RÉDACTION N° 152

COTE : NBR 053

TITRE : GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE (ÉTAT 2)

ASSOCIATION DES COLLABORATEURS DE NICOLAS BOURBAKI

NOMBRE DE PAGES : 157

NOMBRE DE FEUILLES : 157

Archives M^r Chevalley octobre 1941

NBR053 152 2

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE (Etat 2)

INTRODUCTION : STRUCTURES DU TYPE GÉOMÉTRIQUE.

1. Définition d'un type d'espèces de structures.

Soit $\mathcal{E}$ une espèce de structures. Supposons que, dans la théorie $\mathcal{T}$ de cette espèce de structures, on ait défini explicitement (et structuralement) deux objets E et G et que la relation : " G est un groupe de permutations de E " soit vraie dans la théorie $\mathcal{T}$. S'il en est ainsi, et si S est une structure quelconque de l'espèce $\mathcal{E}$, on pourra définir dans la structure S un ensemble E et un groupe G de permutations de cet ensemble ; et, si deux structures S et S' de l'espèce $\mathcal{E}$ sont isomorphes, il y aura une application biunivoque j de l'ensemble E qui correspond à E dans S sur l'ensemble E' qui correspond à E dans S' telle que l'on ait $G'=j\circ G\circ j^{-1}$ si G et G' sont les groupes qui correspondent à G dans S et S' .

On peut se proposer d'étudier systématiquement toutes les propriétés des structures de type $\mathcal{E}$ qui dépendent de l'existence du groupe G agissant sur l'ensemble E , et de rien d'autre. Pour isoler ces propriétés, nous allons introduire une nouvelle espèce de structures $\mathcal{E}'$. Le principe de la construction de cette nouvelle espèce de structures est d'introduire un nouvel ensemble de base E' qui est en correspondance biunivoque avec E , cette correspondance biunivoque étant définie à une opération près de G . Comme on ne saura rien d'autre que cela sur l'ensemble E' , les propriétés de cet ensemble dans la théorie $\mathcal{T}'$ de l'espèce de structures $\mathcal{E}'$ nous donneront celles des propriétés de E qui ne dépendent que du groupe G .

Définissons maintenant de manière précise l'espèce de structures $\mathcal{E}'$. L'espèce de structures $\mathcal{E}$ comporte un certain nombre d'ensembles de base K dont certains sont privilégiés (relativement à la notion d'isomorphisme pour les structures de cette espèce) et d'autres non.

Nous supposerons pour simplifier qu'il y a un seul ensemble de base privilégié que nous désignerons par la lettre K et un seul ensemble de base non privilégié que nous désignerons par la lettre V (il en sera ainsi dans les cas dont nous aurons à nous occuper : K sera un corps et V un espace vectoriel sur ce corps). Par ailleurs, l'espèce de structures $\mathcal{E}$ comporte un certain nombre d'objets constitutifs que nous désignerons par $J_1, \ldots, J_m$; chacun d'eux est d'un type bien déterminé de l'échelle des types sur K et V ; nous désignerons par T_k le type de J_k ($1 \leq k \leq m$). Ceux des objets constitutifs $J_1, \ldots, J_m$ dont les types appartiennent à l'échelle construite sur K seul sont considérés comme privilégiés relativement aux isomorphismes. Enfin, on suppose que l'on s'est donné un certain ensemble E d'un type déterminé qui est défini structuralement dans la théorie de l'espèce de structures $\mathcal{E}$, ainsi qu'un groupe G de permutations de l'ensemble E, également défini structuralement. Nous désignerons par U le type des éléments de E. Enfin, nous désignerons dans tout ce qui suit par $\mathcal{C}$ la théorie de l'espèce de structures $\mathcal{E}$.

L'espèce de structures $\mathcal{E}'$ comportera trois ensembles de base dont les deux premiers seront désignés par les mêmes lettres K et V que les ensembles de base de $\mathcal{E}$, et le troisième par la lettre E'. On aura $m+1$ objets constitutifs $J_1, \ldots, J_m, R'$ dont les m premiers sont désignés par les mêmes lettres que les objets constitutifs de $\mathcal{E}$. Les types de ces objets constitutifs seront les suivants : pour chaque k ($1 \leq k \leq m$), J_k sera du même type dans $\mathcal{E}'$ que dans $\mathcal{E}$; quant à R', il sera du type $P(P(U \times E'))$. La notion d'isomorphisme pour les structures de type $\mathcal{E}'$ sera précisée comme suit : K sera le seul ensemble de base privilégié ; les seuls objets privilégiés seront ceux des J_k qui sont privilégiés dans l'espèce de structures $\mathcal{E}$

(c'est-à-dire ceux dont les types appartiennent à l'échelle construite sur K seul). Enfin les axiomes de l'espèce de structures $\mathcal{E}'$ seront tout d'abord tous les axiomes de $\mathcal{E}$, et de plus les axiomes suivants :

I. $\mathcal{R}'$ n'est pas vide ;

II. Tout élément de $\mathcal{R}'$ est une application biunivoque de E sur E';

III. Si r' est un élément de $\mathcal{R}'$, $\mathcal{R}'$ est identique à l'ensemble de toutes les applications $r' \circ s$, où $s \in G$.

Le caractère structural de ces axiomes se vérifie immédiatement.

Les éléments de $\mathcal{R}'$ s'appellent les repères de l'espèce de structures $\mathcal{E}'$.

Dorénavant, l'espèce de structures que nous venons de définir sera désignée soit par $\mathcal{E}'$ soit par $\mathcal{E}(E, G)$. Nous emploierons tout au cours de l'introduction les notations que nous venons d'introduire sans les redéfinir.

Pour déterminer une structure S' d'espèce $\mathcal{E}'$, il faut se donner tout d'abord une structure S d'espèce $\mathcal{E}$; au moyen de ses ensembles de base K,V et de ses objets constitutifs $J_1,\ldots,J_n$, puis un ensemble E' et un ensemble R' d'applications de l'ensemble E de S qui correspond à E sur l'ensemble E' ; il faut enfin naturellement vérifier que les axiomes de l'espèce de structure $\mathcal{E}'$ sont vérifiées. Nous dirons que S est la structure d'espèce $\mathcal{E}$ inhérente à S', que E' est l'espace sur lequel S' est une structure d'espèce $\mathcal{E}'$, que E est son modèle dans S , et que R' est la famille des repères de la structure S' .

On remarquera qu'une fois connue, la structure S d'espèce $\mathcal{E}$ inhérente à S', il suffit, pour déterminer S', de se donner l'ensemble E' et un repère r' . En effet, la structure S étant connue, le groupe G et l'ensemble E sont déterminés, et, une fois un repère r' connu, tous les autres s'en déduisent en formant les opérations $r' \circ s$, pour $s \in G$.

La seule condition à laquelle r' doit satisfaire est d'être une application biunivoque de l'ensemble E de S qui correspond à E sur l'ensemble E'.

On peut définir structuralement dans la théorie $\mathcal{E}'$ un groupe G' de permutations de E' qui sera isomorphe au groupe G. Considérons en effet un repère quelconque $r' \in R'$; si $s \in G$, l'opération $r' \circ s \circ r'^{-1}$ est une permutation de E', et l'ensemble des permutations de E' ainsi obtenues, lorsque s parcourt G, r' restant fixe, est un groupe de permutations de E' isomorphe à G. Ce groupe G' ne dépend pas du choix de r'. En effet, si r" est un autre repère, on peut écrire $r'' = r' \circ t$, où t est un élément de G, d'où, si $s \in G$, $r'' \circ s \circ r''^{-1} = r' \circ (tst^{-1}) \circ r'^{-1}$, ce qui démontre notre assertion. Le groupe G' est évidemment défini structuralement dans $\mathcal{E}'$; c'est l'ensemble des permutations s' de E' telles que, pour tout $r' \in R'$, $r'^{-1} \circ s' \circ r'$ appartienne à G. On dit que G' est le <u>groupe fondamental</u>. Si S' est une structure d'espèce $\mathcal{E}'$ sur un espace E', le groupe G' qui correspond dans S' à G' s'appelle le <u>groupe fondamental de l'espace</u> E'.

Il convient maintenant d'observer que l'objet spécifique de notre étude est la considération des propriétés de l'espace E' qui sont dûes à la présence du groupe G' opérant dans cet espace. L'ensemble de base K est un ensemble privilégié, et nous considérerons que l'étude des relations entre éléments de E' et de K fait partie de notre domaine d'investigations. Mais il n'en est pas de même de l'étude des relations entre éléments de E' et de V. L'ensemble de base V ne figure parmi les ensembles de base de l'espèce de structures $\mathcal{E}'$ que parce que sa présence permet de fabriquer (par l'intermédiaire de E et de R') un groupe G' de transformations de E' qui agit sur E' de la même manière que G agit sur E dans la théorie $\mathcal{E}$.

Nous appellerons donc <u>intrinsèques</u> les termes structuraux de la théorie $\mathcal{E}'$ dont les types appartiennent à l'échelle construite sur les ensembles de base K et E' (à l'exclusion de V). Nous dirons qu'une relation structurale R de la théorie $\mathcal{E}'$ est intrinsèque si elle peut s'obtenir par la méthode de construction suivante : on part d'une relation structurale R_1 telle que les types des lettres $X_1,\ldots,X_p$ qui y figurent appartiennent à l'échelle construite sur K et E' seuls, puis on substitue aux lettres $X_1,\ldots,X_p$ des termes structuraux $T_1,\ldots,T_p$ tels que, pour chaque k, le type de T_k soit le même que celui de X_k, ce qui entraîne que les T_k sont intrinsèques. On notera qu'un terme ou une relation intrinsèques peuvent parfaitement contenir des lettres dont les types n'appartiennent pas à l'échelle construite sur K et E' seuls (* ainsi, dans la théorie des espaces projectifs, dans laquelle V sera un espace vectoriel sur K, et E l'ensemble des sous-espaces de dimension 1 de V, une variété projective sera par définition une partie de E' qui sera formée des images par un repère de tous les espaces de dimension 1 de V contenus dans un sous-espace quelconque de V ; le terme "ensemble des variétés projectives de E'" sera un terme intrinsèque de $\mathcal{E}'$ mais dont la définition fera appel à la considération de V *).

Le fait que nous ne nous intéresserons qu'aux relations et termes intrinsèques conduit à considérer une classe particulière d'isomorphismes pour les structures de l'espèce $\mathcal{E}'$. Soient S' et S'_1 deux de ces structures, K,V et E' les ensembles de base de S' et K_1,V_1 et E'_1 ceux de S'_1. Puisque K est privilégié pour les structures de type $\mathcal{E}'$, S' et S'_1 ne pourront être isomorphes que si $K=K_1$, et un isomorphisme de S' avec S'_1 sera donné par des applications biunivoques A de V sur V_1 et B de E' sur E'_1, applications qui devront bien entendu satisfaire à certaines conditions. Ceci dit, nous dirons que l'isomorphisme en question est une <u>équivalence</u> si B est l'application identique de E', ce qui entraîne que $E'=E'_1$; les structures S' et S'_1 seront dites équivalentes s'il existe au moins une équivalence de S' avec S'_1 . Supposons qu'il en soit ainsi. Soient T un terme intrinsèque et R une relation intrinsèque de la théorie $\mathcal{E}'$. Du fait que S' et S'_1 sont des structures d'espèce $\mathcal{E}'$, il correspond à T des termes T et T_1 , ses homologues dans S' et S'_1 , et à R des relations R et R_1 . Ceci dit, il résulte immédiatement du théorème général d'isomorphisme et du fait que T et R sont intrinsèques que les relations " $T=T_1$ " et " R est équivalente à R_1" seront vraies. On voit donc que, du point de vue de l'étude intrinsèque des espaces munis de structures de type $\mathcal{E}'$, deux espaces munis de structures équivalentes ne se distinguent en aucune manière l'un de l'autre. Il nous arrivera, par abus de langage, d'identifier deux structures d'espèce $\mathcal{E}'$ qui sont équivalentes l'une à l'autre.

Soient S' et S'_1 deux structures d'espèce $\mathcal{E}'$. <u>Si les structures S et S_1 d'espèce $\mathcal{E}$ inhérentes à S' et S'_1 sont isomorphes, les structures S' et S'_1 sont elles-même isomorphes</u>. Soient en effet K,V,E' les ensembles de base de S', $J_1,\dots,J_m,R'$ ses objets constitutifs (R' étant l'ensemble des repères de E'), K_1,V_1,E'_1 les ensembles de base de S'_1 et $J_{1,1},\dots,J_{m,1},R'_1$ ses objets constitutifs. Puisque S et S_1 sont isomorphes, on a $K=K_1$, et un isomorphisme de S avec S_1 est donné par une certaine application biunivoque A de V sur V_1 . Si on désigne par I l'application identique de K , les extensions canoniques de types convenables du couple (I,A) appliquent J_1 sur $J_{1,1},\dots,J_m$ sur $J_{m,1}$. Soient par ailleurs E et E_1 les ensembles homologues à l'ensemble E de l'espèce de structures $\mathcal{E}$ dans les structures S et S_1 .

Nous avons désigné par U le type des éléments de $\mathcal{E}$; soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des objets de ce type, d'où $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$, et soient F et F_1 les ensembles homologues à $\mathcal{F}$ dans les structures S et S_1. L'extension canonique de (I,A) du type correspondant à U, soit A^*, induit une application biunivoque de E sur E_1. Choisissons un repère r' de E' et un repère r_1' de E_1' ; l'application $B = r_1' \circ A^* \circ r'^{-1}$ est alors une application biunivoque de E' sur E_1'. Nous allons montrer que les applications A et B définissent un isomorphisme de la structure S' sur la structure S_1'. Soit C l'extension canonique du système (I,A,B) à $\mathfrak{P}(F \times E')$; c'est une application biunivoque de $\mathfrak{P}(F \times E')$ sur $\mathfrak{P}(F_1 \times E_1')$. L'ensemble R' est une partie de $\mathfrak{P}(F \times E')$ (car tout repère est une application de E sur E', donc une partie de $F \times E'$) et R_1' une partie de $F_1 \times E_1'$: nous avons à montrer que $C(R') = R_1'$. Soit r" un élément de R' ; c'est l'ensemble des $(x, r''(x))$, pour $x \in E$, et $C(r'')$ est l'ensemble des $(A^*(x), B(r''(x)))$. Soient G et G_1 les homologues de $\mathcal{G}$ dans les structures S et S_1. On a $r'' = r' \circ s$, où $s \in G$, d'où $B \circ r'' = r_1' \circ A^* \circ s$. Mais, puisque A définit un isomorphisme de S sur S_1, il est clair que $A^* \circ s = s_1 \circ A^*$, avec un $s_1 \in G_1$; l'ensemble des $(A^*(x), B(r''(x)))$ est donc aussi celui des $(A^*(x), (r_1' \circ s_1)(A^*(x)))$. Puisque A^* induit une permutation de E, cet ensemble est celui des $(y, (r_1' \circ s)(y))$ pour $y \in E$; c'est $r_1' \circ s_1$, qui est un élément de R_1'. On a donc $C(R') \subset R_1'$; on verrait de la même manière que $\overset{-1}{C}(R_1') \subset R'$, ce qui démontre notre assertion.

2. <u>Les invariants structuraux du groupe</u> $\mathcal{G}$.

Nous allons maintenant indiquer un procédé général de construction de termes intrinsèques de la théorie $\mathcal{T}'$. Donnons-nous deux lettres K_0 et E_0 et un type W de l'échelle construite sur ces deux lettres.

Si nous remplaçons K_o et E_o par K et E (resp.: par K et E') dans W, nous obtenons un terme structural F_W (resp.: F'_W) de la théorie $\mathcal{C}$ (resp.: $\mathcal{C}'$) ; F'_W est l'ensemble des éléments d'un type de l'échelle construite sur K et E' seulement. Si $s \in \mathcal{G}$, s est une permutation de E ; en lui associant l'application identique de K, on obtient un couple qui admet une extension canonique s_W à F_W. Ceci dit, supposons donné un terme structural J de la théorie $\mathcal{C}$ tel que les relations suivantes soient vraies dans la théorie $\mathcal{C}$: J appartient à F_W et on a $s_W(J)=J$ pour tout $s \in \mathcal{G}$. Nous dirons alors que J est un <u>invariant structural</u> du groupe $\mathcal{G}$, de type W. S'il en est ainsi, nous allons voir que l'on peut associer à J un terme intrinsèque J' de la théorie $\mathcal{C}'$. Soit r' un élément de $\mathcal{R}'$: c'est une application de E sur E'. En lui associant l'application identique de K, on obtient un couple qui admet une extension canonique r'_W à F_W. L'image de J par r'_W ne dépend pas du choix de r'. En effet, si r'' est un élément quelconque de $\mathcal{R}'$, on peut écrire $r''=r'\circ s$, avec un $s \in \mathcal{G}$, d'où $r''_W = r'_W \circ s_W$ et par suite $r''_W(J)=r'_W(J)$ puisque $s_W(J)=J$. Puisqu'il existe un objet X et un seul tel que $r'_W(J)=X$ pour tout $r' \in \mathcal{R}'$, le terme ε_X (pour tout $r' \in \mathcal{R}'$, on a $r'_W(J)=X$) est structural dans la théorie $\mathcal{C}'$; il est évidemment de type F_W, et c'est par suite un terme intrinsèque.

Réciproquement, tout terme intrinsèque de la théorie $\mathcal{C}'$ peut se définir de la manière que nous venons d'indiquer au moyen d'un invariant structural de $\mathcal{G}$. Pour le montrer, observons que K, V et E' peuvent être considérés comme les ensembles de base d'une structure particulière de type $\mathcal{E}'$, dont les objets constitutifs sont $J_1, \dots J_m$ et $\mathcal{R}'$. Soit s' un élément du groupe $\mathcal{G}'$; montrons que s'

définit un automorphisme de notre structure (c'est-à-dire un isomorphisme de la structure avec elle-même). Considérons en effet le système formé des applications identiques de K et de V et de la permutation s' ; pour chaque indice k $(1 \leqq k \leqq m)$, l'extension canonique de ce système à l'ensemble des objets du type T_k de J_k est l'application identique, puisque T_k appartient à l'échelle construite sur K et V seulement. Reste à considérer l'extension canonique s'_0 de s' à l'ensemble des objets de type $\mathcal{R}'$; nous voulons montrer que $s'_0(\mathcal{R}')=\mathcal{R}'$. Un élément r' de $\mathcal{R}'$ est l'ensemble des $(x,r'(x))$, pour $x \in E$; puisque E est une partie de l'ensemble des objets d'un type construit sur K et V seulement, s'_0 conserve les éléments de E et transforme $(x,r'(x))$ en $(x,(s' \circ r')(x))$. Mais on sait que $G' = r' \circ G \circ r'^{-1}$; $s' \circ r'$ est donc de la forme $r' \circ s$, s étant un élément de G, et est par suite un repère, ce qui montre que s'_0 transforme entre eux les éléments de $\mathcal{R}'$, donc que le système formé des applications identiques de K et de V et de la permutation s' de E' est un automorphisme. Ceci dit, soit J' un terme intrinsèque de la théorie $\mathcal{T}'$. Ce terme appartient à un type W' de l'échelle construite sur K et E' seulement. Si $s' \in G'$, il résulte immédiatement du théorème général d'isomorphisme que l'extension canonique à l'ensemble des éléments du type W' du système formé des applications identiques de K et de V et de s' laisse l'élément J' fixe. Soit r' un repère quelconque ; r'^{-1} est alors une application de E' sur E ; le couple formé de l'application identique de K et de r'^{-1} admet une extension canonique $r'^{-1}_{W'}$ à l'ensemble des objets du type W'. L'image $r'^{-1}_{W'}(J')$ de J' par cette application ne dépend pas du choix de r' ; car, si r'' est un élément quelconque de $\mathcal{R}'$, on peut écrire $r''=s' \circ r'$, avec un $s' \in G'$, et notre assertion résulte de ce que $s'_{W'}(J')=J'$

11

Soit J l'image de J' par l'une quelconque des opérations $\overset{-1}{r'}_{W'}$; on vérifie tout de suite que J est la valeur d'un terme structural de la théorie $\mathcal{T}$. Si W est de type construit sur K_o et E_o de la même manière que W' sur K et E', J appartient à l'ensemble désigné plus haut par F_W . Soit s une opération quelconque de G ; définissons s_W comme plus haut. Si $r' \in \mathcal{R}'$, on a $r' \circ s = s' \circ r'$, où $s' \in G'$; il en résulte que $s_W \circ \overset{-1}{r'}_{W'} = s'_{W'} \circ \overset{-1}{r'}_{W'}$, ce qui montre que $s_W(J)=J$; J est donc un invariant structural du groupe G , et il est clair que J' est le terme intrinsèque qu'on en déduit par le procédé indiqué plus haut.

La théorie des termes et relations intrinsèques de la théorie $\mathcal{T}'$, qui est la théorie que nous avons en vue, est donc équivalente à la théorie des invariants structuraux du groupe G .

De plus, il résulte de ce que nous avons établi que, si S' est une structure d'espèce $\mathcal{E}'$, dont les ensembles de base sont K,V,E', toute opération s' du groupe fondamental G' de l'espace E' définit un automorphisme de la structure S', que l'on obtient en adjoignant à s' les applications identiques de K et de V . On voit d'ailleurs facilement que le groupe de tous les automorphismes de S' est isomorphe au produit du groupe G' par le groupe des automorphismes de la structure d'espèce $\mathcal{E}$ inhérente à S' ; ces derniers donnent lieu aux équivalences de la structure S' avec elle-même.

Le groupe G lui-même est un invariant structural de G , de type $P(P(E\times E)) = W$. Cherchons quels sont les invariants structuraux qui sont des sous-groupes de G . Soient s et t des opérations de G ; déterminons l'élément $s_W(t)$; t est l'ensemble des (x,tx), pour $x \in E$; $s_W(t)$ est donc l'ensemble des $(sx,stx)=(sx,st\overset{-1}{s}.sx)$, d'où $s_W(t)=st\overset{-1}{s}$.

Un sous-groupe $\mathcal{N}$ structuralement défini de $\mathcal{G}$ est donc un invariant structural si et seulement c'est un sous-groupe distingué de $\mathcal{N}$. Il correspond dans ce cas à $\mathcal{N}$ un terme intrinsèque $\mathcal{N}'$ de la théorie $\mathcal{E}'$, qui est un sous-groupe distingué isomorphe à $\mathcal{N}$ du groupe fondamental $\mathcal{G}'$. Supposons maintenant que nous ayons une certaine structure sur $\mathcal{N}$, définie par des objets constitutufs $L_1,\dots,L_q$ qui appartiennent à des types bien déterminés de l'échelle construite sur $\mathcal{N}$; nous supposons que cette structure est définie structuralement dans la théorie $\mathcal{E}$, c'est-à-dire que $L_1,\dots,L_q$ sont des termes structuraux de cette théorie. Il est clair qu'une condition nécessaire et suffisante pour que les L_i soient des invariants structuraux du groupe $\mathcal{G}$ est que les applications $t \rightarrow sts^{-1}$ $(t \in \mathcal{N})$, où $s \in \mathcal{G}$, soient des automorphismes de la structure considérée sur $\mathcal{N}$. S'il en est ainsi, les termes intrinsèques de $\mathcal{E}'$ qui correspondent à $L_1,\dots,L_q$ définissent sur $\mathcal{N}'$ une certaine structure bien déterminée de la même espèce que celle définie sur $\mathcal{N}$ par $L_1,\dots,L_q$.

3. <u>Augmentation du groupe</u> $\mathcal{G}$.

Supposons maintenant que l'on puisse définir structuralement dans la théorie $\mathcal{E}$ un groupe $\mathcal{G}_1$ de permutations du même ensemble E que plus haut qui contienne $\mathcal{G}$ comme sous-groupe. On définit alors au moyen de E et de $\mathcal{G}_1$ une espèce de structures $\mathcal{E}_1' = \mathcal{E}(E, \mathcal{G}_1)$. Nous allons montrer que cette espèce de structures est moins fine que l'espèce $\mathcal{E}'$. Considérons en effet dans la théorie $\mathcal{E}'$ l'ensemble $\mathcal{R}_1'$ de toutes les applications de E dans E' qui sont de la forme $r'\circ s_1$, où $s_1 \in \mathcal{G}_1$ et $r' \in \mathcal{R}'$. Les éléments de $\mathcal{R}_1'$ sont des applications biunivoques de E sur E'. Soit $r_0'\circ s_{1,0}$ l'une de ces applications. L'ensemble des

$(r_0'\circ s_{1,0})\circ s_1$, pour $s_1 \in \mathfrak{G}_1$, est identique à l'ensemble des $r_0'\circ s_1$ puisque $\mathfrak{G}_1$ est un groupe ; $\mathfrak{G}_1$ contenant $\mathfrak{G}$, cet ensemble contient $\mathcal{R}'$ et est par suite identique à $\mathcal{R}_1'$. Il est clair que $\mathcal{R}_1'$ est défini structuralement dans $\mathcal{E}'$. Par ailleurs, il résulte de ce que nous venons d'établir que $\mathcal{R}_1'$ est l'ensemble des repères d'une structure d'espèce $\mathcal{E}_1'$ dont les ensembles de base sont K, V et E' .

On déduit de là que tout espace E' qui est muni d'une structure S' d'espèce $\mathcal{E}'$ peut aussi être muni d'une structure S_1' bien déterminée d'espèce $\mathcal{E}_1'$; si G_1 est le groupe homologue dans la structure S' au groupe $\mathfrak{G}_1$ de la théorie $\mathcal{E}$ (ou $\mathcal{E}'$), l'ensemble des repères de S_1' est l'ensemble des $r'\circ s_1$, où s_1 parcourt G_1 et où r' est un repère quelconque de E' dans sa structure S' . On dit que la structure S_1' est la <u>structure d'espèce</u> $\mathcal{E}_1'$ <u>sous-jacente à</u> S' .

Donnons-nous réciproquement une structure S_1' d'espèce $\mathcal{E}_1'$, et soit R_1' l'ensemble des repères de cette structure. La structure S_1' admet une structure inhérente S d'espèce $\mathcal{E}$; soit G le groupe homologue à $\mathfrak{G}$ dans la structure S . Donnons-nous un repère quelconque $r_1'\in R_1'$, et soit $R'(r_1')$ l'ensemble des $r_1'\circ s$, pour $s\in G$. Si nous désignons par K,V et E' les ensembles de base de S_1' , il est clair que $R'(r_1')$ sera l'ensemble des repères d'une structure $S'(r_1')$ d'espèce $\mathcal{E}'$ sur E', et S_1' sera la structure sous-jacente de $S'(r_1')$. Si r_1' et r_1'' sont deux éléments de R_1' , une condition nécessaire et suffisante pour que $S'(r_1')$ et $S'(r_1'')$ soient identiques est que l'opération $\overset{-1}{r_1'}\circ r_1''$ de G_1 appartienne à G . Le groupe fondamental de $S'(r_1')$ est le groupe $r_1'\circ G\circ \overset{-1}{r_1'}$; on remarquera que, si $\mathfrak{G}_1$ contient $\mathfrak{G}$ comme sous-groupe distingué, les groupes fondamentaux de toutes les structures $S'(r_1')$, $r_1'\in R_1'$, sont identiques les uns aux autres. Les structures $S'(r_1')$ sont appelées les <u>structures d'espèce</u> $\mathcal{E}'$ <u>compatibles avec</u> S_1' .

4. <u>Le groupe affine</u>.

Nous allons maintenant supposer que l'espèce de structures est l'espèce des structures d'espaces vectoriels ; K est donc un corps et V un espace vectoriel sur K. L'espace vectoriel V admet une structure de groupe additif ; soit T le groupe des translations de V (rappelons qu'on appelle translation de V toute application de la forme $x \rightarrow x+a$ $(x \in V)$, où a est un élément fixe de V), et soit U le groupe des automorphismes de la structure d'espace vectoriel de V (groupe $GL(V)$). Si $t \in T$ et $u \in U$, on a $utu^{-1} \in T$; en effet, si t est l'application $x \rightarrow x+a$, utu^{-1} est l'application $x \rightarrow x+u(a)$. Il résulte de là que l'ensemble des éléments de la forme tu, où $t \in T$ et $u \in U$, est un groupe de permutations de V. Nous appellerons ce groupe le <u>groupe affine</u>, et nous le désignerons par A ; il est structuralement défini dans la théorie des espaces vectoriels. On observera que les groupes T et U n'ont que leur élément neutre en commun. En effet, toute opération de U conserve l'élément 0 de V, alors que la seule opération de T qui conserve 0 est l'élément neutre. Il résulte de là qu'un élément du groupe affine se met d'une manière et d'une seule sous la forme tu, avec $t \in T$ et $u \in U$; il est d'ailleurs clair qu'il se représente aussi d'une manière et d'une seule sous la forme $u't'$, avec $u' \in U$ et $t' \in T$.

Nous appellerons <u>géométrie affine</u> la théorie de l'espèce de structures $\mathcal{E}(V, A)$; toute structure de cette espèce sera appelée une <u>structure affine</u> ; un espace muni d'une structure affine sera appelé un <u>espace affine</u>.

Nous aurons aussi à considérer des espèces de structures $\mathcal{E}_0$ qui se déduisent de l'espèce $\mathcal{E}$ des espaces vectoriels en y adjoignant soit de nouveaux axiomes, soit de nouveaux objets constitutifs. Considérons l'une de ces espèces de structures ; elle comporte encore un corps de base K et un espace vectoriel V . Soit H un sous-groupe du groupe affine A de V qui puisse se définir structurellement dans la théorie de la structure $\mathcal{E}_o$; nous aurons à considérer les théories d'espèces de structures de la forme $\mathcal{E}_o(V, H)$. Ces géométries seront appelées <u>géométries du type affine</u>. Il résulte de ce que nous avons dit plus haut et du fait que l'espèce de structures $\mathcal{E}_o$ est plus fine que celle des espaces vectoriels que tout espace muni d'une structure géométrique du type affine possèdera une structure affine sous-jacente bien déterminée.

Considérons par exemple l'espèce de structures $\mathcal{E}_o(V, U)$, où U est défini comme plus haut. L'ensemble des repères R' de cette espèce de structures est un ensemble d'applications biunivoques r' de V sur E' ; si $r'_o \in R'$, les éléments de R' sont tous les $r'_o \circ u$, $u \in U$. Le repère r'_o permet de transporter à E' la structure d'espace vectoriel de V ; et il résulte de ce que nous venons de dire que la structure d'espace vectoriel ainsi définie sur E' ne dépend pas du choix du repère r'_o . On déduit de là, et du fait que $U \subset A$, que tout espace affine comporte une famille de structures d'espaces vectoriels compatibles avec sa structure affine. Inversement, tout espace vectoriel V sur un corps K comporte une structure affine sous-jacente bien déterminée; les ensembles de base de cette structure affine sont K, V et V , et ses repères sont toutes les opérations du groupe affine de l'espace vectoriel V .

5. Le groupe projectif.

Considérons maintenant l'espèce de structures $\mathcal{E}$ des structures d'espaces vectoriels de dimensions $\neq 0$. Elle comporte deux ensembles de base K et V et, en plus des axiomes des espaces vectoriels, l'axiome supplémentaire : V n'est pas de dimension 0. Désignons par E l'ensemble des sous-espaces de dimension 1, ou droites, de V ; cet ensemble est non vide et structuralement défini. Soit U le groupe des automorphismes de l'espace vectoriel V. Toute opération $u \in U$ permute entre elles les droites de V ; soit $g(u)$ la permutation ainsi définie de E. Il est clair que g est un homomorphisme de U sur un sous-groupe G du groupe des permutations de E ; le groupe G est structuralement défini dans la théorie $\mathcal{E}$. On l'appelle le groupe projectif attaché à l'espace V. La théorie de l'espèce de structures $\mathcal{E}(E, G)$ s'appelle la géométrie projective ; tout espace muni d'une structure de cette espèce s'appelle un espace projectif.

Nous aurons aussi à considérer des espèces de structures $\mathcal{E}_0$ qui se déduisent de $\mathcal{E}$ par adjonction de nouveaux axiomes ou de nouveaux objets constitutifs. Si H est un sous-groupe de G structuralement défini dans la théorie de $\mathcal{E}_0$, nous dirons que la théorie de l'espèce de structures $\mathcal{E}_0(E, H)$ est une géométrie du type projectif. Tout espace muni d'une structure géométrique d'un type projectif possède donc une structure sous-jacente d'espace projectif.

§ I. GÉOMÉTRIE AFFINE.

1. L'ESPACE DES TRANSLATIONS. VECTEURS LIBRES ET LIÉS.

Soit E un espace affine sur un corps K . L'espace E est donc défini par les données du corps K , de l'ensemble E , d'un espace vectoriel V sur K et d'un ensemble R d'applications biunivoques de V sur E , l'ensemble des repères affines de E . Les applications de R se déduisent toutes de l'une d'elles en les faisant précéder des opérations du groupe affine A_V de l'espace V . Nous désignerons par A le groupe fondamental de E ; tout repère affine r définit un isomorphisme $s \longrightarrow r \circ s \circ r^{-1}$ de A_V sur A .

Nous avons déjà indiqué dans l'introduction que l'espace E admet une famille de structures d'espace vectoriel compatibles avec sa structure d'espace affine. Précisons ici la nature de ces structures. Soit r un repère affine quelconque ; étant une application biunivoque de V sur E , r permet de transporter à E la structure d'espace vectoriel de V . Soit V_r la structure d'espace vectoriel ainsi définie sur E . L'élément nul de V_r est un certain point $P = r(0)$ de E . La structure d'espace vectoriel de V_r ne dépend que du point P . Soit en effet r' un autre repère tel que $r'(0)=P=r(0)$. On a alors $r'=r\circ s$, où $s \in A_V$; de plus, s conserve l'origine. On peut écrire $s = tu$, où t est une translation de V et u un automorphisme de V . On a $u(0)=0$, d'où $t(0)=0$; ce qui implique que t est l'élément neutre, d'où $s=u$. Puisque s est un automorphisme de l'espace vectoriel V , il est clair que les structures d'espaces vectoriels de V_r et de $V_{r'}$ sont identiques. Réciproquement, étant donné un point P quelconque de E , il y a un repère r tel que $r(0)=P$. Soient en effet r_o un repère quelconque et x_o le point de V tel que $r_o(x_o)=P$. Si t est la translation $x \longrightarrow x+x_o$, le repère $r=r_o \circ t$ possède la propriété requise. Si $r(0)=P$, nous dirons que V_r est l'espace vectoriel de centre P défini par E .

Considérons en particulier le cas où $E=V$, la structure affine de E étant la structure affine sous-jacente de la structure vectorielle de V. Soit e un point de E ; déterminons les opérations $\dotplus$ d'addition et $*$ de multiplication scalaire par les éléments de K dans l'espace vectoriel V_e de centre e défini par E. La translation $x \to x+e$ est un repère affine de E qui transforme 0 en e ; c'est donc un isomorphisme de l'espace vectoriel V sur V_e. On en déduit tout de suite les formules

$$x \dotplus y = x+y-e \quad ; \quad a*x = ax + (1-a)e \quad .$$

Revenant au cas général, soit s une opération du groupe fondamental A de E. Si r est un repère, il en est de même de $s \circ r$, et il est clair que s induit un isomorphisme de l'espace vectoriel V_r sur $V_{s\circ r}$.

Soit T_V le groupe des translations de l'espace vectoriel de base V ; c'est un sous-groupe distingué de A_V. Il correspond donc à T_V un sous-groupe T bien déterminé de A (cf. introduction, n°2) ; si r est un repère quelconque, on a $T = r \circ T_V \circ r^{-1}$. Le groupe T s'appelle le <u>groupe des translations</u> de E. Puisque $T = r \circ T_V \circ r^{-1}$, si r est un repère, on voit que T <u>est aussi le groupe des translations de n'importe lequel des espaces</u> V_r.

Le groupe T_V a une structure d'espace vectoriel définie de la manière suivante. L'application $f : t \to t(0)$ est une application biunivoque de T_V sur V ; la réciproque f^{-1} de f permet alors de transporter à T_V la structure d'espace vectoriel dde V. Les opérations $t \to utu^{-1}$ $(t \in T_V)$, où $u \in A_V$, sont des automorphismes de la structure d'espace vectoriel que nous venons de définir. En effet, tout $u \in A_V$ peut se représenter comme produit d'une translation et d'un automorphisme de V, et toute translation commute avec t ; il suffit donc de démontrer notre assertion dans le cas où u est un automorphisme de V. Mais on a alors

$(utu^{-1})(O) = u(t(O))$, et l'application $t \to utu^{-1}$ n'est autre que $f^{-1} \circ u \circ f$; c'est un automorphisme de l'espace vectoriel T_V. Il résulte de là que le groupe T des translations de E admet une structure d'espace vectoriel bien déterminée ; si r est un repère affine, l'application $t \to r \circ t \circ r^{-1}$ est un isomorphisme de l'espace vectoriel T_V sur l'espace vectoriel T. Le groupe T, muni de la structure d'espace vectoriel que nous venons d'y définir, s'appelle l'espace des translations de E.

Si $P \in E$, l'application $t \to t(P)$ est un isomorphisme de l'espace des translations T de E sur l'espace vectoriel V_P de centre P défini par E. Soit en effet r un repère tel que $r(O)=P$. Désignons par g_r l'isomorphisme $\theta \to r \circ \theta \circ r^{-1}$ de T_V sur T ; l'application $t \to t(P)$ est alors $r \circ f \circ g_r^{-1}$, ce qui démontre notre assertion.

Le groupe des translations est un sous-groupe distingué du groupe fondamental A de E. Si t est une translation et $s \in A$, on appelle sts^{-1} la translation transformée de t par s. Il est clair que, pour tout $s \in A$, l'application $t \to sts^{-1}$ est un automorphisme de l'espace des translations de E.

Etant donnés deux points P et Q de E, il existe une translation et une seule de E qui amène P en Q. Soit en effet r un repère quelconque ; il existe une translation et une seule de l'espace vectoriel V_r qui amène P en Q, et cette translation est une translation de E. La translation qui amène P en Q se désigne souvent par $Q-P$. Le couple (P,Q) s'appelle le vecteur lié d'origine P et d'extrémité Q ; la translation $Q-P$ s'appelle le vecteur libre déterminé par P et Q. Deux vecteurs liés (P,Q) et (P',Q') sont dits équipollents si on a $Q'-P' = Q-P$; on dit quelquefois aussi que le vecteur lié (P,Q) est équipollent au vecteur libre $Q-P$. Si t est une translation et P un point de E, le point $t(P)$ se désigne souvent par $t+P$; on a donc $(Q-P)+P = Q$.

Si les vecteurs liés (P,Q) et (P',Q') sont équipollents, on dit que les points P,Q,Q',P', pris dans l'ordre où nous les avons écrits, sont les sommets d'un <u>parallélogramme</u>. Etant donnés trois points P,Q,P' de E, il existe un point Q' et un seul tel que P,Q,Q',P' soient les sommets d'un parallélogramme, à savoir le point $Q'=(Q-P)+P'$; Q' s'appelle le quatrième sommet du parallélogramme construit sur P,Q,P'.

Considérons l'un quelconque des espaces V_r, et désignons par $\dot{+}$ et $\dot{-}$ les opérations d'addition et de soustraction dans V_r. Il est alors clair que, si P et Q sont des points de E, $Q-P$ est la translation $X \to X \dot{+} (Q \dot{-} P)$ de V_r. On déduit de là les formules suivantes, où P,Q,P',Q' représentent des points de E :

$$P-Q = -(Q-P) \quad ; \quad (P-Q)+(Q-P')=P-P' \quad ; \quad (P-Q)+(P'-Q')=(P-Q')+(P'-Q).$$

Supposons maintenant que P,Q,Q',P' soient les sommets d'un parallélogramme. Les vecteurs liés (P,P') et (Q,Q') sont alors équipollents. On a en effet $(P'-P)-(Q'-Q)=(P'-P)+(Q-Q')=(P'-Q')-(P-Q)=0$, ce qui démontre notre assertion. Il en résulte que P,P',Q',Q sont encore les sommets d'un parallélogramme. De plus, on a $Q'-P=(Q-P)+(P'-P)$; Q' est donc la somme de Q et de P' dans l'espace vectoriel de centre P défini par E.

<u>Combinaisons linéaires de points.</u>

Soient $P_1,\dots,P_m$ des points de E et $a_1,\dots,a_m$ des éléments de K. Montrons que, si $\sum_{i=1}^{m} a_i=1$, le point $\sum_{i=1}^{m} a_i(P_i-P) + P$ (où P est un point quelconque de E) ne dépend pas du choix de P. Soit en effet P' un autre point de E. On a

$$\sum_{i=1}^{m} a_i(P_i-P')+P' = \sum_{i=1}^{m} a_i((P_i-P)+(P-P'))+P' =$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i(P_i-P) + (P-P') + P' = \sum_{i=1}^{m} a_i(P_i-P)+P \ ,$$

ce qui démontre notre assertion. Le point $\sum_{i=1}^{m} a_i(P_i-P)+P$ se désigne par la notation $\sum_{i=1}^{m} a_iP_i$; on dit que c'est une <u>combinaison linéaire des points</u> P_i . On aura soin d'observer que la notation $\sum_{i=1}^{m} a_iP_i$ ne représente pas un point de E si la somme $\sum_{i=1}^{m} a_i$ n'est pas égale à 1 .

Si p est une permutation quelconque des indices $1,\ldots,m$, on a évidemment $\sum_{i=1}^{m} a_iP_i = \sum_{i=1}^{m} a_{p(i)}P_{p(i)}$. Supposons maintenant que chacun des points P_i soit mis sous la forme $P_i = \sum_{j=1}^{n(i)} b_{ij}P_{ij}$ d'une combinaison linéaire de points P_{ij} (avec $\sum_{j=1}^{n(i)} b_{ij} = 1$). On a alors $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n(i)} a_ib_{ij} = 1$ et

$$\sum_{i=1}^{m} a_iP_i = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n(i)} a_ib_{ij}P_{ij} \ ;$$

nous laissons au lecteur le soin de faire la vérification, qui ne présente aucune difficulté.

