# RÉDACTION N° 157

COTE : NBR 059

TITRE : DEUXIEME PARTIE - ANALYSE ALGEBRIQUE
LIVRE I : ALGÈBRE COMMUTATIVE
CHAPITRE II (ÉTAT 6 ET AUTRES) :
ANNEAUX NOETHÉRIENS

ASSOCIATION DES COLLABORATEURS DE NICOLAS BOURBAKI

NOMBRE DE PAGES : 25

NOMBRE DE FEUILLES : 25

 

Archives Mr Samuel Déc. 1951

DEUXIÈME PARTIE

ANALYSE ALGÈBRIQUE
LIVRE I
ALGÈBRE COMMUTATIVE.

CHAPITRE II (Etat 6) (au début), 4 (à la fin) et 0(par moments)

ANNEAUX NOETHÈRIENS.

Sauf mention expresse du contraire tous les anneaux considérés dans ce chapitre sont supposés commutatifs et munis d'un élément unité noté 1; tous les homomorphismes et tous les modules sont supposés unitaires.

§ 1 - Modules et anneaux noethériens.

Rappelons (Alg.,chap.VII) que, étant donné un anneau quelconque A , un A-module E (et en particulier un idéal de A) est dit de type fini s'il peut être engendré par des éléments en nombre fini.

1 - Définition des modules et anneaux noethériens.

Définition 1 - Etant donné un anneau A (non nécessairement commutatif) un A-module (quelconque) M est dit noethérien s'il vérifie l'axiome suivant:

(N) Tout ensemble de sous-modules de M , ordonné par inclusion, contient un élément maximal.

Nous énoncerons deux axiomes équivalents à l'axiome (N) :

(N') Toute suite croissante $M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset \ldots$ de sous-modules de M n'a qu'un nombre fini de termes distincts (On dit alors (Ens.,chap.III) que cette suite est stationnaire à partir d'un certain rang).

L'équivalence de (N) et N') se déduit aussitôt du lemme suivant de la théorie des ensembles ordonnés :

Lemme - Soit E un ensemble ordonné ; les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) Toute partie de E contient un élément maximal.

b) <u>Toute suite croissante d'éléments de</u> $E$ <u>est stationnaire à partir d'un certain rang</u>.

a) entraîne b) car l'ensemble $A$ des éléments de la suite $(a_n)$ admet un élément maximal $a_p$ , et on a $a_n=a_p$ pour tout $n \geqslant p$ . Réciproquement supposons qu'il existe une partie $A$ de $E$ sans élément maximal ; alors, pour tout $a \in A$ , il existe $f(a) \in A$ tel que $f(a) > a$ ; et l'existence de la suite $(x_n)$ définie par induction au moyen de $x_1 \in A$ et de $x_{n+1} = f(x_n)$ contredit b) .

(N") <u>Tout sous-module de</u> $M$ <u>est de type fini</u>.

(N) entraîne (N") car, étant donné un sous-module $E$ de $M$ , l'ensemble des sous-modules de type fini de $E$ admet un élément maximal $F$ ; pour tout $x \in E$ , le module $F+Ax$ est de type fini, donc est égal à $F$ , ce qui entraîne $x \in F$ et $F = E$ . Réciproquement (N") entraîne (N') ; considérons en effet le module $E = \bigcup_{n=0}^{\infty} M_n$ ; il est engendré par un nombre fini d'éléments $(x_1,\dots,x_s)$; par hypothèse tout $x_i$ est contenu dans l'un des $M_n$ , soit $M_{n(i)}$ ; si $q$ est le plus grand des indices $n(i)$ on a $x_i \in M_q$ pour tout $i$ car la suite $(M_n)$ est croissante ; donc $M_q=E$ , ce qui montre que la suite $(M_n)$ est stationnaire à partir de l'indice $q$ .

<u>Exemples</u> - 1) Tout $A$-module ayant un nombre fini d'éléments est noéthérien.

2) Tout espace vectoriel de dimension finie sur un corps $K$ est un $K$-module noethérien, en vertu de (N").

<u>Proposition 1</u> - <u>Soient</u> $A$ <u>un anneau quelconque</u>, $M$ <u>un</u> $A$-<u>module noethérien quelconque</u>, <u>et</u> $E$ <u>un sous-module de</u> $M$ . <u>De tout système de générateurs</u> $S$ <u>de</u> $E$ <u>on peut extraire un système fini de générateurs de</u> $E$ .

Il suffit de considérer un élément maximal $F$ de l'ensemble des sous-modules de $E$ qui sont engendrés par des parties finies de $S$ : pour tout $x \in S$ , on a $F+Ax = F$ , donc $F=E$ . (On pourrait remonter la prop.1 à la démonstration de (N) entraîne (N")).

Définition 2 - Un anneau (non nécessairement commutatif) $A$ est dit noethérien à gauche si le $A$-module $A_s$ (Alg., chap. II, § 1, n°1) est noethérien.

On définit de façon analogue les anneaux noethériens à droite.

En particulier on dira qu'un anneau commutatif est noethérien s'il satisfait à l'une des conditions équivalentes suivantes :

($N_o$) Tout ensemble d'idéaux de $A$, ordonné par inclusion, contient un élément maximal.

($N'_o$) Toute suite croissante d'idéaux de $A$ n'a qu'un nombre fini de termes distincts.

($N''_o$) Tout idéal de $A$ est de type fini.

Exemples - 1) Tout anneau fini est noethérien (à gauche et à droite).

2) Tout corps est un anneau noethérien. (à gauche et à droite).

3) Un anneau principal (Alg., chap. VII) est noethérien en vertu de ($N''_o$) ; en particulier les anneaux $Z$ et $K[X]$.

4) Un anneau de Dedekind est noethérien (Chap. I, § 6).

## 2 - Propriétés des modules noethériens.

Proposition 2 - Soient $A$ un anneau, $M$ un $A$-module et $E$ un sous-module de $M$ quelconques. Pour que $M$ soit noethérien il faut et il suffit que $E$ et $M/E$ le soient.

Si $M$ est noethérien, $E$ est noethérien car tout sous-module de $E$ est de type fini en tant que sous-module de $M$. D'autre part tout sous-module de $M/E$ est de la forme $F/E$, où $F$ est un sous-module de $M$ contenant $E$, et $F/E$ est de type fini avec $F$.

 



Supposons réciproquement $E$ et $M/E$ noethériens, et considérons un sous-module $F$ de $M$. L'image canonique $(E+F)/E$ de $F$ dans $M/E$ est, par hypothèse, engendrée par un nombre fini d'éléments $(x'_1,\dots,x'_s)$. Soit $x_i$ un représentant dans $F$ de la classe $x'_i$. Alors, pour tout $y\in F$, il existe $s$ éléments $a_i$ de $A$ tels que $z = y-\sum_{i=1}^{s} a_i x_i$ appartienne à $E$. Or $z$ appartient à $F$, donc aussi au sous-module $E\cap F$ de $E$. Si $(y_1,\dots,y_t)$ est un système fini de générateurs de celui-ci, $F$ est engendré par les éléments en nombre fini $(x_1,\dots,x_s,y_1,\dots,y_t)$, ce qui montre que $M$ est noethérien en vertu de (N").

