

RÉDACTION N° 154

COTE : NBR 055

TITRE : INTRODUCTION AU LIVRE I (ÉTAT 3)

ASSOCIATION DES COLLABORATEURS DE NICOLAS BOURBAKI

NOMBRE DE PAGES : 7

NOMBRE DE FEUILLES : 7

INTRODUCTION AU LIVRE I. (Etat 3)

IL Y A une mathématique, une et indivisible : voilà la raison d'être du présent traité, qui prétend en exposer les éléments à la lumière d'une tradition de vingt-cinq siècles. Or, depuis les Grecs, qui dit mathématique dit démonstration ; il est même douteux qu'il existe et qu'il puisse exister en dehors des mathématiques des démonstrations au sens précis et rigoureux que ce mot a reçu des Grecs et qu'on entend lui donner ici. On a le droit de dire que ce sens n'a pas varié, car ce qui constituait une démonstration pour Euclide l'est toujours à nos yeux ; et, aux époques où la notion a menacé de s'en perdre et où de ce fait la mathématique s'est trouvée en danger de mort, c'est chez les Grecs qu'on en a recherché les paradigmes. Mais à ce vénérable héritage sont venues s'ajouter depuis un siècle d'importantes conquêtes.

En effet, l'analyse en quelque sorte grammaticale de textes mathématiques d'abord choisis parmi les plus simples a permis, définitivement sans doute, d'en déterminer la structure, du double point de vue du vocabulaire et de la syntaxe. Il a été ainsi constaté que tout texte mathématique, dès lors qu'il est complètement explicite c'est-à-dire rédigé sans omettre aucun intermédiaire ni rien laisser à faire au lecteur, peut, sans logiquement rien perdre de son contenu, être traduit dans une langue conventionnelle ne comportant qu'un petit nombre de mots invariables assemblés suivant une syntaxe qui ne comporte qu'un petit nombre de règles inviolables ; un texte ainsi traduit est dit formalisé, et se note en principe par une écriture idéographique comportant pour chaque mot un signe unique. La description d'une partie d'échecs au moyen de la notation usuelle, une table de logarithmes, sont des textes formalisés ; les formules du calcul algébrique ordinaire en seraient aussi si l'on avait complètement codifié les règles gouvernant l'emploi des parenthèses et qu'on s'y conformât strictement, alors qu'en pratique certaines de ces règles ne s'apprennent guère qu'à l'usage et que l'usage autorise d'y faire certaines dérogations.

En principe, la vérification d'un texte formalisé est chose aisée, puisqu'elle ne demande qu'une attention en quelque sorte mécanique ; c'est ainsi qu'un mathématicien fait le plus souvent confiance à un confrère qui lui transmet le résultat d'un calcul algébrique, pour peu qu'il sache que ce calcul n'est pas trop long et a été fait avec soin. Il va de soi, d'ailleurs, que les chances d'erreur augmentent avec la longueur du calcul ; du moins n'est-on pas exposé, dans un calcul formalisé, à ux fautes de raisonnement que risquent trop souvent d'en traîner, dans un texte mathématique écrit en langage courant, l'usage abusif de l'intuition, l'association d'idées, et les autres sources des pétitions de principes auxquelles est exposé le mathématicien. En fait, il est vrai, le mathématicien qui désire s'assurer de la parfaite correction ou, comme on dit, de la "rigueur" d'une démonstration ou d'une théorie ne recourt guère, sauf dans la discussion des premiers principes qui figure dans certains ouvrages modernes de logique, à l'une des formalisations complètes dont on dispose aujourd'hui, ni même le plus souvent aux formalisations partielles et incomplètes fournies par le calcul algébrique et d'autres similaires ; il se contente en général d'amener l'exposé à un point où son expérience et son flair de mathématicien lui enseignent que la traduction en un langage complètement formalisé ne serait plus qu'un exercice de patience (sans doute fort pénible) ;