Si la caractéristique du corps K ne divise pas m , on appelle <u>centre de gravité</u> des points $P_1,\ldots,P_m$ le point $\sum_{i=1}^{m} m^{-1}P_i$. Ce point ne dépend évidemment pas de l'ordre dans lequel sont rangés les points P_i . Si la caractéristique de K ne divise ni m ni m-1, on notera que le centre de gravité G des points $P_1,\ldots,P_m$ peut s'écrire $G = m^{-1}P_1 + m^{-1}(m-1)G_1$, où G_1 est le centre de gravité de $P_2,\ldots,P_m$.

Considérons maintenant plus particulièrement le cas où $m=2$. Soient P et Q des points de E et t un élément de K . Si $T=tP+(1-t)Q$ on a $T-P = t^{-1}(t-1)(T-Q)$ (si $t\neq 0$) ; aussi dit-on que T divise le vecteur (P,Q) dans le rapport $t^{-1}(t-1)$. Ce rapport n'est jamais égal à 1 ; mais, si u est un élément quelconque $\neq 1$, il y a un point T et un seul qui divise (P,Q) dans le rapport u ; ce point est

$$T = (1-u)^{-1}P+u(u-1)^{-1}Q .$$

Supposons la caractéristique de K différente de 2 ; le point qui divise (P,Q) dans le rapport -1 est alors $(1/2)P+(1/2)Q$; c'est le centre de gravité de P et Q . Ce point s'appelle le <u>milieu de</u> P <u>et de</u> Q , ou encore le milieu de (P,Q) .

Soient P,Q,P' et Q' les sommets d'un parallélogramme. Les milieux de (P,Q') et de (P',Q) sont alors identiques. Soit en effet M le milieu de (P',Q) ; on a donc $M-P' = Q-M$. Ajoutons $P'-P$ aux deux membres, et rappelons-nous que $P'-P = Q'-Q$; il vient $M-P = Q'-M$, ce qui montre que M est le milieu de (P,Q').

Soient $P_1,\dots,P_m$ $m(\geq 1)$ points de E ; supposons que la caractéristique de K ne divise pas $m(m-1)$. Soient G le centre de gravité de $P_1,\dots,P_m$ et G_1 celui des points P_j pour $j\neq 1$. Il résulte alors d'une formule établie un peu plus haut que G est le point qui divise (P_1,G_1) dans le rapport $1-m$.

2. VARIÉTÉS AFFINES.

<u>Définition 1.</u> <u>On appelle variété affine d'un espace affine</u> E <u>toute partie</u> L <u>de</u> E <u>telle qu'il existe un point</u> $P\in E$ <u>pour lequel</u> L <u>soit un sous-espace de la structure d'espace vectoriel de centre</u> P <u>de</u> E .

Le point P appartient alors nécessairement à L .

Toute opération du groupe fondamental de E transforme donc toute variété affine en une variété affine.

Considérons en particulier le cas où E est l'espace affine sous-jacent d'un espace vectoriel V . Les sous-espaces de V sont alors des variétés affines de E , et il en est de même des parties de V qui se se déduisent d'un sous-espace par une translation. Soit réciproquement L une variété affine quelconque de E , et soit e un point de V tel que L soit un sous-espace de la structure d'espace vectoriel V_e de centre e de E . La translation $x \to x-e$ est alors un isomorphisme de V_e sur V ; il en résulte immédiatement que $L = W+e$, W étant un sous-espace de V .

Proposition 1. Soient E un espace affine et T son espace des translations. Pour qu'une partie L de E soit une variété affine, il faut et suffit qu'il existe un sous-espace U de T et un point P de E tels que $L = U+P$; le sous-espace U est alors déterminé de manière unique par la donnée de L .

Soient L une variété affine et P un point de E tel que L soit un sous-espace de l'espace vectoriel V_P de centre P déterminé par E . Désignons par U l'ensemble des $Q-P$, pour Q L ; l'application $t \to t+P$ de T sur V_P étant un isomorphisme, il est clair que U est un sous-espace de T et que $L = U+P$. Réciproquement, si U est un sous-espace de T et $P \in E$, $U+P$ est un sous-espace de V_P et est par suite une variété affine. Soient Q' et P' des points quelconques de $U+P$; si $P' = t'_0+P$, $Q' = t'_1+P$, on a $Q'-P' = t'_1-t'_0 \in U$; U est donc l'ensemble des $Q'-P'$ pour tous les couples $(P',Q') \in L \times L$.

Corollaire 1. Si L est une variété affine de E et P' un point quelconque de L , L est un sous-espace de l'espace vectoriel de centre P' défini par E .

Ecrivons en effet $L = U+P$, où U est un sous-espace de T et $P \in E$. Nous avons vu que, si $Q' \in L$, on a $Q'-P' \in U$, d'où $U+P' \subset L$. Par ailleurs, si $Q \in L$, on a $Q-P' = (Q-P)+(P-P') = (Q-P)-(P'-P) \in U$, d'où $L \subset U+P'$, et $L = U+P'$, ce qui démontre le cor. 1 .

Corollaire 2.- Si L est une variété affine de E, toute translation t qui transforme au moins un point P de L en un point de L transforme L tout entière en elle-même.

Nous pouvons écrire $L = U+P$, où U est un sous-espace de T (cor. 1). On a $t+L = (t+U)+P$, et $t \in U$, d'où $t+U=U$, $t+L = L$.

L'espace U de la prop. 1 est donc l'espace de toutes les translations de E qui transforment L en elle-même.

Définition 2. Soit L une variété affine d'un espace affine E. L'espace des translations de E qui transforment L en elle-même s'appelle alors la direction de L, et se désigne par $\Delta(L)$. On dit que deux variétés affines sont parallèles si elles ont même direction, et qu'elles sont faiblement parallèles si la direction de l'une est contenue dans celle de l'autre.

Proposition 2. Soient L une variété affine de E, et P un point de E. Il y a alors une variété affine L' parallèle à L et une seule passant par P. Si une variété affine L'' est faiblement parallèle à L et passe par P, on a ou bien $L'' \subset L'$ ou bien $L' \subset L''$; dans le premier cas, L'' est parallèle à une variété affine contenue dans L. Réciproquement, toute variété affine parallèle à une variété affine contenue dans L est faiblement parallèle à L.

La seule variété affine parallèle à L passant par P est évidemment $\Delta(L)+P$. Si L'' est faiblement parallèle à L et passe par P, on a $L'' = \Delta(L'')+P$ et l'un des espaces $\Delta(L)$, $\Delta(L'')$ contient l'autre ; on a donc ou bien $L'' \subset L'$ ou bien $L' \subset L''$. Si $L'' \subset L'$, on a $\Delta(L'') \subset \Delta(L')$; si $P' \in L$, la variété affine $\Delta(L'')+P'$ est parallèle à L'' et contenue dans L'. La dernière assertion de la prop. 2 est évidente.

Corollaire. *Si deux variétés affines faiblement parallèles ont un point commun, l'une est contenue dans l'autre. Si elles sont parallèles, elles sont identiques.*

Cela résulte immédiatement de la prop. 2 .

Proposition 3. *Pour que deux variétés affines soient parallèles, il faut et suffit qu'il y ait une translation qui les transforme l'une en l'autre.*

Soient L et L' des variétés affines de E , P un point de L et P' un point de L'. On a $L = \Delta(L)+P$, $L' = \Delta(L')+P'$; si $\Delta(L') = \Delta(L)$, on a $L' = (P'-P)+L$. Par ailleurs, si s est une opération quelconque du groupe fondamental A de E , sL est évidemment une variété affine dont la direction est $s(\Delta(L))s^{-1}$; si s est une translation, s commute avec toute translation, et $s(\Delta(L))s^{-1} = \Delta(L)$.

Proposition 4.- *Soit L une partie non vide de E . Pour que L soit une variété affine, il faut et suffit que la condition suivante soit satisfaite : si $P_1,\ldots,P_m$ sont des points quelconques de L et $a_1,\ldots,a_m$ des éléments de K de somme 1 , on a $\sum_{i=1}^{m} a_i P_i$ L . Si le corps K contient plus de deux éléments, il suffit que la condition soit satisfaite pour $m=2$.*

Soit P_0 un point de L ; on a $\sum_{i=1}^{m} a_i P_i = \sum_{i=1}^{m} a_i(P_i-P_0)+P_0$. Si L est une variété affine, on a $L = \Delta(L)+P_0$, $P_i-P_0 \in \Delta(L)$ $(1 \leq i \leq m)$ et $\Delta(L)$ est un sous-espace de T ; il en résulte que $\sum_{i=1}^{m} a_i P_i \in L$. Supposons maintenant la condition satisfaite, et soit U l'ensemble des $Q-P_0$, $Q \in L$; on a donc $L = U+P_0$. Soient $t = Q-P_0$ un élément de U et a un élément de K ; on a $at + P_0 = aQ = (1-a)P_0$, d'où $at \in U$. Soient $t = Q-P_0$ et $t' = Q'-P_0$ des éléments de U ; on a $(t+t')+P_0 = Q+Q'+(-1)P_0 \in L$, d'où $t+t' \in U$, et U est un sous-espace de T , ce qui montre que L est

est une variété affine. Supposons maintenant que la condition soit satisfaite pour $m=2$ et que K comporte plus de deux éléments. On voit comme plus haut que la condition $t \in U$ entraîne $at \in U$ pour tout $a \in K$. Par ailleurs, utilisant les mêmes notations que plus haut, on a $at+(1-a)t' + P_0 = aQ + (1-a)Q' \in L$, d'où $at+(1-a)t' \in U$. On a donc $b(at+(1-a)t') \in U$ pour tout $b \in K$; il en résulte que $ct+c't' \in U$ toutes les fois que c et c' sont des éléments de K de somme $\neq 0$. Or, soient c et c' des éléments de K tels que $c \neq 0$, $c' \neq -c$, $c' \neq c+1$; l'élément $1.(ct+c't')+(c-c')t' = c(t+t')$ est dans U, et $t+t' = c^{-1}c(t+t') \in U$, ce qui démontre que U est un sous-espace de T.

Proposition 5. *Si l'intersection d'une famille* $(L_i)_{i \in I}$ *de variétés affines de l'espace affine E n'est pas vide, c'est une variété affine ; sa direction est l'intersection des directions des* L_i $(i \in I)$.

Soit en effet P un point de l'intersection. On a donc, pour tout $i \in I$, $L_i = \Delta(L_i)+P$, et $\bigcap_{i \in I} L_i = (\bigcap_{i \in I} \Delta(L_i))+P$; or l'ensemble $\bigcap_{i \in I} \Delta(L_i)$ est un sous-espace de l'espace T des translations, ce qui démontre la prop.5.

Soit S une partie non vide quelconque de l'espace affine E. Il y a au moins une variété affine contenant S, à savoir E lui-même. Il y a donc, en vertu de la prop.5, une plus petite variété affine contenant S, à savoir l'intersection de toutes les variétés affines qui contiennent S. Cette variété s'appelle la *variété affine engendrée par* S.

Proposition 6. *Soient* S *une partie non vide de l'espace affine* E *et* L *la variété affine engendrée par* S. *Les points de* L *sont alors ceux qui peuvent se représenter comme combinaisons linéaires de suites finies de points de* S.

Il résulte de la prop.4 que toute combinaison linéaire des points d'une suite finie de points de S appartient à L . Soit P_0 un point de S , et soit U le sous-espace de l'espace T des translations de E engendré par les $P-P_0$, $P\in S$. On a donc $U \subset \Delta(L)$; réciproquement, $U+P_0$ est une variété affine qui contient S et qui est évidemment contenue dans L , d'où $U+P_0=L$. Si donc $P\in L$, il existe des points $P_i \in S$ $(1\leq i\leq m)$ et des $a_i\in K$ tels que $P-P_0 = \sum_{i=1}^{m} a_i(P_i-P_0)$, et on a $P = \sum_{i=1}^{m} a_iP_i+(1-\sum_{i=1}^{m} a_i)P_0$, ce qui montre que P est combinaison linéaire des points $P_0,P_1,\dots,P_m$ de S .

Remarque. La démonstration montre que, si $P_0\in S$, la direction de la variété affine engendrée par S est l'espace vectoriel engendré par les $P-P_0$, $P\in S$.

Définition 3. On dit qu'une variété affine L de E est de dimension (resp.: codimension) finie si sa direction est de dimension (resp.: codimension) finie ; on appelle alors dimension (resp.: codimension) de L la dimension (resp.: codimension) de sa direction . On appelle droites (resp.: plans) les variétés affines de dimension 1 (resp.: 2) : on appelle hyperplans les variétés affines de codimension 1 .

Les variétés affines de dimension 0 sont évidemment les points de l'espace.

La notion de dimension s'applique en particulier à l'espace affine E tout entier, puisque E est une variété affine.

Proposition 7. Pour qu'une variété affine L soit de dimension finie, il faut et suffit qu'elle puisse être engendrée par un ensemble fini de points ; si elle est de dimension n, tout ensemble S qui engendre L contient un ensemble de $n+1$ points qui engendre L .

Cela résulte immédiatement des propriétés des espaces vectoriels et de la remarque qui précède la déf.3 .

Définition 4. On dit qu'une suite finie $(P_0,P_1,\ldots,P_m)$ à $m+1$ *termes de points de l'espace affine* E *est affinement libre si la variété affine engendrée par les points* P_i $(0 \leqq i \leqq m)$ *est de dimension* m ; *on dit alors aussi que les points* P_i $(0 \leqq i \leqq m)$ *forment une base affine de la variété affine qu'ils engendrent.*

Proposition 8. Pour qu'une suite finie $(P_0,\ldots,P_m)$ *de points de l'espace affine* E *soit affinement libre, il faut et suffit qu'un point quelconque de la variété affine* L *engendrée par les* P_i *ne puisse se représenter que d'une seule manière comme combinaison linéaire des points* P_i $(0 \leq i \leq m)$.

Soit P un point de L , et soit $P = \sum_{i=1}^{m} a_i P_i + a_0 P_0$, avec $a_0 + \sum_{i=1}^{m} a_i = 1$: On a $P-P_0 = \sum_{i=1}^{m} a_i(P_i-P_0)$. Pour que $(P_0,\ldots,P_m)$ soit affinement libre, il faut et suffit que les P_i-P_0 $(1 \leqq i \leqq m)$ soient linéairement indépendants ; $P-P_0$ ne peut alors s'exprimer que d'une seule manière comme combinaison linéaire à coefficients dans K des P_i-P_0 , ce qui montre que la condition est nécessaire. Supposons la satisfaite ; si les b_i $(1 \leqq i \leqq m)$ sont des éléments de K tels que $\sum_{i=1}^{m} b_i(P_i-P_0)=0$, et si $b_0 = -\sum_{i=1}^{m} b_i$, on a $P = \sum_{i=0}^{m} (a_i+b_i)P_i$, d'où $b_i=0$ $(0 \leqq i \leqq m)$, et la suite $(P_0,P_1,\ldots,P_m)$ est affinement libre.

Définition 5. Soit $(P_0,\ldots,P_m)$ *une base affine d'une variété affine* L . *Si on écrit un point* $P \in L$ *sous la forme* $P = \sum_{i=0}^{m} x_i(P)P_i$, *les* $m+1$ *fonctions* $x_i : P \rightarrow x_i(P)$ $(0 \leqq i \leqq m)$ *sur* L *sont appelées les coordonnées barycentriques sur* L *relatives à la base* $(P_0,\ldots,P_m)$.

Ces fonctions sont liées par l'identité $\sum_{i=0}^{m} x_i = 1$.

Supposons l'espace E tout entier de dimension finie m ; son espace vectoriel de base V est alors aussi de dimension m ; soit $(v_1,\dots,v_m)$ une base de cet espace. Soit r un repère de E ; il est alors clair que les points $P_0=r(0)$, $P_i=r(v_i)$ $(1\leq i\leq m)$ forment une base affine de E , et que la donnée de cette base affine détermine complètement le repère r (une fois donnée la base $(v_1,\dots,v_m)$ de V) .

Proposition 9. Soient E un espace affine et L et M des variétés affines de E de dimensions finies p et q . Soit N la variété affine engendrée par $L\cup M$. Si $L\cap M\neq\emptyset$, la dimension de N est $p+q \dim(\Delta(L)\cap\Delta(M)) = p+q-\dim(L\cap M)$; si $L\cap M=\emptyset$, la dimension de N est $p+q+1-\dim(\Delta(L)\cap\Delta(M))$.

Si $L\cap M\neq\emptyset$, soit P un point de cet ensemble. On a $L=\Delta(L)+P$, $M=\Delta(M)+P$, et il en résulte tout de suite que $N=(\Delta(L)+\Delta(M))+P$; or on sait que la dimension de $\Delta(L)+\Delta(M)$ est $p+q-\dim(\Delta(L)\cap\Delta(M))$ (cf, prop.7,I,§3,n°3). Supposons maintenant que $L\cap M=\emptyset$; soient P un point de L et Q un point de M ; posons $L'=(Q-P)+L$. Les variétés L' et M ont un point commun ; elles engendrent donc une variété N' de dimension $r=p+q-\dim(\Delta(L)\cap\Delta(M))$. La translation Q-P transforme N en elle-même (cor.2 à la prop.1), d'où $N'\subset N$. Les points P et Q engendrent une droite D (car $Q-P\neq 0$), et il est clair que N est engendrée par D et N' . Par ailleurs, P n'est pas dans N' ; en effet, si on avait $P\in N'$, on aurait $P-Q\in\Delta(L)+\Delta(M)$, et on pourrait écrire $P-Q=t+(Q'-Q)$, avec $t\in\Delta(L)$ et Q' M , d'où $P=t+Q'$, et le point $Q'=(-t)+P$ de M appartiendrait à L . Il en résulte que $\Delta(D)\cap\Delta(N')=\{0\}$, donc que la dimension de N est $r+1-0=r+1$.

Proposition 10. Par deux points distincts P et Q d'un espace affine E , il passe une droite D de E et une seule.

Cela résulte immédiatement des définitions.

La droite qui passe par les points P et Q s'appelle souvent "la droite PQ" ou "la droite qui joint P à Q".

Soient D une droite affine et P,Q deux points distincts de cette droite ; (P,Q) est alors une base affine de D, et tout point R D se met d'une manière et d'une seule sous la forme $u(R)P+(1-u(R))Q$, avec $u(R)\in K$. La fonction $u : R\rightarrow u(R)$ s'appelle un <u>paramètre affine</u> sur D. Soit u' un autre paramètre affine sur D, relatif à un autre couple (P',Q') de points distincts de D. On peut écrire $P=aP'+(1-a)Q'$, $Q=bQ'+(1-b)Q'$, avec a et b dans K, $a\neq b$; il en résulte immédiatement que $u'=b+uc$, avec $c=a-b\neq 0$. Réciproquement, on voit tout de suite que, si b,c sont dans K et $c\neq 0$, $b+uc$ est un paramètre affine de D.

<u>Proposition 11</u>. <u>Soient E un espace affine sur un corps qui contient plus de deux éléments et L une partie non vide de E. Pour que L soit une variété affine, il faut et suffit que, P et Q étant des points distincts quelconques de L, la droite PQ soit contenue dans L.</u>

Cela résulte immédiatement de la prop.4.

On dit que des points $P_1,\ldots,P_m$ d'un espace affine sont <u>colinéaires</u> quand ils appartiennent tous à une même droite ; on dit que des droites $D_1,\ldots,D_n$ sont <u>coplanaires</u> quand elles appartiennent toutes à un même plan.

<u>Proposition 12</u>. <u>Pour que deux droites D et D' d'un espace affine E soient coplanaires, il faut et suffit qu'elles se rencontrent ou qu'elles soient parallèles.</u>

Pour que D et D' soient parallèles, il faut et suffit que la dimension de la variété affine qu'elles engendrent soit $\leqq 2$; la prop.12 résulte donc immédiatement de la prop.9.

3. ESPACES QUOTIENTS D'UN ESPACE AFFINE.

Soient E un espace affine sur un corps K , T l'espace des translation de E et D un sous-espace de T . La relation "$Q-P$ appartient à D" entre points P et Q de E est alors, comme on le vérifie tout de suite, une rélation d'équivalence dans E ; nous désignerons par E/D l'ensemble quotient de E par cette relation d'équivalence, et nous allons définir une structure affine sur l'espace E/D .

Si $P \in E$, nous désignerons par V_P l'espace vectoriel de centre P défini par E . La variété $D+P$ est alors un sous-espace de V_P , et E/D est identique à $V_P/(D+P)$. Or, $V_P/(D+P)$, qui est un espace vectoriel, possède une structure d'espace affine sous-jacent ; cette structure affine est une structure affine sur E/D ; montrons qu'elle ne dépend pas du choix de P . Soit P' un autre point de E ; la translation $P'-P$ est alors un isomorphisme de V_P sur $V_{P'}$, et cet isomorphisme transforme $D+P$ en $D+P'$; il définit donc par passage aux quotients un isomorphisme φ de $V_P/(D+P)$ sur $V_{P'}/(D+P')$. Cet isomorphisme en est naturellement aussi un de la structure affine $(E/D)_P$ définie par P sur celle, $(E/D)_{P'}$ définie par P' . Par ailleurs, $P'-P$, qui est une translation de E , en est aussi une de V_P ; il en résulte que φ est une translation de $V_P/(D+P)$, donc un automorphisme de $(E/D)_P$. On en conclut que les espaces affines $(E/D)_P$ et $(E/D)_{P'}$ sont identiques. Nous désignerons désormais par E/D l'espace affine muni de la structure que nous venons de définir ; nous l'appellerons l'*espace quotient de* E *par la direction* D .

Si t est une translation quelconque de E , t est compatible avec la ~~xxxxx~~ relation d'équivalence "$Q-P$ appartient à D" ; t définit donc par passage aux quotients une permutation $\bar{t}$ de l'ensemble E/D . Il est clair que $\bar{t}$ est une translation de E/D , et que l'application $t \longrightarrow \bar{t}$ est un un homomorphisme de T sur l'espace $\bar{T}$ des translations de E/D ; le noyau de cet homomorphisme est D . L'espace $\bar{T}$ des translations de E/D s'identifie donc canoniquement à l'espace quotient T/D .

Soit P un point quelconque de E , et soit V_P l'espace vectoriel de centre P défini par E . Il résulte immédiatement de la manière dont nous avons défini E/D que, si $\bar{P}$ est l'image de P dans l'application canonique de E sur E/D , l'espace vectoriel de centre $\bar{P}$ défini par E/D est $V_P/(D+P)$.

Proposition 13. Soient E un espace affine, T son espace des translations et D,D' des sous-espaces de T tels que T en soit la somme directe. Soit M une variété affine de direction D' de E . L'application canonique de E sur E/D induit alors une application biunivoque de M sur E/D .

Soit f cette application canonique. Si P,P' sont des points de M tels que $f(P)=f(P')$, on a $P'-P \in D \cap D' = \{0\}$ et $P=P'$; f induit donc une application biunivoque de M . Soient P un point quelconque de M et Q un point quelconque de E ; on peut écrire $Q-P = t+t'$, $t \in D$, $t' \in D'$. On a $(-t')+Q = t+P$; ce point est dans M , car $-t' \in D'$, et $f(t+P) = f(P)$ car $t \in D$; on en déduit que f est une application sur .

Corollaire. Deux variétés affines d'un espace affine E dont les directions sont des sous-espaces supplémentaires l'un à l'autre de l'espace des translations de E ont un point commun et un seul .

4. APPLICATIONS AFFINES.

Nous désignerons par E et F des espaces affines sur un même corps K .

Définition 6. Une application u de E dans F est dite affine si, pour tout point P E , u induit une application linéaire de l'espace vectoriel V_P de centre P défini par E dans l'espace vectoriel $F_{u(P)}$ de centre u(P) défini par F .

Ainsi, l'application canonique de E sur E/D , où D est un sous-espace de l'espace des translations de E , est une application affine.

Proposition 14. Soit u une application de l'espace E dans l'espace F . Pour que u soit affine, il faut et suffit que la condition suivante soit satisfaite : si $P_1,\dots,P_m$ sont des points quelconques de E et $a_1,\dots,a_m$ des éléments de K de somme 1 , on a $u(\sum_{i=1}^{m} a_i P_i) = \sum_{i=1}^{m} a_i u(P_i)$ Si le corps K contient plus de deux éléments, il suffit que cette condition soit satisfaite pour m=2 .

Soit P un point quelconque de E ; on a $\sum_{i=1}^{m} a_i P_i = \sum_{i=1}^{m} a_i (P_i - P) + P$, $\sum_{i=1}^{m} a_i u(P_i) = \sum_{i=1}^{m} a_i (u(P_i) - u(P)) + u(P)$. L'application $t \rightarrow t+P$ est un isomorphisme de l'espace T des translations de E sur l'espace vectoriel V_P de centre P défini par E ; l'application $t' \rightarrow t'+u(P)$ est un isomorphisme de l'espace T' des translations de F sur l'espace vectoriel $V_{u(P)}$ de centre u(P) de F . On peut faire correspondre à u une application v de T dans T' définie par la condition que $u(t+P) = v(t) + u(P)$ pour tout $t \in T$; pour que u soit affine, il sera nécessaire et suffisant que, pour tout $P \in E$, v soit linéaire. Or il résulte immédiatement des formules écrites plus haut qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que l'on ait $u(\sum_{i=1}^{m} a_i P_i) = \sum_{i=1}^{m} a_i u(P_i)$

quels que soient les points $P_1,\dots,P_m$ de E et les éléments a_i de somme 1 de K. Supposons maintenant la condition satisfaite dans le cas de $m=2$, et que K contienne plus de deux éléments. Si $P'\in E$ et $a\in K$, on aura $u((1-a)P+aP') = (1-a)u(P)+au(P')$; il en résulte immédiatement que $v(at)=av(t)$ pour tout $t\in T$. Ecrivant maintenant que $u(aQ+(1-a)Q')=au(Q)+(1-a)u(Q')$, on voit que $v(at+(1-a)t')=av(t)+(1-a)v(t')$ si $t,t'\in T$. Combinant ce résultat avec celui précédemment obtenu, on voit que $v(ct+c't')=cv(t)+c'v(t')$ si c,c' sont des éléments de K de somme $\neq 0$. Or, soient c,c' des éléments de K tels que $c\neq 0$, $c'\neq -c$, $c'\neq c+1$; on a $c(t+t')=ct+c't'+(c-c')t'$, d'où $v(c(t+t'))=v(ct+c't')+(c-c')v(t') = cv(t+t')$, d'où il résulte que $v(t+t')=v(t)+v(t')$. La prop.14 est donc démontrée.

<u>Remarque 1</u>. Si u est une application affine, l'application linéaire v de T dans T' dont on a fait usage dans la démonstration de la prop.1 ne dépend pas du point P. On a en effet, pour tout $Q\in E$, $u(t+Q) = u(t+(Q-P)) = v(t)+v(Q-P)+u(P) = v(t)+u(Q)$, ce qui démontre notre assertion. Nous appellerons v <u>l'application linéaire de T dans T' associée à u</u>.

<u>Remarque.2</u>. La démonstration de la prop.1 montre aussi que, pour qu'une application u de E dans F soit affine, il suffit qu'il existe au moins un point $P\in E$ tel que u soit une application linéaire de l'espace vectoriel de centre P défini par E dans l'espace vectoriel de centre $u(P)$ défini par F.

<u>Proposition 15</u>. <u>Soit u une application affine de l'espace E dans l'espace F. Si L est une variété affine de E, $u(L)$ est une variété affine de F. Si N est une variété affine de F et si $\overset{-1}{u}(N)\neq\emptyset$, $\overset{-1}{u}(N)$ est une variété</u>

<u>affine de</u> E . <u>Les variétés affines</u> $\overset{-1}{u}(Q)$, <u>pour tous les points</u> $Q \in u(E)$, <u>sont parallèles entre elles.</u>

Les deux premières assertions résultent immédiatement de la prop.14 et de la prop.4, n°2. Soit v l'application linéaire de l'espace T des translations de E dans celui de F associée à u ; il est alors clair que, si $Q \in u(E)$, la direction de $\overset{-1}{u}(Q)$ est le sous-espace $\overset{-1}{v}(0)$ de T , ce qui démontre la troisième assertion.

<u>Proposition 16.</u> <u>Soient</u> E_1, E_2, E_3 <u>des espaces affines sur un même corps</u>, u <u>une application affine de</u> E_1 <u>dans</u> E_2 et v <u>une application affine de</u> E_2 <u>dans</u> E_3 ; $v \circ u$ <u>est alors une application affine de</u> E_1 <u>dans</u> E_3 .

Cela résulte immédiatement des définitions.

On appelle <u>sous-espace affine</u> d'un espace affine E un espace affine F qui est une partie de E et qui est tel que l'application identique de F dans E soit affine. S'il en est ainsi, F est une variété affine de E . Soit réciproquement L une variété affine de E . Soit P un point de E ; L est alors un sous-espace de l'espace vectoriel V_P de centre P défini par E . La structure d'espace vectoriel de V_P induit sur L une structure d'espace vectoriel, et cette dernière définit sur L une structure d'espace affine ; il est clair que L , muni de cette structure d'espace affine, est un sous-espace de E . Cette condition détermine d'ailleurs l'espace affine L à une équivalence près. Soit en effet D la direction de L , et soit D' un sous-espace de l'espace T des translations de E supplémentaire à D . L'application canonique f de E sur E/D' induit une application biunivoque de L sur E/D' (prop.13, n°3), et, si on se donne sur L une structure quelconque de sous-espace affine de E , f est une application affine de L sur E/D' . Or il est clair que toute application affine biunivoque d'un espace affine sur un autre définit un isomorphisme entre ces deux espaces ; notre assertion résulte immédiatement de là. Conformément aux conventions faites dans l'introduction, nous ne distinguerons pas entre les diverses structures affines de L qui en font des sous-espaces de E .

Soit L un sous-espace affine de E . Si une application affine u d'un espace affine F dans E est telle que $u(F) \subset L$, u est une application affine de F dans L , comme il résulte tout de suite de la prop.14

Ceci dit, soit u une application affine de l'espace E dans l'espace F . Posons $M = u(E)$, et désignons par S la direction commune des variétés affines $\overset{-1}{u}(Q)$ pour $Q \in M$. Si $P \in E$, le point $u(P)$ ne dépend que de la classe d'équivalence de P dans l'espace E/S quotient de E par S ; on déduit donc de u par passage aux quotients une application u_2' de E/S dans F . Il résulte tout de suite de la prop.1 que u_2' est affine ; u_2' est par ailleurs également biunivoque. On peut considérer u_2' comme une application affine de E/S sur M ; en tant que telle, nous la désignerons par u_2 ; c'est évidemment un isomorphisme de E/S sur M . On peut écrire $u = u_3 \circ u_2 \circ u_1$, où u_1 est l'application canonique de E sur E/S et où u_3 est l'application identique de M dans F ; cette représentation s'appelle la <u>représentation canonique de</u> u .

Soit L une variété affine de l'espace E , et soit D sa direction. Choisissons un sous-espace D' de l'espace des translations de E qui soit supplémentaire à D . L'application canonique f de E sur E/D' induit alors un isomorphisme j de L , considéré comme sous-espace de E , sur E/D' ; l'application $\overset{-1}{j} \circ f$ s'appelle la <u>projection de</u> E <u>sur</u> L <u>parallèlement à la direction</u> D' . Si M est un sous-espace quelconque de E dont la direction est supplémentaire à D' dans l'espace des translations, $\overset{-1}{j} \circ f$ induit un isomorphisme de M sur L .

 37

<u>Proposition 17</u> (théorème de Thales).- <u>Soient</u> H_1, H_2, H_3 <u>trois hyperplans parallèles mutuellement distincts de l'espace affine</u> E . <u>Si</u> D <u>est une droite de</u> E <u>qui n'est pas faiblement parallèle aux hyperplans</u> H_i , D <u>rencontre ces hyperplans en des points</u> P_1, P_2, P_3 . <u>Le point</u> P_3 <u>divise</u> (P_1, P_2) <u>dans un rapport qui ne dépend pas de la droite</u> D .

Soit Δ la direction commune des hyperplans H_i . Il est clair que Δ est supplémentaire à la direction de D dans l'espace des translations de E , et D rencontre chacun des H_i en un point P_i et un seul. La projection de E sur D parallèlement à Δ se met sous la forme $j \circ f$, où f est l'application canonique de E sur E/Δ et j un isomorphisme de E/Δ sur D . Si donc m est le rapport dans lequel H_3 divise (H_1, H_2) dans l'espace E/Δ , qui est une droite, le point P_3 divise (P_1, P_2) dans le rapport m ; ce qui démontre la prop. 17 .

<u>Fonctions affines.</u>

Tout corps K possède une structure d'espace vectoriel sur K , donc aussi une structure d'espace affine sur K . Si E est un espace affine sur K , on appelle <u>fonction affine</u> sur E toute application affine de E dans K . Soient P un point de E et V_P la structure d'espace vectoriel de centre P définie par E . Si u est une fonction affine, c'est une application linéaire de V_P dans l'espace vectoriel $K_{u(P)}$ de centre $u(P)$ défini par K . Ce dernier se déduit de l'espace vectoriel K par la translation $z \rightarrow z+u(P)$; on en déduit que $u=u(P)+u'$ où u' est une fonction linéaire sur V_P ; réciproquement, il est clair que toute fonction de cette forme est affine. On déduit de là que <u>les fonctions affines sur</u> E <u>forment un espace vectoriel à droite sur</u> K ; cet espace est engendré par les fonctions linéaires sur V_P (où P est un point quelconque de E) et par les applications constantes de E dans K .

Soit L une variété affine de E . Prenant pour P un point de L , on voit que L peut se définir comme l'ensemble des solutions d'un système d'équations $u_i=0$ $(i \in I)$, où les u_i sont des fonctions affines. Si L est de codimension finie m , L peut se représenter comme ensemble des solutions d'un système de m équations $u_1=0,\dots,u_m=0$, où $u_1,\dots,u_m$ sont des fonctions affines. De plus, toute fonction affine nulle sur L est combinaison linéaire de $u_1,\dots,u_m$.

Soient réciproquement $(u_i)_{i\in I}$ une famille de fonctions affines et $(a_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de K . Il est clair que, si le système d'équations $u_i=a_i$ $(i \in I)$ admet au moins une solution, les solutions de ce système forment une variété affine. Nous limitant au cas où E est de dimension finie, nous allons chercher à quelle condition ce système admet au moins une solution. Soient P un point de E et V_P l'espace vectoriel de centre P défini par E ; on peut écrire $u_i=u_i'+b_i$, les u_i' étant des fonctions linéaires sur V_P et les b_i des constantes ; notre système est alors équivalent au système linéaire Σ : $u_i'= a_i-b_i$. Pour que ce système n'admette aucune solution, on sait qu'il faut et suffit qu'il existe des scalaires c_i $(i \in I)$, dont un nombre fini seulement sont $\neq 0$, tels que $\sum_{i\in I} u_i'c_i=0$, $\sum_{i\in I}(a_i-b_i)c_i \neq 0$; la fonction affine $\sum_{i\in I}(u_i-a_i)c_i$ est alors une constante $\neq 0$. On voit donc que, <u>pour que le système d'équations</u> $u_i-a_i=0$ $(i \in I)$, <u>où les</u> u_i <u>sont des fonctions affines, représente une variété affine, il faut et suffit que l'espace vectoriel U engendré par les fonctions affines</u> u_i-a_i $(i \in I)$ <u>ne contienne aucune fonction constante</u> $\neq 0$. Supposons qu'il en soit ainsi. Utilisant les mêmes notations que plus haut, on voit qu'une condition nécessaire et suffisante pour que $\sum_{i\in I} u_ic_i=0$ est que $\sum_{i\in I} u_i'c_i=0$;

on en déduit que la codimension de la variété affine représentée par les équations $u_i - a_i = 0$ est égale à la dimension de l'espace vectoriel engendré par les u_i .

Revenant au cas général (où E peut être de dimension infinie), on voit que toute variété affine L de E peut se représenter comme intersection d'hyperplans ; et, si L est de codimension finie m , L peut se représenter comme intersection de m hyperplans.

5. HOMOTHÉTIES.

Rappelons que nous avons appelé homothétie d'un espace vectoriel V toute application linéaire de V sur lui-même qui conserve tous les sous-espaces de dimension 1 de V . Soit K le corps de base de V ; une homothétie h de V est une application de la forme $x \to ax$ $(x \in V)$, où a est un élément $\neq 0$ du centre de K ; cet élément a, qui est bien déterminé par la donnée de h , s'appelle le rapport de l'homothétie h . Soit H_V le groupe des homothéties de V ; puisque tout automorphisme de V transforme les espaces de dimension 1 en espaces de dimension 1 , il est clair que H_V est un sous-groupe distingué du groupe des automorphismes de V . Soit maintenant t une translation de V , et soit $t(x) = x+x_0$ pour $x \in V$, où x_0 est un élément fixe de V . Si h est l'homothétie de rapport a de V , on a $(tht^{-1})(x) = ax+(1-a)x_0$, d'où $tht^{-1} = t'h$, si t' est la translation $x \to x+(1-a)x_0$. On en déduit que le groupe H_V^t engendré par H et par le groupe des translations de V est un sous-groupe distingué du groupe affine A_V de V . Ce groupe s'appelle le groupe des homothéties-translations de V .

Soient maintenant E un espace affine et V son espace vectoriel de base. Puisque H'_V est un sous-groupe distingué du groupe affine A_V de V, il lui correspond un sous-groupe distingué H' bien déterminé du groupe fondamental A de E. Ce groupe s'appelle le groupe des homothéties-translations de E.

Proposition 18.- Soit h un élément du groupe des homothéties-translations de l'espace affine E. Si h n'est pas une translation, il existe un point P et un seul tel que $h(P)=P$; h est un homothétie de l'espace vectoriel V_P de centre P défini par E.

Soient V l'espace vectoriel de base de E et r un repère de E. L'opération $h'=r^{-1}.h.r$ appartient au groupe des homothéties-translations de V, et se met par suite sous la forme th'_1, où t est une translation de V et h'_1 une homothétie de V. De plus, h n'étant pas une translation, le rapport a de h'_1 est $\neq 1$. Posons $t(0)=x_0$; on a alors, pour $x\in V$, $h'(x)=ax+x_0$; pour que $h'(x)=x$, il est nécessaire et suffisant que $x=(1-a)^{-1}x_0$. Il existe donc un point P et un seul de E tel que $h(P)=P$. Supposons maintenant que r soit tel que $r(0)=P$. On a alors $h'(0)=0$, d'où $x_0=0$ et $h'=h'_1$; puisque r est un isomorphisme de V sur V_P, h est une homothétie de V_P.

Définition 7. On appelle homothétie de l'espace affine E toute application h de E dans lui-même telle que, pour au moins un point P, h soit une homothétie de l'espace vectoriel V_P de centre P défini par E.

Il est clair que toute homothétie h de E appartient au groupe fondamental de E : Si h n'est pas l'application identique, il n'y a qu'un seul point P qui possède la propriété énoncée dans la déf.1 ; le point P s'appelle le centre de h, et le rapport de l'homothétie h de V_P s'appelle le <u>rapport</u> de h . On appelle rapport de l'application identique le nombre 1 .

<u>Proposition 19. Pour qu'une opération h du groupe fondamental de l'espace affine E soit une homothétie, il faut et suffit que h transforme toute variété affine en une variété parallèle et ne soit pas une translation distincte de l'application identique. Si a est le rapport de h , et si P,Q sont des points de E , on a</u> $h(Q)-h(P) = a(Q-P)$.

Soit h une homothétie distincte de l'identité et de rapport a . Si P_0 est le centre de h , on a $h(Q-P_0)= a(Q-P_0)$ pour tout $Q \in E$, comme il résulte tout de suite du fait que l'application $t \rightarrow t+P_0$ de l'espace T des translations de V dans l'espace vectoriel V_{P_0} de centre P_0 défini par V est un isomorphisme. Il en résulte que $h(Q-P)=a(Q-P)$ quels que soient P et Q dans V , donc que l'application $t \rightarrow hth^{-1}$ de T dans lui-même conserve tous les sous-espaces vectoriels de T . On en déduit immédiatement que h transforme toute variété affine en une variété parallèle. Soit réciproquement h une opération du groupe fondamental de E qui possède cette propriété. Puisque h transforme toute droite en une droite parallèle, on voit que, si P,Q sont dans E , $h(Q)-h(P)$ est un multiple scalaire de $Q-P$; l'application $t \rightarrow hth^{-1}$ de T dans lui-même conserve donc tous les espaces de dimension 1 , et est par suite une homothétie. Soit a son rapport. Il existe au moins une homothétie h_1 de E de rapport a ; on voit alors que $h_1^{-1}h$ commute avec tous les éléments de T . Or, si V est un espace vectoriel, toute opération s du groupe affine A_V de V qui commute avec les translations est elle-même une translation. Ecrivons en effet $s = \theta u$, où θ est une translation et u un automorphisme de V ; u commute alors avec toute translation, d'où $u(x+y) = ux + y$ quels que soient x,y dans V , et par suite $uy=y$: u est l'application identique, ce qui démontre notre assertion. L'application $h_1^{-1}h$ est donc une translation, et h appartient au groupe des homothéties-translations. N'étant pas une translation distincte de l'identité, c'est une homothétie (prop.18).