<u>Corollaire 1</u> - <u>Tout A-module produit d'un nombre fini n de modules noethériens est noethérien.</u>

Le cas $n=2$ est contenu dans la prop. 1. On procède alors par récurrence sur $n$.

<u>Corollaire 2</u> - <u>Tout module à gauche E de type fini sur un anneau noethérien à gauche A est un module noethérien ; en particulier tout sous-module de E est de type fini.</u>

En effet, si $E$ peut être engendré par $n$ éléments, il est isomorphe à un quotient du module produit $A^n_s$.

## <u>3 - Procédés de formation d'anneaux noethériens.</u>

<u>Proposition 3</u> - <u>Si I est un idéal d'un anneau noethérien A, l'anneau quotient A/I est noethérien.</u>

En effet les idéaux de $A/I$ ne sont autres que les sous-A-modules du A-module $A/I$, d'où le résultat en vertu de la prop. 2.

<u>Remarque</u> - Il n'est pas vrai que tout sous-anneau d'un anneau noethérien soit noethérien.

<u>Proposition 4</u> - <u>Soient A un anneau noethérien, et S un ensemble multiplicativement stable d'éléments non nuls de A ; alors l'anneau de fractions $A_S$ (chap. I, §1) est noethérien.</u>

Soit f l'application canonique de A dans $A_S$ ; on a vu (chap.I, § 1) que, pour tout idéal I de $A_S$, $\overset{-1}{f}(I)$ est un idéal de A, et que $f(\overset{-1}{f}(I))$ engendre I. Comme $\overset{-1}{f}(I)$ est de type fini par hypothèse, il en est de même de I, et $A_S$ est noethérien en vertu de $(N''_0)$.

<u>Théorème 1</u> (Hilbert) - <u>Si</u> A <u>est un anneau noethérien, l'anneau</u> $A[X]$ <u>des polynômes à une indéterminée sur</u> A <u>est noethérien</u>.

Soit $\mathfrak{a}$ un idéal de $A[X]$ ; nous allons montrer qu'il est de type fini. Pour cela, étant donné un polynome non nul F de $\mathfrak{a}$, nous noterons c(F) le coefficient dominant de F, et nous poserons $c(0)=0$. L'ensemble I des c(F), où F parcourt $\mathfrak{a}$, est un idéal de A ; en effet, si $a \in A$, on a $ac(F) = c(aF)$ ; si $F \neq 0$, $G \neq 0$ et $c(F)+c(G) \neq 0$, et si p et q désignent les degrés de F et G, on a $c(F)+c(G) = c(X^qF + X^pG)$.

Par hypothèse I est engendré par des éléments en nombre fini $(a_i)$. Pour tout i choisissons un élément $F_i$ de $\mathfrak{a}$ tel que $c(F_i)=a_i$ ; soit n le plus grand des degrés n(i) des $F_i$. L'idéal $\mathfrak{b}$ engendré par les $F_i$ est contenu dans $\mathfrak{a}$. Nous allons montrer que tout élément de $\mathfrak{a}$ est congru mod. $\mathfrak{b}$ à un polynome de degré $< n$. Ceci démontrera le théorème ; en effet l'ensemble M des polynomes de degré $< n$ est un A-module de type fini, donc aussi le sous A-module $\mathfrak{a} \cap M$ (cor.2 de la prop.2) ; comme $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} + (\mathfrak{a} \cap M)$, on obtiendra un système fini de générateurs de $\mathfrak{a}$ par réunion du système $(F_i)$ et d'un système fini de générateurs du A-module $\mathfrak{a} \cap M$.

Reste à montrer que tout élément F de $\mathfrak{a}$ est congru mod. $\mathfrak{b}$ à un polynome de degré $<n$. Soit N le degré de F que nous supposons $\geqslant n$ : on a $F = c(F)X^N + G$ où G est de degré $< N$. Comme $c(F) \in I$, on a $c(F) = \sum b_i a_i$ avec $b_i \in A$ ; Alors le polynome $F - \sum_i b_i F_i X^{N-n(i)}$ est de degré $\leqslant N-1$, et est congru à F mod. $\mathfrak{b}$. Et il suffit de procéder par récurrence sur N.

Corollaire 1 - Si A est un anneau noethérien, l'anneau $A[X_1,\ldots,X_n]$ des polynomes à n indéterminées sur A est noethérien pour tout entier n .

C'est immédiat par récurrence sur n .

Corollaire 2 - Soient R un anneau, A un sous-anneau noethérien de R et $(x_1,\ldots,x_n)$ des éléments en nombre fini de R ; alors le sous-anneau $A[x_1,\ldots,x_n]$ de R engendré par A et les $x_i$ est noethérien.

Il est en effet isomorphe à un quotient de l'anneau de polynomes $A[X_1,\ldots,X_n]$ (Alg.,chap.IV).

Remarque - Nous verrons au chap.III que, si A est un anneau noethérien, l'anneau de séries formelles $A[[X_1,\ldots,X_n]]$ est aussi noethérien.

4 - Anneaux et modules de longueur finie.

Soient A un anneau quelconque, et M un module quelconque sur A ; on dit que M est un module de longueur finie, s'il admet une suite de composition ; alors toutes les suites de composition de M ont même longueur d'après le th. de Jordan-Hölder (Alg.,chap.I), et cette longueur commune est appelée la longueur de M .

Le th. de Jordan-Hölder montre aussi que, si M est un A-module de longueur finie, toute famille totalement ordonnée de sous-modules de M n'a qu'un nombre fini d'éléments distincts. En particulier M est un modul noethérien d'après (N'). D'autre part le lemme du n°1, appliqué en renver- sant les inclusions, montre que tout ensemble de sous-modules de M , ordon né par inclusion, contient un élément minimal.

Un anneau quelconque A est dit de longueur finie (à gauche) si le A-module à gauche $A_s$ est de longueur finie.

Exemples - Un anneau fini, une algèbre de dimension finie sur un corps sont des anneaux de longueur finie.

Soient M un A-module et E un sous-module de M ; on déduit aussitôt du th. de Jordan-Hölder qu'une condition nécessaire et suffisante pour que M soit de longueur finie est que E et E/M soient de longueur finie. On en déduit comme au n°2 qu'un module à gauche de type fini E sur un anneau de longueur finie (à gauche) est un module de longueur finie.

---

## § 2 - Décomposition primaire dans les modules noethériens.

Notations - (NB : ces notations ont été déjà utilisées au chap. I, et partiellement en Alg.; je suis d'avis de remonter ceci tout au début du Livre).

Etant donnés un anneau A , un A-module M , une partie B de A et une partie N de M , on note BN , par abus de langage, le sous-groupe additif de M engendré par les éléments $b.x$ où $b \in B$ et $x \in N$ . Lorsque B et N sont des sous-groupes additifs de A et M , BN est l'ensemble des sommes $\sum_i b_i x_i$ où $b_i \in B$ et $x_i \in N$ ; dans ce cas les formules de distributivité suivantes sont évidentes :

(1) $(B+B')N = BN + B'N$

(2) $B(N+N') = BN + BN'$

En particulier, lorsque B et B' sont deux idéaux de A , BB' désigne l'ensemble des sommes $\sum_i b_i b'_i$ $(b_i \in B , b'_i \in B')$ ; c'est un idéal de A , contenu dans B et B', et appelé le produit des idéaux B et B' ; si B, B' et B" sont des idéaux de A , la formule d'associativité suivante est évidente :

(3) $B(B'B'') = (BB')B''$

Ainsi l'on pourra parler les puissances $B^n$ d'un idéal B de A .

