LIVRE VI
INTEGRATION
CHAPITRE VI (ETAT 2)
COMPOSITION ET DECOMPOSITION DES MESURES

Rédaction n° 143

Nombre de pages : 66

Nombre de feuilles : 66

Livre VI Intégration Chap. VI Etat 2

Composition et décomposition des mesures

143

A 143

LIVRE VI

INTEGRATION

CHAPITRE VI (Etat 2)

COMPOSITION et DÉCOMPOSITION des MESURES.

Sommaire

Commentaires.

Conformément au programme prévu au Congrès de Royaumont d'Avril 1950, le rédacteur n'a pas rédigé à nouveau le § relatif aux espaces polonisables et ensembles analytiques. Son opinion à ce sujet est la suivante : il faut donner dans un § préliminaire au chapitre les propriétés essentielles des espaces polonais et polonisables (essentiellement le fait que l'espace des fonctions continues est de type dénombrable ; il est bon aussi de savoir que toute fonction semi-continue inférieurement est l'enveloppe d'une suite croissante de fonctions continues, qu'un espace polonisable a la puissance du continu, et que l'image continue d'un d'un compact métrisable est métrisable dans la 2^e édition, tout cela devra bien entendu être aux chap. IX - X de Topologie). Dans le reste du chapitre, on se sert de ces propriétés et de rien d'autre ; en particulier, on n'a nulle part besoin des ensembles analytiques, et le rédacteur considère qu'il est nettement préférable de ne pas les mélanger au développement des idées principales du chapitre, mais d'en faire un Appendice, en vue des applications aux questions ultrafines de mesure quotient utilisées dans la théorie des anneaux d'opérateurs : il paraît en effet essentiel de ne pas donner au lecteur l'impression (malheureusement trop répandue dans les ouvrages sur l'Intégration) que l'étude préalable de ces questions de topologie fine est indispensable pour l'étude élémentaire de l'Intégration. Un second Appendice traiterait des champs de vecteurs intégrables ; la rédaction actuelle sur ce sujet n'a pas été sérieusement discutée jusqu'ici. Enfin, devrait encore éventuellement figurer dans ce chapitre la décomposition d'une mesure invariante par un groupe en parties ergodiques ; toute discussion sur ce point étant subordonnée au rapport que doit fournir GODEMENT sur cette question.

Quant à la rédaction elle-même, le rédacteur s'est borné, pour l'essentiel, à suivre la rédaction Godement, en précisant, rectifiant et simplifiant certains détails. Au § 2, on a inséré la définition d'une mesure de Stieltjes suivant le procédé Lebesgue, comme image de la mesure de Lebesgue par une application croissante : une fois qu'on a l'image d'une mesure, c'est beaucoup plus simple que par la définition directe de la mesure des intervalles, qui a été vomie du chap. IV ; il est vrai que la théorie des Distributions fournit encore un procédé plus simple par dérivation d'une fonction croissante, mais il n'est peut-être pas mauvais que le lecteur voie au moins une fois les mesures de Stieltjes avant d'arriver aux Distributions. On a inséré aussi à ce propos la formule générale du changement de variables dans l'intégrale de Lebesgue sur $\mathbf{R}$; sinon, où la mettre ?

LIVRE VI
INTÉGRATION

CHAPITRE VI (Etat 2)

COMPOSITION et DÉCOMPOSITION des MESURES

§ 1. Composition et produits de mesures.

1. Composition de mesures.

Soient E et T deux espaces localement compacts et soit μ une mesure positive sur T. L'espace $F = \mathcal{K}(E)$ des fonctions numériques continues à support compact dans E, et l'espace $\mathcal{M}(E)=F'$ des mesures sur E sont en dualité faible, la forme bilinéaire canonique étant

$$\langle f, \lambda \rangle = \int f(x)d\lambda(x) \quad .$$

Soit $t \to \lambda_t$ une application de T dans $F' = \mathcal{M}(E)$, et supposons que, pour toute fonction $f \in \mathcal{K}(E)$, la fonction numérique $t \to \langle f, \lambda_t \rangle = \int f(x)d\lambda_t(x)$ soit <u>intégrable</u> dans T par rapport à la mesure μ. <u>L'intégrale</u> $\nu = \int \lambda_t d\mu(t)$ est alors a priori un élément du dual algébrique F^* de F (chap. V, § 4, n°1) ; en fait, nous allons montrer que ν <u>appartient à</u> F', autrement dit est une <u>mesure</u> sur E ; de façon plus précise :

PROPOSITION 1.- <u>Si une application</u> $t \to \lambda_t$ <u>de</u> T <u>dans</u> $\mathcal{M}(E)$ <u>est telle que, pour toute fonction</u> $f \in \mathcal{K}(E)$, <u>la fonction numérique</u> $t \to \int f(x)d\lambda_t(x)$ <u>soit</u> μ-<u>intégrable, alors</u> $t \to \lambda_t$ <u>est faiblement intégrable par rapport à</u> μ, <u>et la mesure</u> $\nu = \int \lambda_t d\mu(t)$ <u>sur</u> E <u>est telle que, pour toute fonction</u> $f \in \mathcal{K}(E)$, <u>on ait</u>

$$(1) \qquad \langle f, \nu \rangle = \int f(x)d\nu(x) = \int d\mu(t) \int f(x)d\lambda_t(x) \quad .$$

La proposition est immédiate lorsque E est <u>compact</u> ; en effet, $F = \mathcal{K}(E)$ est alors un espace de Banach et F' est son dual ; la proposition est donc une conséquence du th. de Gelfand-Dunford (chap. V, § 4, cor. du th. 2), la formule (1) n'étant autre que la définition de l'intégrale d'une fonction faiblement intégrable.

Passons au cas général, et soit U un ensemble ouvert relativement compact dans E . L'espace $\mathcal{K}(E,\bar{U})$ des fonctions continues numériques à support contenu dans $\bar{U}$, muni de la topologie de la convergence uniforme, est un espace de Banach, qui peut être identifié au complété de l'espace normé $\mathcal{K}(U)$ des fonctions continues à support contenu dans U : c'est évident si la frontière de U est vide, c'est-à-dire si U est ouvert et fermé (puisque alors $\mathcal{K}(E,\bar{U}) = \mathcal{K}(U) = \mathcal{C}(U)$) ; dans le cas contraire, toute fonction $f \in \mathcal{K}(E,\bar{U})$ est nulle en tout point de la frontière (compacte) L de U , donc pour tout $\varepsilon > 0$ il y a un voisinage ouvert V de L dans lequel la fonction f est $\leqslant \varepsilon$ en valeur absolue, et $U \cap \complement V$ est un ensemble compact, ce qui établit notre assertion. Le dual de l'espace de Banach $\mathcal{K}(E,\bar{U})$ est donc identique à l'espace $\mathcal{M}^1(U)$ des <u>mesures bornées</u> sur U . Or, pour tout $t \in T$, la restriction $\lambda_{t,U}$ de la mesure λ_t à U est évidemment bornée, donc appartient à $\mathcal{M}^1(U)$; le théorème de Gelfand-Dunford montre donc encore qu'il existe une mesure bornée ν_U sur U telle que pour toute fonction $f \in \mathcal{K}(U)$, on ait $\int f(x) d\nu_U(x) = \int d\mu(t) \int f(x) d\lambda_t(x)$ (en vertu de la définition de la restriction à U d'une mesure). Cette formule montre en outre que si U_1 et U_2 sont deux ensembles ouverts relativement compacts dans E , les restrictions de ν_{U_1} et de ν_{U_2} à $U_1 \cap U_2$ sont identiques. On en déduit qu'il existe sur E une mesure ν dont la restriction à tout ensemble ouvert relativement compact U soit égale à ν_U (chap.III, §3, prop.1) ; et il est clair que cette mesure satisfait à la relation (1), ce qui achève la démonstration.

Lorsque l'application $t \to \lambda_t$ de T dans $\mathcal{M}(E)$ est telle que, pour toute fonction $f \in \mathcal{K}(E)$, la fonction numérique $t \to \int f(x) d\lambda_t(x)$

soit μ-intégrable, nous dirons que la mesure $\nu = \int \lambda_t d\mu(t)$ sur E est composée des mesures λ_t (par rapport à μ).

On peut naturellement définir de la même manière une mesure complexe $t \to \lambda_t$ faiblement intégrable ; il faut et il suffit évidemment pour cela que chacune des mesures réelles $\mathcal{R}(\lambda_t)$ et $\mathcal{I}(\lambda_t)$ soit faiblement intégrable.