- 2 -

il en est ainsi par exemple des exposés modernes des débuts de l'algèbre dite abstraite, et aussi de la plus grande partie des Éléments d'Euclide. Si, comme il arrive mainte et mainte fois, des doutes viennent à s'élever, c'est en définitive sur la possibilité d'une telle traduction qu'ils portent, soit qu'un même mot soit employé en des sens variables suivant le contexte, soit que les règles de la syntaxe aient été violées par l'emploi inconscient de modes de raisonnement non spécifiquement autorisés par elles, soit encore qu'une erreur ait été commise. Ce dernier cas mis à part, le redressement se fait invariablement, tôt ou tard, par la rédaction de textes se rapprochant de plus en plus d'un texte formalisé, jusqu'à ce que, de l'avis général des mathématiciens, il soit devenu superflu de pousser ce travail plus loin ; autrement dit, c'est par une comparaison, le plus souvent instinctive, avec les règles d'un langage formalisé que se fait l'essai de la correction d'un texte mathématique.

La méthode axiomatique n'est à proprement parler pas autre chose que cet art de rédiger des textes aisément traduisibles en un langage formalisé. Ce n'est pas là une invention nouvelle, bien que les langages formalisés en soient une ; mais son emploi systématique comme instrument de découverte est l'un des traits originaux de la mathématique contemporaine. Peu importe en effet, s'il s'agit d'écrire ou de lire un texte formalisé, qu'on attache aux mots ou signes de ce texte telle ou telle signification, ou même qu'on ne leur en attache aucune ; seule importe l'observation correcte des règles de la syntaxe. C'est ainsi qu'un même calcul algébrique, comme chacun sait, peut servir à résoudre des problèmes portant sur des kilogrammes ou des francs, sur des paraboles ou des mouvements uniformément accélérés. Ce même avantage s'attache, et pour les mêmes raisons, à tout texte rédigé suivant la méthode axiomatique : une fois établis les théorèmes de la topologie générale, on peut les appliquer à volonté à l'espace ordinaire, à l'espace de Hilbert, à bien d'autres encore. Cette faculté de donner des contenus multiples aux mots ou notions premières d'une théorie est même une importante source d'enrichissement de l'intuition du mathématicien, qui n'est pas nécessairement de nature spatiale ou sensible comme on le croit parfois mais qui est plutôt la connaissance instinctive du comportement des êtres mathématiques, aidée souvent par des images de nature très variées mais fondée avant tout sur leur fréquentation journalière. De plus, et c'est ce qui nous importe particulièrement en ce traité, la méthode axiomatique permet, lorsqu'on a affaire à des notions mathématiques complexes, d'en dissocier les propriétés et de les regrouper autour d'un petit nombre d'entre elles qui se rencontrent également ailleurs, c'est-à-dire, pour employer un mot qui sera défini plus loin avec précision, de les classer suivant les structures auxquelles elles appartiennent ; c'est ainsi que, parmi les propriétés de la sphère, les unes sont topologiques, d'autres sont algébriques, d'autres encore peuvent être considérées comme relevant de la géométrie différentielle ou de la théorie des groupes de Lie. Quelque artificiel que puisse devenir parfois ce principe de classification dès que s'enchevêtrent les structures, c'est lui qui est à la base de la répartition en Livres des matières formant l'objet de ce traité.