Etant donnés un sous-module E d'un A-module M et un idéal B de A , on appelle transporteur de B dans E et on note $E:B$ l'ensemble des $x \in M$ tels que $Bx \subset E$ ; c'est évidemment un sous-module de M . Les propriétés suiva-ntes sont évidentes :

(4) $B(E:B) \subset E$

(5) Si $B' \subset B$ , alors $E:B' \supset E:B$ ; si $E' \subset E$ , alors $E':B \subset E:B$ .

(6) $E:BB' = (E:B):B' = (E:B'):B$ .

(7) $E:(B+B') = (E:B) \cap (E:B')$ .

(8) $(E \cap E'):B = (E:B) \cap (E':B)$ .

(NB : il y a aussi, pour deux sous-modules E et F de M , le transporteur $E:F$ , qui est un idéal ; propriétés analogues ; on ne s'en sert pas ici).

<u>Rappel</u> - Considérons un anneau A , un A-module M , et un ensemble d'indices T muni d'une structure de groupe totalement ordonné noté additivement. Nous dirons que M est un <u>module stratifié sur l'anneau stratifié</u> A si les conditions suivantes sont satisfaites (cf.,Alg?IV).

a) L'anneau A est somme directe de sous-groupes additifs $A_\alpha$, $\alpha \in T$ .

b) On a $A_\alpha A_\beta \subset A_{\alpha+\beta}$ pour tout $\alpha , \beta \in T$ .

c) Le module M est somme directe de sous-groupes additifs $M_\alpha$ ($\alpha \in T$).

d) On a $A_\alpha M_\beta \subset M_{\alpha+\beta}$ pour tous $\alpha , \beta \in T$ .

Remarquons qu'un anneau stratifié est un module stratifié sur lui-même.

Un sous-module E de M (resp. un idéal B de A) est dit <u>homogène</u> si, en même temps qu'un élément, E (resp.B) contient toutes les composantes de cet élément dans les $M_\alpha$ (resp. $A_\alpha$). En appelant <u>homogènes</u> les éléments de A (resp.M) contenus dans l'un des $A_\alpha$ (resp. $M_\alpha$), on voit aussitôt que les sous-modules homogènes de M (resp.idéaux homogènes de A) ne sont autres que les sous-modules de M (resp. idéaux de A) engendrés par des éléments homogènes de M (resp.A). Il est clair que, si B et C sont des idéaux homogènes de A , et E et F des sous-modules homogènes de F , alors $B+C$ , $B \cap C$ , $BC$ , $E+F$ , $E \cap F$ et $BE$ sont homogènes. De plus :

<u>Proposition 1</u> - <u>Soient</u> M <u>un module stratifié sur l'anneau stratifié</u> A , E<u>A</u> <u>un sous-module homogène de</u> M <u>et</u> B <u>un idéal homogène de</u> A ; <u>alors le transporteur</u> $E:B$ <u>est un sous-module homogène de</u> M .

Soit en effet $x = \sum x_\alpha$ $(x_\alpha \in M_\alpha)$ un élément de $E:B$ , et soit $b \in A_\beta$ un élément homogène de $B$ . Comme l'ensemble d'indices $T$ est un groupe, les indices $\beta+\alpha$ sont tous distincts, et les éléments $bx_\alpha$ sont les composantes homogènes de l'élément $bx$ de $E$ . Puisque $E$ est homogène, on a $bx_\alpha \in E$ pour tout $\alpha$ . Comme $B$ est homogène, il est engendré par ses éléments homogènes, ce qui montre que l'on a $Bx_\alpha \subset E$ , c'est-à-dire que $E:B$ est un sous-module homogène.

1 - <u>Existence de la décomposition primaire.</u>

<u>Définition 1</u> - <u>Etant donnés un anneau</u> $A$ <u>et un</u> $A$-<u>module</u> $M$ , <u>on dit qu'un sous-module</u> $E$ <u>de</u> $M$ <u>est primaire s'il est distinct de</u> $M$ <u>et si les relations</u> $a \in A$ , $x \in M$ , $ax \in E$ <u>et</u> $x \notin E$ <u>impliquent l'existence d'un entier</u> $q$ <u>tel que</u> $a^q M \subset E$ .

Traduction si $A = M$.

<u>Définition 2</u> - <u>Etant donnés un anneau</u> $A$ , <u>un</u> $A$-<u>module</u> $M$ <u>et un sous-module</u> $E$ <u>de</u> $M$ , <u>on appelle radical de</u> $E$ , <u>et on note</u> $R(E)$ <u>l'ensemble des</u> $a \in A$ <u>pour lesquels existe un entier</u> $q$ <u>tel que</u> $a^q M \subset E$ . $\Leftrightarrow$ $a$ nilpotent dans $M/E$

<u>Proposition 2</u> - <u>Le radical</u> $R(E)$ <u>d'un sous-module</u> $E$ <u>d'un</u> $A$-<u>module</u> $M$ <u>est un idéal de</u> $A$ . <u>Lorsque</u> $E$ <u>est homogène,</u> $R(E)$ <u>est homogène</u>.

En effet $a^q M \subset E$ et $b^r M \subset E$ impliquent $(ca)^q M \subset E$ pour tout $c \in A$ , et $(a+b)^{q+r-1} M \subset E$ , ce qui montre que $R(E)$ est un idéal. Supposons maintenant que $E$ soit homogène ; soit $a = \sum a_\alpha$ la décomposition en composantes homogènes d'un élément $a \in R(E)$ ; pour montrer que $R(E)$ est homogène, il suffira de montrer que $a_{\alpha_0} \in R(E)$ , $\alpha_0$ étant le plus petit indice $\alpha$ tel que $a_\alpha \neq 0$ ; or, comme il existe un entier $q$ tel que $a^q M \subset E$ , on a $(\sum a_\alpha)^q x_\beta \in E$ pour tout élément homogène $x_\beta$ de $M$ ; comme $E$ est homogène, la composante homogène non nulle de plus petit indice de cette expression, qui est $(a_{\alpha_0})^q x_\beta$ , appartient à $E$ , ce qui montre que $a_{\alpha_0} \in R(E)$ .

<u>Théorème 1</u> (E.Noether) - <u>Soit</u> M <u>un module noethérien stratifié sur un anneau stratifié</u> A ; <u>tout sous-module homogène</u> E <u>de</u> M <u>est intersection d'un nombre fini de sous-modules primaires et homogènes</u>.

Nous dirons qu'un sous-module homogène F de M est <u>irréductible</u> s'il n'est pas intersection de deux sous-modules homogènes distincts de F . Montrons d'abord que tout sous-module homogène de M est intersection finie de sous-modules homogènes irréductibles. En effet, s'il n'en était pas ainsi, l'ensemble des sous-modules homogènes de M qui ne sont pas intersection finie de sous-modules homogènes irréductibles aurait un élément maximal N . Comme N n'est pas irréductible, il est intersection de deux sous-modules homogènes N' et N" distincts de N . En vertu du caractère maximal de N , N' et N" sont intersections finies de sous-modules homogènes irréductibles, donc aussi N , contrairement à ce qui a été supposé.