On notera que si λ_t est une mesure réelle telle que $(\lambda_t)^+$ et $(\lambda_t)^-$ soient faiblement intégrables, λ_t elle-même est faiblement intégrable. Par contre, une mesure réelle λ_t peut être faiblement intégrable sans que $|\lambda_t|$ le soit (exerc.1).

2. Intégration par rapport à une mesure composée.

Les notations étant les mêmes qu'au n°1, soit $\nu = \int \lambda_t d\mu(t)$ une mesure composée de mesures positives λ_t (ou seulement de mesures positives pour presque tout $t \in T$) ; il est clair alors, en vertu de (1) que ν est une mesure positive. Nous allons supposer en outre que l'une des deux hypothèses suivantes est vérifiée :

A) L'application $t \to \lambda_t$ de T dans $\mathcal{M}(E)$ est vaguement continue (autrement dit, pour toute fonction $f \in \mathcal{K}(E)$, la fonction numérique $t \to \langle f, \lambda_t \rangle = \int f(x) d\lambda_t(x)$ est continue dans T).

B) Il existe une distance sur E compatible avec la topologie de E et pour laquelle E est un espace métrique complet et ayant une base dénombrable (i.e., E est polonisable).

Dans ces conditions, on a la proposition suivante :

PROPOSITION 2.- Soit f une fonction numérique $\geqslant 0$, semi-continue inférieurement dans E. On a alors.

$$\int^* f(x) d\nu(x) = \int^* d\mu(t) \int^* f(x) d\lambda_t(x) \quad (2)$$

En outre, si $t \to \lambda_t$ est vaguement continue, la fonction numérique $t \to \int^* f(x) d\lambda_t(x)$ est semi-continue inférieurement dans T.

Supposons d'abord que l'hypothèse A) soit vérifiée ; alors f est l'enveloppe supérieure d'un ensemble filtrant (pour la relation $\leqslant$) de fonctions $g_\alpha \geqslant 0$ continues et à support compact. Par suite (chap.IV, §1,th.1), la fonction $t \to \int^* f(x)d\lambda_t(x)$ est l'enveloppe supérieure des fonctions $t \to \int g_\alpha(x)d\lambda_t(x)$ qui, par hypothèse, sont continues et μ-intégrables et forment un ensemble filtrant pour la relation $\leqslant$; la fonction $t \to \int^* f(x)d\lambda_t(x)$ est donc semi-continue inférieurement dans E , et on a (chap.IV, § 1,th.1)

$$\int^* d\mu(t)\int^* f(x)d\lambda_t(x) = \sup_\alpha \int d\mu(t) \int g_\alpha(x)\, d\lambda_t(x) = \sup_\alpha \int g_\alpha(x)d\nu(x) ;$$

mais cette dernière expression est égale à $\int^* f(x)d\nu(x)$ (chap.IV, § 1, th.1), d'où la proposition dans ce cas.

Si maintenant l'hypothèse B) est vérifiée, f est l'enveloppe supérieure d'une <u>suite</u> croissante (g_n) de fonctions continues $\geqslant 0$ à support compact ; la fonction $t \to \int^* f(x)d\lambda_t(x)$ est donc l'enveloppe supérieure de la suite croissante des fonctions positives et intégrables $t \to \int g_n(x)d\lambda_t(x)$; par suite (chap.IV, §1,th.3), on a

$$\int^* d\mu(t)\int^* f(x)d\lambda_t(x) = \sup_n \int d\mu(t)\int g_n(x)d\lambda_t(x) = \sup_n \int g_n(x)d\nu(x) .$$

Mais cette dernière expression est égale à $\int^* f(x)d\nu(x)$ (chap.IV, § 1, th.3), d'où dans ce cas le résultat.

<u>Remarque</u>.- La conclusion de la prop.2 est inexacte si f est une fonction $\geqslant 0$ et semi-continue supérieurement (exerc. 2a)) ou si on ne fait aucune hypothèse supplémentaire sur E ou λ_t (exerc.4) .

PROPOSITION 3.- <u>Soit f une fonction numérique quelconque</u> $\geqslant 0$ <u>définie dans</u> E ; <u>on a</u>

$$\int^* d\mu(t)\int^* f(x)d\lambda_t(x) \leqslant \int^* f(x)d\nu(x) . \tag{3}$$

En effet, soit g une fonction semi-continue inférieurement dans E, telle que $f \leqslant g$; pour tout $t \in T$, on a donc $\int^* f(x) d\lambda_t(x) \leqslant \int^* g(x) d\lambda_t(x)$; par suite, on a aussi $\int^* d\mu(t) \int^* f(x) d\lambda_t(x) \leqslant \int^* d\mu(t) \int^* g(x) d\lambda_t(x) = \int g(x) d\nu(x)$ (prop.2) ; l'inégalité (3) résulte donc de la définition de l'intégrale supérieure de f pour la mesure ν.

COROLLAIRE.- Soit N un ensemble ν-négligeable dans E. Pour presque tout $t \in T$ (pour la mesure μ), N est négligeable pour la mesure λ_t.

En effet, si on applique l'inégalité (3) à la fonction $f = \varphi_N$, on voit que pour presque tout $t \in T$ l'intégrale supérieure $\int^* \varphi_N(x) d\lambda_t(x)$ est nulle, ce qui démontre le corollaire.

Remarque.- Si N est un ensemble localement négligeable pour ν, il peut se faire que N ne soit localement négligeable pour aucune des mesures λ_t $(t \in T)$ (exerc. 2b)).

THEOREME 1. Soit f une fonction définie dans E, à valeurs dans un espace de Banach F, et intégrable pour la mesure $\nu = \int \lambda_t d\mu$ composée des mesures positives λ_t (l'une des hypothèses A) ou B) étant vérifiée). Alors, pour presque tout $t \in T$, f est intégrable pour la mesure λ_t ; la fonction $t \to \int f(x) d\lambda_t(x)$, définie presque partout dans T, est μ-intégrable, et on a

$$\int f(x) d\nu(x) = \int d\mu(t) \int f(x) d\lambda_t(x) \quad . \tag{4}$$

Les combinaisons linéaires à coefficients dans F des fonctions numériques continues et à support compact dans E forment un ensemble partout dense dans $\mathcal{L}^1(\nu)$ (chap.IV, § 3) ; il existe donc une suite (g_n) de telles fonctions telle que la suite $(g_n(x))$ converge vers $f(x)$ sauf aux points d'un ensemble ν-négligeable N, et que la suite (g_n) converge en moyenne vers f pour la mesure ν ; on peut en outre supposer qu'il existe une fonction $h \geqslant 0$, semi-continue

inférieurement dans E et ν-intégrable, telle que $|g_n| \leqslant h$ pour tout n (chap. IV, § 3, prop.). D'après le cor. de la prop. 3, il existe un ensemble μ-négligeable $A \subset T$ tel que, pour tout $t \in \complement A$, l'ensemble N soit négligeable pour λ_t ; cela signifie que, pour tout $t \in \complement A$, la suite des fonctions continues g_n tend presque partout vers f pour la mesure λ_t. D'autre part, la prop. 3 montre qu'il existe un ensemble μ-négligeable $B \subset T$ tel que pour tout $t \in \complement B$, l'intégrale supérieure $\int^* h(x)d\lambda_t(x)$ soit finie. Il résulte donc du th. de Lebesgue (chap. IV, § 4, th.) que, pour tout $t \in \complement(A \cup B)$, f est intégrable pour λ_t, et qu'on a $\int f(x)d\lambda_t(x) = \lim_{n\to\infty} \int g_n(x)d\lambda_t(x)$.
D'autre part chacune des fonctions $t \to \int g_n(x)d\lambda_t(x)$ est μ-intégrable, puisque combinaison linéaire à coefficients dans F de fonctions numériques μ-intégrables ; ce qui précède montre que les fonctions μ-intégrables $t \to \int g_n(x)d\lambda_t(x)$ tendent presque partout dans T vers la fonction $t \to \int f(x)d\lambda_t(x)$; comme on a partout dans T, $\left|\int g_n(x)d\lambda_t(x)\right| \leqslant \int^* h(x)d\lambda_t(x)$, et que la fonction $t \to \int^* h(x)d\lambda_t(x)$ a une intégrale supérieure finie (par rapport à μ) en vertu de la prop. 3 le th. de Lebesgue montre à nouveau que la fonction $t \to \int f(x)d\lambda_t(x)$ est μ-intégrable, et qu'on a

$$\int d\mu(t) \int f(x)d\lambda_t(x) = \lim_{n\to\infty} \int d\mu(t) \int g_n(x)d\lambda_t(x) .$$

Or, on a, pour tout n, $\int g_n(x)d\nu(x) = \int d\mu(t) \int g_n(x)d\lambda_t(x)$, puisque les g_n sont combinaisons linéaires à coefficients dans F de fonctions de $\mathcal{K}(E)$; la formule (4) résulte alors de la définition de la suite (g_n).