Proposition 20.- Soient h et h' des homothéties distinctes de l'identité de l'espace affine E, a et a' leurs rapports, P et P' leurs centres. Si $aa'\neq 1$, hh' est une homothétie de rapport aa' et de centre $(1-a)P+aP'$. Si $aa'=1$, hh' est la translation $(1-a)(P-P')$.

Soit Q un point de E. On a $h'(Q)=a'(Q-P')+P'$, d'où $hh'(Q)-h(P') = aa'(Q-P')$. Or on a $h(P')=a(P'-P)+P$; il vient donc $hh'(Q) = aa'(Q-P')+(1-a)P+aP'$. La prop.20 résulte immédiatement de là.

On appelle d'une manière générale rapport d'une opération h du groupe des homothéties translations le nombre $a(h)$ égal au rapport de h si h est une homothétie, à 1 si h est une translation. On voit que l'application $h\rightarrow a(h)$ est un homomorphisme du groupe H' des homothéties-translations sur le groupe des éléments $\neq 0$ du centre du corps de base. Le noyau de cet homomorphisme est le groupe des translations.

6. PRODUITS D'ESPACES AFFINES.

Soient E et F des espaces affines sur un même corps K. Nous allons alors définir une structure d'espace affine sur le produit $E\times F$. Soient V et W les espaces vectoriels de base de E et de F, et R et S les ensembles de repères de E et de F. Si $r\in R$, $s\in S$, l'application $(x,y)\to(rx,sy)$ est une application biunivoque de l'espace vectoriel $V\times W$ sur $E\times F$; elle définit donc une structure affine sur $E\times F$. Cette structure ne dépend pas des choix de r et de s. Soient en effet r' et s' des éléments quelconques de R et de S ; on a $r'=r\circ a$, $s'=s\circ b$, où a,b appartiennent respectivement aux groupes affines A_V de V et B_W de W. Il y a donc des automorphismes v de V et w de W et des éléments $x_0\in V$, $y_0\in W$ tels que $(ax,by)=(vx+x_0, wy+y_0)$ quels que soient $x\in V$, $y\in W$; cette formule montre que l'application $(x,y)\to(ax,by)$ appartient au groupe affine de $V\times W$, donc que la structure affine définie sur $E\times F$ par r' et s' est la même que celle définie par r et s. Nous appellerons <u>produit des espaces affines E et F</u> l'espace affine que nous venons de définir, et nous le désignerons par $E\times F$. Les propriétés suivantes sont évidentes : les projections de $E\times F$ sur E et sur F sont des applications affines ; l'application $(P,Q)\to(Q,P)$ est un isomorphisme de l'espace affine $E\times F$ sur $F\times E$; si E,F,G sont trois espaces affines, l'application canonique de $(E\times F)\times G$ sur $E\times(F\times G)$ est un isomorphisme du premier de ces espaces affines sur le second.

Soient P un point de E et Q un point de F. Désignons par V_P et W_Q les espaces vectoriels de centres P et Q définis par E et par F. L'espace vectoriel de centre (P,Q) défini par $E\times F$ est alors évidemment $V_P\times W_Q$. Il en résulte que, si L et M sont des variétés affines de E

et de F , $L \times M$ est une variété affine de $E \times F$.

<u>Proposition 21.- Soient</u> E <u>et</u> F <u>des espaces affines sur un même corps. Pour qu'une application</u> u <u>de</u> E <u>dans</u> F <u>soit affine, il faut et suffit que son graphe soit une variété affine de</u> $E \times F$.

Soient P un point de E , V_P l'espace vectoriel de centre P défini par E et W_Q l'espace vectoriel de centre $Q=u(P)$ défini par F . Pour que u soit une application linéaire de V_P dans W_Q , il faut et suffit que son graphe soit un sous-espace vectoriel de $V_P \times W_Q$. Soient en effet x et y des éléments de V_P , et a et b des éléments du corps de base K . Si G est le graphe de u , G contient un élément et un seul dont la projection sur E est $ax+by$, à savoir $(ax+by, u(ax+by))$. Pour que u soit linéaire, il faut et suffit que, quels que soient a,b,x,y, cet élément soit $(ax+by, aux+buy)$ cette condition signifie évidemment que G est un sous-espace de $V_P \times W_Q$. La prop.21 résulte immédiatement de là .

Si $P_1,\dots,P_m$ sont des points de E , $(Q_1,\dots,Q_m)$ des points de F et $a_1,\dots,a_m$ des éléments de K de somme 1 , il est clair que

$$\sum_{i=1}^{m} a_i(P_i,Q_i) = \left(\sum_{i=1}^{m} a_iP_i \, , \sum_{i=1}^{m} a_iQ_i\right) .$$

Si E et F sont des espaces de dimensions finies m et n , $E \times F$ est évidemment de dimension $m+n$.

§ II - GÉOMÉTRIE AFFINE SUR UN CORPS ORDONNÉ.

Nous supposerons dans ce § que l'on considère un espace affine E sur un corps K qui est muni d'une structure de corps ordonné. Nous désignerons par K^+ l'ensemble des éléments $\geqslant 0$ de K.

1. ENSEMBLES CONVEXES.

Soient P et Q des points distincts de l'espace affine E, et soit D la droite passant par ces deux points. Tout paramètre affine u sur la droite D est une application biunivoque de D sur K ; cette application permet de transporter à D la structure d'ordre de K. Cherchons à comparer les structures d'ordre définies sur D par deux paramètres affines u et u'. L'espace des fonctions affines sur D (considéré comme espace affine) est de dimension 2 et engendré par 1 et u ; on a donc $u'=au+b$, où a et b sont des constantes, et $a\neq 0$. Si $a > 0$, les structures d'ordre définies par u et u' sont identiques ; si $a < 0$, elles sont opposées. Or, deux structures d'ordre opposées ont les mêmes intervalles. Les intervalles fermés et ouverts d'extrémités P et Q de D sont donc les mêmes pour les deux structures d'ordre que l'on peut définir sur D.

Définition 1. Soient P et Q des points distincts de E. L'intervalle fermé d'extrémités P et Q dans l'une quelconque des deux structures d'ordre opposées que l'on peut définir sur la droite PQ s'appelle le segment d'extrémités P et Q ; l'intervalle ouvert d'extrémités P et Q s'appelle le segment ouvert d'extrémités P et Q.

On complète cette définition en convenant que, si $P\in E$, le segment d'extrémités P et P est l'ensemble $\{P\}$, tandis que le segment ouvert d'extrémités P et P est $\emptyset$. On voit tout de suite que le segment d'extrémités P et Q est l'ensemble des points de la forme $aP+bQ$ où a et b sont des éléments de K^+ de somme 1 (c'est évident si $P=Q$; sinon, il suffit de considérer le paramètre affine sur la droite PQ qui prend la valeur 1 en Q et 0 en P). Si P et Q sont distincts, le segment ouvert d'extrémités P et Q est l'ensemble des points de la forme $aP+bQ$, où a et b sont des éléments >0 de K de somme 1.

Il est clair que toute intersection non vide d'un nombre fini de segments d'une même droite est un segment, et que toute intersection d'un nombre fini de segments ouverts d'une même droite est un segment ouvert.

Si P,Q,R sont des points colinéaires, nous dirons que R est <u>entre P et Q</u> s'il appartient au segment d'extrémités P et Q. On voit tout de suite que, si P,Q et R sont trois points colinéaires mutuellement distincts, l'un et un seul de ces points est entre les deux autres.

Au lieu de dire "le segment d'extrémités P et Q", on dit souvent, d'une manière abrégée, "le segment PQ".

<u>Définition 2</u>. <u>On dit qu'une partie</u> C <u>non vide de</u> E <u>est convexe si la condition suivante est satisfaite</u> : P <u>et</u> Q <u>étant des points quelconques de</u> C, <u>le segment</u> PQ <u>est contenu dans</u> C.

Soit g une application affine de E dans un espace affine E'. Si P et Q sont des points de E, l'image par g du segment PQ est, comme on le voit tout de suite, le segment $g(P)g(Q)$. Il en résulte immédiatement que, si C est une partie convexe de E, $g(C)$ est convexe dans E', et que, si C' est une partie convexe de E' et si $\overset{-1}{g}(C')\neq\emptyset$, $\overset{-1}{g}(C')$ est une partie convexe de E.

D'autre part, il est clair que toute intersection non vide de parties convexes de E est convexe. Si F est une partie non vide de E , l'intersection des ensembles convexes contenant F (il y en a au moins un, à savoir E) s'appelle l'<u>ensemble convexe engendré par</u> F .

<u>Proposition 1. Soit</u> $F=\{P_0,\ldots,P_p\}$ <u>un ensemble fini non vide de points de</u> E ; <u>l'ensemble convexe</u> C <u>engendré par</u> F <u>est alors l'ensemble</u> C' <u>de tous les points de la forme</u> $\sum_{i=0}^{p} a_iP_i$, <u>les</u> a_i <u>étant des éléments de</u> K^+ <u>de somme</u> 1 .

Montrons d'abord que C' est convexe. Soient $P=\sum_{i=0}^{p} a_iP_i$ et $Q=\sum_{i=0}^{p} b_iP_i$ des points de C', les a_i et les b_i étant des éléments de K^+ tels que $\sum_{i=0}^{p} a_i = \sum_{i=0}^{p} b_i = 1$. Soient a et b des éléments de K^+ de somme 1 ; on a $aP+bQ = \sum_{i=0}^{p}(aa_i+bb_i)P_i$, $aa_i+bb_i \in K^+$ et $\sum_{i=0}^{p}(aa_i+bb_i)=1$ ce qui montre que $aP+bQ$ est dans C' . L'ensemble C' contient évidemment F ; il contient donc C . Pour montrer que C'=C , nous procéderons par récurrence sur p . C'est évident si p=0, car alors $C'=C=\{P_0\}$. Supposons que $p>0$ et que notre assertion soit vraie pour p-1 . Soit $P=\sum_{i=0}^{p} a_iP_i$ un point de C' . Si $a_0=1$, les conditions $\sum_{i=1}^{p} a_i=1-a_0=0$, $a_i\in K^+$ entraînent $a_i=0$ $(1\leq i\leq p)$, et $P=P_0\in C$. Si $a_0\neq 1$, on peut écrire $P=a_0P_0+b\sum_{i=1}^{p} b^{-1}a_iP_i$, où $b=1-a_0=\sum_{i=1}^{p} a_i$ est dans K^+. Il résulte de notre hypothèse inductive que le point $\sum_{i=1}^{p} b^{-1}a_iP_i$ est dans l'ensemble convexe engendré par $P_1,\ldots,P_p$, donc <u>a fortiori</u> dans C . Le point P appartient au segment ayant pour extrémités P_0 et le point $\sum_{i=1}^{p} b^{-1}a_iP_i$; il est donc dans C .

<u>Corollaire. Si</u> $P_0,\ldots,P_p$ <u>sont des points d'un ensemble convexe</u> C , <u>le centre de gravité de ces points appartient à</u> C .

On notera que le centre de gravité existe puisque le corps K, étant un corps ordonné, est de caractéristique 0. Ceci dit, le corollaire résulte immédiatement de la prop.1 .

Définition 3. Si F est une partie finie affinement libre non vide de E, l'ensemble convexe engendré par F s'appelle le simplex engendré par F ; nous le désignerons par $S(F)$.

La variété affine engendrée par $S(F)$ est évidemment la même que celle engendrée par F. Si elle est de dimension p, c'est-à-dire si F est un ensemble de $p+1$ points, nous dirons que $S(F)$ est un simplex de dimension p. Un simplex de dimension 0 est un point ; un simplex de dimension 1 est un segment ; un simplex de dimension 2 s'appelle un triangle, et un simplex de dimension 3, un tétraèdre.

2. REGIONS POLYEDRALES CONVEXES.

Le corps K possède une structure d'espace affine de dimension 1. L'ensemble K^+ est évidemment une partie convexe de K, et il en est de même de l'ensemble K^- des éléments $\leqslant 0$ de K. Les ensembles K_*^+ et K_*^- des éléments >0 et des éléments <0 de K sont également convexes, comme on le voit tout de suite. De plus, toute partie convexe C de K qui ne contient pas 0 est contenue dans l'un des ensembles K_*^+ et K_*^-. Soient en effet x et y des éléments distincts de C ; on a $0=y(y-x)^{-1}x-x(y-x)^{-1}y$; puisque $0\notin C$, $y(y-x)^{-1}$ et $-x(y-x)^{-1}$ ne peuvent pas être de même signe (étant de somme 1, ils seraient en effet alors >0), ce qui montre que x et y sont de même signe.

Soit H un hyperplan de E. Désignons par u une fonction affine $\neq 0$ nulle sur H, et posons

$$U^+ = \overset{-1}{u}(K^+) \;;\; U^- = \overset{-1}{u}(K^-) \;;\; U^+_* = \overset{-1}{u}(K^+_*) \;;\; U^-_* = \overset{-1}{u}(K^-_*) .$$

L'application u de E dans K étant affine, les quatre ensembles ainsi définis sont convexes. De plus, il résulte de ce que nous avons dit quelques lignes plus haut que toute partie convexe du complémentaire $\complement H$ de H est contenue dans l'un des ensembles U^+_*, U^-_* ; ces ensembles sont donc les parties convexes maximales de $\complement H$, ce qui prouve que l'ensemble $\{U^+_*, U^-_*\}$ ne dépend pas du choix de u, H étant donné. Il en est de même de l'ensemble $\{U^+, U^-\}$, puisque $U^+ = U^+_* \cup H$, $U^- = U^-_* \cup H$. Les ensembles U^+ et U^- sont appelés les <u>demi-espaces fermés</u> déterminés par H, tandis que U^+_* et U^-_* sont appelés les <u>demi-espaces ouverts</u> déterminés par H. Une partie A de E est dite <u>être d'un même côté de H</u> si elle est contenue dans l'un des ensembles U^+, U^- ; si elle est contenue dans l'un des ensembles U^+_*, U^-_*, elle est dite être <u>strictement d'un même côté de</u> H ; si A n'est pas d'un même côté de H, on dit que A <u>chevauche</u> H. Soient P et Q des points de E ; si l'ensemble $\{P,Q\}$ est d'un même côté de H (respt. : est strictement d'un même côté de H, ou chevauche H) on dit que P et Q sont d'<u>un même côté de</u> H (respt. : sont <u>strictement d'un même côté de</u> H, ou sont <u>de part et d'autre de</u> H). Pour qu'il en soit ainsi, il faut et suffit que $u(P)u(Q)$ soit $\geqslant 0$ (respt. : soit > 0, ou soit < 0). Si P et Q sont d'un même côté de H, le segment PQ est d'un même côté de H, comme il résulte du fait que U^+ et U^- sont convexes. De plus, si P et Q ne sont pas tous deux dans H, le segment PQ ne peut avoir en commun avec H que l'un des points P ou Q. En effet, si ni P ni Q n'est dans H, le segment PQ est strictement d'un même côté de H puisque U^+_* et U^-_* sont convexes ; si par exemple Q est dans H, mais non P, la droite PQ

ne peut avoir qu'un seul point en commun avec H , et il en est de même du segment PQ . Si P et Q sont de part et d'autre de H , le segment PQ rencontre H puisque toute partie convexe de $\complement H$ est contenue dans l'un des ensembles U_*^+ , U_*^- . Si P est un point de $\complement H$ et D une droite passant par P , il y a sur la droite D des points Q et R qui sont strictement d'un même côté de H et tels que le segment ouvert d'extrémités Q et R contienne P . Soit en effet v un paramètre affine sur D tel que $v(P)=0$. Si D rencontre H , soit a la valeur de v au point d'intersection de D et de H ; on peut alors prendre pour Q et R les points de D tels que $v(Q)=a/2$, $v(R) = -a/2$; sinon, on peut prendre pour Q et R les points tels que $v(Q)=1$, $v(R)=-1$. Si au contraire P est un point de H et D une droite passant par P et non contenue dans H , tout segment ouvert de la droite D contenant P chevauche H . En effet, si Q et R sont des points de D tels que P appartienne au segment ouvert d'extrémités Q et R , le segment QR a un point P distinct de Q et de R en commun avec H , et n'est par suite pas d'un même côté de H .

La fonction affine u étant définie comme plus haut, soit maintenant u' une fonction affine quelconque. Si les fonctions $1,u,u'$ sont linéairement indépendantes, on voit facilement que u' prend des valeurs aussi bien positives que négatives dans chacun des ensembles U_*^+ , U_*^- . S'il n'en est pas ainsi, on a $u'=ua+b$, où a et b sont des constantes ; chacun des ensembles $u'(U_*^+)$, $u'(U_*^-)$, $u'(U^+)$, $u'(U^-)$ admet alors b soit comme borne supérieure soit comme borne inférieure. Les fonctions de la forme ua , $a \in K$, sont donc les seules fonctions affines telles que 0 soit ou bien borne supérieure ou bien borne inférieure de l'un quelconque des ensembles $u'(U^+)$, $u'(U^-)$, $u'(U_*^+)$, $u'(U_*^-)$. Il en résulte que, si on sait qu'un ensemble U est un demi-espace (ouvert ou fermé) déterminé par un hyperplan H , cet hyperplan est uniquement déterminé ; on l'appelle la <u>limite</u> du demi-espace U .

Soit V une variété affine de E , et soit W un hyperplan de la structure d'espace affine de V (nous supposons V de dimension >0). Les demi-espaces (fermés ou ouverts) de V déterminés par W s'appelent les <u>demi-variétés</u> (fermées ou ouvertes) déterminées par W dans V , et W s'appelle la <u>limite</u> de chacune de ces demi-variétés. Si $W = V \cap H$, où H est un hyperplan de E , les demi-variétés déterminées par W dans V sont évidemment les intersections avec V des demi-espaces déterminés par H dans E . Si V est une droite, donc W un point, les demi-variétés déterminées par W dans V sont aussi appelées les <u>demi-droites de V d'origine</u> W . Si u est un paramètre affine sur V , les demi-droites fermées de V d'origine W sont les ensembles
$\overset{-1}{u}([u(W), \rightarrow[)$ et $\overset{-1}{u}(]\leftarrow, u(W)])$, tandis que les demi-droites ouvertes de V d'origine W sont les ensembles $\overset{-1}{u}(]u(W), \rightarrow[)$ et $\overset{-1}{u}(]\leftarrow, u(W)[)$. Il en résulte que l'intersection d'un nombre fini d'ensembles dont chacun est une demi-droite fermée ou un segment de V , si elle n'est pas vide, est une demi-droite fermée ou un segment de V ; de même, l'intersection d'un nombre fini d'ensembles dont chacun est une demi-droite ouverte de V ou un segment ouvert de V est une demi-droite ouverte ou un segment ouvert. Réciproquement, tout segment de V peut se représenter comme intersection de deux demi-droites fermées, et tout segment ouvert comme intersection de deux demi-droites ouvertes.

Si V est un plan (resp.: un hyperplan), les demi-variétés de V sont appelées des <u>demi-plans</u> (resp.: des <u>demi-hyperplans</u>).

Définition 4.- On appelle région polyédrale convexe de E un ensemble C qui possède les propriétés suivantes : a) ou bien C=E ou bien C est l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces fermés de E ; b) la variété affine engendrée par C est E tout entier.

(Si E est de dimension 2 , on dit région polygonale convexe au lieu de région polyédrale convexe).

Il est clair que toute région polyédrale convexe est un ensemble convexe. Si E est de dimension 1 , les régions polyédrales convexes de E sont : E tout entier, les demi-droites de E et les segments PQ tels que $P \neq Q$.

Si V est une variété affine qui rencontre une région polyédrale convexe C , l'ensemble $V \cap C$ est une région polyédrale convexe de la structure d'espace affine de la variété affine V' qu'il engendre, comme il résulte tout de suite du fait que l'intersection avec V' d'un demi-espace fermé de E est soit V' tout entier soit un demi-espace fermé de la structure d'espace affine de V' . Cependant, il convient d'observer que V' peut fort bien être différent de V .

Définition 5 . Un point A est appelé point intérieur d'un ensemble convexe C si la condition suivante est satisfaite : pour toute droite D passant par A , l'ensemble $D \cap C$ contient un segment ouvert de D contenant A . On dit que A est un point interne de C si A est un point intérieur de C quand on considère C comme une partie de la variété affine qu'il engendre, cette variété étant munie de sa structure d'espace affine.

Lemme 1. Si une partie convexe C de E a un point intérieur A , la variété affine engendrée par C est E tout entier.

Soit en effet P un point $\neq A$ de E. La droite AP a donc un segment ouvert non vide en commun avec C. Or un segment ouvert non vide d'extrémités Q et R contient au moins deux points (par exemple, $(1/3)Q+(2/3)R$ et $(2/3)Q+(1/3)R$). La droite AP, ayant deux points en commun avec C, est contenue dans la variété affine V engendrée par C, d'où $P \in V$.

Lemme 2. Soient U_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ des demi-espaces fermés de E, et soit H_i la limite de U_i. Pour que l'ensemble $C = \bigcap_{i=1}^{m} U_i$ soit une région polyédrale convexe, il faut et suffit que C ne soit contenu dans aucun des H_i. S'il en est ainsi, C contient au moins un point A qui n'est dans aucun des H_i, et un pareil point A est un point intérieur de C.

La condition énoncée est évidemment nécessaire. Supposons la satisfaite. Soit A_i un point de C non contenu dans H_i, et soit u_i une fonction affine $\neq 0$, nulle sur H_i et $\geqslant 0$ sur U_i. Le centre de gravité A des points A_i appartient à C (cor. à la prop. 1, n°1). On a $u_i(A) = m^{-1} u_i(A_i) + m^{-1} \sum_{j \neq i} u_i(A_j)$, $u_i(A_j)$, $u_i(A_j) \geqslant 0$ pour $1 \leqslant j \leqslant m$, $u_i(A_i) > 0$; il en résulte que $u_i(A) > 0$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$. Le point A n'appartient donc à aucun des H_i. Soit A un point de C qui n'appartient à aucun des H_i, et soit U_i^* le demi-espace ouvert déterminé par H_i et contenu dans U_i. Si D est une droite passant par A, $D \cap U_i^*$ est ~~xxx~~ ou bien D ou bien une demi-droite ouverte contenant A. Il en résulte que l'intersection des $D \cap U_i^*$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ contient un segment ouvert contenant A, donc que A est intérieur à C. On en conclut, en vertu du lemme 1, que C est une région polyédrale convexe.

Nous dirons qu'un hyperplan H est un hyperplan limite d'une région polyédrale convexe C si les conditions suivantes sont satisfaites : a) C est d'un même côté de H ; b) $H \cap C$ est une région polyédrale convexe de la structure d'espace affine de H.

<u>Proposition 1. Une région polyédrale convexe C n'a qu'un nombre fini d'hyperplans limites ; pour qu'un point de C soit intérieur à C, il faut et suffit qu'il n'appartienne à aucun hyperplan limite de C. Si C est représenté d'une manière quelconque comme intersection de demi-espaces fermés U_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$, et si H_i est la limite de U_i, tout hyperplan limite de C figure parmi les H_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$; si aucun des U_i ne contient l'intersection des autres, tous les H_i sont des hyperplans limites de C.</u>

Si $C=E$, C n'a évidemment aucun hyperplan limite. Laissant ce cas de côté, nous supposerons donnée une représentation de C comme intersection de demi-espaces fermés U_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$. On peut extraire de la famille $(U_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ une famille partielle $(U'_j)_{1 \leqslant j \leqslant m'}$ telle qu'aucun des U'_j ne contienne l'intersection des autres et que $\bigcap_{j=1}^{m'} U'_j = \bigcap_{i=1}^{m} U_i$. Il n'y aura donc pas d'inconvénient à supposer que cette condition est déjà satisfaite pour la famille $(U_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$, c'est-à-dire qu'aucun de ces demi-espaces ne contient l'intersection des autres. On a alors $H_i \neq H_j$ si $i \neq j$; car, C n'étant pas contenu dans H_i, l'égalité $H_i = H_j$ entraînerait $U_i = U_j$. Soit H un hyperplan limite de C. Un point $A \in H$ n'est pas intérieur à C ; soit en effet D une droite passant par A et non contenue dans H ; puisque C est d'un même côté de H, $D \cap C$ est contenu dans l'intersection de D avec celui des demi-espaces fermés déterminés par H qui contient C ; cette intersection est une demi-droite d'origine A et ne peut par suite évidemment contenir aucun segment ouvert contenant A. Par ailleurs, tout point de $H \cap C$ qui n'appartient à aucun des H_i est intérieur à C (lemme 2) ; on en conclut que $H \cap C$ est contenu dans la réunion des $H \cap H_i$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$. Si H était distinct de tous les hyperplans H_i, il résulterait du lemme 2, appliqué à $H \cap C$

et à l'espace affine H, que $H\cap C$ ne serait pas une région polyédrale convexe de H. On en conclut que H est l'un des hyperplans H_i. Soit A un point de C qui n'appartient à aucun des H_i (lemme 2), et soit B_i un point de $\bigcap_{j\neq i} U_j$ qui n'appartient pas à U_i. Les points A et B_i sont donc de part et d'autre de H_i, et le segment AB_i rencontre H_i en un point B'_i. Ce point est contenu dans tous les U_j $(j\neq i)$ et dans $H_i\subset U_i$; c'est donc un point de $H_i\cap C$. Si $j\neq i$, l'extrémité A du segment AB_i n'est pas dans H_j, tandis que $B_i\in U_j$; puisque $B'_i\neq B_i$, B'_i n'appartient pas à H_j. L'ensemble $H_i\cap C$ est l'intersection des $U_j\cap H_i$ $(j\neq i)$, et, si $U_j\cap H_i\neq H_i$, $U_j\cap H_i$ est un demi-hyperplan de H_i de limite $H_i\cap H_j$. Il résulte donc du lemme 2 et des propriétés de B'_i que $H_i\cap C$ est une région polyédrale convexe de H_i, donc que H_i est un hyperplan limite de C. La prop. 1 est ainsi démontrée.

<u>Définition 6.- Les intersections d'une région polyédrale convexe</u> C <u>avec ses hyperplans limites sont appelées les faces de</u> C.

La seule région polyédrale convexe qui ne possède aucune face est l'espace E tout entier. Une région polyédrale convexe qui ne possède qu'une seule face est un demi-espace fermé U, et sa face est la limite de U.

Soit maintenant C une région polyédrale convexe qui possède deux faces ; C est alors l'intersection de deux demi-espaces fermés U_1 et U_2 dont nous désignerons les limites par H_1 et H_2. Considérons d'abord le cas où H_1 et H_2 sont parallèles ; il est alors clair que les faces de C sont les hyperplans H_1 et H_2 tout entiers. On dit que C est la région comprise entre H_1 et H_2, et que les points de C sont les points qui sont "entre H_1 et H_2". On a $H_i\subset U_j$ si $i\neq j$. Si D est une droite qui n'est pas faiblement parallèle à H_1 et H_2, D rencontre H_1 en un un point Q_i $(i=1,2)$, et $D\cap C$ est le segment Q_1Q_2. Il résulte immédiatement de là que les points de C sont les points des segments qui joignent des points de H_1 et des points de H_2 ; on peut encore dire que C est l'ensemble convexe engendré par $H_1\cup H_2$. Réciproquement, si H_1 et H_2 sont des hyperplans parallèles distincts, l'ensemble convexe engendré par $H_1\cup H_2$ est, comme on le voit facilement, une région polyédrale convexe admettant H_1 et H_2 comme faces. Considérons maintenant le cas où H_1 et H_2 ne sont pas parallèles ; ils se rencontrenr alors suivant une variété affine V de codimension 2. L'ensemble $H_i\cap U_j$ $(j\neq i)$ est un demi-hyperplan F_i de H_i de limite V ; F_1 et F_2 sont les faces de C. Si D est une droite qui n'est faiblement parallèle ni à H_1 ni à H_2, D rencontre H_i en Q_i $(i=1,2)$. Si $Q_i\notin F_i$ $(i=1,2)$, $D\cap C$ est vide ; si $Q_1\in F_1$, $Q_2\notin F_2$, $D\cap C=\{Q_1\}$; si $Q_i\in F_i$ $(i=1,2)$, $D\cap C$ est le segment Q_1Q_2. Si P est un point intérieur de C, il passe par P une droite qui rencontre F_1 et F_2 en des points non situés sur V. En effet l'hyperplan parallèle à H_2 passant par P rencontre H_1 suivant une variété $V'\neq H_1$; le corps K ayant une infinité d'éléments, on voit facilement qu'il y a un point Q_1 de H_1 qui n'est ni dans V ni dans V'. La droite PQ_1 n'est pas faiblement parallèle à H_2 puisque Q_1 n'est pas dans V' ; elle rencontre H_2 en un point Q_2. De plus, P n'étant pas dans H_1, le point Q_2 n'est pas dans V et est $\neq Q_1$. Le point P appartenant à l'intersection de C et de la droite PQ_1, on a $Q_i\in F_i$ $(i=1,2)$. Il en résulte qu'ici encore C est l'ensemble convexe engendré par la réunion $F_1\cup F_2$ de ses deux faces.

Soit H un hyperplan passant par V, mais distinct de H_1 et de H_2. Il y a alors deux possibilités suivant que F_1 et F_2 sont ou non d'un même côté de H. Dans le premier cas, l'ensemble C, qui est engendré par $F_1 \cup F_2$, est tout entier d'un même côté de H. Dans le second cas, il n'en est pas ainsi ; de manière plus précise, si Q_i $(i=1,2)$ est un point de F_i et si aucun des points Q_1, Q_2 n'appartient à V, les points Q_1 et Q_2 sont de part et d'autre de H, comme il résulte de ce que $H \cap F_i = V$ $(i=1,2)$.

Soient réciproquement donnés deux demi-hyperplans F_1 et F_2 ayant tous deux comme limite une même variété V de codimension 2 et non situés dans un même hyperplan. Soient H_i l'hyperplan engendré par F_i et U_i le demi-espace fermé de limite H_i quic contient F_j $(j\neq i)$; on voit alors tout de suite que $U_1 \cap U_2$ est une région polyédrale convexe C dont les faces sont F_1 et F_2 ; C s'appelle le <u>secteur dièdre</u> de faces F_1, F_2 (si E est de dimension 2, C s'appelle aussi un <u>secteur angulaire</u>, et F_1 et F_2 ses côtés).

<u>Proposition 2</u>. <u>Si une région polyédrale convexe C a au moins deux faces distinctes, elle coïncide avec l'ensemble convexe engendré par la réunion de ses faces.</u>

Soient H_i $(i=1,2)$ deux hyperplans limites distincts de C et U_i le demi-espace déterminé par H_i qui contient C. Le secteur dièdre $U_1 \cap U_2$ contient alors C et admet H_1 et H_2 comme hyperplans limites. Il résulte de ce que nous avons dit plus haut que, si P est un point intérieur de C (donc, <u>a fortiori</u>, de $U_1 \cap U_2$), il y a une droite D passant par P qui rencontre H_1 et H_2 en des points Q_1 et Q_2 tels que P soit entre Q_1 et Q_2. L'intersection de D avec C est une région polyédrale convexe de la structure d'espace affine de D (parce que P est intérieur à C) et est contenue dans le segment $Q_1 Q_2$. C'est donc un segment $Q'_1 Q'_2$ dont les extrémités sont distinctes. Il est clair que ni Q'_1 ni Q'_2 ne peut être intérieur à C ; Q'_1 et Q'_2 appartiennent donc à des faces de C

Puisque P est sur le segment $Q_1' Q_2'$, P appartient à l'ensemble convexe engendré par les faces de C , ce qui démontre la prop.2 .

Soit C une région polyédrale convexe. Nous allons définir par récurrence sur k certaines parties convexes de C , les <u>facettes de codimension</u> k de C , qui satisferont à la condition suivante : (C_k) chaque facette de codimension k engendre une variété affine de codimension k dont elle est une région polyédrale convexe. Les facettes de codimension 1 seront par définition les faces de C ; la condition (C_1) est évidemment satisfaite. Supposons les facettes de codimension k définies, et la condition (C_k) satisfaite ; les facettes de codimension $k+1$ seront alors par définition les faces des facettes de codimension k , chacune de ces dernières étant considérée comme une région polyédrale convexe de la variété affine qu'elle engendre ; il est clair que la condition (C_{k+1}) est satisfaite. La région comprise entre deux hyperplans parallèles n'a aucune facette de codimension >1 ; un secteur dièdre a une facette de codimension 2 , mais n'en a aucune de codimension >2 . Si l'espace E est de dimension finie n , les facettes de codimension k sont aussi appelées facettes de dimension $n-k$; les facettes de dimension 0 sont appelées les <u>sommets</u> de C .

Si F est une facette de codimension k de C , F est l'intersection avec C de la variété affine V de codimension k engendrée par F . Il en est ainsi si $k=1$; supposons que $k>1$ et que notre assertion soit vraie pour $k-1$. L'ensemble F est alors l'intersection de V avec une facette de codimension $k-1$, soit G , de C , et, si W est la variété affine engendrée par G , on a $G=W\cap C$, d'où $F=V\cap C$, ce qui démontre notre assertion pour k . Soient H_i $(1\leqq i\leqq p)$ les hyperplans limites de C , et soit U_i le demi-espace fermé de limite H_i qui contient C .

L'ensemble $W \cap C$ est alors l'intersection des $W \cap U_i$ $(1 \leq i \leq p)$. Chacun de ces ensembles est ou bien W tout entier ou bien un demi-espace de W déterminé par un hyperplan de la forme $W \cap H_i$ de la structure affine de W. Il résulte de là et de la prop. 1 que F est l'un des ensembles $G \cap H_i$. Procédant par récurrence sur k, on voit alors que, si F est une facette de codimension k de C, il existe k hyperplans limites de C dont l'intersection est la variété affine engendrée par F ; F elle-même est l'intersection de C et de ces k hyperplans. Puisque C n'a qu'un nombre fini d'hyperplans limites, on voit que C n'a qu'un nombre fini de facettes.

Proposition 3. Soient C *une région polyédrale convexe de* E *et* F *une facette de codimension* $k > 1$ *de* C. *Si une facette* G *de codimension* $k-1$ *de* C *contient un point interne de* F, F *est une face de* G *(*G *étant considéré comme région polyédrale convexe de la variété affine qu'il engendre). L'ensemble* F *est l'intersection de celles des facettes de codimension* $k-1$ *qui le contiennent. Si* $k=2$, F *n'est contenu que dans deux faces de* C.

Soient G une facette de codimension $k-1$ de C qui contient un point interne A de F, V la variété affine engendrée par F et W celle engendrée par G. Soit H un hyperplan limite de C qui contient A. L'ensemble F est d'un même côté de H. Si $V \cap H$ était un hyperplan de la structure affine de V, F serait contenu dans l'un des demi-espaces déterminés par cet hyperplan dans V, ce qui est impossible puisque A est un point interne de F. On a donc $V \subset H$. Ecrivons G sous la forme $C \cap H_1 \cap \ldots \cap H_{k-1}$, où les H_i sont des hyperplans limites de C dont l'intersection est W ; on a donc $V \subset H_i$ $(1 \leq i \leq k-1)$, d'où $F \subset G$.

Puisque F est l'intersection de C et d'un certain nombre d'hyperplans limites de C, il y a un hyperplan limite H_k de C qui contient F sans contenir G. Puisque V est un hyperplan de la structure affine de W, on a $V = W \cap H_k$; puisque $F = V \cap C$, on a $F = G \cap H_k$. L'ensemble G, étant d'un même côté de H_k, est contenu dans l'un des demi-espaces déterminés par V dans W ; de plus, $F = G \cap V$ est une région polyédrale convexe de V. Il en résulte que, G étant considéré comme région polyédrale convexe de W, V en est un hyperplan limite et F une face.

Considérons maintenant le cas où $k=2$. Les ensembles $C \cap H_1$ et $C \cap H_2$ sont des faces de C, et F est leur intersection. Montrons qu'il n'y a aucun autre hyperplan limite de C que H_1 ou H_2 qui contienne F. Soient U_1 et U_2 les demi-espaces fermés de limites H_1 et H_2 qui contiennent C. Puisque $H_1 \cap H_2 = V$, $U_1 \cap U_2$ est un secteur dièdre. Soit H un hyperplan distinct de H_1 et H_2 contenant V ; on sait qu'il n'y a alors que deux possibilités : ou bien $U_1 \cap U_2$ est contenu dans l'un des demi-espaces fermés, soit U, déterminé par H, ou bien $U_1 \cap H_2$ et $U_2 \cap H_1$ ne sont pas d'un même côté de H. Dans le premier cas, U contient C, et, puisque $U_1 \cap U_2 \subset U$, H ne peut être un hyperplan limite de C. Dans le second cas, on peut choisir des points $A_i \in H_i \cap C$ $(i=1,2)$ qui n'appartiennent pas à V (car H_i est la variété affine engendrée par $H_i \cap C$) ; les points A_i n'appartiennent alors pas à H et sont par suite de part et d'autre de H, ce qui entraîne que H n'est pas un hyperplan limite de C.

Considérant maintenant le cas où $k > 2$, il est clair que F est une facette de codimension 2 d'au moins une facette L de codimension $k-2$ de C (L étant considéré comme région polyédrale convexe de la variété qu'il engendre). Il résulte alors de ce que nous venons de

 61

de démontrer que F est l'intersection de deux facettes de codimension $k-1$ de C , donc, a fortiori, que F est l'intersection de toutes les facettes de codimension $k-1$ qui le contiennent.

Nous supposerons à partir de maintenant que l'espace E est de dimension finie n .

On appelle polyèdre convexe (polygone convexe, si E est de dimension 2) une région polyédrale convexe C qui possède la propriété suivante : si u est une fonction affine quelconque sur C , l'ensemble $u(C)$ est borné dans K . Il est clair que, si C est un polyèdre convexe, les faces à k dimensions de C ($0 \leqslant k < n$) sont des polyèdres convexes des variétés affines qu'elles engendrent, et par suite que, si $k > 0$, une face à k dimensions de C ne peut être une demi-variété et a par suite au moins deux faces. On en conclut que, pour $k > 0$, chaque face à k dimensions de C est l'ensemble convexe engendré par ses faces, qui sont des faces à $k-1$ dimensions de C . Il en résulte immédiatement qu'un polyèdre convexe est l'ensemble convexe engendré par l'ensemble de ses sommets. [Réciproquement, on peut démontrer que, si F est une partie finie de E telle que l'ensemble convexe C engendré par F soit E tout entier, C est un polyèdre convexe ; cf. exerc.].

Soit F une base affine de E . Nous allons montrer que le simplex $S(F)$ engendré par F est un polyèdre convexe dont les sommets sont les points de F . Tout point Q de E peut, d'une manière et d'une seule, se mettre sous la forme $\sum_{P \in F} u_P(Q)P$, les $u_P(Q)$ étant les coordonnées barycentriques de Q par rapport à la base affine F . Chaque fonction u_P est une fonction affine sur E , et les points de $S(F)$ sont les points Q tels que $u_P(Q) \geqslant 0$ pour tout $P \in F$. Or, pour chaque $P \in F$, l'ensemble des points Q tels que $u_P(Q) \geqslant 0$ est un un demi-espace, dont la limite est l'hyperplan H_p d'équation $u_p=0$. L'ensemble $S(F)$, n'étant contenu dans aucun des hyperplans H_p, est une région polyédrale convexe. Si v est une fonction affine quelconque sur E, l'ensemble $v(S(F))$ est évidemment borné ; $S(F)$ est donc un polyèdre convexe. Ses faces sont les ensembles $H_p \cap S(F)$; ce sont les simplex $S(F')$, où F' décrit l'ensemble des parties à n éléments de F. Il en résulte que les faces à k dimensions de $S(F)$ sont les simplex $S(F')$, où F' parcourt l'ensemble des parties à $k+1$ éléments de F $(0 \leqslant k < n)$. En particulier, les sommets de $S(F)$ sont les points de F. ~~Il en résulte que les faces à k dimensions de S(F) sont les simplex S(F'), où F' parcourt l'ensemble des parties à k+1 éléments de F (0 k n).~~ En particulier, les sommets de $S(F)$ sont les points de F. Il résulte tout de suite de là que, si F et F' sont des parties affinement libres finies non vides de E telles que $S(F) = S(F')$, on a $F=F'$.

Soient maintenant $u_1,\dots,u_n$ n fonctions affines sur E telles que $1,u_1,\dots,u_n$ forment une base de l'espace des fonctions affines. Donnons-nous pour chaque i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ des éléments a_i et b_i de K tels que $a_i < b_i$. L'ensemble C des points P de E tels que l'on ait $a_i \leqslant u(P) \leqslant b_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ s'appelle un <u>parallélotope</u>. Etant donnés des éléments c_i quelconques de K $(1 \leqslant i \leqslant n)$, il existe un point $P \in E$ tel que $u_i(P)=c_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Il en résulte que C n'est dans aucun des hyperplans d'équations $u_i=a_i$ ou $u_i=b_i$, donc que C est une région polyédrale convexe. Toute fonction affine v pouvant s'exprimer comme combinaison linéaire de $1,u_1,\dots,u_n$, il est clair que $v(C)$ est borné, donc que C est un polyèdre convexe. Ses faces sont ses intersections avec les hyperplans $u_i(P)=a_i$ et $u_i(P)=b_i$; chacune d'elles est un un parallélotope de l'hyperplan qu'elle engendre. Appelons $A(c_1,\ldots,c_n)$ le point de E défini par les conditions $u_i(A(c_1,\ldots,c_n))=c_i$ $(1\leq i\leq n)$; les sommets de C sont alors les points $A(c_1,\ldots,c_n)$ pour lesquels chaque c_i est soit a_i soit b_i ; il y a 2^n de ces sommets. A chaque sommet $A(c_1,\ldots,c_n)$ correspond un sommet "opposé" $A(c_1',\ldots,c_n')$, où chaque c_i' est égal à b_i si $c_i=a_i$ et à a_i si $c_i=b_i$. Les segments qui joignent les couples de sommets opposés de C sont appelés les <u>diagonales</u> de C . Si M est le milieu d'une diagonale, on a $u_i(M)=(1/2)(a_i+b_i)$ $(1\leq i\leq n)$; toutes les diagonales se rencontrent donc en un même point M qui est le milieu de chacune d'elles ; M s'appelle le <u>centre</u> du parallélotope.

