\mathcal{R}$. On dit que la relation $\mathcal{R}$ est transitive (par rapport aux lettres x et y) si la relation $(\mathcal{R}\{x,y\}$ et $\mathcal{R}\{y,z\} \Rightarrow \mathcal{R}\{x,z\}$ est vraie. Il est clair que le choix de la lettre z (ne figurant pas dans $\mathcal{R}$) est indifférent.

Exemples.- La relation $X \subset Y$ est transitive. La relation $x=y$ est transitive.

Si $\mathcal{R}$ est à la fois symétrique et transitive, on dit que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. Dans ce cas, la notation $x \equiv y$ (mod. $\mathcal{R}$) est parfois employée comme synonyme de $\mathcal{R}\{x,y\}$. Elle se lit " x est équivalent à y modulo $\mathcal{R}$ (ou suivant $\mathcal{R}$)".

Si $\mathcal{R}$ est une relation quelconque, la relation $\mathcal{R}\{x,x\} \Rightarrow (\exists y)\mathcal{R}\{x,y\}$ est vraie. Montrons que, si $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence, la relation $\mathcal{R}\{x,x\}$ est équivalente à $(\exists y)\mathcal{R}\{x,y\}$. En effet, supposons la relation $(\exists y)\mathcal{R}\{x,y\}$ vraie ; soit b un objet tel que $\mathcal{R}\{x,b\}$. La relation $\mathcal{R}\{b,x\}$ est alors vraie, puisque $\mathcal{R}$ est symétrique ; les relations $\mathcal{R}\{x,b\}$ et $\mathcal{R}\{b,x\}$ étant vraies, il en est de même de $\mathcal{R}\{x,x\}$, puisque $\mathcal{R}$ est transitive.

On appelle relation d'équivalence dans un ensemble E une relation d'équivalence $\mathcal{R}\{x,y\}$ telle que la relation $(\exists y)\mathcal{R}\{x,y\}$ (donc aussi la relation $\mathcal{R}\{x,x\}$) soit équivalente à $x \in E$.

Soit $\mathcal{R}\{x,y\}$ une relation d'équivalence dans un ensemble E. La relation $\mathcal{R}\{x,y\}$ entraîne alors $(\exists y)\mathcal{R}\{x,y\}$ donc aussi $x \in E$; elle entraîne aussi $\mathcal{R}\{y,x\}$ donc également $y \in E$. Il en résulte que $\mathcal{R}\{x,y\}$ entraîne $(x,y) \in E \times E$; on en conclut que $\mathcal{R}$ admet un graphe (par rapport aux lettres x et y).

On appelle équivalence dans un ensemble E une correspondance Γ telle que la relation $(x,y) \in \Gamma$ soit une relation d'équivalence dans E.

Proposition 1.- Pour qu'une correspondance Γ *soit une équivalence dans un ensemble* E , *il faut et il suffit que les conditions suivantes soient satisfaites* : a) E *est l'ensemble de définition de* Γ ; b) *on a* $\overset{-1}{\Gamma} = \Gamma$; c) *on a* $\Gamma \circ \Gamma = \Gamma$.

Soit Γ une équivalence dans E . La condition a) est satisfaite parce que la relation $x \in E$ est équivalente à $(\exists y)((x,y) \in \Gamma)$. La condition b) est satisfaite parce que la relation $(x,y) \in \Gamma$ est symétrique, donc équivalente à $(y,x) \in \Gamma$, c'est-à-dire à $(x,y) \in \overset{-1}{\Gamma}$. Puisque la relation $(x,y) \in \Gamma$ est transitive, la relation "$(x,y) \in \Gamma$ et $(y,z) \in \Gamma$" entraîne $(x,z) \in \Gamma$, ce qui montre que $\Gamma \circ \Gamma \subset \Gamma$. Par ailleurs, la relation $(x,y) \in \Gamma$ entraîne $x \in E$ et par suite aussi $(x,x) \in \Gamma$; la relation $(x,y) \in \Gamma$ entraîne donc "$(x,x) \in \Gamma$ et $(x,y) \in \Gamma$", et par suite aussi $(x,y) \in \Gamma \circ \Gamma$, ce qui montre que $\Gamma \subset \Gamma \circ \Gamma$; la condition c) est donc satisfaite.

Réciproquement, supposons les conditions a), b), c) satisfaites. La relation $(x,y) \in \Gamma$ est symétrique (en vertu de b)) et transitive (en vertu de c)) ; c'est donc une relation d'équivalence, et il résulte de a) que c'est une relation d'équivalence dans E .