COROLLAIRE 1.- <u>Si un ensemble</u> $A \subset E$ <u>est</u> ν-<u>intégrable, alors, pour presque tout</u> $t \in T$ (pour la mesure μ), A <u>est intégrable pour la mesure</u> λ_t, <u>la fonction</u> $t \to \lambda_t(A)$ <u>est</u> μ-<u>intégrable, et on a</u>

(5) $$\nu(A) = \int \lambda_t(A)d\mu(t) .$$

Il suffit d'appliquer le th.1 à la fonction φ_A .

COROLLAIRE 2.- Si E est un espace localement compact dénombrable à l'infini, pour toute fonction f localement intégrable pour ϑ , f est localement intégrable pour la mesure λ_t pour presque tout $t \in T$.

En effet, E est réunion d'une suite croissante (K_n) d'ensembles compacts. Pour chaque indice n , il existe en vertu du th.1 un ensemble μ-négligeable $H_n \subset T$ tel que $f\varphi_{K_n}$ soit λ_t-intégrable pour tout $t \notin H_n$. L'ensemble $H = \bigcup_n H_n$ est μ-négligeable, et pour tout $t \notin H$, chacune des fonctions $f\varphi_{K_n}$ est λ_t-intégrable, ce qui montre que f est localement intégrable par rapport à λ_t pour tout $t \notin H$.

COROLLAIRE 3.- Si E est un espace localement compact dénombrable à l'infini, pour toute fonction ϑ-mesurable $f \geqslant 0$ définie dans E , f est λ_t-mesurable pour presque tout $t \in T$, et on a

$$(6) \qquad \int^* f(x)d\vartheta(x) = \int^* d\mu(t)\int^* f(x)d\lambda_t(x) \quad .$$

La proposition n'est autre que le th.1 lorsque $\int^* f(x)d\vartheta(x) < +\infty$. Supposons donc que $\int^* f(x)d\vartheta(x) = +\infty$, et soit (K_n) une suite croissante d'ensembles compacts, de réunion E . Soit $f_n=\inf(n,f\varphi_{K_n})$; chacune des fonctions f_n est ϑ-intégrable, et f est l'enveloppe supérieure de la suite croissante (f_n). Pour tout n, il existe en vertu du th.1 un ensemble μ-négligeable $H_n \subset T$ tel que, pour tout $t \in \complement H_n$, f_n soit λ_t-intégrable. L'ensemble $H = \bigcup_n H_n$ est μ-négligeable, et par suite, pour tout $t \in \complement H$, chacune des fonctions f_n est λ_t-intégrable ; pour tout $t \in \complement H$, il en résulte que f, enveloppe supérieure des f_n , est λ_t-mesurable, et on a

$\int^* f(x)d\lambda_t(x) = \sup_n \int f_n(x)d\lambda_t(x)$ (chap.IV, §1,th.3) . La fonction $t \to \int^* f(x)d\lambda_t(x)$ est donc presque partout (pour μ) égale à

à l'enveloppe supérieure de la suite croissante des fonctions $t \to \int f_n(x)d\lambda_t(x)$; par suite, on a $\int^* d\mu(t) \int^* f(x)d\lambda_t(x) =$
$= \sup_n \int^* d\mu(t) \int f_n(x)d\lambda_t(x)$ (chap.IV, § 1, th.3). Or, en vertu du th.1, chacune des fonctions $t \to \int f_n(x)d\lambda_t(x)$ (définie presque partout dans T) est μ-intégrable, et on a $\int d\mu(t) \int f_n(x)d\lambda_t(x) =$
$= \int f_n(x)d\nu(x)$. On a donc $\int^* d\mu(t) \int^* f(x)d\lambda_t(x) = \sup_n \int f_n(x)d\nu(x) =$
$= \int^* f(x)d\nu(x)$ (chap.IV, § 1, th.3) .

Les conclusions des cor. 2 et 3 ne sont plus valables lorsqu'on ne suppose plus que E soit dénombrable à l'infini (exerc.2). On notera d'ailleurs que l'hypothèse B) faite au début de ce n° implique que E est dénombrable à l'infini.

3. Intégration par rapport au produit de deux mesures.

Soient E_1, E_2 deux espaces localement compacts, λ une mesure positive sur E_1 , μ une mesure positive sur E_2 , $\nu = \lambda \otimes \mu$ la mesure produit sur $E_1 \times E_2$ (chap.III, § 5) . Rappelons que, pour tout $x \in E_1$, l'application $f \to \mu_x(f) = \int f(x,y)d\mu(y)$ est une mesure μ_x sur $E_1 \times E_2$; en outre, pour toute fonction f continue et à support compact dans $E_1 \times E_2$, la fonction $x \to \mu_x(f)$ est continue et à support compact, donc intégrable pour λ , et on a

$$(7) \qquad \iint f(x,y)d\nu(x,y) = \int d\lambda(x) \int f(x,y)d\mu(y) \quad .$$

En d'autres termes, $\nu = \int \mu_x d\lambda(x)$ est la composée des mesures μ_x par rapport à la mesure λ , et on se trouve dans l'hypothèse A) du n°2 . Nous pouvons donc traduire dans ce cas particulier tous les résultats du n° 2 ; on observera pour cela que dire qu'une fonction f définie dans $E_1 \times E_2$ est intégrable (resp. mesurable, négligeable, localement négligeable) pour une mesure μ_x signifie (par transport de structure) que la fonction $y \to f(x,y)$ est intégrable (resp. mesurable, négligeable localement négligeable) pour μ . On obtient ainsi les résultats suivants :

PROPOSITION 4.- *Soit* f *une fonction numérique* $\geqslant 0$, *semi-continue inférieurement dans* $E_1 \times E_2$ *; alors, la fonction* $x \to \int^* f(x,y)\,d\mu(y)$ *est semi-continue inférieurement dans* E_1, *et on a*

$$\int^* d\lambda \int^* f(x,y)\,d\mu = \iint^* f(x,y)\,d\lambda\,d\mu \ .$$

PROPOSITION 5.- *Soit* f *une fonction numérique* $\geqslant 0$ *quelconque définie dans* $E_1 \times E_2$ *; on a*

$$\int^* d\lambda \int^* f(x,y)\,d\mu \leqslant \iint^* f(x,y)\,d\lambda\,d\mu \ . \tag{8}$$

COROLLAIRE.- *Soit* N *un ensemble négligeable dans* $E_1 \times E_2$ *pour la mesure* $\lambda \otimes \mu$. *Pour presque tout* $x \in E$, *la coupe* $N(x)$ *de* N *suivant* x *est* μ-*négligeable*.

THÉORÈME 2. (Lebesgue-Fubini).- *Soit* f *une fonction définie dans* $E_1 \times E_2$, *à valeurs dans un espace de Banach* F , *et intégrable pour la mesure produit* $\lambda \otimes \mu$. *Alors, pour presque tout* $x \in E_1$, *la fonction* $y \to f(x,y)$ *est intégrable pour la mesure* μ *; la fonction* $x \to \int f(x,y)\,d\mu(y)$, *définie presque partout dans* E_1, *est intégrable pour la mesure* λ , *et on a*

$$\iint f(x,y)\,d\lambda\,d\mu = \int d\lambda \int f(x,y)\,d\mu \ . \tag{9}$$

COROLLAIRE 1.- *Les hypothèses étant celles du th.2, on a*

$$\int d\lambda \int f(x,y)\,d\mu = \int d\mu \int f(x,y)\,d\lambda \tag{10}$$

(formule d'interversion des intégrations).

Il suffit évidemment d'échanger les rôles joués par E_1 et E_2 dans l'énoncé du th.2, en tenant compte de ce que la mesure produit ν est aussi la composée $\int \lambda_y\,d\mu(y)$ des mesures λ_y (définies par $\lambda_y(f) = \int f(x,y)\,d\lambda(x)$) par rapport à la mesure μ (chap.III, § 5, th.1) .