Soient $A_0,A_1,\ldots,A_n$ des points de E qui forment une famille affinement libre, et soient $u_0,u_1,\ldots,u_n$ les coordonnées barycentriques relatives à la base affine $(A_0,A_1,\ldots,A_n)$. Les fonctions $u_0,u_1,\ldots,u_n$ forment, comme on le voit tout de suite, une base de l'espace des fonctions affines sur E ; il en résulte que $1,u_1,\ldots,u_n$ sont linéairement indépendantes. L'ensemble C des points P E tels que $0\leq u_i(P)\leq 1$ $(1\leq i\leq n)$ est un parallélotope ; on dit que c'est le <u>parallélotope construit sur les segments</u> A_0A_i $(1\leq i\leq n)$.

Lorsque l'espace E est de dimension 2 , un parallélotope de E s'appelle un <u>parallélogramme</u>. Si A_0,A_1,A_2 sont des points non colinéaires de E , et C le parallélogramme construit sur les segments A_0A_1 et A_0A_2 , A_0,A_1 et A_2 sont trois des sommets de C ; si A_3 est le quatrième sommet de C , on voit tout de suite que l'on a

$A_3-A_0 = (A_1-A_0)+(A_2-A_0)$.

3. SUBDIVISION PAR SECTION.

Soit C une région polyédrale convexe de l'espace E , et soit H un hyperplan quelconque de E . Supposons que C chevauche H , et désignons par U et U' les deux demi-espaces fermés déterminés par H . Les ensembles $U \cap C$ et $U' \cap C$ sont alors des régions polyédrales convexes. Soit en effet A_0 un point intérieur de C , et soit B un point quelconque $\neq A_0$ de C ; montrons que tous les points $\neq B$ du segment A_0B sont intérieurs à C . S'il n'en était pas ainsi, il y aurait un point $M \neq B$ de ce segment qui appartiendrait à une face $H \cap C$ de C , H étant un hyperplan limite de C (prop.1) ; A_0 n'appartenant pas à H , A_0 et B seraient de part et d'autre de H , ce qui est impossible. Puisque C contient un point non situé dans H , on en déduit qu'il y a un point intérieur A de C non situé dans H ; si $A \in U$, il est clair que A est intérieur à $U \cap C$. Par ailleurs, H contient un point B non situé dans U ; il est alors clair qu'il y a un point $A' \neq B$ du segment AB qui n'est pas dans U ; A' est alors un point intérieur de $U' \cap C$. Les ensembles $U \cap C$ et $U' \cap C$ sont donc bien des régions polyédrales convexes. De plus, on notera que notre raisonnement établit l'existence d'un point intérieur de C situé dans H : il suffit de prendre le point où le segment AA' rencontre H . Nous dirons que l'ensemble $\{U \cap C ; U' \cap C\}$ est la <u>subdivision de</u> C <u>par section par</u> H . Si C est d'un même côté de H , nous dirons que l'ensemble $\{C\}$ est la subdivision de C par section par H .

Cette notion se généralise immédiatement au cas où C , sans être une région polyédrale convexe de E , en est cependant une de la variété affine V qu'il engendre. Dans ce cas, si $V \not\subset H$, $V \cap H$ est un hyperplan de V , et nous appellerons subdivision de C par section par H

la subdivision de C par section par $V \cap H$ dans V . Si $V \subset H$, nous dirons que $\{C\}$ est la subdivision de C par section par H .

Revenons au cas où C est une région polyédrale convexe, et désignons ses faces par $F_1, \ldots, F_h$. Nous allons montrer que, si C chevauche H , les faces de $U \cap C$ sont celles des faces de C qui sont dans U , les intersections avec U de celles des faces de C qui chevauchent U et l'ensemble $H \cap C$. Soient H_i $(1 \leqq i \leqq h)$ les hyperplans limites de C , H_i ayant la face F_i en commun avec C ; et soit U_i le demi-espace de limite H_i qui contient C . On a donc $U \cap C = U \cap U_1 \cap \ldots \cap U_h$. Les faces de $U \cap C$ sont donc parmi les ensembles $U \cap C \cap H_i$, $U \cap C \cap H$ (prop. 1, n°2) . Supposons les faces F_i rangées dans un ordre tel que $F_i \subset U$ si $i \leqq h_1$, que F_i chevauche H si $h_1 < i \leqq h_2$ et que $F_i \subset U'$ si $i > h_2$. Si $i \leqq h_1$, $U \cap C \cap H_i = F_i$; cet ensemble engendrant la variété affine H_i , il en résulte que F_i est une face de $U \cap C$. Si $h_1 < i \leqq h_2$, on a $U \cap C \cap H_i = F_i \cap U$; puisque F_i chevauche alors H , il résulte de ce que nous avons démontré que $F_i \cap U$ contient un point interne de F_i , donc engendre la variété affine H_i , ce qui montre que $F_i \cap U$ est une face de $U \cap C$. Si $i > h_2$, on a $U \cap C \cap H_i = U \cap F_i \subset$ $\subset U \cap U' \cap H_i = H \cap H_i$; puisque C chevauche H , on a $H \neq H_i$ et la variété affine engendrée par $U \cap C \cap H_i$ (si cet ensemble n'est pas vide) n'est pas de codimension 1 , ce qui montre que $U \cap C \cap H_i$ n'est pas une face de $U \cap C$. On a $U \cap C \cap H = C \cap H$; nous avons vu plus haut que cet ensemble contient un point intérieur de C . Il est manifeste que ce point est un point interne de $C \cap H$, et la variété affine engendrée par $C \cap H$ est H , ce qui montre que $C \cap H$ est une face de $U \cap C$. Notre assertion est donc démontrée. De même, les faces de $U' \cap C$ sont les ensembles $H \cap C$, $F_i \cap U'$ $(h_1 < i \leqq h_2)$ et F_i $(i > h_2)$.

Désignons maintenant par C une région polyédrale convexe et par $H_1,\dots,H_m$ des hyperplans quelconques de E. Posons $\Sigma_0=\{C\}$; Σ_i étant déjà défini pour un $i<m$, et étant un ensemble fini de régions polyédrales convexes de E, désignons par Σ_{i+1} la réunion des subdivisions des éléments de Σ_i par section par H_{i+1}. L'ensemble $\Sigma=\Sigma_m$ obtenu à la fin de cette construction s'appelle la <u>subdivision de C par sections successives par</u> $H_1,\dots,H_m$. La réunion des ensembles qui sont éléments de Σ est C ; on voit en effet tout de suite par récurrence sur i que la réunion des ensembles de Σ_i est C. Si C'_1 et C'_2 sont deux ensembles distincts de Σ_i, aucun point intérieur de C'_1 ne peut appartenir à C'_2. C'est vrai si $i=0$. Supposons que ce soit vrai pour i. Si C'_1 et C'_2 sont deux ensembles distincts de Σ_{i+1}, chacun d'eux est contenu dans un ensemble de Σ_i et dans un seul, puisque C'_1 et C'_2 ont des points intérieurs. Si C'_1 et C'_2 sont dans le même ensemble de Σ_i, $C'_1\cap C'_2$ est dans H_{i+1} tandis que C'_1 et C'_2 sont chacun d'un même côté de H_{i+1} ; il en résulte que $C'_1\cap C'_2$ ne peut contenir aucun point intérieur de C'_1 ou de C'_2. La même conclusion subsiste évidemment si C'_1 et C'_2 sont dans des ensembles distincts de Σ_i. On voit donc que, si on a deux ensembles distincts appartenant à Σ, aucun point de l'un ne peut être intérieur à l'autre ; nous exprimerons ceci en disant que les ensembles de Σ sont deux à deux sans point intérieur commun.

Soient U_i^{+1} et U_i^{-1} les deux demi-espaces fermés de limite H_i. On voit immédiatement par récurrence sur i que tout ensemble de Σ_i est de la forme $C\cap\bigcap_{j=1}^{i} U_j^{e(j)}$, les $e(j)$ étant ± 1 et étant uniquement déterminés quand l'ensemble est donné. Réciproquement, tout

tout ensemble C' de la forme $C \cap \bigcap_{i=1}^{m} U_i^{e(i)}$ $(e(i)=\pm 1)$ qui est une région polyédrale convexe appartient à Σ. En effet, un pareil ensemble est contenu dans C ; étant tout entier d'un même côté de H_i, s'il est contenu dans un ensemble de Σ_{i-1}, il est aussi contenu dans un ensemble de Σ_i, il en résulte que C' est contenu dans un ensemble $C'' = C \cap \bigcap_{i=1}^{m} U_i^{e'(i)}$ de Σ. De plus, C' contient au moins un point intérieur A ; il est clair que A ne peut appartenir à aucun des H_i ; puisque $A \in U_i^{e(i)} \cap U_i^{e'(i)}$, on a $e(i)=e'(i)$ et $C'=C''$. Les ensembles de Σ sont donc tous ceux des ensembles de la forme $C \cap \bigcap_{i=1}^{m} U_i^{e(i)}$ qui sont des régions polyédrales convexes. Il en résulte que la subdivision Σ ne dépend pas de l'ordre dans lequel on range les hyperplans H_i.

Nous appellerons <u>subdivision de E par sections</u> tout ensemble de régions polyédrales convexes qui est une subdivision de E par sections successives par un certain nombre d'hyperplans. Etant données un nombre fini quelconque de régions polyédrales convexes $C_1, \ldots, C_h$ de E, il existe toujours une subdivision Σ de E par sections telle que chacun des C_i soit la réunion d'un certain nombre des ensembles de Σ. Il suffit en effet de prendre comme ensemble d'hyperplans l'ensemble de tous les hyperplans limites de toutes les régions C_i.

4. RÉGIONS POLYÉDRALES.

<u>Définition 7. On appelle région polyédrale de E toute partie de E qui est la ~~région~~ réunion d'un nombre fini non nul de régions polyédrales convexes de E</u> .

La réunion d'un nombre fini de régions polyédrales de E est donc une région polyédrale.

<u>Proposition 4. Soit P une région polyédrale de E . On peut alors représenter P comme réunion d'un nombre fini de régions polyédrales convexes qui sont deux à deux sans point intérieur commun</u>.

Soit $P = \bigcup_{i=1}^{h} C_i$ une représentation de P comme réunion de régions polyédrales convexes. Il existe une subdivision Σ de E par sections telle que chacun des C_i soit la réunion d'un certain nombre d'éléments de Σ ; P est alors la réunion de ceux des ensembles de Σ qui y sont contenus, ce qui démontre la prop.4 .

La notion de point intérieur s'étend au cas des régions polyédrales ; on appelle <u>point intérieur</u> d'une région polyédrale P un point A tel que l'intersection avec P de toute droite passant par A contienne un segment ouvert de cette droite contenant A . Montrons que, pour qu'un point A soit intérieur à P , il faut et suffit qu'il soit intérieur à une région polyédrale convexe contenue dans P . La condition est évidemment suffisante. Supposons maintenant que A soit intérieur à P . Soit $P = \bigcup_{i=1}^{h} C_i$ une représentation de P comme réunion de régions polyédrales convexes. Soient $H_1, \dots, H_p$ tous les hyperplans limites de toutes les régions C_i , arrangés dans un ordre tel que A n'appartienne pas à H_j si $j \leq q$, mais lui appartienne si $j > q$. Si $j \leq q$, soit U_j le demi-espace fermé

de limite H_j qui contient A , et soit C l'ensemble $\bigcap_{j=1}^{q} U_j$.
C'est un ensemble convexe qui contient A . Puisque A n'appartient à aucun des H_j , A est intérieur à C , et C est une région polyédrale convexe admettant A comme point intérieur. Il nous suffira donc de montrer que $C \subset P$. Supposons qu'il n'en soit pas ainsi ; C contient alors un point B n'appartenant pas à P . La droite AB a en commun avec P un segment ouvert contenant A ; il y a donc un point $A' \neq A$ du segment AB qui est dans P . Le point A' appartient à l'un au moins des C_i , disons à C_1. Si A' n'appartient à aucune face de C_1 , posons $F = C_1$; sinon, désignons par F une facette de codimension maxima de C_1 contenant A' (on sait que C_1 n'a qu'un nombre fini de facettes).
Le point A' n'appartient alors à aucune face de F (F étant considéré comme variété polyédrale de la variété affine V qu'il engendre) : c'est un point interne de F . L'ensemble F peut se représenter comme intersection de C et d'un certain nombre (nul si $F = C_1$) de ses hyperplans limites. Si $F \neq C_1$ et si A n'est pas dans F , il y a un hyperplan limite H de C_1 qui contient F mais pas A ; mais c'est impossible, car H est alors l'un des H_j , $j \leqq q$, et A et B sont de part et d'autre de H . Supposons maintenant ou bien que $F = C_1$ ou bien que $F \neq C_1$ mais $A \in F$. La droite AB est alors dans V ; le point A' est dans F , mais B n'y est pas, puisque B n'est pas dans P . On en déduit que le segment A'B rencontre en un point A" une face F' de l'ensemble F (considéré comme région polyédrale convexe de V) .
L'ensemble F' est une facette de C_1 de codimension supérieure d'une unité à celle de F ; A n'est donc pas dans F' . Remplaçant la considération de A' par celle de A" ; nous sommes ramenés au cas précédent.

L'hypothèse que C contient un point non situé dans P est donc à rejeter, et notre assertion est démontrée.

L'intersection $P \cap P'$ de deux régions polyédrales n'est en général pas une région polyédrale. Mais, si $P \cap P'$ contient un point intérieur de P ou de P', il y a une région polyédrale Q uniquement déterminée qui contient tous les points de $P \cap P'$ qui sont intérieurs à P ou à P'. Soient en effet $P = \bigcap_{i=1}^{h} C_i$ et $P' = \bigcap_{i=1}^{h'} C'_i$ des représentations de P et de P' comme réunions de régions polyédrales convexes. Soient $H_1, \dots, H_p$ tous les hyperplans limites des C_i, C'_j, et soit Σ la subdivision de E par sections successives par les hyperplans $H_1, \dots, H_p$. Chacun des C_i, C'_j est alors la réunion d'un certain nombre d'ensembles de Σ ; on peut donc supposer que les ensembles C_i, C'_j sont des ensembles de Σ. Si $P \cap P'$ contient un point intérieur A de P ou de P', il y a un ensemble de Σ contenu dans $P \cap P'$. Supposons en effet que A soit intérieur à P ; puisque $A \in P'$, A appartient à l'un des ensembles C'_j, soit à C'_1. Soit A' un point intérieur de C'_1. Puisque A est intérieur à P, le segment AA' contient un point $A'' \neq A$ qui appartient à P ; puisque A' est intérieur à C'_1, il en est de même de A'' ; puisque P contient un point intérieur de C'_1, il résulte du fait que les ensembles de Σ sont deux à deux sans point intérieur commun que $C'_1 \subset P$; on a donc $C'_1 \subset P \cap P'$. Soit alors Q la réunion de tous les ensembles de Σ contenus dans $P \cap P'$; c'est une région polyédrale, et il résulte de ce que nous venons de voir que Q contient tous les points de $P \cap P'$ qui sont intérieurs à P ou à P'.

Soit réciproquement Q' une région polyédrale contenue dans $P \cap P'$ et qui contient tous les points de $P \cap P'$ qui sont intérieurs soit à P soit à P'. Alors, tout point intérieur à un ensemble de Σ contenu dans $P \cap P'$ sera dans Q' ; il en résultera que $Q \subset Q'$ en vertu du

Lemme 1.- Si C et Q' sont des régions polyédrales telles que tout point intérieur de C appartienne à Q', on a $C \subset Q'$. .

Supposons qu'il n'en soit pas ainsi. Il y a alors un point $A \in C$ qui n'est pas dans Q'. Représentons Q' comme réunion d'un nombre fini de régions polyédrales convexes $C'_1, \ldots, C'_l$. Pour chaque j $(1 \leq j \leq l)$ il y a un hyperplan limite H'_j de C'_j tel que A n'appartienne pas au demi-espace U'_j déterminé par H'_j qui contient C'_j. Par ailleurs, A appartient à une région polyédrale convexe $C_1 \subset C$; soient A' un point intérieur de C_1 et D la demi-droite d'origine A qui contient A'. Pour chaque j on peut trouver un point $A_j \neq A$ de D tel que le segment AA_j n'ait aucun point commun avec U'_j. L'intersection des segments AA_j est manifestement égale à l'un de ces segments, soit à AA_1 ; le segment AA_1 n'a donc aucun point commun avec Q'. Or, A appartient à C_1 et A' est intérieur à C_1 ; tout point $U \neq A$ du segment AA' est donc intérieur à C_1 et appartient par suite à Q'. Le segment AA_1 ayant au moins un point $\neq A$ en commun avec le segment AA', nous sommes arrivés à une contradiction.

Revenons aux notations utilisées plus haut. Nous avons montré que $Q \subset Q'$; il reste à montrer que $Q' \subset Q$. Or, puisque $Q' \subset P \cap P'$, tout point intérieur à Q' l'est aussi à P et à P' et appartient par suite à Q, d'où $Q' \subset Q$ en vertu du lemme 1. Notre assertion est donc démontrée. Il est clair que Q peut aussi se caractériser comme étant la plus grande région polyédrale contenue dans $P \cap P'$.

Si l'espace E est de dimension finie, on appelle polyèdre de E une région polyédrale convexe P de E telle que, pour toute fonction affine u sur E, l'ensemble u(P) soit borné dans K. Il est clair que toute région polyédrale contenue dans un polyèdre H est un polyèdre et que la réunion d'une famille finie non vide de polyèdres est un polyèdre. Tout polyèdre peut se représenter comme réunion d'une famille finie de polyèdres convexes deux à deux sans point intérieur commun.

5. ESPACES AFFINES ORIENTÉS.

Nous désignerons par E un espace affine de dimension finie n sur un corps ordonné commutatif K.

Soient T l'espace des translations de E, Λ l'algèbre extérieure sur T et Λ_n l'espace des éléments homogènes de degré n de Λ ; c'est un espace vectoriel de dimension 1 sur K. On peut définir une relation d'équivalence entre éléments $\neq 0$ de Λ_n, soient φ et φ', comme suit : " l'élément a de K tel que $\varphi' = a\varphi$ est > 0 ". Relativement à cette relation d'équivalence, l'ensemble des éléments $\neq 0$ de Λ_n se décompose en exactement deux classes d'équivalence, soient Γ et Γ' ; nous appellerons Γ et Γ' les classes d'orientation de E. On appelle structure d'espace affine orienté une structure constituée par les données d'un espace affine E (de dimension finie sur un corps commutatif ordonné) et de l'une des classes d'orientation Γ et Γ' de E, qui s'appelle la classe d'orientation positive de l'espace affine orienté

On vérifie tout de suite que la théorie des espaces affines orientés est une géométrie du type affine, au sens que nous avons précisé dans l'introduction. Tout espace affine orienté admet un espace affine sous-jacent. Réciproquement, tout espace affine E (de dimension finie sur un corps commutatif ordonné) est l'espace affine sous-jacent d'exactement deux espaces affines orientés, dont on dit que les orientations sont <u>opposées</u>. Se donner l'un d'eux s'appelle <u>orienter</u> l'espace E .

Soit A le groupe fondamental de E . Si $s \in A$, l'application $t \to sts^{-1}$ est un automorphisme de T ; son déterminant $D(s)$ s'appelle le <u>déterminant</u> de s . L'application $s \to D(s)$ est une représentation de A dans le groupe multiplicatif des éléments $\neq 0$ de K ; nous désignerons par A^+ le groupe des $s \in A$ tels que $D(s) > 0$. Si la dimension n de E est > 0 , tout élément $d \neq 0$ de K est le déterminant d'un élément s au moins de A . Soit en effet $\{t_1, \ldots, t_n\}$ une base de T , et soit θ l'automorphisme de T défini par $t_1 \to dt_1$, $t_i \to t_i$ si $i > 1$; θ est de déterminant d . Or, si P est un point quelconque de E , l'application s de E dans lui-même définie par $sQ = \theta(Q-P)+P$ $(Q \in E)$ appartient à A et on a $\theta(t)=sts^{-1}$ si $t \in T$; on a donc $D(s)=d$. Le groupe A^+ est donc alors un sous-groupe d'indice 2 de A . Si au contraire $n=0$, A se réduit à son élément neutre, et $A^+=A$. Ceci dit, si $s \in A$, l'application $t \to sts^{-1}$ se prolonge en un automorphisme de l'algèbre extérieure Λ , et cet automorphisme multiplie tout élément de Λ_n par $D(s)$; notre automorphisme conservera donc chacune des classes Γ et Γ' si $s \in A^+$, les échangera entre elles dans le cas contraire. On en conclut que A^+ est le groupe d'automorphismes de chacun des espaces affines orientés admettant E comme espace affine sous-jacent. On notera que, si $n=0$, les deux classes Γ, Γ' peuvent se distinguer intrinsèquement l'une de l'autre. L'espace Λ_n est alors en effet le corps K lui-même, et l'une et l'une seule des classes Γ, Γ' contient l'élément unité de K (ou de Λ). Nous désignerons par $(P,+1)$ et $(P,-1)$ les deux espaces affines orientés admettant comme espace affine sous-jacent un espace E qui ne contient qu'un seul point P, $(P,+1)$ étant celui dont la classe d'orientation positive est celle qui contient 1.

Soit $(P_0,\dots,P_n)$ une base affine de E dont les éléments sont rangés dans un ordre déterminé (nous supposerons toujours qu'il en est ainsi pour les bases affines que nous considèrerons) ; supposons que $n > 0$. Les éléments P_i-P_n $(0 \leqq i \leqq n)$ forment alors une base de T ; leur produit $(P_0-P_n)\Lambda\dots\Lambda(P_{n-1}-P_n)$ appartient à l'une des classes d'orientation de E. L'orientation de E relativement à laquelle cette classe est la classe positive s'appelle l'<u>orientation définie par la base affine</u> $(P_0,\dots,P_n)$. Soit p une permutation de l'ensemble $\{0,\dots,n\}$; nous allons montrer que l'orientation définie par $(P_{p(0)},\dots,P_{p(n)})$ est ou non la même que celle définie par $(P_0,\dots,P_n)$ suivant que p est paire ou impaire. C'est évident si $p(n)=n$; il suffira donc de le montrer dans le cas où p est une transposition qui échange n avec un indice $i<n$ et qui laisse les autres indices fixes. On a alors $P_{p(i)}-P_{p(n)} = -(P_i-P_n)$, et, si $j\neq i,n$, $P_{p(j)}-P_{p(n)}=(P_j-P_n)-(P_i-P_n)$, d'où $(P_{p(0)}-P_{p(n)})\Lambda\dots\Lambda(P_{p(n-1)}-P_{p(n)})=-(P_0-P_n)\dots(P_{n-1}-P_n)$, ce qui démontre notre assertion dans ce ~~xxxx~~ cas.

Supposant $n>0$, soient U un demi-espace de E et H l'hyperplan limite de U. Nous allons montrer que la donnée de U permet d'associer à chacune des deux orientations de E une orientation bien définie de H.

Soient $T(H)$ la direction de H , $\Lambda(H)$ l'algèbre extérieure sur $\Lambda(H)$ et $\Lambda_{n-1}(H)$ l'espace des éléments homogènes de degré n-1 de $\Lambda(H)$; $T(H)$ est un sous-espace de T et $\Lambda(H)$ une sous-algèbre de Λ . Soient Γ_H et Γ'_H les classes d'orientation de H , et P_o un point de U non situé dans H . Si $\{t_1,\ldots,t_{n-1}\}$ est une base de $T(H)$ et P un point quelconque de H , P_o-P, $t_1,\ldots,t_{n-1}$ forment une base de T . On en déduit que les ensembles $(P_o-P)\Lambda\Gamma_H$, $(P_o-P)\Lambda\Gamma'_H$ des produits de P_o-P par les éléments de Γ_H et de Γ'_H respectivement sont les deux classes d'orientation Γ et Γ' de E . Par ailleurs, on notera que les ensembles $(P_o-P)\Lambda\Gamma_H$, $(P_o-P)\Lambda\Gamma'_H$ ne changent pas si on remplace P par un autre point P' de H , car $P_o-P'=(P_o-P)+(P-P')$, et $(P-P')\Lambda\Gamma_H=(P-P')\Lambda\Gamma'_H=\{0\}$ puisque $P-P'\in T(H)$. Ces ensembles restent aussi les mêmes si on remplace P_o pour un autre point P'_o de U non situé dans H . Ecrivons en effet $P'_o-P=a(P_o-P)+t$, où $t\in T(H)$ et $a\in K$; on a alors $a>0$. Si on avait en effet $a<0$, le point $(1-a)^{-1}P'_o-a(1-a)^{-1}P_o=(1-a)^{-1}t+P$ appartiendrait à H et au segment $P_oP'_o$, ce qui est impossible. Ceci dit, supposons donnée une orientation de E au moyen de la classe Γ ; si Γ_H est la classe d'orientation de H telle que $(P_o-P)\Lambda\Gamma_H=\Gamma$ pour tout $P_o\in U\cap\complement H$ et tout $P\in H$, nous dirons que l'orientation de H définie par Γ_H est <u>l'orientation définie par</u> U <u>sur son hyperplan limite</u> (relativement à l'orientation donnée de E). Cette orientation est naturellement la même que l'on suppose que U soit un demi-espace ouvert ou le demi-espace fermé qui le contient. Par contre, il est clair qu'elle se transforme en son opposée si on remplace U par un autre demi-espace situé de l'autre côté de H que U ou si on change l'orientation de E . On voit donc que réciproquement, les données d'orientations o de E et o_H de H détermi-nent l'un des côtés de H , à savoir le côté tel que o_H soit l'orienta-tion définie par le demi-espace (fermé ou ouvert) situé de ce côté sur son hyperplan limite H soit o_H ; ce côté s'appelle le <u>côté positif de</u> H (relativement à o et o_H) .

Supposons données des orientations o et o_H de E et de H , et soit $(P_1,\ldots,P_n)$ une base affine de H qui définisse l'orientation de H (nous supposons ici que $n>1$) . La classe d'orientation positive de o_H est alors celle qui contient $(P_1-P_n)\wedge\ldots\wedge(P_{n-1}-P_n)$. On voit donc qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'un point P_o de E non dans H soit du côté positif de H par rapport à o et o_H est que la base affine $(P_o,P_1,\ldots,P_n)$ de E définisse l'orientation o . Considérons maintenant le cas où $n=1$; H se réduit alors à un point P ; si l'orien-tation o_H est celle du point orienté $(P,+1)$, une condition nécessaire et suffisante pour qu'un point P_o de E distinct de P appartienne au côté positif de H est que (P_o,P) définisse l'orientation o de E .

Nous avons donc obtenu le résultat suivant :

<u>Proposition 4.</u> <u>Soient</u> $(P_o,\ldots,P_n)$ <u>et</u> $(P'_o,\ldots,P'_n)$ <u>des bases affines d'un même espace affine</u> E <u>de dimension</u> $n>0$; <u>supposons que</u> $P'_i=P_i$ <u>pour tous les</u> i <u>sauf au plus un seul</u> k . <u>Pour que ces deux bases définis-sent la même orientation de</u> E , <u>il faut et suffit que</u> P_k <u>et</u> P'_k <u>soient d'un même côté de l'hyperplan déterminé par les</u> P_i <u>pour</u> $i\neq k$.

Puisque tout point P admet une orientation intrinsèquement définie, on voit que, sur une droite affine orientée $\tilde{E}$, tout point P détermine intrinsèquement l'une des demi-droites dont il est la limite à savoir celle qui est du côté positif de P par rapport à l'orientation de $\tilde{E}$ et au point orienté $(P,+1)$; nous l'appellerons la <u>demi-droite positive</u> déterminée par P . On peut retrouver ce résultat en se plaçant à un autre point de vue. Le couple $(0,1)$ est une base affine de la structure d'espace affine du corps de base K ; cette base affine détermine sur K une structure d'espace affine orienté $\tilde{K}$ dont elle définit l'orientation. Tout paramètre affine u sur la droite affine sous-jacente E de $\tilde{E}$ est un isomorphisme de E sur K ; tous les paramètres affines sur E se divisent en deux classes, ceux de l'une des classes étant des isomorphismes de $\tilde{E}$ sur $\tilde{K}$ et ceux de l'autre classe non . Si u est un paramètre affine appartenant à la première de ces classes, tous les autres sont les fonctions au+b , où a,b sont des éléments de K tels que $a > 0$. Or, l'application u^{-1} permet de transporter à E la structure d'ordre de K ; on obtient ainsi sur E une structure d'ordre, qui ne change évidemment pas si on remplace u par un autre paramètre affine qui donne un isomorphisme de $\tilde{E}$ sur $\tilde{K}$. On voit donc qu'<u>une droite affine orientée a une structure d'ensemble ordonné</u>. Le côté positif déterminé par un point P sur $\tilde{E}$ est le côté duquel se trouvent tous les points $Q \leqq P$ relativement à cette structure d'ordre.

Soit maintenant C un ensemble convexe de l'espace E . On appelle <u>ensemble convexe orienté</u> admettant C comme ensemble sous-jacent un couple formé de C et d'une orientation de la variété affine engendrée par C . Tout ensemble convexe peut être orienté de deux manières différentes ; ces deux orientations sont dites <u>opposées</u> l'une à l'autre. Supposons maintenant que C soit une région polyédrale convexe de la variété affine V qu'il engendre, et soit F une face de C . La variété affine W engendrée par F est un hyperplan de la structure affine de V ;

soit G la demi-variété de V déterminée par W qui contient C. Si on se ~~passe~~ donne une orientation de C, donc de V, la donnée de cette orientation et de la demi-variété G détermine une orientation de F. Donc toute orientation d'un ensemble convexe C qui est une région polyédrale convexe de la variété affine qu'il engendre détermine une orientation de chacune des faces de C.

Proposition 5. Soit C une région polyédrale convexe de E et soit F une facette de codimension 2 de E ; soient G et G' les faces de C dont F est une face. Les orientations de F déterminées par les orientations de G et de G' définies par une même orientation de C sont alors opposées l'une à l'autre.

Soient H et H' les hyperplans engendrés par G et G' ; la variété affine V engendrée par F est alors $H \cap H'$. Choisissons une base affine $(P_2,\ldots,P_n)$ de V composée de points de F ; soient P_1 et P'_1 des points de G et G' respectivement n'appartenant pas à F et P_0 un point intérieur de C. Soit H'' l'hyperplan engendré par P_0 et V. Montrons que P_1 et P'_1 sont de part et d'autre de H''. Soient U et U' les demi-espaces fermés déterminés par H et H' respectivement qui contiennent C ; $U \cap H$ et $U' \cap H'$ sont alors des faces du secteur dièdre $U \cap U'$; de plus chacun de ces ensembles est situé tout entier d'un même côté de H'' (car $H'' \cap H = H'' \cap H' = H \cap H' = V$). L'ensemble $H'' \cap U \cap U'$ contient P_0 et est par suite $\neq V$; il en résulte que les ensembles $U \cap H'$, $U' \cap H$ ne sont pas d'un même côté de H'' (cf., n° 2), ce qui démontre notre assertion puisque $P_1 \in U' \cap H$, $P'_1 \in U \cap H'$. Supposons maintenant que nous munissions C de l'orientation définie par la base affine $(P_0,P_1,\ldots,P_n)$ de E. L'orientation que C déterminera sur G sera alors celle définie par la base affine $(P_1,\ldots,P_n)$, et l'orientation déterminée sur F par cette orientation de G sera celle définie par la base affine $(P_2,\ldots,P_n)$ (celle définie par le point orienté $(P_2,+1)$ si $n=2$). Par ailleurs, l'orientation définie par la base affine $(P_0,P_1',P_2,\ldots,P_n)$ est opposée à celle définie par la base $(P_0,P_1,\ldots,P_n)$ (prop.4). Il en résulte que l'orientation déterminée sur F par l'orientation de G' définie par l'orientation considérée de C est celle opposée à celle définie par la base affine $(P_2,\ldots,P_n)$ (à celle définie par le point orienté $(P_2,+1)$ si $n=2$). Si on change l'orientation de C , les deux orientations considérées de F sont remplacées par leurs opposées et restent opposées l'une à l'autre, ce qui démontre la prop.5.

6. CHAINES VOLUMÉTRIQUES.

Nous désignerons, comme au n°5, par E un espace affine de dimension finie sur un corps commutatif ordonné K . Soient T l'espace des translations de E et Λ l'algèbre extérieure sur T . Si V est une variété affine de dimension p de E , la direction Γ_V de V est un sous-espace de dimension p de Γ ; il correspond à cet espace un sous-espace Λ_V de dimension p de Λ , engendré par le produit extérieur des éléments d'une base de Γ_V (si $p=0$, Λ_V est le corps de base K de E). L'ensemble des éléments $\neq 0$ de Λ_V se décompose en les deux classes d'orientation Γ_V et Γ'_V de V .

Nous appellerons cellule convexe de E une partie convexe C de E qui est un polyèdre convexe de la variété affine V qu'elle engendre, la dimension de V s'appelle aussi dimension de C . Nous appellerons cellule convexe orientée γ le couple formé par une cellule convexe C et par une orientation de la variété affine V engendrée par C ; c'est donc l'un des couples (C, Γ_V) ou (C, Γ'_V) . L'ensemble C se désignera par $|\gamma|$

sa dimension s'appellera aussi <u>dimension de</u> γ ; la classe Γ_γ s'appellera la <u>classe positive de</u> γ et se désignera par Γ_γ. Si F est une face de C, l'orientation de γ détermine une orientation de F ; l'ensemble F, muni de cette orientation, s'appellera une <u>face de</u> γ. Les faces de γ sont des cellules convexes orientées.

Nous nous proposons de construire une application θ de l'ensemble de toutes les cellules convexes orientées dans l'algèbre Λ qui possède les propriétés suivantes :

$\mathcal{C}$ 1. <u>Si</u> A <u>est un point de E</u>, <u>on a</u> $\theta(A,+1)=1$, $\theta(A,-1)=-1$;

$\mathcal{C}$ 2. <u>pour toute cellule convexe orientée</u> γ, $\theta(\gamma)\in\Gamma_\gamma$;

$\mathcal{C}$ 3. <u>si</u> γ' <u>est la cellule convexe orientée qui se déduit d'une cellule convexe orientée</u> γ <u>en changeant son orientation, on a</u> $\theta(\gamma')=-\theta(\gamma)$;

$\mathcal{C}$ 4.p. <u>si</u> $\gamma_1,\ldots,\gamma_h$ <u>sont toutes les faces distinctes d'une même cellule convexe orientée de dimension</u> p+1, <u>on a</u> $\sum_{i=1}^{h}\theta(\gamma_i)=0$.

Nous définirons les éléments $\theta(\gamma)$ par récurrence sur la dimension de γ. Ils se trouvent définis pour les cellules de dimension 0 par la condition $\mathcal{C}$ 1 ; et, pour ces cellules, les conditions $\mathcal{C}$ 2. et $\mathcal{C}$ 3. sont satisfaites. Montrons que $\mathcal{C}$ 4.0 est satisfaite. Soit γ une cellule convexe orientée de dimension 1 ; $|\gamma|$ est un segment PQ, et l'orientation de γ donne une structure de droite orientée à la droite PQ ; on peut supposer que (P,Q) est une base affine de cette droite qui en définit l'orientation. Les faces de γ sont alors (Q,+1) et (P,-1), ce qui montre que $\mathcal{C}$ 4.0 est satisfaite. Supposons maintenant que les $\theta(\gamma)$ soient définis pour toutes les cellules convexes orientées γ de dimensions $<p$, que les conditions $\mathcal{C}$ 1.,2.,3. soient satisfaites pour ces cellules et qu'il en soit de même des conditions $\mathcal{C}$ 4.q pour $q<p$. Soit γ une cellule convexe orientée de dimension p ; désignons

par $\varphi_1,\ldots,\varphi_l$ les faces distinctes de γ, par V la variété affine engendrée par $|\gamma|$ et par W_i la variété affine engendrée par $|\varphi_i|$ $(1 \leqq i \leqq l)$. Les orientations de γ et de φ_i confèrent à V et à W_i des structures d'espaces affines orientés $\tilde{V}$ et $\tilde{W}_i$. Choisissons un point $A \in V$ et, pour chaque i $(1 \leqq i \leqq l)$, un point $A_i \in W_i$. L'élément $(A-A_i)\wedge\theta(\varphi_i)$ ne dépend pas du choix de A_i ; en effet, si A_i' est un autre point de W_i, on a $A-A_i' = A-A_i+A_i-A_i'$, et A_i-A_i' appartient à la direction V_i, d'où $(A_i-A_i')\wedge\theta(\varphi_i)=0$ puisque $\mathscr{C}$ 2. est satisfaite pour φ_i. De plus la somme $\sum_{i=1}^{l}(A-A_i)\wedge\theta(\varphi_i)$ ne dépend pas du choix de A dans V ; car, si on remplace A par un autre point A' de V, cette somme se trouve augmentée de l'élément $(A'-A)\wedge\sum_{i=1}^{l}\theta(\varphi_i)$, qui est nul en vertu de $\mathscr{C}$ 4.(p-1). Posons donc $\theta(\gamma) = \sum_{i=1}^{l}(A-A_i)\wedge\theta(\varphi_i)$. Nous allons montrer que la condition $\mathscr{C}$ 2. est satisfaite. Supposons d'abord $p > 1$; soit $(A_{i,1},\ldots,A_{i,p})$ une base affine de W_i qui définisse l'orientation de W_i. Prenons pour A un point interne de $|\gamma|$; A appartient alors au demi-espace de V déterminé par W_i qui contient $|\gamma|$; il résulte de la définition de l'orientation d'une face d'une cellule orientée que ce demi-espace est du côté positif de W_i relativement aux orientations de W_i et de W données par les espaces orientés $\tilde{W}_i$ et $\tilde{V}$; $(A, A_{i,1},\ldots,A_{i,p})$ est donc une base affine de V qui définit l'orientation de $\tilde{V}$. Puisque $\mathscr{C}$.2 est satisfaite pour φ_i, on a

$$\theta(\varphi_i) = a_i\,(A_{i,1}-A_{i,p})\wedge\ldots\wedge(A_{i,p-1}-A_{i,p})$$

avec un $a_i > 0$ dans K. On a donc

$$(A-A_i)\wedge\theta(\varphi_i) = (A-A_{i,p})\wedge\theta(\varphi_i) =$$

$$a_i(A-A_{i,p})\wedge(A_{i,1}-A_{i,p})\wedge\ldots\wedge(A_{i,p-1}-A_{i,p})$$

ce qui montre qu'avec notre choix de A les éléments $(A-A_i)\wedge\theta(\varphi_i)$

appartiennent tous à Γ_6 ; il en est donc de même de $\theta(\gamma)$ qui est leur somme. Considérons maintenant le cas où $p=1$; on peut alors supposer que $|\gamma|$ est un segment PQ, et que la base affine (P,Q) définit l'orientation de V ; ceci étant, on a $l=2$, $\varphi_1=(P,-1)$, $\varphi_2=(Q,+1)$, $\theta(\varphi_1)=-1$, $\theta(\varphi_2)=+1$ et $\theta(\gamma)=P-Q$, ce qui montre que $\mathcal{C}2.$ est satisfaite dans ce cas.

Si γ' est la cellule qui se déduit de γ en changeant son orientation, il est clair que les faces de γ' se déduisent de $\varphi_1,\dots,\varphi_l$ en changeant leurs orientations ; la condition $\mathcal{C}3.$ étant satisfaite pour les φ_i, on a $\theta(\gamma')=-\theta(\gamma)$.

Soient maintenant $\gamma_1,\dots,\gamma_h$ les faces d'une cellule convexe de dimension $p+1$, et soient φ_{ij} $(1\leqq j\leqq l(i))$ les faces de γ_i. Il résulte de la prop. 3, n°2 que, pour chaque couple (i,j), il existe exactement un couple $(i',j')\neq(i,j)$ tel que $|\varphi_{i'j'}|=|\varphi_{ij}|$ et de la prop. 5, n°5 que les orientations de φ_{ij} et de $\varphi_{i'j'}$ sont opposées, d'où $\theta(\varphi_{i'j'})=-\theta(\varphi_{ij})$. Choisissons pour chaque i $(1\leqq i\leqq h)$ un point A_i de $|\gamma_i|$ et pour chaque couple (i,j) $(1\leqq i\leqq h,\ 1\leqq j\leqq l(i))$ un point A_{ij} de $|\varphi_{ij}|$; on peut supposer que $A_{i'j'}=A_{ij}$ si $|\varphi_{i'j'}|=|\varphi_{ij}|$. Soit A_0 un point quelconque de E. On a

$$\sum_{i=1}^{h}\theta(\gamma_i)=\sum_{i=1}^{h}\sum_{j=1}^{l(i)}(A_i-A_0)\wedge\theta(\varphi_{ij})+\sum_{i=1}^{h}\sum_{j=1}^{l(i)}(A_0-A_{ij})\wedge\theta(\varphi_{ij}).$$

La première somme est nulle parce que l'on a $\sum_{j=1}^{l(i)}\theta(\varphi_{ij})=0$ pour tout i ; la seconde somme est nulle parce que ses termes se détruisent deux à deux en vertu de ce que nous avons dit plus haut. La condition C.4.p est donc satisfaite.

Définition 7. On appelle chaîne volumétrique d'une cellule convexe orientée γ de E l'image $\theta(\gamma)$ de γ par l'application θ que nous venons de définir.