Exemples.- 1. La relation "il existe une application biunivoque de l'ensemble X sur l'ensemble Y" est une relation d'équivalence (cf. prop. 7, § 3). Cette relation n'admet pas de graphe (en effet, comme il existe une application biunivoque de X sur X , la première projection d'un tel graphe serait l'ensemble de tous les objets).

2. Si E est un ensemble, la relation "$x \in E$ et $y \in E$" est une relation d'équivalence dans E , dont le graphe est $E \times E$.

3. Si E est un ensemble, la relation "$x \in E$ et $y \in E$ et $x=y$" est une relation d'équivalence dans E , dont le graphe est la diagonale de $E \times E$.

2.- <u>Relation d'équivalence définie par une fonction</u>.- Soit f une application d'un ensemble E. On vérifie alors sans aucune difficulté que la relation "$x \in E$ et $y \in E$ et $f(x)=f(y)$" est une relation d'équivalence dans E. Nous appellerons cette relation la <u>relation d'équivalence associée</u> à f. Elle est équivalente à la relation $(\exists z)((x,z) \in f$ et $(y,z) \in f)$, c'est-à-dire $(\exists z)((x,z) \in f$ et $(z,y) \in \overset{-1}{f})$; son graphe est donc la correspondance $\overset{-1}{f} \circ f$.

Nous allons maintenant montrer que toute relation d'équivalence dans un ensemble E est équivalente à une relation du type précédent. Nous poserons pour cela les définitions suivantes :

<u>Définition 1</u>.- <u>Soit Γ une équivalence dans un ensemble E ; désignons par R la relation $(x,y) \in \Gamma$. Si $x \in E$, l'ensemble $\Gamma\{x\}$ s'appelle la classe d'équivalence de x (suivant R) ; tout ensemble qui peut se mettre sous la forme $\Gamma\{x\}$ avec un $x \in E$ s'appelle une classe d'équivalence (suivant R). L'ensemble des classes d'équivalence (c'est-à-dire l'ensemble des objets de la forme $\Gamma\{x\}$ pour $x \in E$) s'appelle l'ensemble quotient de E par R et se désigne par E/R. L'application $x \rightarrow \Gamma\{x\}$ $(x \in E)$, dont l'ensemble de définition est E et l'ensemble des valeurs E/R, s'appelle l'application canonique de E sur E/R.</u>

<u>Théorème 1</u>.- <u>Soient Γ une équivalence dans un ensemble E, R la relation $(x,y) \in \Gamma$, et f l'application canonique de E sur E/R. La relation R est alors équivalente à la relation d'équivalence associée à f.</u>

Soient x et y des éléments de E tels que $(x,y) \in \Gamma$. On a d'abord $x \in E$ et $y \in E$; montrons que $\Gamma\{x\} = \Gamma\{y\}$. Puisque $y \in \Gamma\{x\}$, on a $\Gamma\{y\} \subset (\Gamma \circ \Gamma)\{x\} = \Gamma\{x\}$; par ailleurs, on a aussi $(y,x) \in \Gamma$, d'où $\Gamma\{x\} \subset \Gamma\{y\}$, et par suite $\Gamma\{x\} = \Gamma\{y\}$, c'est-à-dire $f(x)=f(y)$. Soient réciproquement x et y des éléments de E tels que $f(x)=f(y)$. On a alors $y \in \Gamma\{y\} = \Gamma\{x\}$, d'où $(x,y) \in \Gamma$, ce qui démontre le théorème.

3. <u>Relation d'équivalence définie par une partition</u>.- Soit $(X_i)_{i\in I}$ une partition d'un ensemble E . La relation $(\exists i)(i\in I$ et $x\in X_i$ et $y\in X_i)$ est alors évidemment une relation d'équivalence R dans l'ensemble E . Les classes d'équivalence suivant R ne sont autres que les ensembles X_i de la partition. Si f est l'application canonique de E sur E/R , il existe une application biunivoque g de E/R sur I et une seule telle que $x\in X_{g(f(x))}$ pour tout $x\in E$; l'application $\overset{-1}{g}$ est égale à la famille $(X_i)_{i\in I}$.

Réciproquement, soit R une relation d'équivalence dans un ensemble E . L'application identique de E/R est alors une partition de E , soit $(X_i)_{i\in I}$. Il est clair que la relation $(\exists i)(i\in I$ et $x\in X_i$ et $y\in X_i)$ est équivalente à R .