COROLLAIRE 2.– *Si un ensemble* $A \subset E_1 \times E_2$ *est intégrable pour la mesure* $\lambda \otimes \mu$, *alors, pour presque tout* $x \in E_1$, *la coupe* $A(x)$ *de* A *suivant* x *est intégrable pour* μ , *la fonction* $\mu(A(x))$ *est intégrable pour* λ , *et on a*

$$(11) \qquad \nu(A) = \int \mu(A(x))\,d\lambda(x) \;.$$

COROLLAIRE 3.– *Si* E_1 *et* E_2 *sont des espaces localement compacts dénombrables à l'infini, pour toute fonction* ν*-mesurable* $f \geqslant 0$ *définie dans* $E_1 \times E_2$, *la fonction* $y \to f(x,y)$ *est* μ*-mesurable pour presque tout* $x \in E_1$, *et on a*

$$(12) \qquad \iint^* f(x,y)\,d\lambda\,d\mu = \int^* d\lambda \int^* f(x,y)\,d\mu = \int^* d\mu \int^* f(x,y)\,d\lambda \;.$$

Remarque.– Une fonction f définie dans $E_1 \times E_2$ peut être telle que pour tout $x \in E_1$, $y \to f(x,y)$ soit μ-intégrable, et que, pour tout $y \in E_2$, $x \to f(x,y)$ soit λ-intégrable, *sans que f soit* ν*-mesurable* (*) .

4. *Critères d'intégrabilité pour le produit de deux mesures*.

Nous allons considérer dans ce qui suit des fonctions de la forme $(x,y) \to f_1(x)f_2(y)$, où f_1 et f_2 sont des fonctions numériques $\geqslant 0$ (finies ou non) définies respectivement dans E_1 et E_2 ; lorsque l'un des nombres $f_1(x)$, $f_2(y)$ est nul et l'autre égal à $+\infty$, on conviendra *dans ce n°* que leur produit est 0 .

PROPOSITION 6.– *Pour tout couple de fonctions positives* f_1, f_2 (définies respectivement dans E_1 et E_2) *finies presque partout, on a*

$$(13) \qquad \iint^* f_1(x)f_2(y)\,d\lambda\,d\mu = \left(\int^* f_1(x)\,d\lambda\right)\left(\int^* f_2(y)\,d\mu\right)$$

sauf lorsque l'un des facteurs du second membre est nul et l'autre égal à $+\infty$.

(*) Cf. SIERPINSKI ,

14

Comme $f_1(x)$ est fini pour presque tout $x \in E_1$, on a, pour ces valeurs de x, $\int^* f_1(x)f_2(y)d\mu = f_1(x)\int^* f_2(y)d\mu$, en convenant de remplacer le second membre par 0 lorsque $f_1(x)=0$ et $\int^* f_2(y)d\mu = +\infty$ (en raison de la convention faite au début de ce n°). On en déduit $\int^* d\lambda \int^* f_1(x)f_2(y)d\mu = (\int^* f_1(x)d\lambda)(\int^* f_2(y)d\mu)$ avec la même convention pour le produit du second membre ; le seul cas où la vérification ne soit pas immédiate est celui où $\int^* f_2(y)d\mu = +\infty$ et $\int^* f_1(x)d\lambda > 0$; mais alors $f_1(x)\int^* f_2(y)d\mu$ est égal à $+\infty$ dans un ensemble non négligeable pour λ, d'où la conclusion (chap.IV, § 2, prop.). Cela étant, la prop.5 montre que l'égalité (13) a lieu lorsque le second membre est $+\infty$. Dans le cas contraire, pour tout couple de fonctions semi-continues inférieurement et intégrables (donc presque partout finies) g_1, g_2 (définies respectivement dans E_1 et E_2) et telles que $f_1 \leqslant g_1$ et $f_2 \leqslant g_2$, on a
$$\iint^* f_1(x)f_2(y)d\lambda\, d\mu \leqslant \iint^* g_1(x)g_2(y)d\lambda\, d\mu .$$

Mais la fonction $g_1(x)g_2(y)$ est semi-continue inférieurement en tout point (x,y) : le seul cas où cela ne soit pas évident est en effet celui où l'un des facteurs est 0 et l'autre $+\infty$; mais alors cela résulte de la convention faite au début de ce n°. Il résulte de la prop.4 et de ce qui précède que l'on a
$$\iint^* g_1(x)g_2(y)d\lambda\, d\mu = \int^* d\lambda \int^* g_1(x)g_2(y)d\mu = (\int^* g_1(x)d\lambda)(\int^* g_2(y)d\mu) .$$
Or le produit $(\int^* f_1(x)d\lambda)(\int^* g_2(y)d\mu)$ lorsqu'on n'est pas dans le cas d'exception de l'énoncé. On a donc bien alors
$$\iint^* f_1(x)f_2(y)d\lambda\, d\mu \leqslant (\int^* f_1(x)d\lambda)(\int^* f_2(y)d\mu)$$
ce qui, compte tenu de (8), achève la démonstration.

COROLLAIRE 1.- *Soit A un ensemble λ-négligeable dans E_1, B une partie de E_2 telle que $\mu^*(B) < +\infty$; alors l'ensemble $A \times B$ est négligeable pour $\lambda \otimes \mu$.*

Il suffit d'appliquer la prop.6 en prenant pour f_1 et f_2 les fonctions caractéristiques de A et B.

COROLLAIRE 2.- *Si E_2 est dénombrable à l'infini, pour tout ensemble λ-négligeable $A \subset E_1$, $A \times E_2$ est négligeable pour $\lambda \otimes \mu$.*

En effet, E_2 étant réunion d'une suite (K_n) d'ensembles compacts $A \times E_2$ est réunion de la suite des ensembles $A \times K_n$, qui sont négligeables pour $\lambda \otimes \mu$ en vertu du cor.1.

Remarques.- 1) La conclusion du cor.2 n'est plus valable si E_2 n'est pas dénombrable à l'infini (exerc. 2e)).

2) On notera que si C est une partie *mesurable* (et même *négligeable*) de $E_1 \times E_2$, pour la mesure ν, les projections sur E_1 et E_2 peuvent fort bien *ne pas être mesurables*. Par exemple, si A est λ-négligeable dans E_1 et B un ensemble non mesurable pour μ dans E_2, mais de mesure extérieure finie, le cor.1 de la prop.6 montre que la projection sur E_2 de l'ensemble négligeable $A \times B$ n'est pas mesurable.

PROPOSITION 7.- *Soient F_1, F_2 et F trois espaces de Banach, et soit $(x, y) \rightarrow [x.y]$ une application bilinéaire continue de $F_1 \times F_2$ dans F, telle que $|[x.y]| \leqslant |x| \cdot |y|$. Soient $f_1(x), f_2(y)$ des fonctions définies respectivement dans E_1, E_2, à valeurs dans F_1, F_2 respectivement, et intégrables respectivement pour λ et μ. Alors la fonction $[f_1(x).f_2(y)]$ est intégrable pour $\lambda \otimes \mu$ et on a*

$$\iint [f_1(x).f_2(y)]\, d\lambda\, d\mu = \left[\left(\int f_1(x)\,d\lambda\right).\left(\int f_2(y)\,d\mu\right)\right]. \tag{14}$$

Tout revient à démontrer que $[f_1 \cdot f_2]$ est intégrable pour $\lambda \otimes \mu$; la relation (14) s'en déduira par application du th. de Lebesgue-Fubini et de la linéarité de l'intégrale (chap.IV, § 4, th.1). Or, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions g_1, g_2, continues à support compact, telles que $\int^* |f_1 - g_1|\, d\lambda \leq \varepsilon$ et $\int^* |f_2 - g_2|\, d\mu \leq \varepsilon$. On peut écrire

$$\iint^* \left| [f_1 \cdot f_2] - [g_1 \cdot g_2] \right| d\lambda\, d\mu \leq \iint^* |f_1| \cdot |f_2 - g_2|\, d\lambda\, d\mu + \iint^* |f_1 - g_1| \cdot$$

$$\cdot |g_2|\, d\lambda\, d\mu \leq \varepsilon \left(\int |f_1|\, d\lambda + \int |f_2|\, d\mu + \varepsilon \right)$$

en vertu de la prop.6 ; comme $[g_1 \cdot g_2]$ est continue et à support compact cela prouve que $[f_1 \cdot f_2]$ est intégrable.

COROLLAIRE.- <u>Soient</u> $A \subset E_1$, $B \subset E_2$; <u>si</u> A <u>et</u> B <u>sont intégrables</u> (<u>pour</u> λ <u>et</u> μ <u>respectivement</u>), $A \times B$ <u>est intégrable pour</u> $\nu = \lambda \otimes \mu$. <u>La réciproque est vraie si aucun des ensembles</u> A, B <u>n'est négligeable</u> ; <u>on a en outre</u>

$$\nu(A \times B) = \lambda(A)\, \mu(B) \qquad (15)$$

La première partie est une conséquence immédiate de la prop.7, puisque $\varphi_{A \times B} = \varphi_A \varphi_B$. D'autre part, si $A \times B$ est ν-intégrable et si A n'est pas λ-négligeable, il résulte du th. de Lebesgue-Fubini que, pour au moins un $x \in A$, la coupe suivant x de $A \times B$ est μ-intégrable.