Si $A_0, A_1, \ldots, A_p$ sont des points de E qui forment une famille affinement libre, nous désignerons par $\sigma(A_0, \ldots, A_p)$ le simplex orienté dont le simplex sous-jacent est le simplex S de sommets $A_0, \ldots, A_p$ et dont l'orientation est celle donnée par la base affine $(A_0, \ldots, A_p)$ de la variété affine engendrée par S. Cherchons à déterminer $\theta(\sigma(A_0, \ldots, A_p))$. Si $p=1$, nous avons vu que $\theta(\sigma(A_0, A_1)) = A_0 - A_1$. Montrons que, pour tout p,

$$\theta(\sigma(A_0, \ldots, A_p)) = (A_0 - A_p) \wedge \ldots \wedge (A_{p-1} - A_p) .$$

C'est vrai si $p=1$. Supposons que $p > 1$ et que ce soit vrai pour $p-1$. Il est clair que $\sigma(A_1, \ldots, A_p)$ est une face orientée de $\sigma(A_0, \ldots, A_p)$ et que c'est la seule face orientée dont l'ensemble de points ne contienne pas A_0. Prenant pour le point A de la définition de $\theta(\gamma)$ donnée plus haut le point A_0, on voit que notre formule est vraie pour p.

Les hypothèses sur $A_0, A_1, \ldots, A_p$ étant les mêmes que plus haut, désignons maintenant par $\pi(A_0, A_1, \ldots, A_p)$ la cellule convexe orientée dont l'ensemble de base est le parallélotope P construit sur les segments $A_0A_1, \ldots, A_0A_p$ et dont l'orientation est définie par la base affine $(A_0, A_1, \ldots, A_p)$ de la variété affine V engendrée par P. Nous allons montrer par récurrence sur p que

$$\theta(\pi(A_0, \ldots, A_p)) = p!(A_0 - A_p) \wedge \ldots \wedge (A_{p-1} - A_p) .$$

C'est vrai pour $p=1$, puisque $\pi(A_0, A_1) = \sigma(A_0, A_1)$. Supposons que $p > 1$ et que notre formule soit vraie pour $p-1$. Soient $u_0, \ldots, u_p$ les coordonnées barycentriques dans V relatives à la base $(A_0, \ldots, A_p)$.

Il est clair que P a 2p faces, qui sont ses intersections avec les hyperplans d'équations $u_i=0$ et $u_i=1$ $(1\leqq i\leqq p)$; désignons par F_i la face d'équation $u_i=1$; les faces $F_1,\dots,F_p$ sont toutes celles des faces de P qui ne contiennent pas A_0. La face F_i contient A_i et est l'image par la translation A_i-A_0 du parallélotope construit sur les segments A_0A_j $(1\leqq j\leqq p,\ j\neq i)$. Soit φ_i la face orientée de $\Pi(A_0,\dots,A_p)$ telle que $|\varphi_i|=F_i$. Déterminons son orientation. Nous poserons pour un moment $B_j=A_j$ si $j<i$, $B_j=A_{j+1}$ si $j\geqq i$ et $B'_j=(A_i-A_0)+B_j$. Les points $B'_0,\dots,B'_{p-1}$ forment alors une base affine de la variété engendrée par F_i, et F_i est le parallélotope construit que les segments $B'_0B'_1,\dots,B'_0B'_{p-1}$. On a donc, en vertu de notre hypothèse inductive,

$$\theta(\varphi_i)=\varepsilon_i\,(p-1)!\,(B'_0-B'_p)\wedge\dots\wedge(B'_{p-2}-B'_{p-1}),\qquad \varepsilon_i=\pm 1 .$$

Puisque $A_i\in F_i$, le signe de ε_i est déterminé par la condition que $(A_0-A_i)\wedge\theta(\varphi_i)$ ne diffère de $(A_0-A_p)\wedge\dots\wedge(A_{p-1}-A_p)$ que par un facteur positif. Observant que $B'_j-B'_{p-1}=B_j-B_{p-1}$ est A_j-A_p si $j<i$, et $A_{j+1}-A_p$ si $j\geqq i$, et que $A_0-A_i=(A_0-A_p)-(A_i-A_p)$, on voit que le facteur en question sera $(p-1)!$. Prenant pour le point A de la définition générale de $\theta(\gamma)$ le point A_0, on a $\theta(\Pi(A_0,\dots,A_p)) = p(p-1)!(A_0-A_p)\wedge\dots\wedge(A_{p-1}-A_p)$, ce qui démontre notre formule pour p.

Proposition 6. *Soit P un polyèdre de E, et soit* $P=\bigcup_{i=1}^{h} C_i$ *une représentation de P comme réunion d'un nombre fini de polyèdres convexes* C_i *qui sont deux à deux sans point intérieur commun. Soient* γ_i *les cellules convexes orientées obtenues en associant aux polyèdres* C_i *une même orientation de E. La somme des chaînes volumétriques des* γ_i *ne dépend alors que de P et de l'orientation de E.*

Démontrons d'abord le résultat suivant. Soient γ une cellule convexe orientée de dimension quelconque et H un hyperplan ; supposons que $|\gamma|$ chevauche H ; désignons par U' et U'' les deux demi-espaces fermés de limite H et par γ' et γ'' les cellules convexes orientées dont les ensembles de base sont $|\gamma| \cap U'$ et $|\gamma| \cap U''$ et qui sont définies par la même orientation de la variété affine engendrée par $|\gamma|$ que γ elle-même. On a alors $\theta(\gamma) = \theta(\gamma')+\theta(\gamma'')$. Nous procèderons par récurrence sur la ~~xxxxxx~~ dimension p de γ . Si $p=0$ il est impossible que $|\gamma|$ chevauche H . Supposons que $p>0$ et que notre assertion soit vraie pour $p-1$. Soient φ_i $(1 \leqq i \leqq h)$ les faces de γ , rangées dans un ordre tel que $|\varphi_i| \subset U'$ si $i \leqq h_1$, que $|\varphi_i|$ chevauche H si $h_1 < i \leqq h_2$ et que $|\varphi_i| \subset U''$ si $i > h_2$. Les faces de l'ensemble $|\gamma| \cap U'$ sont alors les $|\gamma_i|$ pour $i \leqq h_1$, les $|\varphi_i| \cap U'$ pour $h_1 < i \leqq h_2$ et $H \cap |\gamma|$ (cf. n° 3) . Si $h_1 < i \leqq h_2$, désignons par φ_i' et φ_i'' les cellules convexes orientées dont les ensembles sous-jacents sont $|\varphi_i| \cap U'$ et $|\varphi_i| \cap U''$ et dont les orientations sont définies par la même orientation de la variété engendrée par $|\varphi_i|$ que φ_i elle-même ; on a donc $\theta(\varphi_i) = \theta(\varphi_i')+\theta(\varphi_i'')$ en vertu de notre hypothèse inductive. Choisissons un point interne A_0 de $|\gamma|$ situé dans H (cf. n° 3) et, pour chaque i, un point A_i de φ_i . Désignons par Γ la classe d'orientation positive de γ . Les $(A_0-A_i) \wedge \theta(\varphi_i)$ sont donc dans Γ ; $\theta(\varphi_i')$ ne différant de $\theta(\varphi_i)$ que par un facteur >0 , on a $(A_0-A_i) \wedge \theta(\varphi_i') \in \Gamma$ si $h_1 < i \leqq h_2$. Les faces de γ' sont donc les φ_i $(i \leqq h_1)$, les φ_i' $(h_1 < i \leqq h_2)$ et une face ψ telle que $|\psi| = H \cap |\gamma|$. On a donc

$$\theta(\gamma') = \sum_{i \leqq h_1} (A_0-A_i) \wedge \theta(\varphi_i) + \sum_{h_1 < i \leqq h_2} (A_0-A_i) \wedge \theta(\varphi_i') + \\ + (A_0-A_0) \wedge \theta(\psi) .$$

On a une formule analogue pour $\theta(\gamma'')$. Tenant compte des formules $\theta(\varphi_i)=\theta(\varphi'_i)+\theta(\varphi''_i)$ $(h_1 < i \leqq h_2)$, la formule $\theta(\gamma)=\theta(\gamma')+\theta(\gamma'')$ est établie pour les cellules de dimension p.

Il résulte immédiatement de là que la prop.6 est vraie dans le cas particulier suivant : P est convexe et les C_i sont les éléments d'une subdivision de P par sections successives. La somme $\sum_{i=1}^{h} \theta(\gamma_i)$ est alors en effet $\theta(\pi)$, si π est la cellule convexe obtenue en associant à P l'orientation de E qui définit les diverses cellules orientées γ_i.

Pour passer au cas général, désignons par $P = \bigcup_{j=1}^{h'} C'_j$ une autre représentation de P comme réunion de polyèdres convexes C'_j sans point intérieur commun deux à deux. Soit γ'_j la cellule convexe orientée telle que $|\gamma'_j| = C'_j$ et dont l'orientation est l'orientation de E donnée par les γ_i. On sait qu'il existe une subdivision Σ de E par sections successives telle que chacun des ensembles C_i, C'_j soit la réunion d'un certain nombre d'ensembles de Σ. Soient C''_k $(1 \leqq k \leqq l)$ ceux des ensembles de Σ qui sont dans P, et soit γ''_k la cellule convexe orientée obtenue en associant à C''_k l'orientation de E qui définit les γ_i. Il résulte alors de ce que nous avons dit que $\sum_{k=1}^{l} \theta(\gamma''_k) = \sum_{i=1}^{h} \theta(\gamma_i)$ et aussi que $\sum_{k=1}^{l} \theta(\gamma''_k) = \sum_{j=1}^{h'} \theta(\gamma'_j)$; on a donc $\sum_{i=1}^{h} \theta(\gamma_i) = \sum_{j=1}^{h'} \theta(\gamma'_j)$, et la prop.6 est démontrée.

Appelons <u>polyèdre orienté</u> de E le couple π formé d'un polyèdre P de E et d'une orientation de E. Soit $P = \bigcup_{i=1}^{h} C_i$ une représentation de P comme réunion de polyèdres convexes sans point intérieur commun deux à deux ; et soit γ_i la cellule convexe orientée dont l'ensemble sous-jacent est C_i et dont l'orientation est définie par la même orientation de E que celle de π. La somme $\sum_{i=1}^{h} \theta(\gamma_i)$ ne dépend donc que de π.

Il en résulte que, si P est convexe, cette somme est $\theta(\pi)$. Dans le cas général, nous définirons $\theta(\pi)$ comme étant la valeur de cette somme, et nous appellerons $\theta(\pi)$ la chaîne volumétrique du polyèdre orienté π. Il est clair que, si π' est le polyèdre orienté qui se déduit de π en changeant son orientation, on a $\theta(\pi') = -\theta(\pi)$.

Désignons maintenant par P_0 un polyèdre fixe quelconque. Soient o une orientation quelconque de E et P un polyèdre. On a alors $\theta((P,o)) = v(P;P_0)\ \theta((P_0,o))$, $v(P;P_0)$ étant un élément >0 de K qui ne dépend manifestement pas du choix de l'orientation o . Cet élément s'appelle le volume relatif de P par rapport à P_0 .

Proposition 7. Soient P_0, P, P' des polyèdres. Si $P\cap P'$ ne contient aucun point intérieur de P ou de P' , on a $v(P\cup P' ; P_0)=v(P;P_0) + v(P';P_0)$. Dans le cas contraire, soit Q le plus grand polyèdre contenu dans $P\cap P'$; on a $v(P;P_0)+v(P';P_0) = v(P\cup P' ; P_0)+v(Q;P_0)$.

On peut trouver une subdivision Σ de E par sections successives telle que P et P' soient chacun des réunions d'ensembles de Σ ; de plus Q est alors aussi une réunion d'ensembles de Σ si $P\cap P'$ contient un point intérieur de P ou de P' . Or il est clair que, si un polyèdre est une réunion d'ensembles de Σ , son volume relatif par rapport à P_0 est la somme des volumes relatifs par rapport à P_0 de tous ceux des ensembles de Σ qui y sont contenus ; la prop.7 résulte immédiatement de là .

Proposition 8. Soient P_0 et P des polyèdres et s une opération du groupe fondamental de l'espace affine E . On a alors $v(sP;P_0) = |D(s)|\, v(P;P_0)$, où $|D(s)|$ est la valeur absolue du déterminant D(s) de s .

Choisissons un simplex quelconque S de dimension égale à celle de E. Il résulte immédiatement des définitions que $v(P;P_o)=v(P;S)/v(P_o;S)$. Il suffira donc de montrer que, pour tout polyèdre P, $v(sP;S)=|D(s)|v(P;S)$. Or, s est un automorphisme de la structure affine de E ; les volumes relatifs étant définis structuralement dans la théorie des espaces affines de dimensions finies, on a $v(sP;sS)=$ $=v(P;S)$. Il suffira donc de montrer que $v(sS;S)=|D(s)|$. Soient $A_o,\dots,A_n$ les sommets de S, rangés dans un ordre quelconque, et soit o l'orientation de E donnée par la base affine $(A_o,\dots,A_n)$. Posons $\sigma=(S,o)$, d'où $\theta(\sigma)=(A_o-A_n)\wedge\dots\wedge(A_{n-1}-A_n)$. Désignons par σ' le simplex orienté (sS,o), et posons $A_i'=sA_i$ $(0\leqq i\leqq n)$; on a donc $(A_o'-A_n')\wedge\dots\wedge(A_{n-1}'-A_n')=D(s)\,\theta(\sigma)$. Par ailleurs, $\theta(\sigma')$ est $\varepsilon(A_o'-A_n')\wedge\dots\wedge(A_{n-1}'-A_n')$, où ε est $+1$ ou -1 suivant que l'orientation définie par $(A_o',\dots,A_n')$ est identique à o ou non, c'est-à-dire suivant que $D(s)$ est >0 ou <0. La prop. 8 est donc démontrée.

§ 3 - GÉOMETRIE EUCLIDIENNE.

1. DÉFINITION.

Soit $\mathcal{E}_0$ l'espèce des structures d'espaces vectoriels ; $\mathcal{E}_0$ comporte deux ensembles de base K et V et des objets constitutifs et axiomes qui font de K un corps et de V un espace vectoriel sur K.

Nous allons considérer l'espèce de structures $\mathcal{E}$ qui s'obtient à partir de $\mathcal{E}_0$ par adjonction d'un nouvel objet constitutif f, de type $\mathcal{P}(V \times K)$, et des axiomes suivants :

K est un corps commutatif ;

f est une forme quadratique non défective sur V.

Rappelons que le second axiome signifie qu'il existe une forme bilinéaire B symétrique non dégénérée sur $V \times V$ telle que l'on ait

$$f(ax+by) = a^2 f(x)+b^2 f(y)+ab\,B(x,y)$$

quels que soient a et b dans K et x et y dans V ; B est uniquement déterminé par ces conditions.

Désignons maintenant par U le groupe des automorphismes de l'espace vectoriel V qui laissent la forme quadratique f invariante et par G le groupe engendré par U et par les translations de V. Le groupe G est défini structuralement dans la théorie de l'espèce de structures $\mathcal{E}$. On peut donc lui associer une espèce de structures $\mathcal{E}(V, G)$ (cf. l'introduction). La théorie de cette espèce de structures s'appelle la <u>géomètrie euclidienne</u> ; un espace muni d'une structure de cette espèce s'appelle un <u>espace euclidien</u>.

Le groupe G est contenu dans le groupe affine de V ; la géomètrie euclidienne est donc une géomètrie du type affine, et tout espace euclidien E a une structure d'espace affine sous-jacent. Toutes les notions introduites dans l'étude des espaces affines s'appliquent donc aux espaces euclidiens : espace des translations, variétés affines, dimension, etc..

La forme f n'est naturellement pas invariante en général par les opérations du groupe $\mathcal{G}$; mais on peut en déduire facilement un invariant structural du groupe $\mathcal{G}$. Désignons en effet par e la fonction définie sur $V \times V$ par $e(x,y) = f(x-y)$; il est clair que $e(sx,sy) = e(x,y)$ quels que soient x,y dans V et s dans $\mathcal{G}$; e est donc un invariant structural. On en déduit (par le procédé indiqué dans l'introduction) un terme intrinsèque de la géomètrie euclidienne. Si donc E est un espace euclidien sur un corps K , on a une certaine fonction $e(P,Q)$ définie sur $E \times E$ à valeurs dans K , qui s'appelle la <u>forme métrique</u>. Rappelons la manière dont cette fonction se définit. La structure euclidienne de E comporte trois ensembles de base K,V,E dont le second est un espace vectoriel V sur K , et K et V sont les ensembles de base d'une structure S d'espèce $\mathcal{E}$. L'homologue dans S de la forme quadratique est une forme quadratique f_o sur V ; l'homologue de f est une fonction e_o sur $V \times V$ à valeurs dans K telle que $e_o(x,y) = f(x-y)$ $(x,y \in V)$. On a par ailleurs un ensemble R de repères, qui sont des applications biunivoques de V sur E , et qu'on appelle <u>repères euclidiens</u> ; si r est l'un d'eux, les autres sont les $r.s$, où s parcourt le groupe engendré par le groupe orthogonal de f et par le groupe des translations. Ceci dit, la fonction e est définie par la condition que $e(rx,ry) = e_o(x,y)$ pour tout repère r , x et y étant des points quelconques de V . Soient r un repère et P le point $r(0)$; r est alors un isomorphisme de V sur l'espace vectoriel V_P de centre P défini par l'espace affine sous-jacent de E (on dit aussi que V_P est l'espace vectoriel de centre P défini par E). On en déduit que la fonction $Q \rightarrow e(P,Q)$ est une forme quadratique sur V_P . L'application $t \rightarrow t+P$ étant un isomorphisme de l'espace des

des translations T sur V_P , la fonction $t \to e(P,t+P)$ est une forme quadratique sur T . Par ailleurs, les translations font évidemment partie du groupe fondamental de l'espace E , d'où $e(t_0+P,\ t_0+Q) = e(P,Q)$ quels que soient la translation t_0 et les points P,Q . La forme quadratique $t \to e(P,t+P)$ ne dépend donc pas du point P ; on l'appelle la <u>forme métrique</u> dans T , et on la désigne en général par la même lettre e que la forme métrique dans E ; on a donc $e(Q-P) = e(P,Q) = e(Q,P)$.

Soient réciproquement donnés un espace affine E sur un corps commutatif et une forme quadratique e non défective sur l'espace T des translations de E . La forme e est alors la forme métrique d'une structure d'espace euclidien admettant E comme espace affine sous-jacent. Choisissons en effet un point $P \in E$ et un repère affine r de E . La fonction $x \to e(rx-P)$ sur l'espace vectoriel de base V de E est alors une forme quadratique f_r non défective sur V ; la donnée de f_r détermine sur V une structure d'espèce $\mathcal{E}$, et il y a une structure d'espace euclidien sur E pour laquelle r est un repère euclidien ; e est la forme métrique de cette structure d'espace euclidien. Il est manifeste que cette structure d'espace euclidien ne change pas si on remplace en même temps P par un autre point P' et r par le repère $(P'-P)\circ r$. Si, sans changer P , on remplace r par un repère $r' = r\circ u$, où u est un automorphisme de la structure d'espace vectoriel de V , la forme quadratique f_r est changée en une forme équivalente $f_{r'}$, définie par $f_{r'}(x) = f_r(ux)$, et l'application u définit un isomorphisme de la structure S d'espèce $\mathcal{E}$ définie par f_r sur la structure S' définie par $f_{r'}$. On en déduit que la structure d'espace euclidien de E se change en une structure équivalence (cf. l'introduction). Si nous convenons d'identifier deux structures euclidiennes équivalentes, nous pouvons dire que la donnée de e définit une structure d'espace euclidien bien déterminée sur E .

Il correspond à e une forme bilinéaire symétrique B bien déterminée sur $T \times T$ telle que l'on ait $e(at+bt')=a^2e(t)+b^2e(t')+abB(t,t')$ quels que soient a et b dans K et t,t' dans T.

On associe à B une fonction de 4 arguments dans E, que l'on désigne encore par B, et que l'on définit par la formule

$$B(P,Q,P',Q') = B(Q-P,\ Q'-P') \ .$$

Dans le cas où K n'est pas de caractéristique 2, on appelle <u>produit scalaire</u> de deux vecteurs liés (P,Q) et (P',Q') l'élément $(1/2)B(P,Q,P',Q')$; ce produit scalaire se désigne en général par la notation $\langle PQ,\ P'Q'\rangle$. On a donc

$$\langle PQ,\ PQ\rangle = e(P,Q)$$

$$e(Q,Q') = e(Q,P) + e(Q',P) - 2\langle PQ,PQ'\rangle \ .$$

Le groupe fondamental de l'espace E s'appelle le <u>groupe des déplacements</u>. Ses opérations laissent évidemment invariante la forme métrique : si s est un déplacement, on a $e(sP,sQ) = e(P,Q)$ quels que soient P et Q. Ils laissent aussi invariante la fonction B.

Réciproquement, toute application s de E <u>sur</u> lui-même qui laisse invariante la forme métrique est un déplacement. Soient en effet P un point de E et t la translation de E qui amène P en sP ; l'opération $t^{-1}s$ est alors encore une application de E sur lui-même qui laisse la forme métrique invariante et qui laisse le point P fixe ; on peut donc se borner au cas où $sP=P$. Introduisons l'espace vectoriel V_P de centre P défini par E et la forme quadratique f sur V_P définie par $f(Q)=e(P,Q)$; s laisse cette forme quadratique invariante, et il suffira évidemment de montrer que s est un automorphisme de l'espace vectoriel V_P. Posons $B(Q,Q') = B(P,Q,P,Q') = e(Q,Q')-f(Q)-f(Q')$; s laisse donc la forme bilinéaire B invariante. Soient Q_1 et Q_2 des points de V_P; on a

$$B(sQ_1+sQ_2,sQ') = B(sQ_1,sQ')+B(sQ_2,sQ') = B(Q_1,Q')+B(Q_2,Q') =$$

$$= B(Q_1+Q_2,Q') = B(s(Q_1+Q_2),sQ') \quad .$$

L'application s étant une application sur, et B n'étant pas dégénérée, on a $sQ_1+sQ_2 = s(Q_1+Q_2)$. Soit maintenant a un élément de K ; on a $B(saQ,sQ')=B(aQ,Q')=aB(Q,Q')=aB(sQ,sQ')$, d'où $saQ = asQ$. Enfin, si $sQ = P$, on a $B(Q,Q')=B(sQ,sQ')=0$ pour tout Q' , d'où $Q=P$, ce qui achève la démonstration. On appelle <u>isomètriques</u> les applications s de E <u>dans</u> lui-même qui laissent la forme métrique e invariante.
On notera que toute application isomètrique s est biunivoque, comme il résulte du fait que la dernière partie du raisonnement que nous avons fait plus haut ne dépend pas du fait que s soit une application <u>sur</u> . On en déduit que <u>toute application isomètrique d'un espace euclidien de dimension finie dans lui-même est un déplacement</u>.

2. VARIÉTÉS PERPENDICULAIRES.

Nous désignerons par E un espace euclidien sur un corps K et par T son espace des translations. Nous désignerons par e la forme métrique de E ; on peut considèrer e indifféremment soit comme le symbole d'une forme quadratique sur T soit comme le symbole d'une fonction sur E^2 telle que $e(P,Q) = e(Q-P)$. Soit B la forme bilinéaire symétrique sur $T\times T$ définie par $B(t,t')= e(t+t')-e(t)-e(t')$; on désigne aussi par B la fonction sur E^4 définie par $B(P,Q,P',Q') = B(Q-P,Q'-P')$.
<u>Définition 1</u>. <u>On dit que deux vecteurs liés</u> (P,Q), (P',Q') <u>de</u> E <u>sont perpendiculaires si</u> $B(P,Q,P',Q')=0$; <u>on dit alors aussi que les vecteurs libres</u> $Q-P$, $Q'-P'$ <u>sont perpendiculaires</u>.

Des vecteurs équipollents à des vecteurs perpendiculaires sont donc eux-mêmes perpendiculaires.

Proposition 1 (théorème de Pythagore). Soient P, Q, Q' des points de E. Pour que les vecteurs (P,Q) et (P,Q') soient perpendiculaires, il faut et suffit que $e(Q,Q') = e(Q,P) + e(Q',P)$.

Il résulte en effet de l'égalité $Q'-Q = (Q'-P)-(Q-P)$ que l'on a l'identité $e(Q,Q')=e(Q,P)+e(Q',P)-B(PQ,PQ')$.

Si Δ est un sous-espace de T, on appelle conjugué de Δ le sous-espace Δ' formé des $t' \in T$ tels que $B(t,t')=0$ pour tout $t \in \Delta$. Le conjugué de Δ' contient alors Δ et lui est identique si Δ est lui-même le conjugué d'un sous-espace de T. Cette dernière condition est toujours satisfaite si Δ est de dimension finie. Si Δ est de dimension finie et n'a que 0 en commun avec Δ', T est somme directe de Δ et de Δ'. Si l'espace E est lui-même de dimension finie n, le conjugué d'un sous-espa-ce de dimension p de E est de dimension $n-p$.

Définition 2. Soient V et W des variétés affines de E. On dit que W est orthogonale à V si sa direction est la conjuguée de celle de V. On dit que W est perpendiculaire à V si sa direction est contenue dans la conjuguée de celle de V ou la contient ; dans le premier cas, on dit que W est perpendiculaire par défaut à V, dans le second cas qu'elle lui est perpendiculaire par excès. On dit qu'un vecteur lié (P,Q) de E est perpendiculaire à V si $Q-P$ appartient à la conjuguée de la direction de V ; on dit alors aussi que $Q-P$ est perpendiculaire à la direction de V.

Les variétés orthogonales à V sont donc toutes parallèles entre elles; il en passe une et une seule par un point quelconque de l'espace.

Les variétés perpendiculaires à V sont celles qui leur sont faiblement parallèles. Si V est de dimension finie p, les variétés orthogonales à V sont de codimension finie p, et V leur est orthogonale. Pour qu'un vecteur lié (P,Q) soit perpendiculaire à V, il faut et suffit qu'il soit perpendiculaire à tous les vecteurs liés (P',Q') tels que P',Q' soient dans V ; si $P \neq Q$, une condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que la droite PQ soit perpendiculaire par défaut à V.

<u>Proposition 2</u>. <u>Soit</u> V <u>une variété affine de</u> E (<u>resp.</u> : <u>une variété affine de dimension finie de</u> E). <u>Pour qu'une variété affine</u> W <u>soit perpendiculaire par défaut</u> (<u>resp.</u> : <u>par excès</u>) à V, <u>il faut et suffit que</u> V <u>soit perpendiculaire par défaut</u> (<u>resp.</u> : <u>par excès</u>) <u>à</u> W.

Soient $\Delta(V)$ et $\Delta(W)$ les directions de V et de W. Si W est perpendiculaire par défaut (resp. : par excès) à V, $\Delta(W)$ est contenu dans (resp. : contient) la conjuguée $(\Delta(V))'$ de $\Delta(V)$; sa conjuguée contient donc (resp. : est contenu dans) celle, $(\Delta(V))''$ de $(\Delta(V))'$; $(\Delta(V))''$ contient $\Delta(V)$ et lui est identique si V est de dimension finie, ce qui démontre la prop. 2.

<u>Remarque</u>. On voit que, plus généralement, si V est orthogonale à une variété affine, pour que W soit perpendiculaire par excès à V, il faut et suffit que V le soit à W.

Si $(V_i)_{i \in I}$ est une famille de variétés affines contenues dans une variété affine V et telle que les directions des V_i engendrent celle de V, pour qu'une variété affine W soit perpendiculaire par défaut à V, il faut et suffit qu'elle le soit à toutes les variétés V_i. Mais il n'en serait plus ainsi si on supposait seulement que les variétés V_i engendrent la variété V.

Proposition 3. Soient P *et* P' *des points distincts de* E *et* a *un élément de* K . *L'ensemble des points* $Q \in E$ *tels que* $e(Q,P)-e(Q,P')=a$ *est alors un hyperplan orthogonal à la droite* PP' .

On a d'une manière générale $e(Q,P)-e(Q,P')=e(P,P')+B(Q-P',P'-P)$. Il est clair que la fonction $Q \to B(Q-P',P'-P)$ est une fonction affine nulle en P' ; $P'-P$ étant $\neq 0$, cette fonction n'est pas identiquement nulle, et n'est par suite pas constante, ce qui montre que l'ensemble des points qui possèdent la propriété requise est un hyperplan H . Si Q,Q' sont deux de ces points, on a $B(Q-P',P'-P)=B(Q'-P',P'-P)$, d'où $B(Q-Q',P'-P)=0$ et (Q,Q') est perpendiculaire à (P,P'), ce qui montre que H est orthogonal à la droite PP' .

Si $a=0$, l'hyperplan de la prop.3 s'appelle l'*hyperplan médiateur* du couple (P,P') ; si K n'est pas de caractéristique 2 , il passe par le milieu de (P,P') .

Définition 3. On dit qu'un vecteur lié (P,Q) *est isotrope si* $e(P,Q)=0$; *on dit alors aussi que* $Q-P$ *est isotrope. On dit qu'une variété affine* V *est isotrope s'il existe deux points distincts* P *et* Q *de* V *tels que* $e(P,Q)=0$. *On dit que* V *est totalement isotrope si on a* $e(P,Q)=0$ *quels que soient* P *et* Q *dans* V .

Pour qu'une droite de E soit totalement isotrope, il faut et suffit qu'elle soit isotrope. Pour qu'une variété affine V de E soit isotrope, il faut et suffit qu'elle contienne une droite isotrope ; pour qu'elle soit totalement isotrope, il faut et suffit que toute droite contenue dans V soit isotrope. Pour qu'un vecteur lié soit isotrope, il faut qu'il soit perpendiculaire à lui-même, comme il résulte de l'égalité $B(Q-P,Q-P) = 2\,e(P,Q)$; la condition est aussi suffisante si K n'est pas de caractéristique 2 (si K est de caractéristique 2 , tout vecteur lié est perpendiculaire à lui-même).

Nous dirons qu'une variété affine V est <u>régulière</u> si l'espace des translations T de E est somme directe de la direction $\Delta(V)$ de V et de la conjuguée $(\Delta(V))'$ de $\Delta(V)$. <u>Si le corps K n'est pas de caractéristique 2</u> , <u>toute variété affine V de dimension finie non isotrope est régulière</u>. Soit en effet p la dimension de V ; $(\Delta(V))'$ est alors de codimension p . De plus, si $t \in \Delta(V) \cap (\Delta(V))'$, on a $B(t,t)=0$, ce qui entraîne $e(t)=0$ puisque K n'est pas de caractéristique 2 , et par suite $t=0$ puisque V n'est pas isotrope.

Soient V une variété régulière et Δ sa direction. La restriction de B à $\Delta \times \Delta$ est alors une forme bilinéaire symétrique non dégénérée, et la restriction de e à Δ est une forme quadratique non défective. Si on considère e comme une fonction sur $E \times E$, sa restriction à $V \times V$ est la forme métrique d'une structure d'espace euclidien sur V . On dit que V , muni de cette structure euclidienne, est un <u>sous-espace</u> de l'espace euclidien E .

Supposant toujours que V soit une variété régulière, soient Δ sa direction et Δ' la direction conjuguée de Δ . Puisque T est somme directe de Δ et de Δ' , on peut parler de la projection de E sur V suivant la direction Δ' ; cette opération s'appelle la <u>projection orthogonale</u> de E sur V . L'image d'un point ou d'un sous-ensemble de E par la projection orthogonale de E sur V s'appelle la projection orthogonale de ce point ou de ce sous-ensemble sur V . Soient P un point de E , et P' sa projection orthogonale sur V ; le vecteur (P,P') est alors perpendiculaire à V , et P' est le seul point de V qui possède cette propriété. On pose

$$e(P,V) = e(P,P') .$$

Si V est une variété régulière, toute variété W orthogonale à V est également régulière et V lui est orthogonale. Soient en effet Δ la direction de V et Δ' celle de W, qui est la conjuguée de Δ. Soit t un élément de la conjuguée Δ'' de Δ' ; posons $t = t_1+t_2$, avec $t_1 \in \Delta$, $t_2 \in \Delta'$. Si $t' \in \Delta'$, on a $0=B(t,t')=B(t_2,t')$; par ailleurs, on a aussi $B(t_2,t_1')=0$ pour tout $t_1' \in \Delta$, d'où $B(t_2,t')=0$ pour tout $t' \in T$ et $t_2=0$, $t \in \Delta$, ce qui montre que $\Delta'' = \Delta$; nos assertions résultent immédiatement de là. Si K est de caractéristique 2, une forme bilinéaire symétrique sur un espace vectoriel de dimension finie sur K ne peut être non dégénérée que si l'espace est de dimension paire ; on en conclut que dans ce cas une variété affine régulière de dimension (resp.: codimension) finie est de dimension (resp.: codimension) paire. En particulier, il ne peut pas exister d'hyperplan régulier.

Proposition 4. Soient H *et* H' *des hyperplans réguliers distincts de* E, *et soit* L *l'ensemble des points* P *tels que* $e(P,H)=e(P,H')$. *Si* H *et* H' *sont parallèles,* L *est un hyperplan parallèle à* H *et* H' *qui est aussi l'ensemble des milieux des couples* (Q,Q') *tels que* $Q \in H$, $Q' \in H'$. *Si* H *et* H' *ne sont pas parallèles, soit* V *leur intersection. Alors, ou bien* $L=V$ *ou bien* L *est la réunion de deux hyperplans passant par* V ; *chacun de ces hyperplans contient une droite orthogonale à l'autre.*

Les conjuguées des directions $\Delta(H)$ de H et $\Delta(H')$ de H' sont de dimension 1 ; soient t,t' des vecteurs libres $\neq 0$ appartenant à ces conjuguées. Soient p et p' les projections orthogonales sur H et sur H'. Si $P \in E$, on a $p(P)=u(P)t + P$, $p'(P)=u'(P)t'+P$, $u(P)$ et $u'(P)$ étant des éléments de K. Les applications p et p' étant affines, on voit tout de suite que les fonctions u et u' sont des fonctions affines sur E.

Posons $e(t)=a$, $e(t')=a'$; pour que $P\in L$, il faut et suffit que $au^2(P)= a'u'^2(P)$. Considérons d'abord le cas où H et H' sont parallèles. Soient Q_o un point de H et Q'_o sa projection orthogonale sur H' ; on peut alors supposer que $t = Q_o-Q'_o$; de plus, la translation Q'_o-Q_o transforme H en H' . On voit alors tout de suite que $u'(P) = u(P)-1$. De plus, on a $a=a'$, et cet élément est $\neq 0$ parce que H est régulier. L'ensemble L est donc celui des points P tels que $u^2(P)=(u(P)-1)^2$, ou $u(P)= 1/2$ (rappelons que K ne peut être de caractéristique 2 si on a un hyperplan régulier). Il est clair que $u=0$ est une équation de H ; L est donc un hyperplan parallèle à H et H' . Si $Q\in H$ et $Q'\in H'$, on a $u(Q)=0$, $u(Q')=1$, d'où $u(M)=1/2$ si M est le milieu de Q,Q', ce qui montre que $M\in L$. Réciproquement, si $P\in L$, il est clair que P est le milieu des points $u(P),u'(P)$.

DSupposons maintenant que H et H' ne soient pas parallèles. Les éléments a,a' sont $\neq 0$ puisque H et H' sont réguliers. Si a'/a n'est pas un carré dans K , l'égalité $au^2(P)=a'u'^2(P)$ entraîne $u(P)=0$ et $u'(P)=0$, d'où $P\in V$, puisque $u=0$ et $u'=0$ sont évidemment des équations de H et de H' . Si $a'/a = b^2$, où $b\in K$, l'équation $au^2(P)=a'u'^2(P)$ signifie que l'on doit avoir soit $u(P)=bu'(P)$ soit $u(P) = -bu'(P)$. Puisque H et H' ne sont pas parallèles, il est clair que les fonctions $1,u,u'$ sont linéairement indépendantes ; il en résulte que les équations $u-bu'=0$ et $u+bu'=0$ représentent deux hyperplans M et M', qui passent par V . Soient v et v' les fonctions linéaires sur T associées aux fonctions affines u et u' ; les directions $\Delta(H)$ de H et $\Delta(H')$ de H' sont donc représentées par les équations $v=0$ et $v'=0$. Il en résulte immédiatement que $v(\theta)=kB(\theta,t)$, $v'(\theta)=k'B(\theta,t')$ pour tout $\theta\in T$, k et k' étant des éléments $\neq 0$.

Si $P \in E$, on a $u(p(P))=0$, d'où $u(P)=v(P-p(P))$, et $p(P)-P = v(P-p(P))t$; prenant P en dehors de H, d'où $v(P-p(P)) \neq 0$, il vient $v(t)=-1$. On a $a=e(t)=(1/2)B(t,t) = (1/2k)v(t)$, d'où $k=-(1/2)a^{-1}$. On voit de même que $v(t')=-1$, $k'=-(1/2)a'^{-1}$. Ceci dit, on a $(v-bv')(\theta) = B(\theta,kt-bk't')$; le vecteur $kt-bk't' = (-1/2)(a^{-1}t-ba'^{-1}t')$ appartient donc à la direction conjuguée de la direction $\Delta(M)$ de M. Ce vecteur n'est d'ailleurs pas nul, car, H et H' n'étant pas parallèles, t et t' sont linéairement indépendants. Montrons qu'il appartient à la direction de M' ; on a $(v+bv')(a^{-1}t-ba'^{-1}t') =$
$= -a^{-1}+b^2a'^{-1}+b(a^{-1}v'(t)-a'^{-1}v(t'))$. On a $-a^{-1}+b^2a'^{-1}=0$ parce que $b^2=a'/a$; par ailleurs, $a^{-1}v'(t) = a^{-1}k'B(t,t')=(-1/2)(aa')^{-1}B(t,t')$ et de même $a'^{-1}v(t) = (-1/2)(aa')^{-1}B(t',t)$. Puisque $B(t,t')=B(t,t')$, on voit que le vecteur $a^{-1}t-ba'^{-1}t'$ appartient à la direction de M', ce qui montre que M' contient une droite orthogonale à M.

Les notations étant celles de la prop.4, si L est la réunion de deux hyperplans distincts, on dit que ces hyperplans sont les <u>hyperplans bissecteurs</u> des hyperplans H et H'.

3. SPHÈRES.

Nous utiliserons les mêmes notations qu'au n° 2.

<u>Définition 4. Soient P un point de E et a un élément de K. Supposons qu'il existe au moins un point Q de E tel que $e(P,Q)=a$; l'ensemble des points qui possèdent cette propriété s'appelle alors la sphère de centre P et d'extension a.</u>

Nous désignerons cet ensemble par $S(P;a)$; toutes les fois que nous utiliserons cette notation, nous supposerons donc implicitement qu'il existe un point Q tel que $e(P,Q)=a$.

Nous nous proposons d'étudier l'intersection de $S(P;a)$ avec une droite D. Nous supposerons la droite D déterminée par un point M de cette droite et par un vecteur $t\neq 0$ appartenant à sa direction ; nous poserons, pour $u\in K$, $Q_u = ut+M$. Pour chercher les points de D appartenant à $S(P;a)$, nous avons à résoudre l'équation $e(P,ut+M) = a$, ou $e(ut+M-P)=a$, ou encore

$$u^2e(t) + u\,B(t,M-P) + e(M-P)-a = 0 .$$

Le coefficient de u^2 dans cette équation est $e(t)$, qui est $\neq 0$ si et seulement si la droite D n'est pas isotrope. Supposons d'abord qu'il en soit ainsi. Notre équation pourra alors avoir $0,1$ ou 2 solutions. Cherchons à quelle condition elle n'en a qu'une. On peut supposer qu'on a pris pour M le point commun unique à D et à $S(P;a)$; on a alors $e(M,P)=a$ et $B(t,M-P)=0$; la seconde équation signifie que (P,M) est perpendiculaire à la droite D. Donc, pour qu'une droite non isotrope D ait un point et un seul en commun avec $S(P;a)$, il faut et suffit qu'il existe un point Q de $D\cap S(P;a)$ tel que (P,Q) soit perpendiculaire à D. De plus, prenant alors de nouveau pour M un point quelconque de D, on a $e(M,Q) = u^2e(t) = e(M,P)-a$. Supposons maintenant que la droite D ait deux points communs $u't+M = Q'$ et $u''t+M = Q''$ avec $S(P;a)$. Il résulte alors de l'équation écrite plus haut que $u'u'' = (e(t))^{-1}(e(M,P)-a)$. On en déduit tout de suite des relations

$$B(M-Q', M-Q'') = 2(e(M,P)-a) \qquad e(M,Q')e(M,Q'')= (e(M,P)-a)^2 .$$

Supposons maintenant la droite D isotrope ; on voit alors que ou bien D ne rencontre pas $S(P;a)$ ou bien D a exactement un point en commun avec $S(P;a)$ ou bien $D\subset S(P;a)$. Pour que D ait exactement un point en commun avec $S(P;a)$, il faut et suffit que $B(t,M-P)\neq 0$, c'est-à-dire que (P,M) ne soit pas perpendiculaire à D. Si au contraire (P,M) est perpendiculaire à D, on voit d'abord que, pour tout $Q\in D$, (P,Q) est

est perpendiculaire à D (car, sinon, D aurait un point commun et un seul avec $S(P;a)$; rappelons qu'une droite contient toujours au moins deux points distincts), et ensuite que $e(P,Q)$ est le même pour tous les points de D .

<u>Proposition 5. Soient P un point de E , a un élément de K et V une variété affine régulière. Supposons que la sphère $S(P;a)$ existe et ait au moins un point commun avec V . L'intersection $V \cap S(P;a)$ est alors la sphère de la structure d'espace euclidien de V dont le centre est la projection orthogonale P' de P sur V et dont l'extension est</u> $a-e(P,V)$.