Reste maintenant à montrer qu'un sous-module F homogène irréductible et $\neq M$ est primaire. Supposons que F ne soit pas primaire. Il existe alors des éléments $a \in A$ et $x \in M$ tels que $ax \in F$ , $x \notin F$ et $a^k M \not\subset F$ pour tout k ; par soustraction l'on peut supposer qu'aucune composante homogène non nulle de x n'appartient à F et qu'aucune composante homogène non nulle de a n'appartient à R(F) ; alors, si b et y désignent les composantes homogènes non nulles de plus petits indices de a et x , on a $y \notin F$ , $b^k M \not\subset F$ pour tout k , et $by \in F$ puisque F est homogène. Considérons alors la suite croissante des sous-modules $F:Ab^n$ ; ils sont homogènes en vertu de la prop.1. Comme M est noethérien, il existe un entier s tel que $F:Ab^s = F:Ab^{s+1}$. Nous allons montrer que F est égal à l'intersection F' des sous-modules homogènes $F+Ay$ et $F+b^s M$ , ce qui prouvera que F n'est pas irréductible. En effet, il est clair que $F \subset F'$. D'autre part de $u+cy = v+b^s z$ , où $u \in F$ , $v \in F$ , $c \in A$ et $z \in M$ , on déduit par multiplication par b que $b^{s+1} z \in F$ puisque $by \in F$ ; comme $F:Ab^s = F:Ab^{s+1}$ , ceci montre que $b^s z \in F$ , d'où $v+b^s z \in F$ et $F' \subset F$ .

Remarque - Le théorème 1 s'applique aux sous-modules quelconques d'un module noethérien non stratifié (en considérant la stratification triviale où tous les éléments de A et de M sont homogènes de degré 0), aux idéaux homogènes d'un anneau noethérien stratifié A (en considérant A comme module sur lui-même), et enfin aux idéaux quelconques d'un anneau noethérien non stratifié.

2 - Propriétés de la décomposition primaire.

Proposition 3 - Soient A un anneau, B un idéal de A et M un A-module. Pour qu'un sous-module E de M soit primaire et ait B pour radical, il faut et il suffit que E soit distinct de M , que pour tout $b \in B$ il existe s tel que $b^s M \subset E$ , que les relations $a \notin B$ et $ax \in E$ entraînent $x \in E$ , et que B soit premier.

La nécessité des trois premières conditions est conséquence immédiate des déf. 1 et 2 . Pour la quatrième remarquons d'abord que $1 \notin B$ puisque $E \neq M$ ; considérons alors deux éléments a et a' de A tels que $a \notin B$ et que $aa' \in B$ ; il existe q tel que $(aa')^q M = a(a^{q-1}a'^q M) \subset E$ ; comme $a \notin B$ , on en déduit $a^{q-1}a'^q M \subset E$ , d'où $a'^q M \subset E$ par applications répétées, et $a' \in B$ ; ceci montre que B est premier.

Montrons maintenant que les conditions énoncées sont suffisantes. Si $by \in E$ et $y \notin E$ , on a $b \in B$ sinon y appartiendrait à E ; donc $b^s M \subset E$ , et E est primaire. La relation $B \subset R(E)$ est claire. Inversement si $a^q M \subset E$ , on a $a \in B$ , sinon $a^q$ n'appartiendrait pas à B puisque B est premier, et l'on aurait $M \subset E$ contrairement aux hypothèses.

On dira souvent que le radical B d'un sous-module primaire E est l'idéal premier associé à E , et que le sous-module E est primaire pour B.

Corollaire - Si les sous-modules $E_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ sont primaires pour l'idéal premier $P$, leur intersection $E$ l'est aussi.

Pour tout $p \in P$, on a $p^{s(i)}M \subset E_i$, d'où $p^{\sup(s(i))}M \subset E$. D'autre part si $a \notin P$ et si $ax \in E$, on a $ax \in E_i$ pour tout $i$, d'où $x \in E_i$ puisque $E_i$ est primaire pour $P$, c'est-à-dire $x \in E$.

Considérons maintenant un A-module noethérien $M$, et un sous-module $E$ de $M$. Il existe en général plusieurs représentations de $E$ comme intersection finie de sous-modules primaires. Le cor. à la prop.3 montre qu'on peut en trouver au moins une, soit $E = \bigcap_{i=1}^{n} E_i$ qui possède les propriétés suivantes :

a) Les idéaux premiers $P_i$ associés aux $E_i$ sont tous distincts.

?/ b) Aucun des $E_i$ n'est contenu dans l'intersection des autres.

Une telle représentation est dite réduite ; il y a encore en général plusieurs représentations réduites de $E$.

Etant donnés un sous-module $E$ de $M$ et un idéal premier $P$ de $A$ nous appellerons $P$-composante de $E$ l'ensemble $F$ des $x \in M$ pour lesquels il existe $a \notin P$ tel que $ax \in E$ ; on vérifie aussitôt, en tenant compte du fait que $P$ est premier, que la $P$-composante $F$ de $E$ est un sous-module de $M$ contenant $E$ ; d'autre part, lorsque $M$ est noethérien, le fait que $F$ a un système fini de générateurs montre qu'il existe $a \notin P$ tel que $aF \subset E$.

Un idéal premier $P$ de $A$ est appelé un diviseur premier du sous-module $E$ de $M$ si la $P$-composante $F$ de $E$ est distincte de $M$. Ceci veut dire que, pour tout $a \notin P$, on a $aM \not\subset E$. Lorsque $E$ est un idéal de $A$ considéré comme module sur lui-même, les diviseurs premiers de $E$ ne sont donc autres que les idéaux premiers de $A$ contenant $E$.

Théorème 2 - Soient $A$ un anneau, $M$ un A-module noethérien, $E$ un sous-module de $M$, $E = E_1 \cap \ldots \cap E_n$ une représentation réduite de $E$ comme intersection de sous-modules primaires, et $P_i$ l'idéal premier associé à $E_i$. Alors :

a) Tout $P_i$ est un diviseur premier de $E$ .

a') Tout diviseur premier $P$ de $E$ contient l'un des $P_i$ .

a") Les éléments minimaux de l'ensemble des $P_i$ ne sont autres que les diviseurs premiers minimaux de $E$ .

b) Pour tout $P_i$ on a $E:P_i \neq E$ .

b') Si un idéal $B$ de $A$ est tel que $E:B \neq E$ , il est contenu dans l'un des $P_i$ .

b") Les éléments maximaux de l'ensemble des $P_i$ ne sont autres que les éléments maximaux de l'ensemble des idéaux $B$ de $A$ tels que $E:B \neq E$ .

c) Pour qu'un élément $a$ de $A$ appartienne à l'un des $P_i$ il faut et il suffit qu'il existe $x \notin E$ tel que $ax \in E$ .

d) La $P_i$-composante $F_i$ de $E$ est contenue dans $E_i$ .

e) Si $P_i$ est minimal, $E_i$ est la $P_i$-composante de $E$ .

f) Les idéaux premiers $P_i$ sont déterminés de façon unique par $E$ .

a): les relations $a \notin P_i$ et $aM \subset E$ entraînent $aM \subset E_i$ et $M = E_i$ contrairement à la définition des sous-modules primaires. Pour démontrer a') considérons un diviseur premier $P$ de $E$ ; s'il ne contenait aucun $P_i$ , il existerait des éléments $a_i \in P_i$ tels $a_i \notin P$ ; soit $a$ le produit des $a_i$ ; comme $a \in P_i$ il existe un exposant $s(i)$ tel que $a^{s(i)}M \subset E_i$ ; d'où $a^{\sup(s(i))}M \subset E$ , contrairement au fait que, comme $P$ est premier, $a^{\sup(s(i))}$ n'appartient pas à $P$ . L'assertion a") résulte aussitôt de a) et a') .