4. <u>Applications compatibles avec une relation d'équivalence</u>.- Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ des relations d'équivalence par rapport à deux lettres x , y . Nous dirons que $\mathcal{S}$ est plus fine que $\mathcal{R}$ (ou que $\mathcal{R}$ est moins fine que $\mathcal{S}$) si la relation $\mathcal{S} \Longrightarrow \mathcal{R}$ est vraie.

<u>Exemples</u>.- Si E est un ensemble, la relation "$x\in E$ et $y\in E$ et $x=y$" est plus fine que toute relation d'équivalence dans E , tandis que la relation "$x\in E$ et $y\in E$" est moins fine que toute relation d'équivalence dans E .

Soient $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence dans un ensemble E , et f une application de E . On dit que f est compatible avec $\mathcal{R}$ si la relation d'équivalence associée à f est moins fine que $\mathcal{R}$. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que la relation $\mathcal{R}$ entraîne $f(x)=f(y)$ (on sait que $\mathcal{R}$ entraîne $x\in E$ et $y\in E$), c'est-à-dire encore que l'on ait $f(x)=f(y)$ toutes les fois que x et y appartiennent à une même classe d'équivalence suivant $\mathcal{R}$. Or, dire qu'il en est ainsi, c'est dire que la restriction de f à une classe d'équivalence quelconque suivant R est une application constante.

Proposition 2.- Soient Γ une équivalence dans un ensemble E , R la relation $(x,y) \in \Gamma$, et g l'application canonique de E sur E/R . Pour qu'une application f de E soit compatible avec R , il faut et il suffit que f puisse se mettre sous la forme $h \circ g$, h étant une application de E/R .

Supposons $f = h \circ g$. , h étant une application de E/R ; si x et y appartiennent à une même classe d'équivalence suivant R , on a $f(x) = h(g(x)) = h(g(y)) = f(y)$, et f est compatible avec R . Supposons réciproquement que f soit compatible avec R . Si $K \in E/R$, on a $\tau_u(u \in K) \in K$, d'où $\tau_u(u \in K) \in E$, et la fonction $K \rightarrow f(\tau_u(u \in K))$ $(K \in E/R)$ est une application h de E/R . Soient x un élément quelconque de E , et K la classe d'équivalence de x ; x et $\tau_u(u \in K)$ sont alors éléments de la même classe d'équivalence K , d'où $f(x) = f(\tau_u(u \in K)) =$ $= h(K) = h(g(x))$; on a donc $f = h \circ g$.

Si f est compatible avec R , l'application h de E/R telle que $f = h \circ g$ est uniquement déterminée ; car, si $K \in E/R$, on a $h(K) = f(x)$ pour tout $x \in K$. On dit que h est l'application déduite de f par passage aux quotients suivant R . Il est clair que $h\langle E/R\rangle = f\langle E\rangle$.

Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F , et soit $A = f\langle E\rangle \subset F$. Prenons pour R la relation d'équivalence associée à f , auquel cas f est évidemment compatible avec R . L'application h est alors une application biunivoque de E/R sur A ; car, si K et K' sont des classes d'équivalence telles que $h(K) = h(K')$, on a $f(x) = f(x')$ pour tout $x \in K$ et tout $x' \in K'$, ce qui entraîne $K = K'$. Si ℓ est l'application identique de A , l'égalité $f = \ell \circ h \circ g$ s'appelle la décomposition canonique de f .

On peut généraliser comme suit la notion d'application compatible avec une relation d'équivalence. Soient f une application d'un ensemble E dans un ensemble F , R une relation d'équivalence dans E et S une relation d'équivalence dans F . Soit u l'application canonique de F sur

F/S

On dit que f est compatible avec les relations d'équivalence R et S si $u \circ f$ est compatible avec R. L'application de E/R dans F/S déduite de $u \circ f$ par passage aux quotients suivant R s'appelle alors aussi <u>l'application déduite de</u> f <u>par passage aux quotients suivant</u> R <u>et</u> S.

5. <u>Images réciproques, quotients, produits de relations d'équivalences</u>.- Soient φ une application d'un ensemble E dans un ensemble F, et $\mathcal{S}$ une relation d'équivalence dans F. Si u est l'application canonique de F sur $F/\mathcal{S}$, la relation d'équivalence associée à l'application $u \circ \varphi$ de E s'appelle l'<u>image réciproque</u> de $\mathcal{S}$ par φ. Soit $\mathcal{R}$ cette relation. On a : $\mathcal{R}\{x,y\} \Longleftrightarrow \mathcal{S}\{\varphi(x),\varphi(y)\}$.