De même que l'art de parler correctement une langue préexiste à la grammaire, de même la méthode axiomatique, avons-nous dit, a été pratiquée bien avant l'invention des langages formalisés ; mais sa pratique consciente et non plus seulement instinctive ne peut reposer que sur la connaissance des principes généraux gouvernant ces langages et la traduction en ceux-ci des textes mathématiques courants. Nous nous proposons en ce Livre de donner la description complète d'un tel langage, en commençant par l'exposé de principes généraux qui pourraient s'appliquer à beaucoup d'autres semblables. Est-il possible, sans pétition de principe, de faire cette description, que les langages formalisés sont destinés à la mathématique, et qu'en les décrivant on ne peut guère s'empêcher de faire usage de la numération ? Si étrange que soit cette question, de bons esprits semblent en avoir été embarrassés, comme s'il était absurde que la grammaire d'une langue pût s'écrire dans une autre langue, ou dans cette langue même. Il est convenu d'appeler métamathématiques les portions de texte, écrits en langage courant, où est faite la description, l'étude et la discussion d'une langue formalisée ; dès notre Chap.¹, les passages métamathématiques sont écrits à l'usage de lecteurs sachant quelque peu raisonner au sens où ce mot est entendu vulgairement, sachant compter jusqu'à trois, et sachant aussi faire usage des nombres décimaux en tant que repères, capables de se reporter par exemple au n^o 15 ou à la p. 25 ; nous ne discuterons pas de la possibilité d'enseigner un langage formalisé à des êtres n'ayant pas atteint à ce degré de développement intellectuel. Mais la métamathématique peut aller beaucoup plus loin ; en effet, tandis que l'analyse dite scientifique d'un texte en langue vulgaire ne peut en définitive être dissociée de l'étude psychologique du sujet parlant ou écrivant, un langage formalisé se prête à des études proprement mathématiques du fait que ses éléments constitutifs sont par hypothèse tous explicités ; pourvu donc qu'on fasse complètement abstraction de toute signification qu'on aura pu à l'origine attribuer aux mots ou phrases d'un texte formalisé, ce texte devient un objet matériel particulièrement simple, assemblage d'objets préalablement donnés dont seul importe l'ordre qu'on leur assigne. Qui nous donne le droit d'appliquer aux objets matériels le raisonnement mathématique ? Sur cette question, le mathématicien que nous sommes n'a pas à formuler d'opinion ; acceptons si l'on veut comme un fait d'expérience que cette application conduit à des conclusions valables dans certaines conditions qu'enseigne l'expérience, et par exemple lorsqu'on applique l'arithmétique élémentaire à des questions purement énumératives et combinatoires. On appelle logique mathématique la branche des mathématiques appliquées qui s'occupe d'étudier ainsi les propriétés formelles des textes correctement écrits en langage formalisé, c'est-à-dire qui les étudie en tant qu'objets matériels indépendamment du sens qu'on pourrait y attacher ; l'Appendice du Chap. I en fournit un échantillon.

Donc, dans le présent Livre, nous décrirons un langage formalisé ⁽¹⁾ ;

(1) Pour des raisons purement techniques, nous avons choisi un langage qui ne se conforme pas strictement aux indications ci-dessus, car il comporte des "liens" qui ne sont pas des mots du langage mais se superposent à ceux-ci ; il eût été facile d'en éviter l'emploi, au prix de quelques complications supplémentaires. Leur intervention ne change naturellement rien d'essentiel à ce que nous disons ici.

et cela suffira à notre objet. En effet, alors qu'autrefois on a pu croire que chaque branche des mathématiques dépendait d'intuitions particulières qui lui fournissaient notions et vérités premières, ce qui est entraîné pour chacune la nécessité d'un langage formalisé qui lui appartient en propre, on sait aujourd'hui qu'il est possible, logiquement parlant, de faire dériver toute la mathématique actuelle d'une source unique, la théorie des ensembles. C'est même là une des plus importantes découvertes des cent dernières années ; et notre dessein est de transformer cette possibilité en acte. Nous n'aurons donc qu'à exposer les principes d'un langage formalisé unique, à indiquer comment on pourrait rédiger en ce langage la théorie des ensembles, puis à faire voir comment s'insèrent dans celle-ci toutes les branches des mathématiques au fur et à mesure que notre attention se portera sur elles. Ce faisant, nous ne prétendons pas légiférer pour l'éternité ; il se peut qu'un jour les mathématiciens s'accordent à se permettre des modes de raisonnement non formalisables dans le langage exposé ici ; suivant certains, l'évolution récente des théories d'homologie dites axiomatiques donnerait à penser que ce jour n'est pas éloigné. Il faudrait alors, sinon changer complètement de langage, tout au moins élargir les règles de la syntaxe. C'est à l'avenir qu'il appartiendra d'en décider.