Pour démontrer b) nous utiliserons le lemme suivant :

Lemme - Soit $F$ un sous-module d'un $A$-module noethérien $M$ , et soit $R$ son radical ; il existe un entier $s$ tel que $R^s M \subset F$ .

Comme $M$ est noethérien la suite croissante des sous-modules $E:R^n$ est stationnaire pour $n \geqslant q$ . Raisonnons par l'absurde et supposons que

$E:R^q$ soit distinct de $M$. Il existe alors $x \in M$ tel que $R^n x \not\subset F$ pour tout $n$. Or $Rx$ a un système fini de générateurs de la forme $r_j x$ ($r_j \in R$). Montrons par récurrence sur $t$ que $R^t x$ est engendré par les $M_\alpha(r).x$, où les $M_\alpha(r)$ désignent les monômes de degré $t$ en les $r_j$. Par récurrence $R^{t+1}x$ est engendré par les $aM_\alpha(r)x$ où $a$ parcourt $R$ ; alors $ax$ est combinaison linéaire des $r_j x$, et $R^{t+1}x$ est bien engendré par les $M_\rho(r)x$, où $M_\rho(r)$ parcourt l'ensemble des monômes de degré $t+1$ en les $r_j$. Mais, comme $R$ est le radical de $F$, il existe pour tout $j$ un entier $s(j)$ tel que $r_j^{s(j)} x \in F$ ; alors, en posant $s = \sum s(j)$, on a $R^s x \subset F$, contrairement à ce qu'on a supposé.

(NB : la démonstration du lemme se simplifie si l'on suppose que l'anneau $A$ est noethérien ; mais le rédacteur a tenu à regarder ce qui se passe si on ne le suppose pas).

Revenons à la démonstration de b). Comme la représentation donnée est réduite, il existe un élément $y$ de l'intersection des $E_j$ autres que $E_i$ tel que $y \notin E$. Comme $(P_i)^n M \subset E_i$ pour $n$ assez grand, on a, pour $n$ assez grand, $(P_i)^n y \subset E_i$, et donc $(P_i)^n y \subset E$. Soit $s$ le plus petit entier $n$ ayant cette propriété ; il existe alors $a \in (P_i)^{s-1}$ tel que $ay \notin E$, mais on a $aP_i y \subset E$, ce qui montre que $E:P_i \neq E$.

Pour démontrer b') supposons que $B$ ne soit contenu dans aucun $P_i$, et que $E:B \neq E$. Il existe alors des $a_i \in B$ tels que $a_i \notin P_i$, et $y \notin E$ tel que $By \subset E$. Alors $a_i y \in B \subset E_i$ ; d'où $y \in E_i$ puisque $a_i \notin P_i$ ; on en déduit la contradiction que $y \in E$. Les assertions b") et c) sont conséquences immédiates de b) et b').

Démontrons d) : si $x$ appartient à la $P_i$-composante $F_i$ de $E$, il existe $b \notin P_i$ tel que $bx \in E$ ; comme $bx$ est contenu dans $E_i$ qui est primaire pour $P_i$, on en déduit $x \in E_i$. Supposons maintenant $P_i$ minimal, et démontrons e) ; pour $j \neq i$ on a $P_j \not\subset P_i$ , et il existe $a_j \in P_j$ tel que $a_j \notin P_i$ ; soit $s(j)$ un entier tel que $a_j^{s(j)} M \subset E_j$ ; le produit $a = \prod_{j \neq i} a_j^{s(j)}$ n'est pas contenu dans $P_i$ puisque $P_i$ est premier ; et on a $aE_i \subset E_j$ pour tout $j \neq I$ , d'où $aE_i \subset E$ ; ceci veut dire que $E_i$ est contenu dans la $P_i$-composante de $E$ .

Démontrons enfin l'unicité des $P_i$ . Considérons deux représentations réduites $E = \bigcap_{i=1}^{n} E_i = \bigcap_{j=1}^{m} E'_j$ de $E$ ; soit $P_i$ (resp. $P'_j$) l'idéal premier associé à $E_i$ (resp. $E'_j$). Nous allons procéder par récurrence sur le nombre $n$ de sous-modules de la première représentation. L'assertion est évidente pour $n=0$ . Considérons un élément maximal de l'ensemble des $P_i$ , soit $P_1$ ; d'après b") il est égal à un élément maximal de l'ensemble des $P'_j$ , soit $P'_1$ . D'après le lemme il existe un entier $s$ tel que $(P_1)^s M$ soit contenu dans $E_1$ et dans $E'_1$ . On a

$$(1) \quad E:(P_1)^s = \bigcap_{i=1}^{n} (E_i:(P_1)^s) = \bigcap_{j=1}^{m} (E'_j:(P_1)^s) .$$

Or, pour $i \geqslant 2$ , on a $E_i:(P_1)^s = E_i$ d'après b'), puisque $(P_1)^s$ n'est pas contenu dans l'idéal premier $P_i$ de $E_i$ en vertu du caractère maximal de $P_1$. De même, pour $j \geqslant 2$ , on a $E_j:(P_1)^s = E_j$ . D'autre part on a $E_1:(P_1)^s = E'_1:(P_1)^s = M$ d'après le choix de $s$ . Par conséquent (1) s'écrit

$$\bigcap_{i=2}^{n} E_i = \bigcap_{j=2}^{m} E'_j$$

ce qui démontre f) par récurrence.

<u>Scholie</u> - Le th.2 montre que les idéaux premiers associés aux sous-modules primaires $E_i$ d'une représentation réduite de $E$ comme intersection d'idéaux primaires sont <u>déterminés de facon unique par $E$</u> ; on les appelle <u>les idéaux premiers de</u> $E$ . Les sous-modules primaires $E_i$ sont appelés <u>les composantes primaires</u> (ou composantes) de $E$ ; une composante primaire

WBR 059 17



$E_i$ dont l'idéal premier associé est minimal dans l'ensemble des $P_i$ est déterminée de façon unique par E (en vertu de e)) ; on dit qu'une telle composante est une composante isolée de E , et que son idéal premier associé est un idéal premier isolé de E . Les autres composantes ne sont pas déterminées de façon unique par E (cf.exerc. ) ; on les appelle les composantes immérgées de E , et leurs idéaux premiers associés sont appelés les idéaux premiers immergés de E . Les composantes immergées sont source d'horribles difficultés dans les applications géomètriques (et ailleurs) ; elles mériteraient d'être flanquées à l'eau.