En particulier, soient $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence dans un ensemble E et A une partie de E ; l'image réciproque de $\mathcal{R}$ par l'application identique I de A (qui est une application de A dans E) s'appelle la relation d'équivalence induite par $\mathcal{R}$ dans A et se note $\mathcal{R}_A$. Soient f l'application canonique de E sur $E/\mathcal{R}$, g celle de A sur $A/\mathcal{R}_A$. L'application $f \circ I$ est évidemment compatible avec $\mathcal{R}_A$, et l'application déduite de $f \circ I$ par passage aux quotients suivant $\mathcal{R}_A$ est une application biunivoque de $A/\mathcal{R}_A$ dans $E/\mathcal{R}$, qui est dite <u>canonique</u>.

Soient maintenant $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ des relations d'équivalence dans un même ensemble E ; supposons que $\mathcal{S}$ soit plus fine que $\mathcal{R}$. Soient f et g les applications canoniques de E sur $E/\mathcal{R}$ et sur $E/\mathcal{S}$. Il est clair que f est compatible avec $\mathcal{S}$; soit h l'application déduite de f par passage aux quotients suivant $\mathcal{S}$; c'est une application de $E/\mathcal{S}$ sur $E/\mathcal{R}$. La relation d'équivalence associée à h dans $E/\mathcal{S}$ s'appelle le <u>quotient de</u> $\mathcal{R}$ <u>par</u> $\mathcal{S}$ et se désigne par $\mathcal{R}/\mathcal{S}$. Soit $h = h_2 \circ h_1$ la décomposition canonique de l'application h ; h_1 est donc l'application canonique de $E/\mathcal{S}$ sur $(E/\mathcal{S})(\mathcal{R}/\mathcal{S})$, tandis que h_2 est une

une application biunivoque de $(E/\mathcal{S})(\mathcal{R}/\mathcal{S})$ sur $E/\mathcal{R}$. On dit que h_2 est l'*application canonique* de $(E/\mathcal{S})(\mathcal{R}/\mathcal{S})$ sur $E/\mathcal{R}$, et on identifie le plus souvent les ensembles $(E/\mathcal{S})(\mathcal{R}/\mathcal{S})$ et $E/\mathcal{R}$ par cette application.

Enfin, soient $\mathcal{R}\{x,y\}$ et $\mathcal{R}'\{x',y'\}$ des relations d'équivalence. Désignons par $\mathcal{S}\{u,v\}$ la relation $(\exists x)(\exists y)(\exists x')(\exists y')(u=(x,x')$ et $v=(y,y')$ et $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}')$; on vérifie aisément que $\mathcal{S}\{u,v\}$ est une relation d'équivalence, que l'on appelle *produit* de $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$, et qu'on désigne par $\mathcal{R}\times\mathcal{R}'$. Supposons que $\mathcal{R}$ (resp. $\mathcal{R}'$) soit une relation d'équivalence dans un ensemble E (resp. E'). La relation $\mathcal{S}\{u,u\}$ est alors équivalente à $(\exists x)(\exists x')(u=(x,x')$ et $\mathcal{R}\{x,x\}$ et $\mathcal{R}'\{x',x'\})$, c'est-à-dire à $(\exists x)(\exists x')(u=(x,x')$ et $x\in E$ et $x'\in E')$, donc à $u\in E\times E'$; il résulte que $R\times R'$ est une relation d'équivalence dans $E\times E'$. Si $u=(x,x')$ est un élément de $E\times E'$, la relation $\mathcal{S}\{u,v\}$ est équivalente à $(\exists y)(\exists y')(v=(y,y')$ et $\mathcal{R}\{x,y\}$ et $\mathcal{R}'\{x',y'\})$; si Γ et Γ' sont les graphes de $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$, cette relation est encore équivalente à $v\in\Gamma\{x\}\times\Gamma'\{x'\}$. *Les classes d'équivalence suivant $\mathcal{R}\times\mathcal{R}'$ sont donc les produits de classes d'équivalence suivant $\mathcal{R}$ par des classes d'équivalence suivant $\mathcal{R}'$*. Soient f et f' les applications canoniques de E sur $E/\mathcal{R}$ et de E' sur $E'/\mathcal{R}'$; ces applications permettent de construire une application (f,f') de $E\times E'$ sur $(E/R)\times(E'/R')$ telle que $(f,f')(x,x')=(f(x),f'(x'))$ pour tout $(x,x')\in E\times E'$. Les images réciproques par (f,f') des éléments de $(E/R)\times(E'/R')$ sont évidemment les produits de classes d'équivalence suivant $\mathcal{R}$ par des classes d'équivalence suivant $\mathcal{R}'$; il en résulte que la relation d'équivalence associée à (f,f') est équivalente à $\mathcal{R}\times\mathcal{R}'$. L'application (f,f') peut donc se mettre sous la forme $H\circ G$; où G est l'application canonique de $E\times E'$ sur $(E\times E')/(\mathcal{R}\times\mathcal{R}')$ et où H est une application biunivoque, dite *canonique*, de $(E\times E')/(\mathcal{R}\times\mathcal{R}')$ sur $(E/\mathcal{R})\times(E'/\mathcal{R}')$. On identifie souvent $(E\times E')/(\mathcal{R}\times\mathcal{R}')$ avec $(E/\mathcal{R})\times(E'/\mathcal{R}')$ au moyen de l'application H .