<u>5. Critères de mesurabilité pour le produit de deux mesures.</u>

PROPOSITION 8.- <u>Avec les mêmes notations que dans la prop.7, si</u> f_1 <u>et</u> f_2 <u>sont mesurables</u> (<u>pour</u> λ <u>et</u> μ <u>respectivement</u>), $[f_1 \cdot f_2]$ <u>est mesurable</u>.

En effet, tout ensemble compact $K \subset E_1 \times E_2$ est contenu dans un produit $K_1 \times K_2$, où K_1 et K_2 sont compacts dans E_1 et E_2 respectivement. Par hypothèse, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble compact $H_1 \subset K_1$ (resp. $H_2 \subset K_2$) tel que $\lambda(K_1) - \lambda(H_1) \leq \varepsilon$ (resp. $\mu(K_2) - \mu(H_2) \leq \varepsilon$), et que f_1 (resp. f_2) ait sa restriction à H_1

(resp. H_2) continue ; la restriction de $[f_1 \cdot f_2]$ à $H_1 \times H_2$ est alors continue ; d'après le cor. de la prop.7, on a

$$\nu(K_1 \times K_2) - \nu(H_2 \times H_2) \leqslant \varepsilon(\lambda(K_1) + \mu(K_2) + \varepsilon) \quad ;$$

a fortiori, la restriction de $[f_1 \cdot f_2]$ à l'ensemble compact $K \cap (H_1 \times H_2)$ est continue, et la mesure de cet ensemble diffère de celle de K de moins de $\varepsilon(\lambda(K_1) + \mu(K_2) + \varepsilon)$.

COROLLAIRE 1.- <u>Si</u> $A \subset E_1$ <u>est</u> λ<u>-mesurable, et</u> $B \subset E_2$ μ<u>-mesurable, alors</u> $A \times B$ <u>est</u> ν<u>-mesurable</u> .

COROLLAIRE 2.- <u>Si</u> $A \subset E_1$ <u>est localement négligeable pour</u> λ , <u>pour toute partie</u> B <u>de</u> E_2, $A \times B$ <u>est localement négligeablr pour</u> $\nu = \lambda \otimes \mu$.

En effet, tout ensemble compact dans $E_1 \times E_2$ est contenu dans un ensemble de la forme $L \times M$ (L et M compacts), et $(A \times B) \cap (L \times M) = (A \cap L) \times (B \cap M)$; il suffit alors d'appliquer le cor.1 de la prop.6 .

6. <u>Intégration par rapport à un produit fini de mesures.</u>

Les résultats précédents s'étendent sans peine à un produit d'un nombre fini quelconque de mesures. Par exemple, soient E_1, E_2, E_3 trois espaces localement compacts, μ_i une mesure positive sur E_i $(i=1,2,3)$, et soit $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \mu_3$ la mesure produit sur $E = E_1 \times E_2 \times E_3$. Soit f une fonction μ-intégrable (à valeurs dans un espace de Banach F) ; une première application du th. de Lebesgue-Fubini montre que, pour presque tout point $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ (pour la mesure $\mu_1 \otimes \mu_2$), la fonction $x_3 \to f(x_1, x_2, x_3)$ est μ_3-intégrable, que la fonction $(x_1, x_2) \to \int f(x_1, x_2, x_3) d\mu_3$, définie presque partout dans $E_1 \times E_2$, est intégrable pour $\mu_1 \otimes \mu_2$, et qu'on a

$$\int f \, d\mu = \iint d\mu_1 \, d\mu_2 \int f(x_1, x_2, x_3) \, d\mu_3 \quad .$$

Une seconde application du même théorème montre que, pour presque tout $x_1 \in E_1$, la fonction $x_2 \rightarrow \int f(x_1,x_2,x_3)d\mu_3$ est définie presque partout dans E_2 (pour μ_2) et est μ_2-intégrable ; en outre, la fonction $x_1 \rightarrow \int d\mu_2 \int f(x_1,x_2,x_3)d\mu_3$, définie presque partout dans E_1 (pour μ_1), est μ_1-intégrable, et on a

$$\int f\, d\mu = \int d\mu_1 \int d\mu_2 \int f(x_1,x_2,x_3)d\mu_3 \,. \tag{16}$$

On prouverait de même que pour presque tout $x_1 \in E_1$, la fonction $(x_2,x_3) \rightarrow f(x_1,x_2,x_3)$ est intégrable pour $\mu_2 \otimes \mu_3$, que la fonction $x_1 \rightarrow \iint f(x_1,x_2,x_3)d\mu_2 d\mu_3$, définie presque partout, est μ_1-intégrable, et qu'on a

$$\int f\, d\mu = \int d\mu_1 \iint f(x_1,x_2,x_3)d\mu_2 d\mu_3 \,. \tag{17}$$

Nous laissons au lecteur le soin de généraliser de la même manière les autres résultats démontrés ci-dessus pour le produit de deux mesures.

7. <u>Intégration par rapport à un produit infini de mesures.</u>

Soit $(E_\iota)_{\iota \in I}$ une famille quelconque d'espaces <u>compacts</u>, et sur chaque E_ι, soit μ_ι une mesure positive <u>de masse totale égale à un</u> ; nous avons défini au chap. III, § 5, la mesure produit $\mu = \bigotimes_{\iota \in I} \mu_\iota$ sur l'espace compact $E = \prod_{\iota \in I} E_\iota$.

D'après la définition de μ, on notera que l'ensemble des fonctions <u>continues</u> définies dans E, à valeurs dans un espace de Banach F, et <u>ne dépendant que d'un nombre fini de variables</u>, est <u>partout dense</u> dans chacun des espaces $\mathcal{L}^p_F(\mu)$ (pour $1 \leqslant p < +\infty$).

Pour toute partie non vide J de I, nous poserons $E_J = \prod_{\iota \in J} E_\iota$, $\mu_J = \bigotimes_{\iota \in J} \mu_\iota$, et $x_J = pr_J(x)$ pour tout $x \in E$; on sait alors que, pour toute partition (J,J') de I en deux ensembles, on peut identifier la mesure μ à la mesure $\mu_J \otimes \mu_{J'}$ sur $E_J \times E_{J'}$ (identifié à E), et toute fonction f définie dans E à une fonction $f(x_J, x_{J'})$ sur $E_J \times E_{J'}$; le théorème de Lebesgue-Fubini montre qu'on a $\int f\, d\mu = \int d\mu_J \int f(x_J, x_{J'})\, d\mu_{J'}$.

PROPOSITION 9.- *Pour tout* $\iota \in I$, *soit* K_ι *une partie compacte de* E ; *la mesure de l'ensemble compact* $K = \prod_{\iota \in I} K_\iota$ *est donnée par*

$$(18) \qquad \mu(K) = \prod_{\iota \in I} \mu_\iota(K_\iota)$$

En effet, pour toute partie finie J de I , considérons l'ensemble compact $K_J = (\prod_{\iota \in J} K_\iota) \times E_{J'}$, où $J' = \complement J$; K est l'intersection de la famille filtrante (pour la relation $\supset$) des K_J , donc $\mu(K)$ est la limite de $\mu(K_J)$ suivant l'ensemble ordonné filtrant des parties finies de I (chap. IV, § 4, prop.   ) . Mais, d'après la remarque précédente et le cor. de la prop. 7, on a $\mu(K_J) = \prod_{\iota \in J} \mu_\iota(K_\iota)$ d'où la formule (18) .

PROPOSITION 10.- *Soit* (E_n) *une suite d'espaces compacts, et sur chaque* E_n , *soit* μ_n *une mesure positive de masse totale* 1 ; *soit* $\mu = \bigotimes_{n=1}^{\infty} \mu_n$ *la mesure produit sur* $E = \prod_{n=1}^{\infty} E_n$. *Si, pour chaque indice* n , A_n *est une partie intégrable de* E_n , $A = \prod_{n=1}^{\infty} A_n$ *est* μ*-intégrable, et on a*

$$(19) \qquad \mu(A) = \prod_{n=1}^{\infty} \mu_n(A_n) \quad .$$

En effet, A est l'intersection de la suite décroissante des ensembles $B_n = (\prod_{k=1}^{n} A_k) \times (\prod_{m=n+1}^{\infty} E_m)$; or, chacun des ensembles B_n est μ-intégrable, et on a (cor. de la prop. 7) $\mu(B_n) = \prod_{k=1}^{n} \mu_k(A_k)$. Par suite (chap. IV, § 4, prop.   ), A est intégrable et on a $\mu(A) = \lim_{n \to \infty} \mu(B_n)$, ce qui démontre (19).