Si $Q \in V$, les vecteurs liés (P,P') et (P',Q) sont perpendiculaires, d'où, par le théorème de Pythagore, $e(P,Q)=e(P',Q)+e(P,P')=e(P',Q)+$ $+ e(P,V)$; la prop.5 résulte immédiatement de là .

<u>Proposition 6. Soient P,P' des points de E , et a,a' des éléments de K supposons que les sphères $S(P;a)$ et $S(P';a')$ existent. Si $P=P'$, $a \neq a'$, $S(P;a) \cap S(P';a')$ est vide. Si $P \neq P'$, soit H l'hyperplan ensemble des points Q tels que $e(Q,P)-e(Q,P')=a-a'$; on a alors</u>
$S(P;a) \cap S(P';a') = S(P;a) \cap H = S(P';a') \cap H$.

Soit Q un point de $S(P;a)$; pour que $Q \in S(P';a')$, il faut et suffit que $e(Q,P)-e(Q,P')=a-a'$; la prop.6 résulte immédiatement de là.

<u>Proposition 7. Soient P et P' des points de E , a et a' des éléments de K ; supposons que les sphères $S(P;a)$ et $S(P';a')$ existent et soient identiques l'une à l'autre. On a alors $P=P'$ et $a=a'$</u> .

Il suffit évidemment de montrer que $P=P'$. Supposons pour un moment qu'il n'en soit pas ainsi ; les notations étant celles de la prop.7 , on a alors $S(P;a)=S(P';a') \cap H$. Soit Q un point de $S(P;a)$; supposons d'abord qu'il existe une droite D non isotrope passant par Q et non contenue dans H :

La droite D ne peut alors pas être perpendiculaire aux deux vecteurs liés (P,Q) et (P',Q) ; en effet, D serait alors perpendiculaire à (P,P'), et, ayant un point commun avec H, y serait contenue puisque H est orthogonal à la droite PP' (prop.3, n°2). Supposant par exemple que D ne soit pas perpendiculaire à (P,Q), D aurait un point commun $Q'\neq Q$ avec $S(P;a)$, ce qui est impossible car ce point ne serait pas dans H. Supposons maintenant que toute droite passant par Q et non située dans H soit isotrope. Supposant par exemple $P\neq Q$, soit H_1 l'hyperplan orthogonal à la droite PQ passant par Q. Si on avait $H_1\neq H$, H_1 contiendrait une droite D passant par Q et non située dans H ; D serait isotrope et perpendiculaire à (P,Q), donc contenue dans $S(P;a)$, ce qui est impossible puisque $D\not\subset H$. On a donc $H_1=H$, ce qui entraîne que les droites PQ et PP' sont parallèles, donc que Q appartient à la droite PP'. Mais nous allons voir que K ne peut avoir que deux éléments, donc que les seuls points de la droite PP' sont P et P'. Soient en effet t_0 un élément de T n'appartenant pas à la direction Δ de H, d'où $e(t_0)=0$, et t un élément de T tel que $e(t)\neq 0$, ce qui entraîne que t appartient à Δ. Si $k\in K$, on a $e(t_0+kt) = k^2e(t)+kB(t_0,t) = 0$ car t_0+kt n'est pas dans Δ ; puisque $e(t)\neq 0$, cette équation en k ne peut avoir plus de deux solutions, ce qui montre que K n'a que deux éléments. Le point Q, que nous avons supposé $\neq P$, est donc P', et $a'=0$. Or, soit alors D une droite passant par P' et non contenue dans H ; D est isotrope, donc contenue dans $S(P';0)$, ce qui amène à une contradiction.

Si donc S est une sphère, on peut parler du centre de cette sphère et de son extension : ce point et cet élément de K sont uniquement déterminés.

Si Q est un point d'une sphère S distinct de son centre P, on appelle <u>hyperplan tangent à</u> S <u>en</u> Q l'hyperplan passant par Q et orthogonal à la droite (P,Q). On dit qu'une variété affine V passant par Q est <u>tangente à</u> S <u>en</u> Q si V est contenue dans l'hyperplan tangent à S en Q. Une droite non isotrope tangente à S en Q n'a que le point Q en commun avec S ; une droite isotrope tangente à S est contenue dans S et est tangente à S en chacun de ses points (sauf peut-être au centre de S).

Soient S une sphère et M un point quelconque de E. Si P est le centre de S et a son extension, l'élément $e(M,P)-a$ s'appelle la <u>puissance</u> de M par rapport à S. Soit p cet élément de K ; rappelons que, si une droite passant par M rencontre S en deux points distincts Q et Q', on a $B(MQ,MQ')=2p$, $e(M,Q)e(M,Q')=p^2$; si le corps K n'est pas de caractéristique 2, on a $\langle M-Q, M-Q' \rangle = p$. Si une droite passant par M est tangente à S en Q, on a $e(M,Q)=p$. Réciproquement, si Q est un point de S tel que $e(M,Q)=p$, $Q\neq P,M$, la droite MQ est tangente à S en Q. Il résulte en effet immédiatement du théorème de Pythagore que les droites MQ et QP sont perpendiculaires. On voit que, s'il existe une droite passant par M et tangente à S, les droites tangentes à S qui passent par M sont tangentes à S aux points $\neq P$ de $S \cap S(M;p)$.

Soient S et S' des sphères, P et P' leurs centres, a et a' leurs extensions. On dit que les sphères S et S' sont <u>orthogonales</u> si on a $e(P,P')=a+a'$, c'est-à-dire si l'extension de l'une quelconque d'entre elles est égale à la puissance de son centre par rapport à l'autre. S'il en est ainsi, et si $Q \in S \cap S'$, les vecteurs (P,Q), (P',Q) sont perpendiculaires, si $Q \neq P$, l'hyperplan tangent à S en Q passe par P'.

Soient S et S' des sphères, P et P' leurs centres, que nous supposerons distincts. Il est clair (en vertu de la prop.3) que l'ensemble des points qui ont même puissance par rapport à S et à S' est un hyperplan orthogonal à la droite PP' ; cet hyperplan H s'appelle l'<u>hyperplan radical</u> de S et de S' ; on a $H \cap S = H \cap S' = S \cap S'$.

<u>Proposition 8</u>.- <u>L'espace E étant supposé de dimension finie, soit $(P_0,\ldots,P_m)$ une base affine de cet espace. Il existe alors une sphère et une seule qui contient les points</u> P_i $(0 \leqq i \leqq m)$.

Pour qu'un point P soit le centre d'une sphère passant par les points P_i $(0 \leqq i \leqq m)$, il est évidemment nécessaire et suffisant que $e(P,P_0) = e(P,P_i)$ $(1 \leqq i \leqq m)$, donc que, pour tout $i \geqq 1$, P appartienne à l'hyperplan médiateur H_i de (P_0,P_i). Posons $t_i = P_i - P_0$, et désignons par M_i un point quelconque de H_i ; H_i, étant orthogonal à la droite P_0P_i , peut être représenté par l'équation $B(P-M_i,t_i)=0$. Soit M_0 un point fixe quelconque ; l'équation précédente peut encore s'écrire $B(P-M_0,t_i)=b_i$, où $b_i=B(M_i-M_0,t_i)$. Soit V_0 l'espace vectoriel de centre M_0 défini par E ; les fonctions $P \to B(P-M_0,t_i)$ sont linéaires sur V_0 ; elles sont de plus linéairement indépendantes, car, si $a_1,\ldots,a_m$ sont des éléments non tous nuls de K , on a $\sum_{i=1}^{m} a_i t_i \neq 0$, et la fonction $P \to B(P-M_0, \sum_{i=1}^{m} a_i t_i)$ n'est pas identiquement nulle. Les équations $B(P-M_0,t_i) = b_i$ $(1 \leqq i \leqq m)$ ont donc une solution et une seule, ce qui démontre la prop.8 .

4. SIMILITUDES.

Nous utiliserons les mêmes notations qu'au n°2 .

Définition 5. On appelle similitude de l'espace euclidien E tout automorphisme u de la structure affine de E qui possède la propriété suivante : il existe un élément $\mu \neq 0$ de K tel que $e(uP,uQ) = \mu\, e(P,Q)$ quels que soient P et Q dans E .

Si E contient plus d'un point, l'élément μ est uniquement déterminé par cette condition ; il s'appelle le multiplicateur de u . Si E ne contient qu'un seul point, u est l'application identique, et on convient que son multiplicateur est 1 .

Il est clair que les similitudes forment un groupe, et que l'application qui à toute similitude fait correspondre son multiplicateur est un homomorphisme du groupe des similitudes dans le groupe multiplicatif des éléments $\neq 0$ de K ; le noyau de cet homomorphisme est le groupe des déplacements. L'image du groupe des similitudes par cet homomorphisme n'est en général pas tout l'ensemble des éléments $\neq 0$ de K .

Proposition 9.- Soient u une similitude de multiplicateur μ de E et t , t' des éléments de T . On a $e(utu^{-1}) = \mu e(t)$, $B(utu^{-1}, ut'u^{-1}) = \mu B(t,t')$.

La première formule est évidente. La seconde résulte de la première et de la formule $B(t,t') = e(t+t') - e(t) - e(t')$.

Il résulte de la prop.9 que toute similitude transforme des variétés affines orthogonales (resp.: perpendiculaires par défaut ou par excès) en des variétés affines orthogonales (resp.: perpendiculaires par défaut ou par excès). Réciproquement, on peut montrer que, si le corps K n'est pas de caractéristique 2 , tout automorphisme de la structure affine de E qui transforme tout couple de droites perpendiculaires est une similitude ; il n'en est plus nécessairement ainsi si le corps K est de caractéristique 2 .

Si h est une homothétie de rapport k de l'espace affine E , h est une similitude de multiplicateur k^2. On sait en effet que l'on a $hQ-hP = k(Q-P)$ quels que soient P et Q dans E , d'où $e(hP,hQ)=k^2e(P,Q)$ Si u est une similitude dont le multiplicateur est le carré d'un élément k de K , u peut s'écrire sous la forme hs , où h est une homothétie et s un déplacement. En effet, si h est une homothétie de rapport k , $h^{-1}u$ est une similitude de multiplicateur 1 , donc un déplacement. Mais il existe en général des similitudes dont les multiplicateurs ne sont pas des carrés.

5. SYMÉTRIES.

Nous utiliserons les mêmes notations qu'au n°2 .

Soit V une variété affine régulière ; si $P\in E$, nous désignerons par p(P) la projection orthogonale de P sur E . Le point $s(P) = (p(P)-P)+ p(P)$ s'appelle le <u>symétrique</u> de P par rapport à V ; l'application s : $P \rightarrow s(P)$ s'appelle la <u>symétrie par rapport à</u> V . Si K est de caractéristique 2 , on a $p(P)-P = P-p(P)$, et s est l'application identique. <u>Nous supposerons à partir de maintenant que K n'est pas de caractéristique</u> 2 .

Il est alors clair que les seuls points de E qui coïncident avec leurs symétriques par rapport à V sont ceux de V . Soit P un point quelconque de E ; puisque $s(P)-p(P) = p(P)-P$ est perpendiculaire à V , p(P) est la projection orthogonale de s(P) sur V , et il en résulte immédiatement que $s(s(P))=P$; s^2 est donc l'application identique de V

Si $V \neq E$, ce que nous supposerons à partir de maintenant, s est une application d'ordre 2 , donc biunivoque. Nous allons montrer que c'est un déplacement. On a $s(P)=2p(P)+(-1)P$; de plus, on sait que p est une application affine ; il en est donc de même de s ; s étant biunivoque, il suffira de montrer que c'est une isométrie. Soient P et Q des points de E et $t=p(P)-P$, $Q'=t+Q$; on a donc $e(P,Q) = e(p(P),Q')$. Puisque $Q-p(Q)$ et t sont perpendiculaires à V , il en est de même de $Q'-p(Q) = t+(Q-p(Q))$, et $p(Q') = p(Q)$; il en résulte immédiatement que $s(Q') = -t+s(Q)$; puisque $s(P)=-t+p(P)$, on a $e(s(P),s(Q)) =$ $= e(p(P),s(Q'))$. Or, on a, en vertu du théorème de Pythagore, $e(p(P),Q') = e(p(P),p(Q))+e(p(Q),Q')$ et $e(p(P),s(Q')) =$ $= e(p(P),p(Q))+e(p(Q),s(Q'))$; il est clair que $e(p(Q),Q')=e(p(Q),s(Q'))$ on a donc $e(p(P),Q') = e(p(P),s(Q'))$ et $e(P,Q) = e(s(P),s(Q))$, ce qui démontre notre assertion.

Soit réciproquement s un déplacement quelconque d'ordre 2 . Désignons par s^* l'application $t \to sts^{-1}$ de T dans lui-même. Cet automorphisme de T est d'ordre 2 ; car, si c'était l'application identique, s , qui commuterait avec toutes les translations, serait une translation ; mais, K n'étant pas de caractéristique 2 , il est clair qu'une translation ne peut être d'ordre 2 . Soient Δ et Δ' les ensembles d'éléments t de T tels que $s^*t = t$ et $s^*t = -t$ respectivement. Si $t \in T$; on a $t = (1/2)(t+s^*t) + (1/2)(t-s^*t)$, et $t+s^*t \in \Delta$, $t-s^*t \in \Delta'$; il en résulte que $T = \Delta + \Delta'$. Il est clair que $\Delta \cap \Delta' = \{0\}$. Soient par ailleurs t un élément de Δ et t' un élément de Δ' ; on a $B(s^*t, s^*t') = B(t,t')$ puisque s est un déplacement, mais aussi $B(s^*t, s^*t') = -B(t,t')$, d'où $B(t,t')=0$; on en conclut tout de suite que Δ' est le sous-espace conjugué de Δ . Soit P un point quelconque de E , et soit M le milieu de (P,sP) ; posons $V = \Delta + M$; V est donc une variété affine régulière. Puisque s appartient au groupe affine, sM est le milieu de $(sP,s^2P) = (sP,P)$, d'où $sM = M$. Puisque $sts^{-1} = t$ si $t \in \Delta$, s conserve tous les points de V . Soient P un point quelconque de E et p(P) sa projection orthogonale sur V ; puisque $P-p(P)$ est perpendiculaire à V , il appartient à Δ' et est on a $sP-s(p(P)) = sP-p(P) = -(P-p(P))$, ce qui montre que s est la symétrie par rapport à V . <u>Les symétries par rapport aux variétés affines régulières sont donc tous les déplacements d'ordre</u> 2 .

Si une partie F de E est transformée en elle-même par la symétrie par rapport à V , on dit que V est une <u>variété de symétrie</u> de F ; si V est de dimension 0 , on dit aussi que c'est un centre de symétrie ; si V est de dimension 1 , on dit aussi que c'est un <u>axe de symétrie</u>. On notera que la symétrie par rapport à un point P est identique à l'homothétie de centre P et de rapport -1 .

6. ESPACES EUCLIDIENS DE DIMENSIONS FINIES.

Nous utiliserons les mêmes notations qu'au n°2 , mais nous supposerons de plus que E est un espace de dimension finie n .

Nous avons défini le déterminant D(u) d'une opération u appartenant au groupe fondamental de la structure affine de E : c'est le déterminant de l'application linéaire $t \rightarrow utu^{-1}$ de l'espace T sur lui-même. Le déterminant de tout déplacement est ± 1 ; en effet, si u est un déplacement, l'application $t \rightarrow utu^{-1}$ laisse invariante la forme quadratique e non défective sur T .

Soient V une variété affine régulière dans E et s_V la symétrie par rapport à V . Montrons que, si p est la dimension de V , on a $D(s_V) = (-1)^{n-p}$. Soient Δ la direction de V et Δ' sa conjuguée ;

l'opération $t \to sts^{-1}$ conserve tous les éléments de Δ et change ceux de Δ' en leurs opposés ; Δ' étant de dimension $n-p$, notre assertion résulte immédiatement de là.

<u>Supposons que le corps de base</u> K <u>ne soit pas de caractéristique</u> 2.

Pour tout p ($0 \leqq p \leqq n$) il existe au moins une variété affine régulière de dimension p. On peut en effet trouver une base $\{t_1,\ldots,t_n\}$ de T telle que $e(\sum_{i=1}^n x_i t_i) = \sum_{i=1}^n a_i x_i^2$ pour tout $(x_1,\ldots,x_n) \in K^n$, les a_i étant des éléments $\neq 0$ de K ; toute variété affine dont la direction est engendrée par un certain nombre des t_i est alors régulière, ce qui démontre notre assertion. On en conclut que, si $n > 0$, il existe des déplacements de déterminants égaux à $+1$ et d'autres de déterminants égaux à -1. On appelle <u>déplacement propre</u> (resp.: <u>impropre</u>) tout déplacement de déterminant $+1$ (resp.: -1). Il est clair que les déplacements propres forment un sous-groupe distingué du groupe des déplacements ; l'indice de ce sous-groupe est 2 si $n > 0$, 1 si $n=0$.

Désignons maintenant par Λ l'algèbre extérieure sur T ; la forme bilinéaire B sur $T \times T$ admet une extension canonique B' qui est une forme bilinéaire non dégénérée sur $\Lambda \times \Lambda$. Soit Λ_n l'espace des éléments homogènes de degré n de Λ ; c'est un espace vectoriel de dimension 1 sur K, et la restriction de B' à $\Lambda_n \times \Lambda_n$ est une forme bilinéaire non dégénérée symétrique B_n sur le produit de cet espace vectoriel par lui-même. Soit Γ un élément $\neq 0$ de Λ_n, et soit $b = B_n(\Gamma, \Gamma)$. L'élément b est $\neq 0$; si on remplace Γ par $k\Gamma$, où k est un élément $\neq 0$ de K, b est remplacé par $k^2 b$. La classe de b modulo le groupe des carrés des éléments $\neq 0$ de K est donc un invariant de l'espace euclidien E.

Soit maintenant u une similitude de multiplicateur μ de E. L'application $u^* : t \to utu^{-1}$ de T sur lui-même se prolonge en un automorphisme que nous désignerons encore par u^* de l'algèbre Λ. On sait que $B(u^*t, u^*t') = \mu B(t,t')$ si $t, t' \in T$; u^* étant considéré comme un isomorphisme de V avec lui-même, la forme bilinéaire qui correspond à B par cet isomorphisme est $B' = \mu^{-1} B$. Soit B'_n la restriction à $\Lambda_n \times \Lambda_n$ de l'extension canonique de B' à $\Lambda \times \Lambda$. Il est clair que $B'_n(u^*\Gamma, u^*\Gamma) = B_n(\Gamma, \Gamma)$ si $\Gamma \in \Lambda_n$. Par ailleurs, on a $B'_n = \mu^{-n} B_n$ et $u^*\Gamma = D(u)\Gamma$, si $D(u)$ est le déterminant de u. On a donc $(D(u))^2 = \mu^n$. Si n est impair, il résulte de là que μ est un carré. Donc : <u>toute similitude d'un espace euclidien de dimension impaire est le produit d'une homothétie par un déplacement</u>. Si au contraire n est pair, soit $n=2n'$; on a alors $\mu^{n'} = \pm D(u)$. Les similitudes se répartissent en deux classes suivant que $\mu^{n'}$ est $D(u)$ ou $-D(u)$. Si $\mu^{n'} = D(u)$, on dit que u est une <u>similitude directe</u>, <u>sinon que c'est une similitude inverse</u>. Les déplacements propres sont des similitudes directes, les déplacements impropres des similitudes inverses.

7. <u>PLANS EUCLIDIENS</u>.

Nous utiliserons les mêmes notations qu'au n°2, mais nous supposerons de plus que E est de dimension 2.

Soit $\{t_1, t_2\}$ une base de T. On peut alors écrire

$$e(x_1 t_1 + x_2 t_2) = ax_1^2 + bx_2^2 + cx_1 x_2 \qquad (x_1, x_2 \in K)$$

où a, b, c sont des éléments de K. Deux cas bien différents peuvent se produire suivant que l'équation $bX^2 + cX + a = 0$ a une solution ou non dans K.

Supposons d'abord que l'équation $bX^2+cX+a = 0$ ait une solution. Il existe alors au moins un vecteur $t \neq 0$ tel que $e(t)=0$; on peut donc supposer que $e(t_1)=0$, d'où $a=0$. Si on avait également $c=0$, on aurait $e(x_1t_1+x_2t_2) = bx_2^2$, ce qui est évidemment impossible puisque e est non défective. On a donc $c \neq 0$; si $b \neq 0$, l'équation $bX^2+cX = 0$ a une solution $X \neq 0$, et il existe un vecteur t linéairement indépendant de t_1 tel que $e(t)=0$. Cette dernière conclusion subsiste si $b=0$, puisqu'alors $e(t_2)=0$. On peut donc supposer que $e(t_1)=e(t_2)=0$; remplaçant l'un ou l'autre de t_1 ou t_2 par un multiple scalaire, on peut supposer que $c=1$, d'où

$$e(x_1t_1+x_2t_2) = x_1x_2 \quad ;.$$

Les seuls vecteurs isotropes sont les multiples scalaires de t_1 ou de t_2. Il en résulte que, si s est un déplacement quelconque et s^* l'application $t \to sts^{-1}$, on a ou bien $s^*t_1 = vt_1$ ou bien $s^*t_1 = vt_2$. Dans le premier cas, on a $s^*t_2 = v^{-1}t_2$ et dans le second cas $s^*t_2 = v^{-1}t_1$. Le groupe G des déplacements admet donc un sous-groupe G^+ d'indice 2 composé des déplacements s tels que s^* conserve chacun des espaces vectoriels engendrés par t_1 et t_2 ; si K n'est pas de caractéristique 2, G^+ est le groupe des déplacements propres. Nous lui conserverons ce nom même si K est de caractéristique 2 . Le groupe G^+ contient le groupe T des translations, et G^+/T est manifestement isomorphe au groupe multiplicatif des éléments $\neq 0$ de K . Les droites isotropes de E se répartissent en deux familles, les droites de chaque famille étant parallèles entre elles ; les déplacements de G^+ sont ceux qui transforment toute droite isotrope en une droite isotrope de la même famille.

Supposons maintenant que l'équation $bX^2+cX+a = 0$ n'ait aucune solution dans K. Puisque b et c ne peuvent pas être tous deux nuls, cela signifie qu'il n'y a aucune droite isotrope dans E. Soit L un corps obtenu en adjoignant à K une racine ξ de l'équation $bX^2+cX+a = 0$; L est donc un sur-corps quadratique de K. Cette extension est séparable. En effet, s'il n'en était pas ainsi, on aurait $c=0$ et K serait de caractéristique 2 ; mais c'est impossible car la forme $e(t)$ serait alors défective. On a

$$N_{L/K}(u_2-u_1\xi) = b^{-1}(au_1^2+bu_2^2+cu_1u_2) .$$

On voit donc que l'on peut écrire

$$e(x_1t_1+x_2t_2) = bN_{L/K}(t_2-t_1\xi)$$

Nous identifierons l'espace T à l'espace vectoriel sous-jacent de L au moyen de l'isomorphisme $x_1t_1+x_2t_2 \to t_2-t_1\xi$. On voit alors que $e(t) = bN_{L/K}t$. Soit θ l'automorphisme distinct de l'identité de L/K ; on voit tout de suite que $e(t+t')-e(t)-e(t')=bTr_{L/K}\, t.\theta(t')$, d'où $B(t,t') = bT_{L/K}\, t.\theta(t')$.

Nous allons maintenant déterminer le groupe des déplacements de E. Si $P\in E$, tout déplacement peut s'écrire comme produit d'une translation et d'un déplacement qui laisse P fixe. La détermination des déplacements qui laissent P fixe se ramène évidemment à celle des automorphismes s^* de la structure d'espace vectoriel de L tels que $N_{L/K}\, s^*t = N_{L/K}\, t$ pour tout $t\in L$. Nous voyons tout de suite deux catégories de pareilles applications, à savoir les applications $t \to t_0t$, où t_0 est un élément de norme 1 de L, et les applications $t \to t_0\theta(t)$, où t_0 est également de norme 1. Nous allons montrer que ce sont les seules. Soit en effet s^* une application linéaire de L

dans lui-même telle que $N_{L/K}\, s^*t = N_{L/K}\, t$ pour tout $t \in L$, et soit $t_o = s^*1$; on a $N_{L/K} t_o = 1$. Soit s_o^* l'application $t \rightarrow t_o t$; l'application $s_o^{*-1} s^*$ conserve encore la norme et change 1 en lui-même. Il nous suffira donc de montrer que, si $s^*1 = 1$, s^* est soit l'identité soit θ. Or, si t, t' sont des éléments de L, il résulte de ce que nous avons dit que $Tr\, s^*t.\theta(s^*t') = Tr\, t.\theta(t')$; prenant $t' = 1$, il vient $Tr\, s^*t = Tr\, t$. Il en résulte que $s^*\xi$ a même trace et même norme que ξ, donc qu'il est racine de l'équation $bX^2 + cX + a = 0$. On a donc ou bien $s^*\xi = \xi$ ou bien $s^*\xi = \theta(\xi)$; puisque 1 et ξ forment une base de L/K, notre assertion est démontrée.

Le *groupe* G des déplacements admet donc encore un sous-groupe G^+ d'indice 2, composé des déplacements s pour lesquels s^* est de la forme $t \rightarrow t_o t$, t_o étant de norme 1. Il résulte tout de suite de l'existence d'une base normale de L/K que θ est de déterminant -1 ; si donc K n'est pas de caractéristique 2, G^+ est le groupe des déplacements propres. Nous lui conserverons ce nom même si K est de caractéristique 2. Le groupe G^+/T est isomorphe au groupe multiplicatif des éléments $\neq 0$ de L ; il est donc abélien. On voit facilement que les déplacements impropres sont les symétries par rapport aux droites de E.

Un raisonnement analogue à celui fait plus haut montre que les similitudes de E sont les automorphismes u de la structure affine de tels que l'application $u^* : t \rightarrow utu^{-1}$ soit de l'une ou l'autre des formes suivantes : $t \rightarrow t_o t$ ou $t \rightarrow t_o\theta(t)$, où t_o est maintenant un élément $\neq 0$ quelconque de L ; le multiplicateur de la similitude est alors l'élément $N_{L/K}\, t_o$.

§ 4. ESPACES EUCLIDIENS PARFAITS.

1. DÉFINITION.

Soit $\mathcal{E}$ l'espèce des structures d'espaces euclidiens. L'espèce de structures $\mathcal{E}$ comporte trois ensembles de base K, V et E ; ses objets constitutifs et axiomes sont tels que V soit un espace vectoriel sur le corps commutatif K ; de plus, l'un des objets constitutifs est une forme quadratique f non défective sur V. Nous compléterons maintenant cette espèce de structures en adjoignant un objet constitutif nouveau ω, qui est un élément de $\mathfrak{P}(K \times K)$ et les axiomes supplémentaires suivants :

ω est une relation d'ordre et définit sur K une structure de corps ordonné ;

f est une forme quadratique définie positive relativement à la structure de corps ordonné définie par ω ;

tout élément $\geqslant 0$ de K est le carré d'un élément de K.

L'espèce de structures ainsi définie s'appelle l'espèce des structures d'espaces euclidiens parfaits. Tout espace muni d'une structure d'espace euclidien parfait s'appelle un espace euclidien parfait. Tout espace euclidien parfait admet donc un espace euclidien (et par suite aussi un espace affine) sous-jacent.

2. DISTANCES.

Soient E un espace euclidien parfait, et e sa forme métrique. Rappelons que l'on peut considérer e soit comme une fonction de deux arguments dans E soit comme une fonction d'un seul argument dans l'espace T des translations de E. Il est clair que l'on a $e(t) \geqq 0$

quel que soit $t \in T$; $e(t)$ est donc un carré dans K , et il existe un élément $\geqq 0$ et un seul de K dont le carré est $e(t)$; rappelons que cet élément se désigne par $(e(t))^{1/2}$.

Définition 1. Si t *est un vecteur libre d'un espace euclidien parfait* E , *l'élément* $(e(t))^{1/2}$ *s'appelle la longueur de* t *et se désigne par* $\|t\|$. *Si* P, Q *sont des points de* E , *la longueur de* $Q-P$ *s'appelle aussi la longueur du vecteur lié* (P,Q), *ou encore la distance des points* P,Q .

On a donc $\|P-Q\| = \|Q-P\| \geqq 0$; pour que $P=Q$, il faut et suffit que $\|Q-P\| = 0$.

Puisque le corps de base K a une structure de corps ordonné, on peut parler des segments (ouverts et fermé) déterminé par deux points P et Q ; la longueur de (P,Q) s'appelle aussi la longueur de chacun de ces segments.

Le corps K , étant ordonné, est de caractéristique 0 ; on a donc la notion de produit scalaire de deux éléments t,t' de T ; rappelons que l'on désigne ce produit scalaire par $\langle t,t'\rangle$; il est défini par la relation $\langle t,t'\rangle = (1/2)(\|t+t'\|^2 - \|t\|^2 - \|t'\|^2)$. Si t,t' sont des éléments de T et x,x' de K , on a
$\|xt+x't'\|^2 = x^2\|t\|^2 + x'^2\|t'\| + 2xx'\langle t,t'\rangle$. La forme quadratique qui figure au second membre ne prend que des valeurs $\geqq 0$ et est définie positive si t et t' sont linéairement indépendants. On en déduit que $(\langle t,t'\rangle)^2 \leqq \|t\|^2\|t'\|^2$, et que l'égalité n'a lieu que si t et t' sont linéairement dépendants. Il résulte de là que

$$(1) \qquad -\|t\|\,\|t'\| \leqq \langle t,t'\rangle \leqq \|t\|\,\|t'\| .$$

De plus, si on suppose $t \neq 0$, on voit tout de suite que l'égalité $\langle t,t'\rangle = -\|t\|\,\|t'\|$ ne peut avoir lieu que si $t'=at$, avec $a \leqq 0$, tandis que l'égalité $\langle t,t'\rangle = \|t\|\,\|t'\|$ ne peut avoir lieu que si $t'=at$, avec un $a \geqq 0$.

Proposition 1. Soient P,Q,R des points de E . On a alors
$$-\|Q-P\|\,\|R-P\| \leqq \langle Q-P,R-P\rangle \leqq \|Q-P\|\,\|R-P\| .$$
L'égalité $\langle Q-P,R-P\rangle = \|Q-P\|\,\|R-P\|$ ne peut avoir lieu que si Q appartient au segment PR ou R au segment PQ . L'égalité $\langle Q-P,R-P\rangle = -\|Q-P\|\,\|R-P\|$ ne peut avoir lieu que si P appartient au segment QR .

Posons en effet $t=Q-P$, $t'=R-P$; l'inégalité de la prop.1 résulte alors de l'inégalité (1). Si $t'=at$, avec $a \geqq 0$, on a $R=aQ+(1-a)P$; si $a \leqq 1$, R appartient au segment PQ . Si $a > 1$, on peut aussi écrire $Q=a^{-1}R+(1-a^{-1})P$, et Q appartient au segment PR . Si $t'=at$, avec $a \leqq 0$, on a $P=(1-a)^{-1}R-a(1-a)^{-1}Q$, $(1-a)^{-1}>0$ et P appartient au segment QR . La prop.1 résulte immédiatement de là .

Proposition 2. Soient P,Q,R des points de E . On a alors
$$\|Q-P\| \leqq \|R-P\| + \|R-Q\| ;$$
l'égalité ne peut avoir lieu que si R appartient au segment PQ .

On a en effet
$$\begin{aligned}\|Q-P\|^2 &= \|R-P\|^2 + \|R-Q\|^2 - 2\langle R-P,R-Q\rangle \\ &\leqq \|R-P\|^2 + \|R-Q\|^2 + 2\|R-P\|\,\|R-Q\| \\ &= (\|R-P\| + \|R-Q\|)^2\end{aligned}$$
ce qui démontre l'inégalité de la prop.2 . L'égalité ne peut avoir lieu que si $\langle R-P,R-Q\rangle = -\|R-P\|\,\|R-Q\|$, c'est-à-dire si R appartient au segment PQ .

Si les points P,Q,R ne sont pas colinéaires, ils sont les sommets d'un triangle, et la prop.2 donne le résultat suivant : la longueur d'un côté d'un triangle est (strictement) inférieure à la somme des deux autres côtés.

Soient $P_0,\dots,P_n$ des points de E . Procédant par récurrence sur n , on déduit tout de suite de la prop.2 que l'on a

$$\| P_n - P_0 \| \leq \sum_{i=1}^{n} \| P_i - P_{i-1} \| \quad ;$$

de plus l'égalité ne peut avoir lieu que si P_i appartient au segment $P_{i-1}P_{i+1}$ quel que soit i $(0 < i < n)$, ce qui entraîne en particulier que les points $P_0,\dots,P_n$ sont colinéaires.

3. VARIETES AFFINES DANS UN ESPACE EUCLIDIEN PARFAIT.

Il est clair qu'une variété affine dans un espace euclidien parfait n'est jamais isotrope. Toute variété affine V de dimension finie de E est donc régulière. Si V est une variété affine quelconque de E , la restriction à $V \times V$ de la forme métrique de E définit sur V une structure d'espace euclidien parfait.

Proposition 3. Soient V une variété régulière de E , P un point de E et P' sa projection orthogonale sur V ; on a alors, si $Q \in V$ $\| Q-P \| \geq \| P'-P \|$, et l'égalité ne peut avoir lieu que si $Q=P'$:

On a en effet, en vertu du théorème de Pythagore, $\| Q-P \|^2 = \| Q-P' \|^2 + \| P'-P \|^2$.

Les notations étant celles de la prop.3, l'élément $\| P'-P \|$ s'appelle la distance de P à V ; son carré est l'élément que nous avons désigné par e(P,V) au § 3, n°2 . Pour que $P \in V$, il faut et suffit que sa distance à V soit nulle.

Proposition 4. Soient E un espace euclidien parfait et V et V' des variétés affines de même dimension finie. Il existe alors un déplacement de E qui transforme V en V' .

Soient p la dimension commune de V et de V' et Δ et Δ' leurs directions. Il résulte de ce que nous savons sur les formes quadratiques définies positives qu'il existe des bases $\{t_1,\dots,t_p\}$ de Δ et $\{t'_1,\dots,t'_p\}$ de Δ' telles que

$$\Big\| \sum_{i=1}^{p} x_i t_i \Big\|^2 = \sum_{i=1}^{p} x_i^2 = \Big\| \sum_{i=1}^{p} x_i t'_i \Big\|^2 .$$

Il existe donc un automorphisme s_1^* de l'espace de dimension finie Δ_1 engendré par Δ et Δ' qui transforme Δ en Δ' et qui conserve la forme quadratique $t \to \|t\|^2$ sur Δ_1. Soit Δ_2 le sous-espace de l'espace T des translations T de E conjugué à Δ_1 ; T est donc somme directe de Δ_1 et de Δ_2, et on peut prolonger s_1^* en un automorphisme s^* de T qui laisse les éléments de Δ_2 fixes. Si $t_i \in \Delta_i$ $(i=1,2)$, on a $\|t\|^2 = \|t_1\|^2 + \|t_2\|^2$; il en résulte immédiatement que $\|s^* t\|^2 = \|t\|^2$ pour tout $t \in T$. Soit P un point de E ; l'application $Q \to s^*(Q-P)+P$ est manifestement un déplacement de E qui transforme V en une variété V'_1 parallèle à V' ; faisant suivre ce déplacement d'une translation qui amène V'_1 sur V', on obtient un déplacement qui transforme V en V'.

Corollaire. Les notations étant celles de la prop.4, supposons de plus que E soit de dimension finie. Il existe alors un déplacement propre de E qui amène V sur V'.

Il suffit évidemment de montrer qu'il existe (si E est de dimension > 0) un déplacement impropre de E qui conserve V. Soient n la dimension de E et p celle de V. Si $n-p \geq 1$, V est contenu dans au moins une variété affine V' de dimension p' telle que $n-p'$ soit impair, et la symétrie par rapport à V' est un déplacement impropre qui conserve tous les points de V. Si $p=n$, on a $V=E$, et on sait qu'il existe un déplacement impropre de E si $n > 0$.

4. VOLUMES.

Soit E un espace euclidien parfait de dimension finie n. "Rappelons qu'étant donné un polyèdre quelconque P_o de E nous avons attaché à tout polyèdre P un volume relatif $v(P;P_o)$ bien déterminé (cf. § 2, n° 6). Nous allons maintenant établir dans E une notion absolue de volume en fixant les volumes d'une classe particulière de polyèdres. On appelle <u>parallélotope rectangle</u> un parallélotope construit sur n segments $A_oA_1,\dots,A_oA_n$ mutuellement perpendiculaires. Si nous appelons d'une manière générale arêtes les facettes de dimension 1 d'un polyèdre convexe, les segments A_oA_i $(1 \leqq i \leqq n)$ sont toutes les arêtes passant par A_o ; soient $a_1,\dots,a_n$ leurs longueurs. Si $a_1=\dots=a_n=a$, on dit que le parallélotope est un <u>cube</u> de côté a. Montrons que tous les cubes de même côté a peuvent être transformés les uns en les autres par des déplacements de E. Soient en effet C et C' deux d'entre eux, le premier construit sur les segments A_oA_i $(1 \leqq i \leqq n)$, le second sur les segments $A'_oA'_i$ $(1 \leqq i \leqq n)$. Posons $t_i = a^{-1}(A_i-A_o)$, $t'_i = a^{-1}(A'_i-A'_o)$; $\{t_1,\dots,t_n\}$ et $\{t'_1,\dots,t'_n\}$ sont donc des bases orthonormales de l'espace T des translations de E, et il existe un automorphisme s^* de t tel que $s^*t_i = t'_i$ $(1 \leqq i \leqq n)$, $\|s^*t\| = \|t\|$ pour tout $t \in T$. L'application s définie par

$$s\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i t_i + A_o\Big) = \sum_{i=1}^{n} x_i t'_i + A'_o \qquad (x_i \in K)$$

est alors évidemment un déplacement qui transforme C et C'. Tout déplacement s ayant un déterminant égal à ± 1, on a $v(sP;P_o)=v(P;P_o)$ quels que soient les polyèdres P et P_o. On en déduit que $v(C;C_o)=1$ si C et C_o sont des cubes de même côté. Ceci dit, choisissons un cube C_o de côté 1, et posons $v(P)= v(P;C_o)$; il est clair que l'élément

$v(P)$ ainsi défini ne dépend pas du choix de C_0. On l'appelle le <u>volume du polyèdre</u> P.

<u>Proposition 5. Si</u> P <u>est un parallélotope rectangle de dimension</u> n <u>de</u> E, <u>le volume de</u> P <u>est égal au produit des longueurs des arêtes de</u> P <u>issues d'un même sommet</u>.

Supposons que P soit le parallélotope construit sur les segments A_0A_i $(1 \leq i \leq n)$, et soit a_i la longueur de A_0A_i. Posons $A_i' = A_0 + a^{-1}(A_i - A_0)$; le parallélotope C construit sur les segments A_0A_i' est alors un cube de côté 1. Posons $t_i = A_i - A_0$, $t_i' = A_i' - A_0$ $(1 \leq i \leq n)$; la formule $s(\sum_{i=1}^{n} x_i t_i + A_0) = \sum_{i=1}^{n} x_i t_i' + A_0$ est évidemment un automorphisme de déterminant $a_1 \ldots a_n$ de la structure affine de E qui transforme C en P, ce qui démontre la prop. 5.

Soit maintenant E un espace euclidien parfait de dimension quelconque (finie ou non). Si V est une variété de dimension finie dans E, V possède une structure d'espace euclidien qui en fait un sous-espace de E. Cette structure euclidienne permet de définir des volumes pour les polyèdres de la structure affine de V ; si P est l'un de ces polyèdres, son volume s'appelle son <u>contenu p-dimensionnel</u>, si V est de dimension p. Si $p=1$, un polyèdre convexe de V est un segment, et son contenu 1-dimensionnel est sa longueur. Les contenus 2-dimensionnels s'appellent aussi aires.

Supposons maintenant de nouveau que E soit de dimension finie n, et soit H un hyperplan de E. Donnons-nous un polyèdre Q de la structure affine de H et un point A de E non contenu dans H. L'ensemble P formé de la réunion de tous les segments d'origine A dont les extrémités appartiennent à Q s'appelle alors la <u>pyramide</u> de sommet A et de base Q.

Montrons que c'est un polyèdre. Le polyèdre Q peut être représenté comme réunion de polyèdres convexes Q_i $(1 \leq i \leq h)$ deux à deux sans point interne commun ; si P_i est la pyramide de base Q_i et de sommet A , P est la réunion des P_i . Pour montrer que P est un polyèdre, il suffira évidemment de montrer que chaque P_i est un polyèdre convexe. Supposons donc pour un moment que Q soit un polyèdre convexe de la structure affine de H ; Q peut alors se représenter comme intersection d'un certain nombre de demi-hyperplans U_j^i $(1 \leq j \leq m)$ de H . Soient V_j^i la limite de U_j^i et V_j l'hyperplan engendré par V_j^i et A ; U_j^i est alors l'intersection de H et de l'un des demi-espaces fermés, soit U_j , de limite V_j . Soit aussi U le demi-espace fermé de E limite H qui contient A . L'ensemble $P'=U \cap \bigcap_{j=1}^{m} U_j$ est convexe et contient A et Q ; il contient donc P . Montrons que P'=P . Soient B un point $\neq A$ de P' et A' un point interne de Q n'appartenant pas à la droite AB . Désignons par p la projection sur H parallèlement à la direction de la droite AA'. Si C est un point appartenant à U de la demi-droite Δ d'origine A passant par B , on a $p(C) \in Q$. Choisissons en effet pour chaque j une fonction affine v_j nulle sur V_j telle que $v_j(A') > 0$; v_j ne prend donc que des valeurs ≥ 0 sur U_j ; or Δ est contenue dans U_j , d'où $v_j(C) \geq 0$. Par ailleurs, $p(C)=C+k(A'-A)$, où k est un élément de K , et il est clair que $k \geq 0$ si $C \in U$, d'où $v_j(p(C)) = v_j(C) + kv_j(A') \geq 0$ (on a $v_j(A)=0$!), ce qui montre que $C \in Q$. Or $p(\Delta)$ est la demi-droite d'origine A' passant par p(B) ; cette demi-droite ne peut être entièrement contenue dans Q , ce qui montre que Δ n'est pas contenue dans U , donc rencontre U en un point B_1 . Le point B_1 est dans Q , et B appartient au segment AB_1 , d'où $B \in P$. Désignons aussi par u une fonction affine nulle sur H telle que $u(A) > 0$. La pyramide P est donc l'ensemble des points B tels que $u(B) \geq 0$, $v_j(B) \geq 0$. On en déduit tout de suite que, si A' est un point interne de H , tout point distinct de A et de A' du segment AA' est intérieur à P ; P est donc un polyèdre convexe. De plus, il est manifeste que la seule face de P ne contenant pas A est Q , et que les seuls points intérieurs de P sont les points $\neq A$ et non situés dans H des segments qui joignent A aux points internes de Q . Revenant alors au cas où Q est un polyèdre quelconque, on voit que les pyramides P_i dont la réunion est la pyramide P sont deux à deux sans point intérieur commun.