6. Parties saturées.- Soient $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence dans un ensemble E , et A une partie de E . Soit f l'application canonique de E sur $E/\mathcal{R}$. On dit que A est saturé par rapport à R s'il existe une partie B de E/R telle que $A = \overset{-1}{f}\langle B\rangle$, autrement dit si $A = \overset{-1}{f}\langle f\langle A\rangle\rangle$.

(Exemple.- Le lecteur est saturé par rapport à la théorie des ensembles.)

Si $(X_i)_{i\in I}$ est une famille de parties saturées de E , les ensembles $\bigcup_{i\in I} X_i$ et (si $I\neq\emptyset$) $\bigcap_{i\in I} X_i$ sont saturées (prop.3 et 4, §4). Si A est une partie saturée de E , il en est de même de $\complement_E A$ (prop.10,§3).

Toute classe d'équivalence K de E suivant $\mathcal{R}$ est une partie saturée, car $K = \overset{-1}{f}\langle\{K\}\rangle$. Il en résulte que toute partie de E qui est la réunion d'un ensemble de classes d'équivalence est saturée. Soit réciproquement $A = \overset{-1}{f}\langle B\rangle$ une partie saturée, B étant une partie de E/R . L'ensemble B est la réunion de l'ensemble des ensembles de la forme $\{K\}$ pour $K\in B$; puisque $\overset{-1}{f}\langle\{K\}\rangle = K$, on voit que A est la réunion d'un ensemble de classes d'équivalence suivant $\mathcal{R}$.

Si A est une partie saturée de E , et K une classe d'équivalence telle que $A\cap K\neq\emptyset$, on a $K\subset A$. En effet, si $x\in A\cap K$, on a $K = f(x)\in f\langle A\rangle$, d'où $K = \overset{-1}{f}\langle\{K\}\rangle\subset\overset{-1}{f}\langle f\langle A\rangle\rangle = A$. Réciproquement, soit A une partie de E qui possède la propriété que toute classe d'équivalence K telle que $A\cap K\neq\emptyset$ soit contenue dans A . On a évidemment $A\subset\overset{-1}{f}\langle f\langle A\rangle\rangle$; d'autre part, si $K\in f\langle A\rangle$, il existe un $x\in A$ tel que $f(x)=K$, d'où $x\in K$, $K\cap A\neq\emptyset$ et par suite $K\subset A$; on en conclut que $A = \overset{-1}{f}\langle f\langle A\rangle\rangle$, donc que A est saturé.

On voit donc que, pour qu'une partie A de E soit saturée par rapport à $\mathcal{R}$, il faut et il suffit que les relations $x \in A$ et $\mathcal{R}\{x,y\}$ entraînent $y \in A$.

Soit maintenant A une partie quelconque de E . L'ensemble $\overset{-1}{f}\langle f\langle A\rangle\rangle$ contient A et est saturé. Réciproquement, si une partie saturée A' de E contient A , on a $f\langle A'\rangle \supset f\langle A\rangle$, d'où $A' = \overset{-1}{f}\langle f\langle A'\rangle\rangle \supset \overset{-1}{f}\langle f\langle A\rangle\rangle$. On peut donc dire que $\overset{-1}{f}\langle f\langle A\rangle\rangle$ est "la plus petite" partie saturée de E contenant A . On appelle cet ensemble le <u>saturé</u> de A (par rapport à $\mathcal{R}$). Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E , et soit A_i le saturé de X_i ; le saturé de $\bigcup_{i\in I} X_i$ est alors $\bigcup_{i\in I} A_i$ (prop.3, § 4).