Corollaire 1 - Soit E un sous-module d'un A-module noethérien M ; le radical R(E) de E est l'intersection des idéaux premiers isolés de E .

En effet, avec les notations du th.2, $E_i$ a pour radical $P_i$ . Donc R(E) est l'intersection des $P_i$ .

Corollaire 2 - L'ensemble des éléments nilpotents d'un anneau noethérien A est l'intersection des idéaux premiers isolés de l'idéal (0).

C'est un cas particulier du cor.1 .

Corollaire 3 - L'ensemble des diviseurs de zéro d'un anneau noethérien A est la réunion des idéaux premiers (isolés et immergés) de l'idéal (0).

Ceci est l'assertion c) du th.2 appliquée à l'idéal (0) de A .

Corollaire 4 - Soient $P_j$ $(1 \leqslant j \leqslant q)$ les idéaux premiers isolés d'un sous-module E d'un A-module noethérien M ; il existe des entiers s(j) tels que l'intersection des $(P_j)^{s(j)}M$ soit contenue dans E .

Soient $E_i$ les composantes primaires de E , $P_i$ leurs idéaux premiers associés. D'après le lemme il existe des entiers t(i) tels que $(P_i)^{t(i)}M \subset E_i$ . Comme tout $P_i$ contient un idéal premier isolé $P_j$ de M , il suffira de prendre pour s(j) le plus grand des entiers t(i) tels que $P_i$ contienne $P_j$ .

Corollaire 5 - Soit E un sous-module homogène d'un module noethérien stratifié M sur un anneau stratifié A ; les composantes primaires isolées et les idéaux premiers de E (construits sans se préoccuper des stratifications) sont homogènes ; les composantes immergées de E peuvent être choisies homogènes.

En effet le th.1 et le cor. à la prop.3 fournissent une représentation réduite de E comme intersection de sous-modules primaires et homogènes. Il suffit alors d'appliquer les propriétés d'unicité démontrées dans le th.2, et de remarquer que le radical d'un sous-module homogène est homogène (prop.2).

3 - Décomposition primaire dans un anneau quotient.

Soient A un anneau, B un idéal de A . La propriété de B d'être premier (resp. primaire) est une propriété de l'anneau quotient $A/B$ : elle veut dire en effet que $A/B$ est anneau d'intégrité (resp. que tout diviseur de zéro de $A/B$ est nilpotent). Par conséquent (Alg., chap.I) si B est un idéal premier (resp. primaire) de A , et si I est un idéal de A contenu dans B , l'idéal $B/I$ de $A/I$ est premier (resp. primaire). D'autre part, si B et I sont des idéaux de A tels que $I \subset B$ , on voit aussitôt que le radical de $B/I$ est $R(B)/I$ .

Par conséquent si A est un anneau noethérien, B et I des idéaux de A tels que $I \subset B$ , $B = \bigcap_i Q_i$ une représentation réduite de B comme intersection d'idéaux primaires, et $P_i$ l'idéal premier associé à $Q_i$ , alors $B/I = \bigcap_i (Q_i/I)$ est une représentation réduite de $B/I$ comme intersection d'idéaux primaires, et $P_i/I$ est l'idéal premier associé à $Q_i/I$ . Si $Q_i$ est composante isolée (resp. immergée) de B , alors $Q_i/I$ est composante isolée (resp. immergée) de $B/I$ .

## 4 - Décomposition primaire dans un anneau de fractions.

Soient $A$ un anneau, et $S$ une partie multiplicativement stable de $A$ ne contenant pas $0$ ; considérons l'anneau de fractions $A_S$ (chap.I, § 1). Rappelons (ibid.) qu'il existe un homomorphisme canonique $f$ de $A$ dans $A_S$, que tout élément de $A_S$ est de la forme $f(a)/f(s)$ où $a \in A$ et $s \in S$, et que le noyau $N$ de $f$ est l'ensemble des $a \in A$ pour lesquels il existe $s \in S$ tel que $as = 0$. Les notations $A, A_S$, $f$ et $N$ seront utilisées dans tout ce n°.

<u>Proposition 4</u> - <u>Soit</u> $I$ <u>un idéal de</u> $A$ ; <u>pour que l'idéal</u> $f(I)A_S$ <u>soit distinct de</u> $A_S$, <u>il faut et il suffit que</u> $I \cap S = \emptyset$.

En effet la relation $f(1) = f(a)/f(s)$ $(a \in I,\ s \in S)$ équivaut à $f(a)=f(s)$, c'est-à-dire à $a = s+b$ où $b \in N$ ; or il existe $s' \in S$ tel que $s'b=0$ ; d'où $as' \in S$, et $I \cap S \neq \emptyset$ ; la réciproque est évidente.

<u>Proposition 5</u> - <u>Soient</u> $Q$ <u>un idéal primaire de</u> $A$ <u>tel que</u> $Q \cap S = \emptyset$, <u>et</u> $P$ <u>l'idéal premier associé à</u> $Q$. <u>On a alors</u> $P \cap S = \emptyset$ <u>et</u> $N \subset Q$. <u>L'idéal</u> $f(Q)A_S$ <u>est primaire, et</u> $f(P)A_S$ <u>est son idéal premier associé. Enfin on a</u> $\overset{-1}{f}(f(Q)A_S) = Q$ <u>et</u> $\overset{-1}{f}(f(P)A_S) = P$.

Si un élément $s \in S$ était contenu dans $P$, on aurait $s^n \in Q$, et $Q \cap S \neq \emptyset$ puisque $S$ est multiplicativement stable ; donc $P \cap S = \emptyset$. Si $x$ est un élément de $N$, il existe $s \in S$ tel que $sx = 0$ ; a fortiori $sx \in Q$ ; comme $s \notin P$, on en déduit $x \in Q$ (prop.3) ; d'où $N \subset Q$. Comme $N$ est contenu dans $Q$ et dans $P$, on peut, en passant au quotient par $N$, se ramener au cas où $A$ est sous-anneau de $A_S$. Alors $PA_S$ et $QA_S$ sont distincts de $A_S$ (prop.4). L'idéal $PA_S$ est premier, car, de $(a/s)(a'/s') \in PA_S$ $(a, a' \in A,\ s, s' \in S)$, on déduit $aa'/ss' = p/s''$ $(p \in P,\ s'' \in S)$ ; d'où $aa's'' \in P$, et, comme $s'' \notin P$, $aa' \in P$ ; alors l'un des éléments $a, a'$ appartient à $P$, et l'un des éléments $a/s$,

$a'/s'$ est dans $PA_S$. Pour tout élément $p/s$ ($p\in P$ , $s\in S$) de $PA_S$ , il existe un entier $n$ tel que $p^n\in Q$ ; alors $(p/s)^n\in QA_S$ . Si $(a/s)(a'/s')\in QA_S$ et si $a/s\notin PA_S$ , on a $aa'/ss' = q/s''$ $(q\in Q)$, d'où $s''aa'\in Q$ ; comme $s''a\notin P$ , on en déduit $a'\in Q$ , et $a'/s'\in QA_S$ . Tout ceci montre, en vertu de la prop.3, que $f(Q)A_S$ est primaire et admet $f(P)A_S$ pour idéal premier associé.