Au Chapitre I, nous donnerons les premiers éléments de la grammaire du langage formalisé que nous avons choisi ; et, dès ce chapitre, nous indiquerons diverses manières d'abrégier beaucoup les textes écrits en ce langage, par l'introduction de mots nouveaux (dits "signes abrégiateurs") et de règles de syntaxe additionnelles (dites "règles dérivées") en assez grand nombre ; ce faisant, on obtient des langages beaucoup plus maniables que le langage formalisé proprement dit, et que le mathématicien n'a aucune peine à retraduire en ce dernier si besoin est, mais dont on n'a déjà plus la certitude qu'ils puissent être ainsi retraduits d'une manière purement mécanique ; du moins faudrait-il, pour qu'on en fût assuré, compliquer les règles de syntaxe gouvernant l'emploi des mots nouveaux à tel point que leur utilité deviendrait illusoire ; là, comme en calcul algébrique et dans l'emploi de presque toutes les notations dont se servent ordinairement les mathématiciens, on préfère un instrument maniable à un autre théoriquement plus parfait mais par trop incommode. Au Chapitre II, en nous servant des facilités plus grandes qu'apportent ces premiers "abus de langage", nous compléterons (à un seul "axiome" près, qui n'apparaîtra qu'au Chapitre III) l'énoncé des règles du langage formalisé de la théorie des ensembles ; d'autre part, mêlant de plus en plus les textes en langage courant aux textes assez rares écrits en langage formalisé, nous enseignerons au lecteur, par la pratique, l'art de traduire de l'un de ces langages dans l'autre. A partir de ce moment, le langage formalisé tel qu'il a été enseigné tout d'abord ne sera plus employé ; le reste de ce traité sera écrit comme le sont en pratique tous les textes mathématiques, c'est-à-dire en partie en langage courant et en partie au moyen de formules constituant des formalisations partielles, particulières et incomplètes et dont celles du calcul algébrique fournissent l'exemple le plus connu. Souvent même on se servira du langage courant d'une manière encore bien plus libre que celle que suggérerait ce qui précède, par des abus de langage volontaires, par l'omission pure et simple des passages qu'on présume pouvoir être restitués aisément par un lecteur tant soit peu exercé, par des indications intraduisibles en langage formalisé et

et destinées à faciliter cette restitution ; d'autres passages également intraduisibles contiendront des commentaires destinés à rendre plus claire la marche des idées, au besoin par un appel à l'intuition du lecteur ; l'emploi de toutes les ressources de la rhétorique devient dès lors légitime, pourvu bien entendu que l'ossature logique du texte demeure intacte. Les premiers exemples en seront donnés, dès ce Livre, au Chapitre III, qui expose la théorie des entiers, des ordinaux et des cardinaux, et la théorie de la structure d'ordre, la plus simple de toutes les structures au Chapitre IV sera précisée la notion de structure ainsi que les notions générales qui s'y rattachent.

Rédigé suivant la méthode axiomatique, et conservant toujours présente, comme une sorte d'horizon, la possibilité d'une traduction en la langue formalisée, notre traité prétend donc à une rigueur parfaite, prétention que ne démentent point les feuilletons d'errata au moyen desquels nous avons corrigé et nous continuerons à corriger les erreurs qui s'y glissent de temps à autre. Du fait justement que nous nous tenons constamment aussi près d'un texte formalisé qu'il semble possible sans longueurs insupportables, la vérification, en principe, est aisée, et les erreurs (inévitables dans une aussi vaste entreprise) peuvent être localisées sans excessive perte de temps. C'est dans le même esprit réaliste que nous envisageons ici la question de non-contradiction, l'une de celles qui ont le plus préoccupé les logiciens modernes et qui sont justement à l'origine de la création des langages formalisés. On dit qu'une théorie mathématique est contradictoire si l'on y a démontré à la fois un théorème et sa négation ; des règles de raisonnement usuelles, qui sont à la base des règles de la syntaxe des langages formalisés, il résulte alors que tout théorème est à la fois vrai et faux dans cette théorie, qui perd donc tout intérêt. Par suite, comme nous le verrons plus en détail au Chapitre I, dès qu'on se donne le droit d'utiliser dans une théorie un théorème qui est faux dans cette théorie, on se trouve virtuellement à l'intérieur d'une théorie contradictoire, et on peut s'attendre à s'en apercevoir effectivement en démontrant à la fois un théorème et sa négation. Pratiquement consciemment, ce procédé est une méthode de démonstration bien connue, dite "par l'absurde" ; si au contraire on a abouti involontairement à une contradiction, on ne peut la laisser subsister sans que soit frappée de stérilité la théorie où elle s'insère, et il importe de remonter à sa source pour la faire disparaître. Le plus souvent, remontant de proche en proche, le mathématicien finira par s'apercevoir d'une erreur commise ; c'est même là un des plus sûrs moyens dont on dispose pour s'en apercevoir. Sinon, c'est que la contradiction observée est inhérente aux principes mêmes qu'on a mis à la base de la mathématique ; c'est ceux-ci donc qu'il faut modifier, sans compromettre si possible les parties de la mathématique auxquelles on tient le plus ; il est clair qu'on y parviendra d'autant plus facilement que l'usage de la méthode axiomatique et d'un langage formalisé aura permis de formuler plus distinctement ces principes et d'en séparer plus nettement les conséquences. C'est ce qui s'est passé à date récente, lorsqu'on a éliminé les paradoxes de la théorie des ensembles par l'adoption d'un langage formalisé essentiellement équivalent à celui que nous décrivons ici ; et c'est une révision semblable qu'il faudrait entreprendre si ce dernier à son tour se révélait contradictoire. A vrai dire,