Par contre (avec les notations introduites au début de ce n°), si I n'est pas dénombrable, et si, pour tout $\iota \in I$, $A_\iota \subset E_\iota$ est μ_ι-intégrable, $A = \prod_{\iota \in I} A_\iota$ n'est pas nécessairement μ-mesurable. Par exemple si $E_\iota = [0, 1]$ et si μ_ι est la mesure de Lebesgue sur E_t pour tout $t \in I$, le produit des intervalles <u>ouverts</u> $A_t =]0,1[$ <u>n'est pas</u> μ-<u>mesurable</u> si I n'est pas dénombrable (exerc. 10).

<u>Exercices</u>.- 1) Soit E l'espace compact formé des points 0 et $1/n$ ($n \geqslant 1$) dans $\mathbb{R}$; soit μ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Une application $t \to \lambda_t$ de $\mathbb{R}$ dans l'espace $\mathcal{M}(E)$ des mesures sur E définit pour tout t une suite de nombres $u_n(t) = \lambda_t(\{\frac{1}{n}\})$ telle que $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(t)| < +\infty$, et réciproquement ; pour que $t \to \lambda_t$ soit faiblement intégrable, il faut et il suffit que, pour toute suite (α_n) de nombres tendant vers 0, la fonction $t \to \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n(t)$ soit μ-intégrable et que la fonction $u_\infty(t) = \lambda_t(\{0\})$ soit μ-intégrable. Donner un exemple d'application $t \to \lambda_t$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}(E)$ qui soit faiblement intégrable, mais telle que $t \to |\lambda_t|$ ne soit pas faiblement intégrable. On utilisera les remarques suivantes :

1° pour tout entier $m \geqslant 1$, la relation $|\rho_k| \leqslant 1$ pour $-m \leqslant k \leqslant m$ entraîne

$$\int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=-m}^{m} \rho_k e^{kit} \right| dt \leqslant \sqrt{(4m+2)\pi}$$

alors que $\sum_{k=1}^{m} \int_0^{2\pi} |\sin kt|\, dt = 4m$ (pour la première inégalité, utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz).

2° Si (p_n) est une suite croissante de nombres tendant vers $+\infty$, il existe une série convergente de terme général $a_n > 0$ telle que la série de terme général $p_n a_n$ ait une somme infinie.

Cela étant, on formera une suite (u_n) de fonctions continues à support compact, une suite croissante (n_k) d'entiers et une suite décroissante (α_n) de nombres > 0 tendant vers 0 telles que :

1° si on pose $v_k(t) = \sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} \rho_j u_j(t)$, la série de terme général $\int_{-\infty}^{+\infty} |v_k(t)|\, dt$ est convergente lorsque les $|\rho_j|$ sont $\leqslant 1$;

2^o pour tout $t \in \mathbb{R}$, il n'y a qu'un nombre fini de valeurs de n pour lesquelles $u_n(t) \neq 0$; 3^o la série de terme général $\alpha_n \int_{-\infty}^{+\infty} |u_n(t)| dt$ a une somme infinie.

2) Soient E_1 l'intervalle compact $[0,1]$ de $\mathbb{R}$, E_2 l'espace localement compact obtenu en munissant le même intervalle de la topologie discrète. On désigne par λ la mesure de Lebesgue sur E_1, par μ la mesure sur E_2 définie par la masse +1 en chaque point de E_2.

a) Soit Δ la diagonale de $E = E_1 \times E_2$, qui est un ensemble fermé. Si $\nu = \lambda \otimes \mu$, montrer que $\nu^*(\Delta) = +\infty$, mais que pour tout $y \in E_2$, on a $\mu(\overset{-1}{\Delta}(y)) = 0$.

b) Montrer que Δ est localement négligeable pour ν, mais que pour tout $x \in E_1$, on a $\mu(\Delta(x)) = 1$.

c) Sur l'espace $E \times E$, on considère la mesure produit $\nu_1 = \nu \otimes \nu$. Montrer qu'il existe dans cet espace un ensemble A, localement négligeable pour ν_1, tel que, pour tout $z \in E$, $A(z)$ et $\overset{-1}{A}(z)$ soient ν-mesurables et non localement négligeables (si $z = (x, y)$, $x \in E_1$, $y \in E_2$, prendre A tel que $A(z)$ contienne tous les points $(t, x) \in E$, où $0 \leqslant t \leqslant 1$).

d) Soit ν_2 la mesure $\lambda \otimes \nu$ sur l'espace localement compact $E_1 \times E$; donner un exemple d'une partie B de $E_1 \times E$ localement négligeable pour ν_2, mais telle que $B(x)$ ne soit ν-mesurable pour <u>aucun</u> $x \in E_1$ (identifiant $E_1 \times E$ à $(E_1 \times E_2) \times E_1$, prendre pour B l'ensemble produit $\Delta \times H$ dans ce dernier espace, où H est non mesurable pour λ).

e) Montrer que, dans E, l'ensemble $\{x\} \times E_2$ n'est pas négligeable pour ν.

3) Soient $E_1 = E_2 = [0,1]$; on prend pour λ et μ la mesure de Lebesgue. Pour tout $n > 0$, soit $A'_n = \left[\frac{1}{2^n}, \frac{3}{2^{n+1}}\right[$, $A''_n = \left[\frac{3}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^{n-1}}\right[$,

$B'_n = A'_n \times A'_n$, $B''_n = A''_n \times A''_n$, $C'_n = A'_n \times A''_n$, $C''_n = A''_n \times A'_n$. On pose $f(x,y)=4^{n+1}$ dans B'_n et B''_n , $f(x,y)=-4^{n+1}$ dans C'_n et C''_n (n entier $\geqslant 0$), $f(x,y)=0$ aux autres points de $E_1 \times E_2$. Montrer que les deux intégrales $\int d\mu \int f(x,y)d\lambda$ et $\int d\lambda \int f(x,y)d\mu$ sont définies et égales, mais que la fonction f n'est pas intégrable pour la mesure $\lambda \otimes \mu$.

4) Soit T l'intervalle compact $[0,1]$ de $\mathbb{R}$ et soit μ la mesure de Lebesgue sur T . Soit E l'espace localement compact obtenu en munissant le même intervalle $[0,1]$ de la topologie discrète. Pour tout $t \in T$, on désigne par λ_t la mesure sur E définie par la masse +1 au point t . Montrer que $t \to \lambda_t$ est faiblement μ-intégrable et qu'on a $\nu = \int \lambda_t d\mu(t)=0$, mais que pour la fonction constante $f(x)=1$ dans E , on a $\int d\mu(t) \int f(x)d\lambda_t(x)=1$.

5) Soient E un espace localement compact, λ une mesure positive sur E , F un espace compact métrisable, μ une mesure positive sur F . Soit f une application de $E \times F$ dans un espace de Banach G , possédant les propriétés suivantes : 1° il existe dans E un ensemble H de mesure nulle pour λ , tel que, pour tout $x \in \complement H$, l'application $y \to f(x,y)$ est bornée et continue presque partout dans F (pour μ) ; 2° pour tout $y \in F$, l'application $x \to f(x,y)$ est λ-mesurable, et il existe une fonction numérique $g \geqslant 0$, λ-intégrable dans E et telle que $|f(x,y)| \leqslant g(x)$ dans $E \times F$.(*)

(*) On peut donner des exemples de telles fonctions non mesurables pour $\lambda \otimes \mu$, en s'appuyant sur l'hypothèse du continu (cf. SIERPINSKI,).

Dans ces conditions, montrer que la fonction $f_1(x) = \int f(x,y)\,d\mu(y)$, définie dans $\complement H$, est λ-intégrable, que la fonction $f_2(y) = \int f(x,y)\,d\lambda(x)$ est μ-intégrable, et qu'on a $\int f_1(x)\,d\lambda(x) = \int f_2(y)\,d\mu(y)$. (Considérer dans F une suite croissante fondamentale (ϖ_n) de partitions en ensembles intégrables (chap. IV, § 5, exerc.) ; pour chaque $\varpi_n = (A_{nk})$, soit y_{nk} un point quelconque de A_{nk} ; considérer $f_1(x)$ comme limite de la suite des fonctions $g_n(x) = \sum_k f(x, y_{nk})\mu(A_{nk})$, en utilisant l'exerc. du chap. IV, § 5).