Enfin, comme l'idéal premier P est primaire, il suffit de montrer que $\overset{-1}{f}(f(Q(A_S)=Q$ , c'est-à-dire, en se ramenant au cas où $A\subset A_S$ , que $QA_S\cap A = Q$ ; en effet, si $q/s\in A$ $(q\in Q,\ s\in S)$, on a $q = as$ $(a\in A)$ ; comme $s\notin P$ , on en déduit $a\in Q$ (prop.3) .

*Proposition 6* - *Soit* I *un idéal de* A, $I=\bigcap_{i=1}^{n} Q_i$ *une représentation réduite de* I *comme intersection d'idéaux primaires* ; *supposons que, pour* $1\leqslant i\leqslant m$ , *on ait* $Q_i\cap S=\emptyset$ , *et que pour* $m+1\leqslant i\leqslant n$ , *on ait* $Q_i\cap S\neq\emptyset$ . *Alors* $f(I)A_S=\bigcap_{i=1}^{m} f(Q_i)A_S$ *est une représentation réduite de* $f(I)A_S$ *comme intersection d'idéaux primaires*. *Et* $\overset{-1}{f}(f(I)A_S)$ *est l'intersection des composantes primaires de* I *qui ne rencontrent pas* S .

Les idéaux $f(Q_i)A_S$ $(1\leqslant i\leqslant m)$ sont primaires (prop.5), et leur famille est réduite puisque $\overset{-1}{f}(f(Q_i)A_S)= Q_i$ (prop.5). L'inclusion $f(I)A_S\subset\bigcap_{i=1}^{m} f(Q_i)A_S$ est évidente. Réciproquement un élément $x$ du second membre s'écrit, pour $1\leqslant i\leqslant m$ , $x = f(q_i)/f(s_i)$ $(q_i\in Q_i$ , $s_i\in S)$ ; par multiplication on peut supposer tous les $s_i$ égaux à un même élément $s\in S$ ; alors $f(q_1)=\ldots=f(q_m)$ ; il existe donc m éléments $b_i$ du noyau N de f tels que $q_1+b_1=\ldots=q_m+b_m$ ; comme S est multiplicativement stable et que $S\cap Q_j\neq\emptyset$ pour $m+1\leqslant j\leqslant n$ , on peut trouver un élément $t\in S$ tel que $t\in Q_j$ pour $m+1\leqslant j\leqslant n$ , et que $tb_i=0$ pour $1\leqslant i\leqslant m$ ; alors les éléments $tq_i$ $(1\leqslant i\leqslant m)$ sont égaux à un même élément a , et on a $a\in I$ puisque $a\in Q_i$ pour $1\leqslant i\leqslant n$ ; par conséquent $x = f(a)/f(st)$

est élément de $f(I)A_S$ . Enfin la dernière assertion résulte de ce qui précède et du fait que $\overset{-1}{f}(f(Q_i)A_S) = Q$ pour $1 \leq i \leq m$ .

*Corollaire* - *Soient A un anneau noethérien, I un idéal de A , P un idéal premier isolé de I , et f l'application canonique de A dans l'anneau local $A_P$ ; alors $f(I)A_P$ est primaire pour l'idéal maximal $f(P)A_P$ , et $\overset{-1}{f}(f(I)A_P)$ est la composante primaire de I ayant P pour idéal premier associé.*

En effet S est ici le complément de P , et Q est la seule composante primaire de I qui ne rencontre pas S puisqu'elle est isolée.

*Remarque* - Lorsque I est une puissance $Q^n$ d'un idéal Q primaire pour P , I peut fort bien n'être pas primaire pour P (cf.ex ). Cependant, comme P est le radical de I , c'est l'unique idéal premier isolé de I (cor.1 du th.2) ; la composante primaire isolée correspondante de $I = Q^n$ est appelée la *puissance symbolique n-ème* de Q , et se note $Q^{(n)}$. On a donc

$$Q^{(n)} = \overset{-1}{f}(f(Q^n)A_P) .$$

*Proposition 7* - *Soit A un anneau noethérien ; le noyau N de l'homomorphisme canonique de A dans $A_S$ est égal à l'intersection N' des composantes primaires de (0) ne rencontrant pas S , et aussi à l'intersection N" de tous les idéaux primaires de A qui ne rencontrent pas S .*

En effet l'inclusion $N'' \subset N'$ est évidente. Pour toute composante primaire $Q_j$ de (0) rencontrant S soit $s_j \in Q_j \cap S$ , et soit $s \in S$ le produit des $s_j$ ; pour tout $x \in N'$ on a $sx = 0$ puisque $sx$ est contenu dans toutes les composantes primaires de (0) ; ceci montre que $N' \subset N$ . Enfin l'inclusion $N \subset N''$ est conséquence immédiate de l'assertion $N \subset Q$ de la prop.5 .

---

## § 3 - Applications.

### 1 - L'intersection des puissances d'un idéal.

Lemme - Soient $C$ et $D$ deux idéaux d'un anneau noethérien $A$ ; il existe un entier $s$ et un idéal $D'$ tels que $CD = C \cap D'$ et que $D^s \subset D'$ .

Soient $Q_i$ (resp. $Q'_j$) les composantes primaires de $CD$ dont le radical contient (resp. ne contient pas) $D$, $D'$ (resp. $C_1$) l'intersection des $Q_i$ (resp. $Q'_j$). On a $CD = C_1 \cap D'$. D'après le lemme au th.2 (§ 2) il existe un entier $s$ tel que $D^s \subset D'$ . Soit d'autre part $x_j$ un élément de $D$ pris en dehors du radical de $Q'_j$ ; comme $Cx_j \subset CD \subset Q'_j$ on en déduit $C \subset Q'_j$ , d'où $C \subset C_1$ . Comme $CD = (CD) \cap C$ , on a par conséquent $CD = C_1 \cap D' \cap C = C \cap D'$ .

Théorème 1 (Krull) - Soient $A$ un anneau noethérien et $M$ un idéal de $A$ ; pour que $\bigcap_{n=0}^{\infty} M^n = (0)$ il faut et il suffit qu'aucun élément de $1+M$ ne soit diviseur de zéro dans $A$ .

Si un élément $1-m$ ($m \in M$) de $1+M$ est diviseur de zéro, il existe $x \in A$, $x \neq 0$ tel que $x = mx$ ; alors $x = mx = m(mx)$, et, par récurrence, $x = m^n x$ pour tout $n$ ; ceci montre que $\bigcap_{n=0}^{\infty} M_n^n \neq (0)$ . Réciproquement posons $B = \bigcap_{n=0}^{\infty} M^n$ ; d'après le lemme il existe $s$ tel que $BM \supset B \cap M^s$ ; on a donc $BM = B$ ; soit alors $(b_1, \dots, b_r)$ une base de $B$ ; de $BM = B$ on déduit l'existence d'éléments $m_{ij}$ de $M$ ($1 \leq i$ , $j \leq r$) tels que $b_i = \sum_{j=1}^{r} m_{ij} b_j$ ; le déterminant $d = \det(\delta_{ij} - m_{ij})$ de ce système linéaire en les $b_j$ n'est pas diviseur de zéro puisqu'il appartient à $1+M$ ; donc les $b_j$ sont tous nuls (Alg.,chap.III, § 5,prop.6), et on a $\bigcap_{n=0}^{\infty} M^n = (0)$ .