Proposition 6. Soient E un espace euclidien parfait de dimension n , H un hyperplan de E , Q un polyèdre de la structure affine de H , A un point de E non situé dans H et P la pyramide de sommet A et de base Q . Désignons par d la distance de A à H et par b le contenu (n-1)-dimensionnel de Q . Le volume de P est alors $n^{-1}db$.

Il suffit évidemment de se limiter au cas où Q est convexe. Choisissons une orientation de E , et orientons H de telle manière que A soit du côté positif de H relativement à cette orientation de H et à l'orientation choisie de E . Soient $\mathcal{X}$ et $\mathcal{T}$ les cellules convexes orientées déduites de Q et de P en leur associant les orientations choisies de H et de E , et soient $\theta(\mathcal{X})$ et $\theta(\mathcal{T})$ leurs chaînes volumétriques. Désignons par A' la projection orthogonale de A sur H ; on a alors $\theta(\mathcal{T}) = (A-A') \wedge \theta(\mathcal{X})$. Il résulte immédiatement de cette formule qu'une fois A et H fixés, le volume de P ne dépend que du contenu de Q . Il suffira donc de démontrer la formule pour un polyèdre particulier de la structure affine de H . Choisissons n-1 points $A_2, \dots, A_n$ de H , distincts de A', tels que les vecteurs (A', A_i) $(2 \leq i \leq n)$ soient mutuellement perpendiculaires ; posons $a_i = \| A_i - A' \|$ $(2 \leq i \leq n)$. Les points

$A', A_2, \dots, A_n$ forment évidemment une base affine de H ; nous prendrons pour Q le simplex ayant ces points pour sommets. Il résulte de ce que nous avons établi au § 2, n°6 que le rapport du contenu (n-1)-dimensionnel du parallélotope construit sur les segments $A'A_i$ $(2 \leqq i \leqq n)$ à celui de Q est $(n-1)!$; on a donc dans notre cas $b = ((n-1)!)^{-1} a_2 \dots a_n$. Par ailleurs, P est le simplex de sommets $A, A', \dots, A_n$, et les vecteurs (A', A), $(A', A_2), \dots, (A', A_n)$ sont mutuellement perpendiculaires. Le même raisonnement que plus haut montre alors que le volume de P est $(n!)^{-1} d a_2 \dots a_n = n^{-1} d b$. La prop.6 est donc démontrée.

5. SPHÈRES DANS UN ESPACE EUCLIDIEN PARFAIT.

Soient E un espace euclidien parfait, P un point de E et a un élément du corps de base K . Pour que la sphère $S(P;a)$ existe, il est évidemment nécessaire que a soit $\geqq 0$. Cette condition est aussi suffisante. Car, la supposant remplie, soit D une droite passant par P, et soit M un point $\neq P$ sur cette droite. Si $k \in K$, on a $\|(P+k(M-P))-P\| = |k| \, \|M-P\|$, et, puisque $\|M-P\| \neq 0$, on peut prendre k tel que $k^2 \|M-P\|^2 = a$, ce qui montre qu'il y a au moins un point Q de D tel que $\|Q-P\|^2 = a$. Si S est une sphère et a son extension, l'élément $a^{1/2}$ s'appelle le rayon de la sphère.

Proposition 7. Soient S une sphère de l'espace euclidien parfait E , P son centre et r son rayon. Pour qu'une variété affine régulière V rencontre S , il faut et suffit que la distance δ du centre de S à V soit $\leqq r$.

Si V rencontre S, on sait que $V\cap S$ est la sphère de la structure euclidienne de V ayant pour centre la projection orthogonale P' de P sur V et pour extension r^2-d^2 ; on a donc $d^2 \leq r^2$, d'où $d \leq r$. Supposons réciproquement que $d \leq r$; tout point de la sphère de centre P' et de rayon $(r^2-d^2)^{1/2}$ de V appartient alors à S, d'où $V\cap S \neq \emptyset$.

Corollaire. Soient S une sphère de l'espace euclidien parfait E, P son centre et r son rayon. Si V est une variété affine de E qui contient un point Q_0 tel que $\| Q_0-P \| \leq r$ et qui est $\neq \{Q_0\}$, alors V rencontre S.

En effet, V contient une droite D passant par Q_0 ; D est une variété affine régulière et il est clair que la distance de P à D est $\leq r$; D rencontre donc S.

Proposition 8. Soient S et S' des sphères de l'espace euclidien parfait E, P et P' leurs centres, r et r' leurs rayons ; supposons que $r \leq r'$. Pour que $S\cap S' \neq \emptyset$, il faut et suffit que l'on ait

$$r'-r \leq \| P'-P \| \leq r'+r .$$

C'est évident si $P=P'$, car S et S' ne peuvent alors se rencontrer que si elles sont identiques. Supposons $P\neq P'$, et soit H l'hyperplan radical de S et S'. Puisque H est orthogonal à la droite PP', il la rencontre en un point M, dont nous désignerons les distances à P et à P' par d et d'. On a donc $d'^2-d^2 = r'^2-r^2 \geq 0$. Posons $a = \| P'-P \|$; on a alors ou bien $d'+d=a$ ou bien $d'-d = a$; dans les deux cas, un calcul facile montre que $2a(d'-r')=(a-r'-r)(a-r'+r)$. Pour que $S\cap S' \neq \emptyset$, il faut et suffit que $H\cap S' \neq \emptyset$, donc que $d' \leq r'$, ce qui ne se produira que si $r'-r \leq a \leq r'+r$.

6. SIMILITUDES DANS UN ESPACE EUCLIDIEN PARFAIT.

Soit E un espace euclidien parfait. Il est clair que le multiplicateu μ d'une similitude R est $\geqq 0$ et est par suite un carré dans K . On en déduit que toute similitude de E est le produit d'un déplacement et d'une homothétie.

Proposition 9. Soient E un espace euclidien parfait, s une similitude de E , V une variété affine de dimension finie p de E et P un polyèdre de la structure affine de V . Si c est le contenu p-dimensionnel de P , celui de sP est $\mu^{p/2}$, si μ est le multiplicateur de s .

Soit V' la variété sV ; il existe alors un déplacement t de E qui transforme V en V' ; soit $s'=st^{-1}$; s' est alors une similitude de multiplicateur μ . Puisque t est un automorphisme de la structure euclidienne de E , le contenu p-dimensionnel de tP est c ; s' transforme tP en sP et conserve V' . On peut donc se ramener au cas où $V'=V$; il n'y a alors pas d'inconvénient à supposer que $V=E$. Dans ces conditions, la valeur absolue du déterminant de s est $\mu^{p/2}$, ce qui démontre la prop.9 .

Supposons maintenant que E soit de dimension finie. Soit s une similitude de multiplicateur μ de E . On appelle alors rapport de la similitude s l'élément $+\mu^{1/2}$ si le déterminant de s est >0 , l'élément $-\mu^{1/2}$ si le déterminant de s est <0 . Si E est l'un quelconque des deux espaces orientés admettant E comme espace sous-jacent , les similitudes de rapports >0 sont celles qui préservent l'orientation de E .

Proposition 10. Soient E un espace euclidien parfait de dimension finie et s une similitude de E de rapport $k \neq \pm 1$. Il existe alors un point P et un seul de E tel que $sP=P$; on peut mettre s sous la forme ht , où h est l'homothétie de centre P et de rapport k et t un déplacement tel que $tP = P$.

Soit M un point quelconque de E. Désignons par E l'espace des translations de E et par s^* l'automorphisme $t \to sts^{-1}$ de T. On a alors, pour $t \in T$, $s(t+M) = s^*t + sM$; pour que $s(t+M) = t+M$, il faut et suffit que $s^*t - t = M - sM$. Or l'automorphisme s^* de T n'admet pas 1 comme racine caractéristique. En effet, il existerait alors un $t \neq 0$ de T tel que $s^*t = t$, ce qui est impossible puisque $\|s^*t\| = |k|\ \|t\|$ pour tout $t \in T$. Il résulte immédiatement de là qu'il y a un point P et un seul qui est laissé fixe par s. Si h est l'homothétie de centre P et de rapport k, il est clair que $h^{-1}s$ est un déplacement qui laisse le point P fixe.

7. PRELIMINAIRE A L'ETUDE DES ANGLES.

Désignons par K un corps ordonné dans lequel tout élément ≥ 0 est un carré, et par T_0 un espace vectoriel de dimension 2 sur K ; nous supposerons donnée une forme quadratique $t \to \|t\|^2$ définie positive sur T_0, et nous supposerons choisie une base orthogonale (par rapport à cette forme quadratique) (t_0, t_1) de T_0. Nous désignerons par R le groupe des automorphismes de déterminant 1 de T_0 qui laissent la forme $\|t\|^2$ invariante.

On a $\|x_0t_0 + x_1t_1\|^2 = x_0^2 + x_1^2$. Conformément à ce que nous avons dit au § 3, n°7, nous introduisons le sur-corps quadratique L de K engendré par adjonction à K d'une racine i de l'équation $X^2+1 = 0$ (cette équation n'a évidemment pas de racine dans K). On peut alors écrire $x_0^2 + x_1^2 = N_{L/K}(x_0 + x_1 i)$; nous identifierons le point $x_0t_0 + x_1t_1$

à l'élément $x_0+x_1 i$ de L (c'est une identification légèrement différente de celle que nous avons pratiquée au § 3 ; elle nous est permise parce que $x_0^2 + x_1^2$ ne comporte pas de terme rectangle). Procédant alors comme au § 3, on voit que les éléments de R s'identifient aux multiplications par les éléments de norme 1 de L. Si r est un élément de R, soit $z(r) = x_0+x_1 i$ l'élément de norme 1 de L tel que l'on ait $r.t = z(r)t$ pour tout $t \in T_0$. Nous poserons alors $\cos r = x_0$, $\sin r = x_1$; ces deux éléments de K s'appellent le cosinus et le sinus de r. On a, si $r, r' \in R$, $z(rr') = z(r)z(r')$; or on a $(x_0+x_1 i)(x_0'+x_1' i) = x_0x_0'-x_1x_1' + (x_0x_1' + x_1x_0')i$; on en déduit les formules

$$\operatorname{Cos} rr' = \operatorname{Cos} r \operatorname{Cos} r' - \operatorname{Sin} r \operatorname{Sin} r'$$

$$\operatorname{Sin} rr' = \operatorname{Sin} r \operatorname{Cos} r' + \operatorname{Cos} r \operatorname{Sin} r' .$$

Il est clair que $\operatorname{Cos} r^{-1} = \operatorname{Cos} r$, $\operatorname{Sin} r^{-1} = -\operatorname{Sin} r$. Puisque $z(r)$ est de norme 1, on a $\operatorname{Cos}^2 r + \operatorname{Sin}^2 r = 1$.

L'ensemble des $z(r)$ pour tous les $r \in R$ est l'ensemble des $t \in T_0$ tels que $\|t\| = 1$. On voit donc que, si t est un élément tel que $\|t\| = 1$, il y a une opération r de R et une seule qui transforme t_0 en t.

Le groupe R est un sous-groupe d'indice 2 du groupe R' de tous les automorphismes de T qui laissent invariante la forme quadratique $t \to \|t\|^2$. Le groupe R' est engendré par r et par l'opération s qui conserve t_0 et qui change t_1 en $-t_1$. On a $srs^{-1} = r^{-1}$ pour tout $r \in R$.

Désignons par S l'ensemble des $t \in T$ tels que $\|t\| = 1$. Montrons que, si t, t' sont deux éléments de S, il y a une opération r' de R' telle que $r'(t) = t_0$ et que $r'(t')$ appartienne à l'ensemble S_+ des

des points de S de la forme $x_0t_0+x_1t_1$ avec $x_1 \geqq 0$. En effet, il existe une opération $r \in R$ telle que $r(t)=t_0$; si $r(t')$ n'est pas dans S_+ , il est clair que $(sr)(t') \in S_+$. Montrons de plus que le point $r'(t')$ est uniquement déterminé par les conditions que nous lui avons imposées. Il suffit de montrer que, si $t \in S_+$ et si $r' \in R'$ est tel que $r'(t_0)=t_0$, $r'(t) \in S_+$, on a $r'(t)=t$. Or il est clair que les seules opérations de R' qui laissent t_0 fixe sont l'identité I et s ; si $t \in S_+$, $s(t) \in S_+$, t ne peut être que $\pm t_0$, et $s(t) = t$. Désignons par R_+ l'ensemble des $r \in R$ tels que $\mathrm{Sin}\, r \geqq 0$. Soit (t,t') un élément quelconque de $S \times S$; désignons par t'' le point de S_+ tel qu'il existe un $r' \in R'$ tel que $r'(t)=t_0$, $r'(t')=t''$, puis par $r(t,t')$ l'élément unique de R tel que $r(t_0)=t''$. On obtient ainsi une application de $S \times S$ dans R_+ ; si (t,t') et (t_1,t_1') sont des éléments de $S \times S$, une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un élément $r' \in R'$ tel que $r'(t)=t_1$, $r'(t')=t_1'$ est que l'on ait $r(t,t')=r(t_1,t_1')$.

Si r est un élément quelconque de R , il existe toujours un élément $r' \in R_+$ tel que $r'^2 = r$. En effet, puisque $\mathrm{Cos}^2 r + \mathrm{Sin}^2 r = 1$, on a $-1 \leqq \mathrm{Cos}\, r \leqq 1$, d'où $0 \leqq (1/2)(1+\mathrm{Cos}\, r) \leqq 1$; il existe donc un $c \geqq 0$ dans K tel que $c^2 =(1/2)(1+\mathrm{Cos}\, r)$, et on a $c \leqq 1$. Soit s l'élément $\geqq 0$ de K tel que $s^2= 1-c^2$; on a $N_{L/K}(c+s\,i)=1$; il existe donc un r_1' dans R tel que $\mathrm{Cos}\, r_1' = c$, $\mathrm{Sin}\, r_1' = s$. Il en résulte immédiatement que $\mathrm{Cos}\, r_1'^2 = \mathrm{Cos}\, r$, d'où $\mathrm{Sin}\, r_1'^2 = \pm \mathrm{Sin}\, r$. Si $\mathrm{Sin}\, r_1'^2 = \mathrm{Sin}\, r$, on peut prendre $r'=r_1'$. Dans le cas contraire, on peut prendre pour r' l'élément de R défini par $\mathrm{Cos}\, r' = -c$; $\mathrm{Sin}\, r' = s$; on a en effet $\mathrm{Sin}\, r'^2 = -2cs = -\mathrm{Sin}\, r_1'^2$. De plus, si r

si r appartient lui-même à R_+, on voit que l'on peut choisir r' de telle manière que $\operatorname{Cos} r' \geqq 0$ et $\operatorname{Sin} r' \geqq 0$; et r' est alors déterminé de manière unique.

Les fonctions $r \to \operatorname{Sin} r$ et $r \to \operatorname{Cos} r$ sur R que nous avons introduites plus haut ne sont pas indépendantes du choix de la base (t_0, t_1) que nous avons choisie dans T_0. Cherchons comment elles se modifient si on change cette base. Soit (t'_0, t'_1) une autre base orthonormale de T_0; l'application linéaire r' de T_0 dans lui-même qui change t_0 en t'_0 et t_1 en t'_1 appartient manifestement à R'. On peut considérer r' comme un isomorphisme de la structure constituée par les données de l'espace vectoriel T_0, de la forme quadratique $t \to \|t\|^2$ et de la base (t_0, t_1) sur celle constituée par le même espace vectoriel T_0, par la même forme quadratique et par la base (t'_0, t'_1). L'opération qui correspond à r par cet isomorphisme est $r'rr'^{-1}$; si donc Cos' et Sin' sont les fonctions définies au moyen de la base (t'_0, t'_1), on a $\operatorname{Cos}'(r'rr'^{-1}) = \operatorname{Cos} r$ et $\operatorname{Sin}'(r'rr'^{-1}) = \operatorname{Sin} r$. Ceci dit, il y a deux cas possibles suivant que r' appartient ou non à R. Si $r' \in R$, on a $r'rr'^{-1} = r$ et $\operatorname{Cos}' r = \operatorname{Cos} r$, $\operatorname{Sin}' r = \operatorname{Sin} r$. Si r' n'appartient pas à R, on a $r'rr'^{-1} = r^{-1}$ et $\operatorname{Cos}' r = \operatorname{Cos} r$, $\operatorname{Sin}' r = -\operatorname{Sin} r$. On notera que r' appartient à R si $t'_0 \wedge t'_1 = t_0 \wedge t_1$, mais ne lui appartient pas si $t'_0 \wedge t'_1 = -t_0 \wedge t_1$.

8. ANGLES.

Nous désignerons par E un espace euclidien parfait et par T son espace de translations.

Soient L une demi-droite de E et P son origine. L'ensemble des $t \in T$ tels que $t+P \in L$ s'appelle la <u>direction</u> de L ; soit Δ cet ensemble. L'ensemble $\Delta \cup (-\Delta)$ est la direction de la droite D engendrée par L ; si Δ^* est l'ensemble des éléments $\neq 0$ de Δ, Δ^* et $-\Delta^*$ sont les deux classes d'orientation de D. La droite orientée portée par D et dont la classe d'orientation est Δ^* s'appelle la droite orientée définie par L. Deux demi-droites qui engendrent des droites parallèles sont dites parallèles ; si les deux demi-droites ont même direction, on dit qu'elles sont parallèles et de même sens. Si L est une demi-droite et $Q \in E$, il existe une demi-droite parallèle à L et de même sens qu'elle d'origine Q, et une seule.

Nous désignerons par G^* le groupe des opérations $t \to sts^{-1}$ $(t \in T)$, s parcourant le groupe des déplacements de E ; G^* est donc le groupe orthogonal de la forme quadratique $t \to \|t\|^2$ sur T. Une direction Δ de demi-droite se compose de tous les éléments de la forme at, où t est un élément fixe et a parcourt les éléments $\geqq 0$ de K ; il en résulte immédiatement que G^* permute entre elles les directions de demi-droites.

Nous verrons dans un moment que G^* permute transitivement les directions de demi-droites. Il en résulte tout de suite que toute demi-droit peut être transformée en n'importe quelle autre demi-droite par un déplacement. Mais on peut aussi faire opèrer G^* sur les couples de directions de demi-droites : si Δ, Δ' sont des directions de demi-droites, et $s^* \in G^*$, on pose $s^*(\Delta, \Delta') = (s^*\Delta, s^*\Delta')$.

Définition 2. On appelle angles les classes de transitivité de l'ensemble des couples de directions de demi-droites relativement au groupe des transformations produites dans l'espace T des translations de E par les déplacements de E . Si Δ , Δ' sont des directions de demi-droites, la classe de transitivité de (Δ, Δ') s'appelle l'angle de Δ et Δ' et se désigne par $(\widehat{\Delta, \Delta'})$. Si L et L' sont des demi-droites, on appelle angle de L et de L', et on désigne par $(\widehat{L, L'})$, l'angle des directions de L et de L' .

Nous allons maintenant introduire un invariant des couples de directions de demi-droites. Observons d'abord que toute direction de demi-droite Δ contient un point t et un seul tel que $\|t\| = 1$; en effet, si t_1 est un point $\neq 0$ quelconque de Δ, le point $\|t_1\|^{-1} t_1$ est évidemment le seul point de tel que t = 1. Nous dirons que t est le point représentatif de Δ . Ceci dit, soient Δ et Δ' des directions de demi-droites, et soient t et t' leurs points représentatifs. Il est clair que, si $s^* \in G^*$, les points représentatifs de $s^*\Delta$ et $s^*\Delta'$ sont s^*t et s^*t' , et que l'on a $\langle t, t' \rangle = \langle s^*t, s^*t' \rangle$.

Définition 3. Soient α un angle, et soient Δ et Δ' des directions de demi-droites telles que $(\Delta, \Delta') \in \alpha$. Soient t et t' les points représentatifs de Δ et Δ' ; l'élément $\langle t, t' \rangle$ s'appelle alors le cosinus de l'angle α et se désigne par $\operatorname{Cos} \alpha$.

On a donc toujours $-1 \leqq \operatorname{Cos} \alpha \leqq +1$ (prop. 1, n°2).

Proposition 11. Soient α et β des angles. Pour que $\alpha = \beta$, il faut et suffit que $\operatorname{Cos} \alpha = \operatorname{Cos} \beta$.

La condition est évidemment nécessaire. Pour montrer qu'elle est suffisante, éliminons d'abord les cas où E serait de dimension 0 ou 1.

Si E est de dimension 0, il n'y a aucun angle. Si E est de dimension 1 il y en a exactement deux, dont les cosinus sont $+1$ et -1. Supposons donc que E ne soit pas de dimension 0 ou 1 . Nous choisirons alors deux éléments t_0 et t_1 de T tels que $\|t_0\| = 1$, $\|t_1\| = 1$, $\langle t_0, t_1 \rangle = 0$, ce qui est évidemment possible. Nous désignerons par T_0 l'espace vectoriel engendré par t_0 et t_1, par R' le groupe des automorphismes de T_0 qui laissent invariante la restriction de la forme quadratique $\|t\|^2$ à cet espace et par R le groupe des éléments de déterminant 1 de R' . Nous définirons les ensembles S, S_+ et R_+ comme au n°7.

Toute opération $r' \in R'$ peut se prolonger en une opération de G^*. Désignons en effet par T_0' l'espace des $t' \in T$ tels que $\langle t, t' \rangle = 0$ pour tout $t \in T_0$; T est alors somme directe de T_0 et T_0', et on a $\|t+t'\|^2 = \|t\|^2 + \|t'\|^2$ si $t \in T_0$, $t' \in T_0'$. Il en résulte immédiatement que, si $r' \in R'$, l'automorphisme s^* de T qui coïncide avec r' sur T_0 et avec l'identité sur T_0' appartient à G^*.

Ceci dit, si Δ et Δ' sont des directions de demi-droites quelconques, il y a toujours un $s^* \in G^*$ tel que $s^*\Delta$ et $s^*\Delta'$ soient contenus dans T_0. En effet, l'espace vectoriel engendré par Δ et Δ' est de dimension 1 ou 2 , et il résulte immédiatement de la prop.4, n°3 qu'il existe une opération de G^* qui transforme cet espace en un sous-espace de T_0. Supposons maintenant que Δ et Δ' soient dans T_0, et soient t et t' leurs points représentatifs. Il résulte alors de ce qu'on a vu au n°7 qu'il existe une opération $r' \in R'$ telle que $r'(t) = t_0$, $r'(t') \in S_+$. Si nous écrivons $r'(t') = x_0 t_0 + x_1 t_1$, on a $\langle t_0, t' \rangle = x_0$, d'où $x_0 = \mathrm{Cos}\,(\widehat{\Delta, \Delta'})$. Par ailleurs, on a $x_1 = (1 - \mathrm{Cos}^2 \alpha)^{1/2}$ (rappelons que, si $k \in K$, $k \geqq 0$, $k^{1/2}$ est l'élément <u>positif</u> de K de carré k) ; $r'(t')$ est donc entièrement déterminé par la donnée de $\mathrm{Cos}\,\alpha$. La prop.11 résulte immédiatement de là .

<u>Corollaire</u>. <u>Si</u> L <u>et</u> L' <u>sont des demi-droites de</u> E , <u>on a</u> $(\widehat{L',L})=(\widehat{L,L'})$.

L'élément $(1-\mathrm{Cos}^2\alpha)^{1/2}$ s'appelle le <u>sinus</u> de l'angle α ; il est toujours $\geqq 0$.

De plus, il résulte de ce qui a été dit au n°7 qu'à tout angle α se trouve attaché un élément $r(\alpha)$ de R_+ , celui qui, avec les notations de la démonstration de la prop.7, transforme t_0 en $r'(t')$. On a $\mathrm{Cos}\ r(\alpha) = \mathrm{Cos}\ \alpha$, $\mathrm{Sin}\ r(\alpha) = \mathrm{Sin}\ \alpha$.

Nous dirons que deux angles α et β sont <u>addibles</u> lorsque $r(\alpha)r(\beta) \in R_+$. L'angle γ tel que $r(\gamma) = r(\alpha)r(\beta)$ sera alors désigné par $\alpha+\beta$. Ces notions ne dépendent pas des choix des éléments arbitraires t_0 et t_1. En effet, il résulte de ce que nous avons vu au n°7 que, pour que α et β soient addibles, il faut et suffit que $\mathrm{Sin}\ (r(\alpha)r(\beta)) \geqq 0$, c'est-à-dire que l'on ait $\mathrm{Sin}\ \alpha\ \mathrm{Cos}\ \beta + \mathrm{Cos}\ \alpha\ \mathrm{Sin}\ \beta \geqq 0$; et, si cette condition est satisfaite, on a $\mathrm{Cos}\ (\alpha + \beta) = \mathrm{Cos}\ \alpha\ \mathrm{Cos}\ \beta - \mathrm{Sin}\ \alpha\ \mathrm{Sin}\ \beta$.

Il résulte également de ce que nous avons vu au n°7 que tout angle α est divisible par 2 ; si α est un angle, il existe un angle unique, que l'on désigne par $\alpha/2$, tel que $(r(\alpha/2))^2 = r(\alpha)$, d'où $\alpha/2 + \alpha/2 = \alpha$. De plus, <u>si</u> α <u>et</u> β <u>sont des angles quelconques</u>, $\alpha/2$ <u>et</u> $\beta/2$ <u>sont addibles</u>. Nous avons vu en effet que $\mathrm{Cos}\ \alpha/2 \geqq 0$, $\mathrm{Cos}\ \beta/2 \geqq 0$; il en résulte immédiatement que $\mathrm{Sin}\ r(\alpha/2)r(\beta/2) \geqq 0$, ce qui démontre notre assertion. Il est clair que $\alpha/2 + \beta/2 = (\alpha + \beta)/2$ si α, β sont addibles.

Le groupe R étant abélien, on voit que, si des angles α et β sont addibles, β et α sont addibles et $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.

 135

Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des angles. Nous allons maintenant plonger $\mathcal{A}$ dans un <u>groupe additif ordonné</u>. On appelle angle nul la classe de transitivité formée des couples (Δ, Δ), Δ parcourant toutes les directions de demi-droites ; c'est l'angle de cosinus 1 ; nous le désignerons par α_0. Ceci dit, formons le module libre sur l'anneau des entiers rationnels admettant comme générateurs libres des éléments de $\mathcal{A}$; soit $\mathcal{A}^*$ ce module. Nous désignerons par $\dot{+}$ et $\dot{-}$ les opérations d'addition et de soustraction dans $\mathcal{A}^*$. L'application $\alpha \to r(\alpha)$ de $\mathcal{A}$ dans R se prolonge en un homomorphisme f du groupe additif de $\mathcal{A}^*$ dans R ; l'application $\alpha \to \alpha/2$ de $\mathcal{A}$ dans lui-même se prolonge en un homomorphisme φ du groupe additif de $\mathcal{A}^*$ dans lui-même. Désignons maintenant par $\mathcal{B}$ le sous-module de $\mathcal{A}^*$ engendré par α_0 et par tous les éléments de la forme $\alpha \dot{+} \beta \dot{-} (\alpha + \beta)$ pour tous les couples (α,β) d'angles addibles et posons $\mathcal{G} = \mathcal{A}^*/\mathcal{B}$. Si α et β sont addibles, on a $r(\alpha + \beta) = r(\alpha)\, r(\beta)$; par ailleurs, $r(\alpha_0)$ est l'élément neutre de R. Le module $\mathcal{B}$ est donc contenu dans le noyau de f, et f définit, par passage aux quotients, un homomorphisme g du groupe additif de $\mathcal{G}$ dans R. Par ailleurs, on a $\alpha_0/2 = \alpha_0$, et, si α et β sont des angles addibles, $\alpha/2 + \beta/2 = (\alpha + \beta)/2$; il en résulte que $\varphi(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B}$, donc que φ définit, par passage aux quotients, un homomorphisme ψ de $\mathcal{G}$ dans lui-même.

Si $\hat{\alpha}$ est la classe d'un angle α modulo $\mathcal{B}$, on a $g(\hat{\alpha}) = r(\alpha)$; l'application r étant biunivoque, il en est de même de l'application $\alpha \to \hat{\alpha}$. <u>Nous identifierons les angles à leurs images dans $\mathcal{G}$ par cette application</u>. Il est clair que, si α et β sont des angles addibles, $\alpha+\beta$ est la somme de α et β dans $\mathcal{G}$.

Si α est un angle, il est clair que $2\psi(\alpha) = \alpha$. Puisque $\mathfrak{A}$ est un ensemble de générateurs de $\mathfrak{G}$, la même formule reste vraie pour tout élément α de $\mathfrak{G}$. Si $\alpha \in \mathfrak{G}$, nous poserons $2^{-m}\alpha = \psi^m(\alpha)$ (m étant un entier > 0 quelconque) ; on a donc $2^m(2^{-m}\alpha) = \alpha$ pour tout $\alpha \in \mathfrak{G}$, et l'application $\alpha \rightarrow 2^{-m}\alpha$ est un homomorphisme de $\mathfrak{G}$ dans lui-même.

Soient maintenant $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ des angles $\neq 0$ quelconques. Nous allons montrer que la somme $\alpha_1 + \ldots + \alpha_m$ ne peut être nulle dans $\mathfrak{G}$. Il suffira évidemment de montrer que $2^{-m}(\alpha_1 + \ldots + \alpha_m) \neq 0$. Posons $\beta_i = 2^{-i}(\alpha_1 + \ldots + \alpha_i)$ $(1 \leqq i \leqq m)$; nous allons montrer que les β_i sont tous des angles. C'est vrai si $i=1$. Supposons que ce soit vrai pour un certain $i < m$. On a $\beta_{i+1} = \beta_i/2 + (2^{-i}\alpha_{i+1})/2$ puisque β_i et $2^{-i}\alpha_{i+1}$ sont des angles, il en est de même de β_{i+1}. De plus, on a $\mathrm{Cos}\,\beta_{i+1} \leqq \mathrm{Cos}\,(\beta_i/2)$ (car $\mathrm{Cos}(\alpha+\beta) \leqq \mathrm{Cos}\,\alpha$ si α et β sont des angles addibles tels que $\mathrm{Cos}\,\beta \geqq 0$). On peut alors montrer que $\beta_i \neq 0$. C'est vrai si $i=1$, puisque $\alpha_1 \neq 0$; si c'est vrai pour i, on a aussi $\beta_i/2 \neq 0$, d'où $\mathrm{Cos}\,\beta_{i+1} \leqq \mathrm{Cos}\,(\beta_i/2) < 1$, ce qui démontre notre assertion pour $i+1$. On a donc $\beta_m = 2^{-m}(\alpha_1 + \ldots + \alpha_m) \neq 0$ et par suite $\alpha_1 + \ldots + \alpha_m \neq 0$.

Nous désignerons par $\mathfrak{G}_+$ l'ensemble de tous les éléments de $\mathfrak{G}$ qui peuvent se représenter comme sommes d'angles (nuls ou non) et par $\mathfrak{G}_-$ l'ensemble des $-\alpha$ pour $\alpha \in \mathfrak{G}_+$. Il résulte immédiatement de ce que nous avons démontré que $\mathfrak{G}_+ \cap \mathfrak{G}_- = \{0\}$ et que, pour tout $\alpha \in \mathfrak{G}_+$, il y a un entier $m > 0$ tel que $2^{-m}\alpha \in \mathfrak{A}$. Montrons maintenant que $\mathfrak{G}_+ \cup \mathfrak{G}_- = \mathfrak{G}$. Puisque $\mathfrak{A}$ engendre $\mathfrak{G}$, il est clair que tout élément γ de $\mathcal{G}$ peut se mettre sous la forme $\alpha-\beta$, avec $\alpha \in \mathcal{G}_+$ et $\beta \in \mathcal{G}_+$. Pour montrer que $\gamma \in \mathcal{G}_+ \cup \mathcal{G}_-$, il suffira évidemment de montrer qu'il y a un entier m tel que $2^{-m}\gamma \in \mathcal{G}_+ \cup \mathcal{G}_-$. Nous choisirons m de telle manière que $\alpha' = 2^{-m}\alpha$ et $\beta' = 2^{-m}\beta$ soient des angles. Si $r(\alpha')(r(\beta'))^{-1} = r$ appartient à R_+, il y a un angle γ' tel que $r(\alpha') = r(\gamma')r(\beta')$, d'où $\alpha'-\beta' = \gamma' \in \mathcal{G}_+$. S'il n'en est pas ainsi, r^{-1} est dans R_+ (cf. n°7) et il y a un angle γ' tel que $\beta'=\alpha'+\gamma'$, d'où $\alpha'-\beta' \in \mathcal{G}_-$.

On déduit de là que $\mathcal{G}_+$ a une structure de groupe totalement ordonné dans laquelle $\mathcal{G}_+$ est l'ensemble des éléments $\geqq 0$. Le groupe $\mathcal{G}$ s'appelle le <u>groupe des mesures d'angles</u>.

Le raisonnement que nous avons fait à la fin de la démonstration précédente montre que, si α et β sont des angles et $\alpha \geqq \beta$, $\alpha-\beta$ est un angle. Montrons maintenant que, si $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$, β sont des angles tels que $\alpha_1+\ldots+\alpha_m \leqq \beta$, $\alpha_1+\ldots+\alpha_m$ est un angle. C'est vrai si $m=1$. Supposons que $m > 1$ et que notre assertion soit vraie pour $m-1$. On a $\alpha_m \leqq \beta-(\alpha_1+\ldots+\alpha_{m-1})$; il en résulte que $\gamma = (\beta-(\alpha_1+\ldots+\alpha_{m-1}))-\alpha_m$ est un angle, et $\alpha_1+\ldots+\alpha_m = \beta-\gamma$ est un angle.

Un calcul simple montre que l'on a, si α,β sont des angles addibles

$$(1+\mathrm{Cos}\ \beta)(\mathrm{Cos}(\alpha+\beta)-\mathrm{Cos}\ \alpha) = -\mathrm{Sin}\ \beta\ (\mathrm{Sin}\ (\alpha+\beta)+\mathrm{Sin}\ \alpha),$$

d'où il résulte que $\mathrm{Cos}\ (\alpha+\beta) \leqq \mathrm{Cos}\ \alpha$. Soient réciproquement α et β des angles tels que $\mathrm{Cos}\ \alpha \leqq \mathrm{Cos}\ \beta$. Il est alors impossible que β soit la somme de α et d'un angle $\neq 0$; on a donc $\alpha \geqq \beta$. On déduit de là que <u>la fonction cosinus est strictement décroissante sur l'ensemble des angles</u>.

Le plus grand angle est donc celui dont le cosinus est -1 ; on le désigne par π. Si Δ et Δ' sont des directions de demi-droites, pour que $(\widehat{\Delta, \Delta'}) = \pi$, il faut et suffit que $\Delta' = -\Delta$. Si α est un angle, il en est de même de $\pi - \alpha$; $\pi - \alpha$ s'appelle le <u>supplémentaire</u> de α.

L'angle $\pi/2$ est l'angle dont le cosinus est 0. Soient Δ, Δ' des directions de demi-droites, et t, t' leurs points représentatifs. Pour que $(\widehat{\Delta, \Delta'}) = \pi/2$, il faut et suffit que $\langle t, t' \rangle = 0$. Si L et L' sont des demi-droites de E, pour que $(\widehat{L, L'}) = \pi/2$, il faut et suffit que les droites engendrées par L et L' soient perpendiculaires ; on dit alors aussi que L et L' sont perpendiculaires.

On appelle <u>aigus</u> les angles $\leqq \pi/2$ et <u>obtus</u> les angles $> \pi/2$. Si α est un angle aigu, $\pi/2 - \alpha$ est un angle, que l'on appelle le <u>complémentaire</u> de α. Pour qu'un angle α soit aigu, il faut et suffit que $\operatorname{Cos} \alpha \geqq 0$.

Nous avons défini plus haut un homomorphisme g du groupe $\mathfrak{G}$ des mesures d'angles dans le groupe R. Cet homomorphisme permet de prolonger les fonctions cosinus et sinus à $\mathfrak{G}$ tout entier : on pose, pour tout $\alpha \in \mathfrak{G}$.

$$\operatorname{Cos} \alpha = \operatorname{Cos} g(\alpha) \quad ; \quad \operatorname{Sin} \alpha = \operatorname{Sin} g(\alpha) .$$

On a donc, pour α et β quelconques dans $\mathfrak{G}$,

$$\operatorname{Cos} (\alpha+\beta) = \operatorname{Cos} \alpha \operatorname{Cos} \beta - \operatorname{Sin} \alpha \operatorname{Sin} \beta$$

$$\operatorname{Sin} (\alpha+\beta) = \operatorname{Sin} \alpha \operatorname{Cos} \beta + \operatorname{Cos} \alpha \operatorname{Sin} \beta .$$

On a en particulier $\operatorname{Cos} 2\alpha = \operatorname{Cos}^2\alpha - \operatorname{Sin}^2\alpha$, $\operatorname{Sin} 2\alpha = 2 \operatorname{Sin} \alpha \operatorname{Cos} \alpha$. Par ailleurs, $\operatorname{Cos} (-\alpha) = \operatorname{Cos} \alpha$, $\operatorname{Sin} (-\alpha) = -\operatorname{Sin} \alpha$. On déduit facilement de ces formules et du fait que, pour tout $\alpha \geqq 0$ de $\mathfrak{G}$;

il y a un entier $m > 0$ tel que $2^{-m}\alpha$ soit un angle, que les prolongements des fonctions cosinus et sinus à $\mathfrak{G}$ tout entier ne dépendent pas du choix des éléments arbitraires t_0 et t_1.

On a

$$\operatorname{Cos}(\pi-\alpha) = -\operatorname{Cos}\alpha \quad \operatorname{Sin}(\pi-\alpha) = \operatorname{Sin}\alpha$$

$$\operatorname{Sin}\pi/2 = 1 \qquad \operatorname{Cos}\pi/2 = 0$$

$$\operatorname{Cos}(\pi/2-\alpha) = \operatorname{Sin}\alpha$$

On observera que $\operatorname{Cos} 2\pi = 1$, $\operatorname{Sin} 2\pi = 0$, d'où $g(2\pi) = I$ (l'élément neutre de R). De plus, il n'existe aucun angle α tel que $0 < \alpha < 2\pi$ et $g(\alpha) = I$. En effet, si $0 < \alpha \leqq \pi$, $\operatorname{Sin}\alpha = 0$, on a $\alpha = \pi$, $\operatorname{Cos}\alpha = -1$; si $\pi < \alpha < 2\pi$, on a $\operatorname{Cos}\alpha = -\operatorname{Cos}(\alpha-\pi)$, $\operatorname{Sin}\alpha = -\operatorname{Sin}(\alpha-\pi)$. On en déduit que le noyau de l'homomorphisme g est engendré par 2π. En effet, si α est un élément quelconque de $\mathfrak{G}$, il y a un entier k tel que $2k\pi \leqq \alpha < 2(k+1)$ et on a $\operatorname{Cos}\alpha = \operatorname{Cos}(\alpha-2k\pi)$, $\operatorname{Sin}\alpha = \operatorname{Sin}(\alpha-2k\pi)$; il en résulte que l'on ne peut avoir $g(\alpha) = I$ que si $\alpha = 2k\pi$.

Les éléments α de $\mathfrak{G}$ pour lesquels $\operatorname{Cos}\alpha = 0$ sont ceux qui sont $\equiv \pm\pi/2 \pmod{2\pi}$. Si $\operatorname{Cos}\alpha \neq 0$, on appelle tangente de α, et on désigne par $\operatorname{Tan}\alpha$, l'élément $\operatorname{Sin}\alpha\,(\operatorname{Cos}\alpha)^{-1}$. On a donc $\operatorname{Tan}(\alpha+\pi) = \operatorname{Tan}\alpha$. Il résulte facilement des formules écrites plus haut que

$$\operatorname{Tan}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{Tan}\alpha + \operatorname{Tan}\beta}{1-\operatorname{Tan}\alpha\operatorname{Tan}\beta}$$

si $\operatorname{Cos}\alpha$, $\operatorname{Cos}\beta$ et $\operatorname{Cos}(\alpha+\beta)$ sont $\neq 0$.