6) Soient E et F deux espaces localement compacts, λ une mesure positive sur E, μ une mesure positive bornée sur F telle que $\mu(F)=1$. Soit f une fonction numérique >0 en tout point de $E \times F$, intégrable ainsi que $\log f$ pour la mesure $\lambda \otimes \mu$. Démontrer l'inégalité

$$\log\left(\int e^{\int \log f\, d\mu}\, d\lambda\right) \leqslant \int \left(\log \int f\, d\lambda\right) d\mu$$

et montrer que l'égalité ne peut avoir lieu que lorsque f est équivalente à une fonction de la forme $g(x)h(y)$ (appliquer l'inégalité de la moyenne géométrique (chap. IV, § 6, exerc.) pour tout x à la fonction $y \to f(x,y)/(\int f(x,y)\,d\lambda(x))$.

7) Soient E et F deux espaces localement compacts, λ une mesure positive sur E, μ une mesure positive sur F, f une fonction $\geqslant 0$ définie dans $E \times F$, intégrable ainsi que f^p pour la mesure $\lambda \otimes \mu$ $(p \geqslant 1)$. Démontrer l'inégalité

$$\left(\int \left(\int f\, d\mu\right)^p d\lambda\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \int \left(\int f^p\, d\lambda\right)^{\frac{1}{p}} d\mu$$

(appliquer l'inégalité de Hölder pour tout x, à la ~~franktià~~ fonction $f(x,y)$ mise sous la forme $f(x,y) = g(x,y)\left(\int f^p(x,y)\,d\lambda(x)\right)^{1/pp'}$ avec $1/p + 1/p' = 1$). Montrer que l'inégalité ne peut avoir lieu que lorsque f est équiva-lente à une fonction de la forme $g(x)h(y)$.

8) Soit E un espace localement compact, μ une mesure positive sur E, f une fonction numérique $\geqslant 0$ définie dans E. Dans l'espace produit $E \times \mathbb{R}_+$, on désigne par D_f l'ensemble des points (x,y) tels que $0 \leqslant y \leqslant f(x)$; soit d'autre part ν la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$.

a) Montrer que, pour que f soit mesurable pour μ, il faut et il suffit que D_f soit un ensemble mesurable pour $\mu \otimes \nu$ (pour voir que la condition est nécessaire, prouver que, si f est μ-mesurable, pour toute partie compacte K de E, $D_f \cap (K \times \mathbb{R}_+)$ est réunion d'un ensemble négligeable et d'une famille dénombrable d'ensembles de la forme $A \times I$, où A est μ-mesurable et I un intervalle dans $\mathbb{R}_+$. Pour voir que la condition est suffisante, montrer que, si elle est vérifiée, il existe un ensemble partout dense $H \subset \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $\alpha \in H$, $K \cap \overset{-1}{f}([\alpha, +\infty])$ soit mesurable, en utilisant le cor.2 du th.2).

b) Montrer que, pour que f soit intégrable pour μ, il faut et il suffit que D_f soit intégrable pour $\lambda = \mu \otimes \nu$; on a alors $\lambda(D_f) = \int f \, d\mu$. En outre, si on désigne par g la fonction numérique décroissante dans $\mathbb{R}_+$, définie par $g(t) = \mu(\overset{-1}{f}([t, +\infty]))$ (éventuellement égale à $+\infty$ pour $t=0$), on a $\int f \, d\mu = \int_0^\infty g(t)\,dt$.

9) Soient E_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ n espaces localement compacts, μ_i une mesure positive sur E_i pour $1 \leqslant i \leqslant n$. Pour chaque indice i, on désigne par F_i l'espace produit $\prod_{j \neq i} E_j$; soit f_i une fonction $\geqslant 0$ mesurable pour $\mu = \bigotimes_{i=1}^{n} \mu_i$ dans $E = \prod_{1 \leqslant i \leqslant n} E_i$, et <u>ne dépendant pas de</u> x_i ; montrer que si, pour $1 \leqslant k \leqslant n$, la fonction f_k^{n-1} est intégrable pour la mesure $\mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_{k-1} \otimes \mu_{k+1} \otimes \dots \otimes \mu_n$ alors $f_1 f_2 \dots f_n$ est μ-intégrable, et on a

$$\int f_1 f_2 \ldots f_n \, d\mu_1 \, d\mu_2 \ldots d\mu_n \leqslant \left(\prod_{k=1}^{n} J_k \right)^{\frac{1}{n-1}}$$

en posant, pour chaque indice k, $J_k = \int f_k^{n-1} \, d\mu_1 \ldots d\mu_{k-1} d\mu_{k+1} \ldots d\mu_n$ (procéder par récurrence sur n, en utilisant le th. de Lebesgue-Fubini et l'inégalité de Hölder).

En déduire que, si A est une partie μ-mesurable de E, A_i sa projection sur F_i, et si A_i est intégrable et de mesure m_i, A est intégrable, et on a

$$\mu(A) \leqslant (m_1 m_2 \ldots m_n)^{1/(n-1)} \quad .$$

Examiner les cas d'égalité dans ces deux inégalités.

Généraliser au cas où, au lieu de considérer les n produits de $n-1$ des E_i, on considère les $\binom{n}{p}$ produits de p des E_i, et où on intègre dans E un produit de $\binom{n}{p}$ fonctions dont chacune ne dépend que de p des variables x_i. Par exemple si $G_{ij} = E_i \times E_j$ $(i < j)$ et si f_{ij} ne dépend que des variables x_i et x_j, montrer que

$$\int \Big(\prod_{i<j} f_{ij} \Big) \, d\mu_1 \, d\mu_2 \ldots d\mu_n \leqslant \left(\prod_{i<j} \int f_{ij}^{n-1} \, d\mu_i \, d\mu_j \right)^{\frac{1}{n-1}} .$$

10) Soit $(E_\iota)_{\iota \in I}$ une famille d'espaces compacts, et, pour chaque $\iota \in I$, soit μ_ι une mesure positive sur E_ι, de masse totale égale à 1. Soit E l'espace produit $\prod_{\iota \in I} E_\iota$, et μ la mesure produit $\bigotimes_{\iota \in I} \mu_\iota$ sur E.

Pour tout $\iota \in I$, soit A une partie mesurable de E ; pour que l'ensemble $A = \prod_{\iota \in I} A_\iota$ soit μ-mesurable, il faut et il suffit que l'on soit dans l'un des deux cas suivants :

1° $\prod_{\iota \in I} \mu_\iota(A_\iota) = 0$; 2° A_ι contient le support de la mesure μ_ι, sauf peut-être pour les indices ι d'une partie dénombrable de I.

Dans chacun des deux cas, on a $\mu(A) = \prod_{\iota \in I} \mu_\iota(A_\iota)$. (Supposant qu'on n'est dans aucun des deux cas précédents, montrer d'abord que $\mu^*(A) > 0$: on remarquera pour cela pour que si U est un ensemble ouvert contenant A, il existe pour chaque $\iota \in I$ un ensemble ouvert U_ι contenant A_ι et tel que

$\prod_{\iota\in I} U_\iota \subset U$; on prouvera que U_ι contient le support de μ_ι pour tout $\iota\in I$ tel que $\mu_\iota(A_\iota)=1$, et on en conclura que $\prod_{\iota\in I} U_\iota$ est μ-mesurable et que $\mu(U) \geqslant \prod_{\iota\in I} \mu_\iota(A_\iota)$. Remarquer d'autre part que si A était mesurable, il contiendrait un ensemble compact K de mesure > 0, et que cela n'est possible que si $pr_\iota(K)$ contient le support de μ_ι sauf pour une famille dénombrable d'indices. En conclure finalement que A n'est pas mesurable).

11) Soit $(E_\iota)_{\iota\in I}$ une famille quelconque d'espaces compacts, μ_ι une mesure positive sur E_ι , de masse totale égale à 1, μ la mesure $\bigotimes_{\iota\in I} \mu_\iota$ sur $E = \prod_{\iota\in I} E_\iota$. Pour toute partition (J,J') de I en deux ensembles, on identifie E au produit $E_J \times E_{J'}$ et, pour tout $x\in E$, on pose $x_J = pr_J x$, de sorte que $x=(x_J,x_{J'})$. Soit f une fonction de puissance $p^{\text{ème}}$ $(1\leqslant p<+\infty)$ μ-intégrable, définie dans E ; on pose $f_J(x)=\int f(x_J,x_{J'})d\mu_{J'}$. Montrer que, suivant l'ensemble filtrant des parties <u>finies</u> J de I , f_J tend <u>en moyenne</u> d'ordre p vers f , et $f_{J'}$ tend <u>en moyenne</u> d'ordre p vers la fonction constante égale à $\int f\,d\mu$ (approcher f par une fonction continue ne dépendant que d'un nombre fini de variables).