Corollaire 1 - Pour tout idéal $I$ d'un anneau d'intégrité noethérien on a $\bigcap_{n=0}^{\infty} I^n = (0)$ .

Corollaire 2 - Soient $A$ un anneau noethérien et $P$ un idéal premier de $A$ ; l'intersection $\bigcap_{n=0}^{\infty} P^{(n)}$ des puissances symboliques de $P$ est égale à l'intersection des idéaux primaires de $A$ contenus dans $P$ et aussi à l'intersection des composantes primaires de $(0)$ contenue dans $P$.

On applique en effet le th.1 à l'anneau local $A_P$ et aux idéaux $(f(P)A_P)^n$, on remarque que $\overset{-1}{f}((f(P)A_P)^n) = P^{(n)}$, et on utilise la prop.7 du § 2.

2 - Anneaux noethériens intégralement clos.

Soient A un anneau d'intégrité, I un idéal de A, et K le corps des fractions de A ; nous noterons $A:I$ l'ensemble des $x \in K$ tels que $xI \subset A$ (cette notation est conforme à celle du § 2 si l'on considère K comme A-module) ; c'est un A-module.

Proposition 1 - Soient B un anneau d'intégrité noethérien, et a un élément non nul de B ; pour tout idéal premier (isolé ou immergé) P de l'idéal principal Ba, on a $B:P \neq B$.

En effet, on a $Ba:P \neq Ba$ (§ 2, th.2, b)), et il suffit de diviser par a.

Proposition 2 - Soit B un anneau d'intégrité, local, noethérien et intégralement clos ; soit M l'idéal maximal de B ; si le module $M' = B:M$ est distinct de B, B est l'anneau d'une valuation discrète.

Comme M' contient B, comme B est local et comme $MM' \subset B$, on a soit $MM' = M$, soit $MM' = B$. Examinons d'abord le cas $MM' = M$. On a alors $M = M'M = M'(M'M)$, et, par récurrence, $M = M'^n M$ pour tout n. Ainsi, si $u \in M'$ et si $m \in M$, toutes les puissances $u^n$ se trouvent dans le B-module de type fini $Bm^{-1}$. Comme B est noethérien ces puissances sont toutes des combinaisons linéaires à coefficients dans A d'un nombre fini d'entre elles (§ 1, prop.1), ce qui veut dire que u est entier sur B. Mais, comme B est intégralement clos, ceci implique $u \in B$ et donc $M' \subset B$, contrairement à l'hypothèse.

On a donc $MM' = B$. Il existe donc des éléments $m_i \in M$ et $m'_i \in M'$ tels que $1 = \sum_i m_i m'_i$. Comme les $m_i m'_i$ sont éléments de B d'après la définition de M', ils ne sont pas tous dans M, et l'un au moins est inversible dans B puisque B est un anneau local d'idéal maximal M.

On peut donc écrire $1 = mm'$ avec $m \in M$ et $m' \in M'$ . On en déduit $M = mm'M \subset Bm$ , puisque $m'M \subset B$ ; autrement dit $M$ est un idéal principal $Bm$ . Enfin, comme $B$ est noethérien et sans diviseurs de zéro, on a $\bigcap_{n=0}^{\infty} Bm^n = (0)$ (cor.1 du th.1), ce qui montre que $B$ est l'anneau d'une valuation discrète chap.I, § 2).

Etant donné un anneau d'intégrité $A$ , rappelons (chap.I, § 4) qu'un idéal premier $P$ de $A$ est dit minimal si c'est un élément minimal de l'ensemble, ordonné par inclusion, des idéaux premiers $\neq (0)$ de $A$ .

Théorème 2 - Soit $A$ un anneau d'intégrité noethérien et intégralement clos ; alors l'anneau $A$ est normal (chap.I, § 4) ; et tout idéal principal $Aa \neq (0)$ de $A$ est intersection finie de puissances symboliques d'idéaux premiers minimaux de $A$ .

Nous démontrerons d'abord la seconde assertion. Soit $P$ un idéal premier (isolé ou immergé) de $Aa$ . Considérons l'anneau local $B = A_P$ . L'idéal maximal $PA_P$ est un idéal premier de $A_Pa$ (§ 2, prop.6), et on donc $A_P:(PA_P) \neq A_P$ . Comme $A_P$ est noethérien (§ 1, prop.4) et intégralement clos (Chap.I, § 3), on peut lui appliquer la prop.2, ce qui montre que $A_P$ est l'anneau d'une valuation discrète. Donc, d'une part, il n'a d'autres idéaux premiers que $PA_P$ et $(0)$ (chap.I, § 2), ce qui montre (chap.I, § 1) que $P$ est un idéal premier minimal de $A$ , et que, par conséquent, $P$ est un idéal premier isolé de $Aa$ . D'autre part $A_Pa$ est de la forme $P^nA_P$ , et le cor. à la prop.6 (§ 2) montre que la composante primaire de $Aa$ ayant $P$ pour idéal premier associé est la puissance symbolique $P^{(n)}$ . Ceci démontre la seconde assertion.

Pour montrer que $A$ est normal considérons la famille $\Phi$ des valuations normées d'anneaux $A_{P_\alpha}$ , où $P_\alpha$ parcourt l'ensemble des idéaux premiers d'idéaux principaux non nuls de $A$ . Comme les $P_\alpha$ sont tous minimaux, tout élément non nul $a$ de $A$ n'est contenu que dans un nombre fini de $P_\alpha$ , les idéaux premiers de $Aa$ (§ 2, th.2, a') ; donc la condition (III) de la définition des anneaux normaux est satisfaite (chap.I, § 4). Reste à montrer que A est l'intersection des $A_{p_\alpha}$. Remarquons pour cela que, si $v_\alpha$ désigne la valuation normée d'anneau $A_{p_\alpha}$, et si a est un élément non nul de A, la première partie de la démonstration montre que l'on a

$$Aa = \bigcap_\alpha p_\alpha^{(v_\alpha(a))} .$$

Donc, si $a/b$ $(a \in A,\ b \in A)$ est un élément de l'intersection des $A_{p_\alpha}$, on a $v_\alpha(a) \geqslant v_\alpha(b)$ pour tout $\alpha$, ce qui montre que $Aa \subset Ab$, c'est à dire que $a/b$ est élément de A.

<u>Remarques</u> - 1) Comme toutes les valuations de la famille $\Phi$ sont essentielles par construction, la famille $\Phi$ est celle de toutes les valuations essentielles de A (chap.I, § 4). En particulier tout idéal premier minimal de A est idéal premier d'un idéal principal de A.

2) On a vu en cours de démonstration qu'un idéal principal d'un anneau d'intégrité noethérien et intégralement clos n'a que des composantes primaires isolées.

---

(N-B : on pourrait donner ici des conditions (nécessaires et suffisantes) pour que A (intègre et noethérien) soit factoriel. Par exemple :

(A) Tout idéal principal engendré par un élément extrémal est premier.

(B) Tout idéal premier minimal est principal.

---