9. ANGLES PLANS ORIENTÉS.

Reprenons les notations du début du n°8, et supposons l'espace E de dimension finie > 1 . Nous avons introduit le groupe G^* des opérations $t \rightarrow sts^{-1}$ $(t \in T)$, où s parcourt le groupe des déplacements de E . On peut aussi considérer le groupe G^*_+ de celles des opérations de G^* qui sont de déterminant 1 , et considérer les classes de transitivité de l'ensemble des couples de directions de demi-droites par rapport à G^*_+ . Si E est de dimension > 2 , ces classes sont identiques aux angles précédemment introduits. Pour le montrer, il suffit de faire voir que, si Δ et Δ' sont des directions de demi-droites, il existe une opération s^* de déterminant -1 de G^* qui laisse Δ et Δ' fixes. Or, soit T' le sous-espace de T engendré par Δ et Δ', et soit T" son conjugué ; T' est donc de dimension 1 ou 2 , et T" est de dimension >0 . On a $T = T'+T''$, $T' \cap T'' = \{0\}$; il y a un automorphisme s" de déterminant -1 de T" qui conserve la restriction de la forme quadratique $t \rightarrow \|t\|^2$ à T" . L'opération s^* qui coïncide avec s" sur T" et qui laisse les éléments de T' fixes possède alors les propriétés requises.

Supposons maintenant que E soit de dimension 2 . Choisissons une base orthonormale (t_0, t_1) de T . Utilisant les notations du n° 8 , le groupe G^*_+ est ici identique au groupe R . Soient Δ et Δ' deux directions de demi-droites, et t et t' les points représentatifs de Δ et Δ' . Il existe alors une opération r de R et une seule qui amène t en t' . Si r^2 n'est pas l'identité, r n'amène pas t' en t ; il en résulte que (Δ', Δ) ne peut en général pas être transformé en (Δ, Δ') par une opération de R , donc que les classes de transitivité par rapport à G^* , qui est ici le groupe que nous avons désigné par R' .

<u>Définition 4. Soient</u> E <u>un plan euclidien et</u> T <u>son espace de translations. On appelle angles plans orientés les classes de transitivité de l'ensemble des couples de directions de demi-droites de</u> E <u>par rapport au groupe des transformations produites dans</u> T <u>par les déplacements propres de</u> E . <u>Si</u> Δ <u>et</u> Δ' <u>sont des directions de demi-droites de</u> E , <u>on désigne par</u> $(\widehat{\Delta, \Delta'})_o$ <u>l'angle orienté qui contient</u> (Δ, Δ') ; <u>si</u> L, L' <u>sont des demi-droites de</u> E , <u>et si</u> Δ, Δ' <u>sont leurs directions, on pose</u> $(\widehat{L, L'})_o = (\widehat{\Delta, \Delta'})_o$.

Si Δ, Δ' sont des directions de demi-droites, il y a une opération r et une seule de R qui transforme Δ en Δ' ; désignons la par $r(\Delta, \Delta')$. Si s est une opération quelconque de R , on a évidemment $r(s\Delta, s\Delta') = sr(\Delta, \Delta')s^{-1} = r(\Delta, \Delta')$ puisque R est abélien. On en conclut que $r(\Delta, \Delta')$ ne dépend que de l'angle orienté $(\widehat{\Delta, \Delta'})_o$; si α_o est un angle orienté, désignons par $r(\alpha_o)$ la valeur commune des $r(\Delta, \Delta')$ pour tous les $(\Delta, \Delta') \in \alpha_o$. Il est alors évident que $\alpha_o \to r(\alpha_o)$ est une application biunivoque de l'ensemble des angles orientés sur le groupe R . On peut donc introduire sur l'ensemble A_o des angles orientés une structure de groupe, par la condition que l'application $\alpha_o \to r(\alpha_o)$ soit un isomorphisme de ce groupe sur R . <u>Nous noterons la loi de composition de ce groupe additivement.</u>

<u>Proposition 12. Soient</u> $L_1, \ldots, L_m$ <u>des demi-droites d'un plan euclidien parfait</u> E . <u>On a alors</u>

$$(\widehat{L_1, L_m}) = (\widehat{L_1, L_2})_o + \ldots + (\widehat{L_{m-1}, L_m})_o \quad .$$

Soit Δ_i la direction de L_i. L'opération $r(\Delta_i, \Delta_{i+1})$ (si $i<m$) transforme alors Δ_i en Δ_{i+1} ; le produit de ces opérations transforme donc L_1 en L_m, ce qui démontre la prop.12.

Il résulte immédiatement de la prop.12 que, si L et L' sont des demi-droites de E, on a $(\widehat{L',L})_o = -(\widehat{L,L'})_o$.

Puisque $R \subset G^*$, toute classe de transitivité (de l'ensemble des couples de directions de demi-droites) pour R est contenue dans une classe de transitivité pour G^*. A tout angle orienté α_o nous pouvons donc attacher un angle α : si L, L' sont des demi-droites telles que $(L,L')_o = \alpha_o$, on a $(L,L') = \alpha$; nous dirons que l'angle α et l'angle orienté α_o sont associés. Puisque R est d'indice 2 dans G^*, il ne peut y avoir plus de deux angles orientés associés à un même angle α. Soient Δ et Δ' des directions de demi-droites telles que $(\widehat{\Delta, \Delta'})=\alpha$, d'où aussi $(\Delta', \Delta) = \alpha$. On a $(\Delta', \Delta)_o = -(\Delta, \Delta')_o$; si donc $2(\Delta, \Delta')_o \neq 0$, il y a deux angles orientés associés à α, et ils sont opposés l'un à l'autre. Supposons maintenant que $2(\Delta, \Delta')_o = 0$; on voit tout de suite que la seule opération $r \in R$ distincte de l'élément neutre I telle que $r^2 = I$ est l'application $t \rightarrow -t$; on a donc ou bien $\Delta' = \Delta$ ou bien $\Delta' = -\Delta$, c'est-à-dire $\alpha=0$ ou $\alpha = \pi$. Si Δ parcourt l'ensemble des directions de demi-droites, l'ensemble des (Δ, Δ) et celui des $(\Delta, -\Delta)$ sont évidemment des angles orientés. On voit donc que les angles 0 et π sont aussi des angles orientés.

Il n'est pas possible de distinguer intrinsèquement l'un de l'autre les deux angles orientés associés à un même angle $\alpha \neq 0, \pi$.

Mais nous allons voir que cela devient possible si on se donne une orientation du plan E . Supposons donc à partir de maintenant que E soit un plan euclidien parfait orienté, dont nous désignerons la classe d'orientation positive par Γ . Soit α un angle $\neq 0$, π , et soient α_0, $-\alpha_0$ les angles orientés associés à α . Désignons par Δ et Δ' des directions de demi-droites telles que $(\widehat{\Delta, \Delta'})_0 = \alpha_0$ et par t et t' les points représentatifs de Δ et Δ'. Les vecteurs t et t' sont linéairement indépendants, puisque $\alpha \neq 0$, π ; $t \wedge t'$ est donc $\neq 0$. De plus, on a $(\Delta', \Delta)_0 = -\alpha_0$ et $t' \wedge t = -t \wedge t'$; l'un et l'un seul des éléments $t \wedge t'$, $t' \wedge t$ appartient donc à Γ . Si c'est $t \wedge t'$, nous dirons que α_0 est l'<u>angle orienté positif associé à</u> α . Nous appellerons d'une manière générale <u>angles orientés positifs</u> les angles orientés qui ou bien sont des angles orientés positifs associés à des angles $\neq 0$, π ou bien sont égaux à 0 ou à π . L'ensemble des angles orientés positifs est donc en correspondance biunivoque avec celui des angles.

<u>Proposition 13.</u> <u>Soient</u> α <u>et</u> α' <u>des angles d'un plan euclidien orienté</u> E , <u>et soient</u> α_0 <u>et</u> α'_0 <u>les angles orientés positifs associés à</u> α <u>et</u> α' . <u>Pour que</u> α , α' <u>soient addibles, il faut et suffit que</u> $\alpha_0+\alpha'_0$ <u>soit un angle orienté positif</u> ; $\alpha_0+\alpha'_0$ <u>est alors l'angle orienté positif associé à</u> $\alpha+\alpha'$. <u>S'il n'en est pas ainsi, l'angle associé à</u> $\alpha_0+\alpha'_0$ <u>est</u> $2\pi-(\alpha+\alpha')$.

Soit (t_0, t_1) une base orthonormale de T telle que $t_0 \wedge t_1$ appartienne à la classe d'orientation positive de T . Soit α_0 un angle orienté quelconque, et soit $r(\alpha_0).t_0 = x_0 t_0 + x_1 t_1$; on a alors $t_0 \wedge (r(\alpha_0).t_0 = x_1\ t_0 \wedge t_1$; pour que α_0 soit positif, il est donc nécessaire et suffisant que $x_1 \geqq 0$, donc que $r(\alpha_0)$ appartienne à l'ensemble désigné par R_+ aux n^{os} 7 et 8 . Utilisant les notations du n°8., on a $r(\alpha_0) = r(\alpha)$, $r(\alpha'_0) = r(\alpha')$; pour que α et α' soient addibles, il faut et suffit que $r(\alpha_0)r(\alpha'_0) = r(\alpha_0+\alpha'_0)$ soit dans R_+ , donc que $\alpha_0+\alpha'_0$ soit positif. S'il en est ainsi, on a $r(\alpha+\alpha') = r(\alpha)r(\alpha')$, ce qui montre que $\alpha+\alpha'$ est associé à l'angle $\alpha_0+\alpha'_0$. Supposons maintenant qu'il n'en soit pas ainsi. Les angles α et $\pi-\alpha$ étant addibles, il résulte de ce que nous venons de démontrer que l'angle orienté positif associé à $\pi-\alpha$ est $\pi-\alpha_0$; celui qui est associé à $\pi-\alpha'$ est $\pi-\alpha'_0$. Or il est que, si on considère π comme un angle orienté, $\pi+\pi=0$; on a donc $(\pi-\alpha_0)+(\pi-\alpha'_0) = -(\alpha_0+\alpha'_0)$; puisque $\alpha_0+\alpha'_0$ n'est pas positif, $-(\alpha_0+\alpha'_0)$ l'est. Les angles $\pi-\alpha$ et $\pi-\alpha'$ sont donc addibles, et leur somme $2\pi-(\alpha+\alpha')$ est l'angle associé à $-(\alpha_0+\alpha'_0)$, donc aussi à $\alpha_0+\alpha'_0$.

<u>Proposition 14.</u>- <u>Soient</u> L_1, L_2, L_3 <u>des demi-droites d'un plan euclidien parfait</u> E <u>qui possèdent les propriétés suivantes</u> : <u>elles ont même origine</u> A ; <u>les droites qu'elles engendrent sont toutes distinctes</u> ; L_2 <u>est contenu dans le secteur angulaire</u> S <u>de côtés</u> L_1 <u>et</u> L_3 . <u>On a alors</u> $\widehat{(L_1,L_3)} = \widehat{(L_1,L_2)} + \widehat{(L_2,L_3)}$.

Soit t_i le point représentatif de la direction de L_i $(1 \leqq i \leqq 3)$. Le secteur S étant l'ensemble convexe engendré par L_1 et L_3 , ses points sont les points de la forme $(a_1t_1+a_3t_3) + A$, avec $a_1 \geqq 0$, $a_3 \geqq 0$. Il en résulte que t_2 est une combinaison linéaire à coefficients >0 de t_1, t_3, donc que $t_1 \wedge t_2$ et $t_2 \wedge t_3$ sont des multiples scalaires à coefficients >0 de $t_1 \wedge t_3$. Ce dernier élément est d'ailleurs $\neq 0$; orientons E de telle manière que $t_1 \wedge t_3$ appartienne à la classe d'orientation positive. Il résulte alors de ce que nous venons de dire que $(L_1,L_2)_0$, $(L_2,L_3)_0$ et $(L_1,L_3)_0$ sont les angles orientés positifs associés à (L_1,L_2), (L_2,L_3) et (L_1,L_3). La prop;14 résulte alors des prop.12 et 13 .

Proposition 15. Soient L_0 une demi-droite d'un plan euclidien parfait E et A l'origine de L_0 . Si α_0 est un angle orienté, il y a une demi-droite L et une seule d'origine A de E telle que $(\widehat{L_0,L})_0 = \alpha_0$. Soient L' la symétrique de L par rapport à la droite D engendrée par L_0 et α l'angle associé à α_0 ; L et L' sont alors les seules demi-droites M d'origine A de E telles que $(\widehat{L_0,M}) = \alpha$. Supposons $\alpha \neq 0, \pi$; pour qu'une demi-droite L_1 d'origine A située du même côté de D que L appartienne au secteur angulaire S de côtés L_0 et L , il faut et suffit que $(\widehat{L_0,L_1}) \leqq (\widehat{L_0,L})$.

Soit Δ_0 la direction de L_0 . Si L est une demi-droite telle que $(L_0,L)_0 = \Delta_0$, la direction Δ de L est la transformée de Δ_0 par $r(\alpha_0)$; or, il n'y a qu'une seule demi-droite d'origine E et de direction Δ , à savoir Δ+A . Il est clair que $(\widehat{L_0,L}) = \alpha$; la symétrie par rapport à D étant un déplacement et conservant L_0 , on a aussi $(\widehat{L_0,L'})=\alpha$. Soit réciproquement M une demi-droite d'origine A telle que $(\widehat{L_0,M})=\alpha$. On a alors ou bien $(\widehat{L_0,M_0})=\alpha_0$, d'où M=L , ou bien $(\widehat{L_0,M})_0 = -\alpha_0$; ceci s'applique en particulier à L', d'où $(\widehat{L_0,L'})_0=-\alpha_0$ si $L'\neq L$; si donc $L'\neq L$, $M\neq L$, on a M=L' . Si L'=L , α_0 est 0 ou π , donc égal à $-\alpha_0$, et M=L . Supposons $\alpha \neq 0, \pi$; si $L_1 \subset S$, il résulte de la prop.14 que $(\widehat{L_0,L}) = (\widehat{L_0,L_1}) + (\widehat{L_1,L})$, d'où $(L_0,L_1) \leqq (L_0,L)$. Supposons réciproquement cette condition satisfaite.

Soient U_0 le demi-plan de limite D qui contient L et U le demi-plan dont la limite est la droite engendrée par L et qui contient L_0 ; on a donc $S = U \cap U_0$. Si L_1 n'était pas dans S , L_1 ne serait pas dans U , puisque $L_1 \subset U_0$; L_0 et L_1 seraient donc de part et d'autre de D . Il est évidemment impossible que $(L_0, L_1) = \pi$; L_0 et L_1 seraient donc les faces d'un secteur angulaire $S_1 \subset U_0$; puisque $L \subset U_0$, on aurait $L \subset S_1$, d'où $(L_0, L) < (L_0, L_1)$ (car (L, L_1) serait $\neq 0$), ce qui conduit à une contradiction. On a donc $L_1 \subset S$.

Proposition 16. Soient E un plan euclidien parfait, et L_i ($1 \leq i \leq m$, $m > 1$) des demi-droites de E ayant toutes même origine A . Supposons que, pour tout $i < m$, S_i soit ou bien un secteur angulaire de côtés L_i et L_{i+1} ou bien un demi-plan fermé de limite $L_i \cup L_{i+1}$, et que S_i et S_j n'aient pas de point intérieur commun si $i \neq j$. On a alors $\sum_{i=1}^{m-1}(L_i, L_{i+1}) \leq 2\pi$; si L_m est la demi-droite opposée à L_1 , on a $\sum_{i=1}^{m-1}(L_i, L_{i+1}) = \pi$; si $L_m = L_1$, on a $\sum_{i=1}^{m-1}(L_i, L_{i+1}) = 2\pi$.

Nous désignerons par D_i la droite engendrée par L_i et, si $i < m$, par U_i le demi-plan de limite D_i qui contient S_i . Soit k le plus grand entier $\leq m$ tel que $S_1 \cup \ldots \cup S_{k-1} \subset U_1$. Si $1 < i < k$, L_1 n'est pas contenu dans U_i . C'est vrai si $i=2$; en effet, si L_1 était dans U_2 , S_1 et S_2 seraient tous deux contenus dans U_1 et contiendraient L_2 ; il en résulte tout de suite que l'un de ces ensembles serait contenu dans l'autre, et ils auraient des points intérieurs communs. Supposons que $2 < i < k$ et que notre assertion soit vraie pour $i-1$. Les demi-droites L_i et L_1 sont alors de part et d'autre de D_{i-1} . Il en résulte que L_{i-1} et L_1 sont d'un même côté de D_i . Mais L_{i-1} et L_{i+1} sont de part et d'autre de D_i puisque S_{i-1} et S_i contiennent tous deux L_i et n'ont pas de point intérieur commun. Il en résulte que L_{i+1} et et L_1 sont de part et d'autre de D_1, donc que L_1 n'est pas dans U_1. Soit L'_1 la demi-droite opposée à L_1 ; si $L_{i+1} \neq L'_1$, L_i et L_{i+1} sont les faces d'un secteur angulaire contenu dans U_1 et qui contient L_i ; il en résulte que $(\widehat{L_1,L_{i+1}})=(\widehat{L_1,L_i}) + (\widehat{L_i,L_{i+1}})$. Cette conclusion subsiste si $L_{i+1} = L'_1$. Soient en effet t_1, t_i et t_{i+1} les points représentatifs des directions de L_1, L_i et L_{i+1} ; on a donc $t_{i+1} = -t_1$, d'où $\langle t_i,t_{i+1}\rangle = -\langle t_i,t_1\rangle$, c'est-à-dire Cos $(\widehat{L_i,L_{i+1}}) = -$Cos $(\widehat{L_1,L_i})$, ce qui signifie que $(\widehat{L_i,L_{i+1}})$ est le supplémentaire de $(\widehat{L_1,L_i})$. On voit donc que $\sum_{i=1}^{k-1}(\widehat{L_i,L_{i+1}}) = (\widehat{L_1,L_k}) \leq \pi$. De plus, si $k=m$, on a $L_k \neq L_1$, de sorte que nos assertions sont démontrées dans ce cas. Supposons maintenant que $k > m$. Montrons que $L'_1 \subset S_k$. C'est évident si $L_k = L'_1$. Supposons qu'il n'en soit pas ainsi. L'ensemble S_k n'étant pas contenu dans U_1, L_{k+1} n'y est pas contenu (puisque $L_k \subset U_1$) ; L_k et L_{k+1} sont donc de part et d'autre de D, et $D \cap S_k$ est une demi-droite d'origine A. Cette demi-droite n'est pas L_1, car, sinon, S_k et S_1 auraient des points intérieurs communs ; elle est donc L'_1, ce qui démontre notre assertion. Si $L_k \neq L'_1$, S_k est la réunion de deux secteurs angulaires, l'un S'_k de côtés L_k et L'_1, l'autre, S''_k, de côtés L'_1 et L_{k+1} ; S'_k et S''_k n'ont de points intérieurs communs ni l'un avec l'autre ni avec aucun des S_i, $i \neq k$, on a $(\widehat{L_k,L_{k+1}}) = (\widehat{L_k,L'_1}) + (\widehat{L'_1, L_{k+1}})$. Adjoignant alors L'_1 à l'ensemble de nos demi-droites, on voit qu'on peut se ramener, pour démontrer la prop. 16, au cas où $L_k = L_1$. Soit U'_1 le demi-plan $\neq U_1$ de limite D ; on a $S_1 \cup \ldots \cup S_{k-1} = U_1$, d'où $S_k \cup \ldots \cup S_m \subset U'_1$. Raisonnant comme plus haut, on voit alors que $\sum_{i=k}^{m-1}(\widehat{L_i,L_{i+1}}) = (\widehat{L'_1,L_m}) \leq \pi$, et que cette somme est π si $L_m = L_1$. Puisque $\sum_{i=1}^{k-1}(\widehat{L_i,L_{i+1}}) = \pi$, la prop. 16 est démontrée.

10. ANGLES DIÈDRES.

Nous désignerons par E un espace euclidien parfait et par H et H' deux hyperplans réguliers non parallèles de E (rappelons que, si E est de dimension finie, tous les hyperplans sont réguliers) ; nous poserons $V = H \cap H'$. Soient F et F_1 les deux demi-hyperplans de H de limite V , F' et F'_1 les deux demi-hyperplans de H' de limite V . Nous désignerons par S, S_1, S' et S'_1 les secteurs dièdres dont les faces sont : F et F' pour S , F et F'_1 pour S_1 , F_1 et F'_1 pour S' et F_1 et F' pour S'_1 . Soient u et u' des vecteurs $\neq 0$ perpendiculaires à H et H' ; u et u' sont linéairement indépendants et engendrent un sous-espace de dimension 2 de V , soit Δ . Si $A \in V$, nous désignerons par P_A le plan de direction Δ passant par A ; ce plan est orthogonal à V (ce qui montre que V est une variété régulière). Posons $P_A \cap F = L_A$, $P_A \cap F' = L'_A$; L_A et L'_A sont alors des demi-droites. L'angle $(\widehat{L_A, L'_A})$ ne dépend pas du point A . En effet, si A' est un autre point de V , il est clair que $L_{A'} = (A'-A)+L_A$, $L'_{A'} = (A'-A)+L'_A$, ce qui démontre notre assertion. L'angle $(\widehat{L_A, L'_A})$ s'appelle l'<u>angle du secteur dièdre</u> S . Les ensembles $P_A \cap F_1$ et $P_A \cap F'_1$ sont les demi-droites opposées à L_A et L'_A respectivement ; on déduit tout de suite de là et de la prop.16 que les angles de S_1 et de S'_1 sont les supplémentaires de celui de S et que l'angle de S' est égal à celui de S . À tout couple d'hyperplans réguliers H,H' se trouvent ainsi associés deux angles α, α' supplémentaires l'un à l'autre. Ou bien α et α' sont tous deux égaux à $\pi/2$, ou bien l'un d'eux, soit α , est $< \alpha/2$ et l'autre $> \alpha/2$. Dans les deux cas, nous dirons que α est l'<u>angle des hyperplans</u> H <u>et</u> H' . Si H et H' sont des hyperplans parallèles, on convient que leur angle est 0 . L'angle de deux hyperplans est donc toujours aigu .

<u>Proposition 17</u>.- <u>Pour que les hyperplans réguliers H et H' de E soient perpendiculaires l'un à l'autre, il faut et suffit que leur angle soit</u> $\pi/2$.

Soit D la droite orthogonale à H passant par A . Pour que H et H' soient perpendiculaires, il faut et suffit que $D \subset H'$. S'il en est ainsi, on a $L'_A \subset D$, puisque $D \subset P_A$. Or D est perpendiculaire à la droite engendrée par L_A. Désignons par t et t' les points représentatifs des directions de L_A et L'_A : on voit que, si H et H' sont perpendiculaires, on a $\langle t,t' \rangle = 0$, donc que $(\widehat{L_A,L'_A}) = \pi/2$. Réciproquement, si $(\widehat{L_A,L'_A}) = \pi/2$, la droite engendrée par L'_A est l'unique droite de P_A perpendiculaire à la droite engendrée par L_A et est par suite D , ce qui montre que H et H' sont perpendiculaires.

Si H" est un hyperplan quelconque contenu dans V , H" a une droite en commun avec P_A , et P_A contient une droite perpendiculaire à $H'' \cap P_A$; il en résulte immédiatement que H" est encore régulier. Faisant usage de la prop.14, n°9, on voit tout de suite que l'angle de tout secteur dièdre admettant V comme facette de codimension 2 et contenu dans S est au plus égal à l'angle α de S . Réciproquement, si β est un angle quelconque $\leqq \alpha$, il y a un secteur dièdre et un seul contenu dans S , d'angle β et admettant F pour l'une de ses faces.

Nous allons appliquer ceci au cas où $\beta = \alpha/2$. Soit H" l'hyperplan engendré par la face $F'' \neq F$ du secteur dièdre d'angle $\beta/2$ admettant F comme l'une de ses faces et contenu dans S , et soit $L''_A = F'' \cap P_A$. L'angle $(\widehat{L''_A,L'_A})$ est alors égal à $\alpha - \alpha/2 = \alpha/2$. Faisant usage de la prop.15, n°9 , on voit que L_A et L'_A sont symétriques l'une de l'autre par rapport à la droite qui porte L''_A . La symétrie par rapport à H" laisse les points de V fixes et transforme P_λ en lui-même ; elle transforme donc L_λ en L'_λ et échange par suite H et H'. Comme c'est une transformation isométrique, on en déduit que les distances à H et à H' d'un point quelconque de H'' sont égales, donc que H'' est l'un des hyperplans bissecteurs de H,H'. Nous dirons que c'est l'*hyperplan bissecteur du dièdre* S (si E est un plan, S est un secteur angulaire et H'' est une droite qui s'appelle la *bissectrice* de S). Il est clair que S et S' ont même hyperplan bissecteur, et que l'autre hyperplan bissecteur de H,H' est l'hyperplan bissecteur de chacun des secteurs dièdres S_1 et S'_1.

Proposition 18. Soient E un espace euclidien parfait de dimension finie n et H et H' des hyperplans non perpendiculaires de E ; soit α *l'angle de ces hyperplans. Si P est un polyèdre de la structure affine de H, sa projection orthogonale p(P) sur H' est un polyèdre de la structure affine de H' dont le contenu (n-1)-dimensionnel est le produit de celui de P par Cos* α .

Soit Δ' l'espace à 1 dimension perpendiculaire à la direction de H' ; puisque H et H' ne sont pas perpendiculaires, l'espace T des translations de E est somme directe de Δ' et de la direction de H, et la projection orthogonale sur H' induit un isomorphisme p de la structure affine de H sur celle de H', ce qui montre que p(P) est un polyèdre. Pour tout polyèdre Q de la structure affine d'un hyperplan, désignons par v(Q) le contenu (n-1)-dimensionnel de Q. Soient P,Q des polyèdres de H ; puisque p est un isomorphisme de structures affines, on a $v(p(P))/v(p(Q)) = v(P)/v(Q)$. Il suffira donc de démontrer l'égalité $v(p(P)) = \cos\alpha . v(P)$ pour un polyèdre P particulier.

Nous choisirons pour P une pyramide dont la base F est dans V et dont le sommet A est un point de H non situé dans V . Soit $A'=p(A)$; il est alors clair que p(P) est la pyramide de H' de base F et de sommet A'. Désignons par d et d' les distances de A et A' à V , et par b le contenu (n-2)-dimensionnel de F . On a donc $v(P) = (n-1)^{-1} db$ et $v(p(P)) = (n-1)^{-1} d'b$. Il suffira donc de montrer que $d'=d \operatorname{Cos} \alpha$.

Soit B la projection orthogonale de A sur V ; B appartient donc au plan P passant par A et orthogonal à V . Ce plan rencontre H' suivant une droite D' ; la perpendiculaire à D' située dans P et passant par A étant perpendiculaire à V et à D', l'est à H' ; elle rencontre donc D' au point A' . L'angle $(\widehat{BA, BA'})$ est donc soit α soit $\pi-\alpha$. On a donc $\|B-A\| = d$, $\|B-A'\| = d'$; il en résulte que $\langle B-A , B-A' \rangle$ est $dd' \operatorname{Cos} \alpha$. Par ailleurs, on a $B-A = (B-A')+(A'-A)$, et $\langle A'-A, B-A' \rangle = 0$, d'où $\langle B-A, B-A' \rangle = (\langle B-A', B-A' \rangle)^2 = d'^2$, d'où $d'=d\operatorname{Cos} \alpha$.

11. GEOMETRIE EUCLIDIENNE PLANE.

Nous désignerons par E un plan euclidien parfait, et par T son espace des translations.

Soit P un polygone convexe de E . On sait que chaque sommet A de P appartient à exactement deux côtés (ou faces) de P ; ces côtés sont des segments AB et AC d'origine A . L'angle des demi-droites d'origine A contenant respectivement B et C se désigne aussi par la notation $(\widehat{AB,AC})$; il s'appelle <u>l'angle en A du polygone</u> P .

<u>Proposition 19</u>.- <u>Soit</u> P <u>un polygone convexe de</u> E <u>, et soit</u> n <u>le nombre des côtés de</u> P . <u>La somme des angles de</u> P <u>est alors</u> (n-2) .

On voit facilement que $n \geq 3$. Nous commencerons par démontrer la prop.19 dans le cas où P est un triangle, dont nous désignerons les sommets par A,B et C. Posons $C'=(C-B)+A$; les points A,B,C,C' sont alors les sommets d'un parallélogramme. La droite CC' étant parallèle à AB, C et C' sont d'un même côté de la droite AB. Par ailleurs, on sait que le milieu du segment BC' est aussi celui du segment AC ; B et C' sont donc de part et d'autre de la droite AC. Désignons par L_1 la demi-droite d'origine A qui passe par B, par L_2 celle qui passe par C, par L_3 celle qui passe par C' et par L_4 la demi-droite opposée à L_1. Les demi-droites L_1 et L_2 sont les côtés d'un secteur angulaire S_1 dont l'angle est l'angle en A du triangle. Les demi-droites L_2 et L_3 sont les côtés d'un secteur angulaire S_2 ; si on observe que la symétrie par rapport au milieu du segment AC transforme C en A et B en B', on voit que l'angle de S_2 est égal à l'angle en C du triangle. Les demi-droites L_3 et L_4 sont les côtés d'un secteur angulaire S_3 ; puisque la translation A-B transforme B en A et C en C', l'angle de S_3 est l'angle en B du triangle. Les points B et C' étant de part et d'autre de la droite AC, S_1 et S_2 n'ont pas de point intérieur commun. Par ailleurs, si on désigne par A' le symétrique de B par rapport à A, les vecteurs liés (A,A'), (B,A) et (C,C') sont équipollents, et $A' \in L_4$; les points A,C,C',A' étant les sommets d'un parallélogramme, le milieu de (A',C) est aussi celui de (A,C'), et A' et C sont de part et d'autre de la droite AC', ce qui montre que S_2 et S_3 n'ont pas de point intérieur commun.
Il en est évidemment de même de S_1,S_3. Il résulte donc de la prop.16,

n°9 que $(\widehat{L_1,L_2}) + (\widehat{L_2,L_3}) + (\widehat{L_3,L_4}) = \pi$, ce qui démontre la prop.19 pour le cas d'un triangle.

Soit maintenant P un polygone convexe quelconque. Soit A_1A_2 l'un quelconque des côtés de P, A_1 et A_2 étant deux sommets. Définissons par récurrence le sommet A_i de P comme suit : A_1 et A_2 sont déjà définis; supposons que $i \geqq 2$, que les sommets $A_1,\dots,A_i$ soient déjà définis et que le segment $A_{i-1}A_i$ soit un côté de P. On sait que le sommet A_i appartient à exactement deux côtés de P ; $A_{i-1}A_i$ est l'un de ces côtés ; nous désignerons l'autre par A_iA_{i+1}, ce qui définit A_{i+1}. Si n est le nombre des côtés de P, il est clair que $A_i \neq A_1$ si $i \leqq n$, $A_{n+1}=A_1$. Soit A_0 un point intérieur de P ; A_0 n'appartient donc à aucune des droites A_iA_{i+1}, et, pour tout i, A_0, A_i, A_{i+1} sont les sommets d'un triangle T_i. Il est clair que deux côtés distincts de P ne peuvent avoir plus d'un point en commun, ce point étant alors un sommet ; si donc $1 \leqq i < j \leqq n$, T_i et T_j n'ont aucun point intérieur commun. Soit L_i la demi-droite d'origine A_0 qui passe par A_i ; L_i et L_{i+1} sont les côtés d'un secteur angulaire S_i (parce que A_0 est intérieur à P), et S_i, S_j n'ont aucun point intérieur commun si $1 \leqq i < j \leqq n$. On a donc $\sum_{i=1}^{n} (\widehat{L_i,L_{i+1}}) = 2\pi$ (prop.16, n°9). Si $i > 1$, soient M_i, M'_i et M''_i les demi-droites d'origine A_i qui passent respectivement par A_{i-1}, A_0 et A_{i+1}. Le polygone P, qui est l'ensemble convexe engendré par la réunion de ses faces, est contenu dans le secteur angulaire Σ_i de côtés M_i et M''_i ; la demi-droite M'_i étant contenue dans Σ_i, on a $(\widehat{M_i,M''_i}) = (\widehat{M_i,M'_i}) + (\widehat{M'_i,M''_i})$. L'angle $(\widehat{M_i,M''_i})$ est l'angle en A_i du polygone ; par ailleurs, la somme des angles de T_i étant π, on a $(\widehat{M'_i,M''_i}) + (\widehat{M_{i+1},M'_{i+1}}) + (\widehat{L_i,L_{i+1}}) = \pi$. Ajoutons ces relations pour $i=1,\dots,n$, et tenons compte de ce que l'on a

$\sum_{i=1}^{n}(\widehat{L_i,L_{i+1}}) = 2\pi$; il vient $\sum_{i=1}^{n}(\widehat{M_i',M_i''}) + \sum_{i=1}^{n}(\widehat{M_{i+1},M_{i+1}'}) = (n-2)\pi$.
Tenant compte de ce que $M_{n+1}=M_1$, $M_{n+1}' = M_1'$, on voit tout de suite que la somme $\sum_{i=1}^{n}(\widehat{M_i',M_i''}) + \sum_{i=1}^{n}(\widehat{M_{i+1},M_{i+1}'})$ est égale à la somme des angles de P . La prop.19 est donc démontrée.

Proposition 20. Soient donnés deux points distincts A et B de E et un angle orienté α_0 de E , distinct de 0 et de π . Il existe alors un cercle C passant par A et B et un demi-plan ouvert U ayant pour limite la droite AB tels que $C \cap U$ soit l'ensemble des points $M \neq A,B$ tels que $(MA,MB)_0 = \alpha_0$.

Nous désignerons par t_0 le point représentatif de la demi-droite d'origine A qui passe par B . Si α est l'angle associé à α_0 , il y a une orientation de E relativement à laquelle α_0 est l'angle orienté positif associé à α ; soit Γ la classe d'orientation positive de cette orientation, et soit t_1 le vecteur de longueur 1 perpendiculaire à t_0 tel que $t_0 \wedge t_1 \in \Gamma$. Soit L le sur-corps $K(i)$ de K , i étant une solution de l'équation $X^2+1=0$. Nous identifierons l'espace T à L en identifiant $x_0t_0+x_1t_1$ à $x_0+x_1 i$ si x_0,x_1 sont dans K . Les automorphismes de T qui laissent invariante la forme quadratique $t \to \|t\|^2$ sont alors les multiplications par les éléments de norme 1 de L . A l'angle orienté α_0 se trouve donc attaché un élément ζ de norme 1 de L . Soit M un point $\neq A,B$; posons $M-A = z$, $B-A = b$, d'où $M-B = z-b$. Pour que $(MA,MB)_0 = \alpha_0$, il faut et suffit que $r(\alpha_0)$ transforme $A-M = -z$ en un élément de la forme $m(B-M) = -m(z-b)$ avec $m > 0$, donc encore que $z\zeta = m(z-b)$ avec $m > 0$. Pour tout $u \in L$, nous désignerons par $\bar{u}$ l'image de u par l'automorphisme non identique de L/K . On a $\bar{b} = b$, $\bar{\zeta} = \zeta^{-1}$; l'égalité écrite plus haut donne donc $\zeta^2(\bar{z}-b)z = (z-b)\bar{z}$. On a d'ailleurs $\zeta^2 \neq 1$ puisque $\alpha_0 \neq 0$, π . Posons $c = -(\zeta^2-1)^{-1}b$; on a alors $\bar{c} = (\zeta^2-1)^{-1}\zeta^2 b$, et notre relation s'écrit $z\bar{z} - \bar{c}z - c\bar{z} = 0$, ou $(z-c)(\bar{z}-\bar{c}) = c\bar{c}$. Posons $P = c+A$, $r = \| P-A \|$, et désignons par C le cercle de centre P et de rayon r ; puisque $(z-c)(\bar{z}-\bar{c}) = \| P-M \|^2$, $r^2 = c\bar{c}$, on voit que la condition $(MA,MB)_0 = \alpha_0$ entraîne $M \in C$. Soit par ailleurs U le demi-plan ouvert ayant pour limite la droite AB qui contient t_1+A . On a $r(\alpha_0).(A-M) = m(B-M)$; puisque α_0 est l'angle orienté positif associé à α , $(A-M)\wedge(B-M)$ appartient à Γ ; on a $B-M = (B-A)+(A-M)$, d'où $(A-M)\wedge(B-M) = (A-M)\wedge(B-A)$. Posons $z = xt_0+yt_1$; on a $B-A = bt_0$, d'où $(A-M)\wedge(B-A) = -by\, t_1\wedge t_0 = by\, t_0\wedge t_1$; on a $b > 0$, d'où $y > 0$ et $M \in U$, d'où $M \in C \cap U$. Soit réciproquement M un point de $C \cap U$. Puisque $M \in C$, $M \neq A, B$, on voit tout de suite que, si $M = z+A$, $(z-b)^{-1}z\zeta = (\bar{z}-b)^{-1}\bar{z}\bar{\zeta}$; $(z-b)^{-1}z\zeta$ est donc dans K , et on a $z\zeta = m(z-b)$ avec $m \in K$. Si $m > 0$, l'angle orienté $(MA,MB)_0$ est α_0 ; si $m < 0$, il est $\alpha_0+\pi$ (car $r(\alpha_0+\pi)$ est l'opération de multiplication par $-\zeta$). Par ailleurs, puisque $M \in U$, le même calcul que plus haut montre que $(A-M)\wedge(B-M) \in \Gamma$, donc que $(MA,MB)_0$ est un angle orienté positif. Mais, α_0 étant un angle orienté positif $\neq 0$, $\alpha_0+\pi$ n'en est pas un ; m est donc > 0 , et $(MA,MB)_0 = \alpha_0$. Le cercle C passe évidemment par A . On a $c-b = (\zeta^2-1)^{-1}b$, d'où $(c-b)(\bar{c}-b) = r^2$, et C passe par B . Soit maintenant C' un cercle tel que $C' \cap U = C \cap U$; on peut trouver trois demi-droites L_1, L_2, L_3 d'origine A , mutuellement distinctes, contenant des points de U et non contenues dans la tangente en A au cercle C. Chacune de ces demi-droites rencontre C en un point $\neq A$; ces trois points sont mutuellement distincts et appartiennent à C' .

Mais deux cercles distincts de E ne peuvent avoir au plus que deux points communs ; on a donc $C=C'$, et la prop. 20 est démontrée.

L'ensemble $C \cap U$ de la prop.20 s'appelle le segment capable de l'angle α_0 relatif au segment AB (bien que ce ne soit pas un segment). Soit U' le demi-plan ouvert $\neq U$ ayant pour limite la droite AB ; la démonstration a montré que $C \cap U'$ est le segment capable de l'angle $\alpha_0 + \pi$. Soit α l'angle associé à α_0 ; l'ensemble des points $M \neq A,B$ tels que l'angle $(\widehat{MA,MB})$ soit α est la réunion des segments capables des angles α_0 et $-\alpha_0$; ces deux segments capables sont évidemment symétriques l'un de l'autre par rapport à la droite AB .

Considérons plus particulièrement le cas où $\alpha = \pi/2$. L'élément de la démonstration de la prop.20 est alors $\pm i$, et il en résulte que $c=b/2$. Le centre du cercle C est alors sur la droite AB , et il en résulte que C est symétrique par rapport à cette droite. On a donc le résultat suivant :

Proposition 21. Soient A et B des points distincts. L'ensemble des points $M \neq A,B$ tels que les droites MA, MB soient perpendiculaires est alors l'ensemble des points $\neq A,B$ du cercle dont le centre est le milieu de A,B et qui passe par A et B .

Ce cercle s'appelle le cercle de diamètre AB .

Soit ABC un triangle. On sait que les points A,B,C appartiennent à un cercle et à un seul ; ce cercle s'appelle le cercle circonscrit au triangle. Posons $a = \|C-B\|$, $b = \|A-C\|$, $c = \|B-A\|$; les éléments a,b,c s'appellent (par abus de langage) les côtés du triangle ABC . Par ailleurs, nous désignerons encore par A,B,C les angles en A,B,C du triangle. Nous allons démontrer les formules

$$\frac{a}{\operatorname{Sin} A} = \frac{b}{\operatorname{Sin} B} = \frac{c}{\operatorname{Sin} C} = 2R$$

où R est le rayon du cercle circonscrit au triangle. Il suffit évidemment de démontrer l'une de ces formules. Soit D la droite perpendiculaire en A à la droite AB. Si $A \neq \pi/2$, D rencontre le cercle circonscrit au triangle ABC en un point $C' \neq A$. Les points C, C' appartenant au cercle circonscrit au triangle ABC, l'angle orienté $(\widehat{C'A, C'B})_o$ est ou bien $(\widehat{CA, CB})_o$ ou bien $\pi + (\widehat{CA, CB})_o$. Dans le premier cas, on a $(\widehat{C'A, C'B}) = C$, dans le second cas $(\widehat{C'A, C'B}) = \pi - C$; dans les deux cas, $\operatorname{Sin} (\widehat{C'A, C'B}) = \operatorname{Sin} C$. L'angle en A du triangle BAC' étant $\pi/2$, et la somme des angles de ce triangle étant π, on a $(\widehat{C'A, C'B}) + (\widehat{BA, BC'}) = \pi/2$, d'où $\operatorname{Cos} (\widehat{BA, BC'}) = \operatorname{Sin} C$. Il résulte donc de la prop. 18, n°10 que $c = \| B - C' \| \operatorname{Sin} C$. Par ailleurs, les droites AB et AC' étant perpendiculaires, le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, qui est aussi le cercle circonscrit au triangle ABC', est le milieu du segment BC', d'où $\| B - C' \| = 2R$. On a donc $c = 2R \operatorname{Sin} C$. Si l'angle A est égal à $\pi/2$, l'angle B est $\neq \pi/2$, et on démontre la formule $c = 2R \operatorname{Sin} C$ de la même manière que plus haut en échangeant les rôles joués par A et B.