de l'avis des logiciens modernes, cela ne semble guère probable. Peut-on espérer aller plus loin, et acquérir la certitude que cela n'arrivera jamais ? Sans entrer à ce propos dans un débat peut-être futile, et en tout cas hors de notre compétence, sur la notion même de certitude, observons que la logique mathématique permet d'examiner les problèmes de non-contradiction par les méthodes propres du mathématicien. Qu'une théorie soit contradictoire revient en effet à dire qu'elle peut se traduire en un texte formalisé correct aboutissant à la conclusion $\emptyset \neq \emptyset$, ou plutôt, à la formule qui s'écrit ainsi en abrégé au moyen des conventions exposées plus loin ; il n'y a alors rien d'absurde à imaginer qu'on puisse "démontrer" l'impossibilité d'un tel texte. En fait, on a donné de telles "démonstrations" pour certains langages formalisés partiels, moins riches que celui que nous nous proposons d'introduire mais assez riches pour qu'on y puisse écrire une bonne partie de la mathématique classique. On peut se demander, il est vrai, ce qu'on a "démontré" ainsi ; car, si la mathématique était contradictoire, son application aux objets matériels, donc en particulier aux textes formalisés, deviendrait illusoire ; il faudrait, pour échapper à ce dilemme, que la non-contradiction d'un langage formalisé pût être "démontrée" par des raisonnements formalisables dans un langage moins riche et partant plus digne de confiance ; or un théorème célèbre de Gödel dit que cela est impossible pour peu que le langage en question soit adéquat aux besoins relativement modestes de l'arithmétique. En revanche, dans les démonstrations de non-contradiction "relative", on ne fait usage que de raisonnements combinatoires très simples, qui se traduisent en un langage formalisé assez pauvre, et qu'il ne semble guère possible de mettre en doute sans renoncer à tout emploi rationnel de nos facultés intellectuelles : par exemple, puisque dans ce traité nous définirons sous le nom de "point", "droite", "plan" des notions satisfaisant à tous les axiomes de la géométrie élémentaire, il s'ensuivra que toute contradiction déduite de ces derniers donnerait lieu à une contradiction dans notre théorie des ensembles ; c'est en ce sens que tout ce qui s'est fait en mathématique jusqu'à ce jour est apte à étayer notre confiance dans les fondements de notre science. Autrement dit, si nous croyons que notre mathématique est destinée à survivre, qu'on ne verra jamais les parties essentielles de ce majestueux édifice s'écrouler du fait d'une contradiction soudain manifestée, nous ne prétendons pas que cette opinion repose sur autre chose que l'expérience renforcée par le raisonnement. C'est peu, diront certains. Mais voilà vingt-cinq siècles que les mathématiciens ont l'habitude de corriger leurs erreurs et d'en voir leur science enrichie, non appauvrie ; cela leur donne le droit d'envisager l'avenir avec sérénité.

(Note du rédacteur) Au lieu de "sachant compter ... ou à la p.25", lire "et sachant lire, écrire et compter" ? (cf. Etat 5, Chap. I, p.9!).