En déduire que si un ensemble mesurable $A\subset E$ est tel que, pour tout $x\in A$, tout point $y\in E$, dont les coordonnées sont égales à celles de x sauf pour un nombre <u>fini</u> d'indices, appartient aussi à A , alors on a $\mu(A)=0$ ou $\mu(A)=1$.

12) Soit (E_n) une suite infinie d'espaces compacts, μ_n une mesure positive de masse totale égale à 1 sur E_n , μ la mesure produit $\bigotimes_{n=1}^{\infty} \mu_n$ sur $E = \prod_{n=1}^{\infty} E_n$.

a) Soit f une fonction $\geqslant 0$, intégrable dans E . Soit (J_n) une suite croissante de parties de $\mathbb{N}$, et soit $g=\sup_n f_{J_n}$; $h=\sup_n f_{J'_n}$ (notations de l'exerc.11). Pour tout $\alpha > 0$, soit A_α l'ensemble des

des points de E où $g(x) > \alpha$, B_α l'ensemble des points de E où $h(x) \geqslant \alpha$. Montrer que $\alpha.\mu(A_\alpha) \leqslant \int f\, d\mu$ et $\alpha.\mu(B_\alpha) \leqslant \int f\, d\mu$ (remarquer que A_α est la réunion des ensembles où au moins un des $f_{J_n}(x) > \alpha$, et exprimer cette réunion comme réunion dénombrable d'ensembles G_n deux à deux sans point commun et tels que $\alpha.\mu(G_n) \leqslant \int f.\varphi_{G_n}\, d\mu$).

b) On suppose que (J_n) est une suite croissante de parties finies de $\mathcal{N}$, dont la réunion est $\mathcal{N}$. Montrer que f_{J_n} tend presque partout vers f, et que $f_{J'_n}$ tend presque partout vers la constante $\int f\, d\mu$ dans E (pour tout $\varepsilon > 0$, considérer une fonction continue g ne dépendant que d'un nombre fini de variables et telle que $\int |f-g|\, d\mu \leqslant \varepsilon$, et appliquer a) à la fonction $|f-g|$).

13) Soit $(E_\iota)_{\iota \in I}$ une famille quelconque d'espaces compacts, μ_ι une mesure positive sur E_ι, de masse totale égale à 1, μ la mesure $\bigotimes_{\iota \in I} \mu_\iota$ sur $E = \prod_{\iota \in I} E_\iota$. Pour tout $\iota \in I$, soit f_ι une fonction $\geqslant 0$, définie dans E_ι, μ_ι-intégrable, et telle que $\int f_\iota\, d\mu_\iota \leqslant 1$; on pose $\mu'_\iota = f_\iota . \mu_\iota$, et $\mu' = \bigotimes_{\iota \in I} \mu'_\iota$ (chap. III, § 5, exerc.   ).

a) Pour toute partie finie J de I, on pose $f_J = \prod_{\iota \in J} f_\iota$, $g_J = \sqrt{f_J}$, $\mu''_J = \sqrt{\mu_J \mu'_J}$ (chap. V, § 2, n° 6), $\rho(\mu_J, \mu'_J) = \mu''_J(E_J) = \int g_J\, d\mu_J$. Montrer que, pour que les fonctions g_J convergent en moyenne quadratique vers une fonction de $\mathcal{L}^2(\mu)$, suivant l'ensemble ordonné filtrant des parties finies de I, il faut et il suffit que le produit des nombres $\rho(\mu_\iota, \mu'_\iota)$ soit convergent dans $\mathbf{R}_+^*$, c'est-à-dire > 0 (évaluer, pour deux parties finies J, L telles que $J \subset L$, la norme $N_2(g_J - g_L)$ au moyen des $\rho(\mu_\iota, \mu'_\iota)$). En déduire que les fonctions f_J convergent alors en moyenne vers une fonction $f \geqslant 0$ telle que $\mu' = f.\mu$.

b) Montrer que si le produit $\prod_\iota \rho(\mu_\iota, \mu'_\iota)$ est nul, les mesures μ et μ' sont étrangères (considérer l'ensemble A_J des points de E tels que $g_J(x) > 1$, et évaluer les mesures $\mu(A_J)$ et $\mu'(\complement A_J)$).

-

14) Les notations étant les mêmes que dans l'exerc.13, soit ν_ι une mesure positive sur E_ι, de masse totale égale à 1, et soit $\nu = \bigotimes_{\iota\in I} \nu_\iota$.

a) Montrer que si une des mesures ν_ι est étrangère à la mesure μ_ι de même indice, ν est étrangère à μ.

b) Pour tout $\iota \in I$, on pose $\nu_\iota = \mu'_\iota + \mu''_\iota$, où μ'_ι est de base μ_ι et μ''_ι est étrangère à μ_ι (chap.V, § 2,n°4) ; on suppose que $\mu'_\iota \neq 0$ pour tout $\iota \in I$. Montrer que pour que ν ne soit pas étrangère à μ, il faut et il suffit que $\mu''_\iota = 0$ sauf pour une infinité dénombrable d'indices, et que le produit $\mu' = \bigotimes_{\iota\in I} \mu'_\iota$ soit une mesure de base μ ; $\mu'' = \nu - \mu'$ est alors étrangère à μ. (Si $\mu''_\iota \neq 0$ pour une infinité non dénombrable d'indices, montrer qu'il existe un nombre α tel que $0 < \alpha < 1$ et que, pour une infinité dénombrable d'indices ι_n, on ait $\mu'_{\iota_n}(E_{\iota_n}) \leqslant \alpha$; montrer alors que μ est étrangère à ν en utilisant a); démontrer la seconde partie de la proposition en utilisant l'exerc.13).

15) a) Soient E et F deux espaces localement compacts, λ une mesure positive sur E, μ une mesure positive sur F. Soit f une fonction définie dans $E \times F$, à valeurs dans le dual G' d'un espace de Banach G, et faiblement intégrable pour la mesure $\lambda \otimes \mu$. Montrer que si, pour presque tout $x \in E$, la fonction $y \rightarrow f(x,y)$ est faiblement intégrable pour la mesure μ, alors la fonction $x \rightarrow \int f(x,y)d\mu(y)$ est faiblement intégrable pour la mesure λ, et on a

$$\iint f(x,y)d\lambda\, d\mu = \int d\lambda \int f(x,y)d\mu \quad .$$

b) On prend pour E et F l'intervalle $[0,1]$, pour λ et μ la mesure de Lebesgue, pour G=G' un espace de Hilbert admettant une base orthonormale rangée en une suite double (e_{mn}). On pose $u_m(x) = e_{mn}$ pour $(n-1).2^{-m} \leqslant x < n.2^{-m}$ et $1 \leqslant n \leqslant 2^m$; on pose $f(x,y) = 2^m u_m(x)$ pour $2^{-m} < y \leqslant 2^{-m+1}$, et enfin $f(x,0)=0$ et $f(1,y)=0$.

Montrer que $f(x,y)$ est faiblement intégrable pour $\lambda \otimes \mu$, mais que pour aucun $x \in E$, la fonction $y \to f(x,y)$ n'est faiblement intégrable pour μ.

§ 2. Image d'une mesure.

1. Image d'une mesure par une application mesurable.

Soient E et F deux espaces localement compacts, μ une mesure positive sur E, π une application μ-mesurable de E dans F ; pour toute fonction numérique continue f définie dans F, $f \circ \pi$ est μ-mesurable (chap.IV, § 5, th.2).

PROPOSITION 1.- *Afin que, pour toute fonction numérique f, continue dans F et à support compact, la fonction $f \circ \pi$ soit μ-intégrable, il faut et il suffit que, pour tout ensemble compact $K \subset F$, $\overset{-1}{\pi}(K)$ soit μ-intégrable.*

La condition est suffisante, car si S est le support de la fonction continue f dans F, $\overset{-1}{\pi}(S)$ est intégrable, donc on a $\int^{*}(|f \circ \pi|)d\mu \leqslant \|f\| \cdot \mu(\overset{-1}{\pi}(S))$, ce qui prouve que $f \circ \pi$ est intégrable (chap.IV, § 5, th.5).

La condition est nécessaire. En effet, pour tout ensemble compact $K \subset F$, $\overset{-1}{\pi}(K)$ est μ-mesurable (chap.IV, § 5, prop.) ; soit f une fonction numérique $\geqslant 0$, continue dans F et à support compact, égale à 1 dans K (chap.III, § 2, lemme 1) ; on a $\varphi_K \circ \pi \leqslant f \circ \pi$, et comme $f \circ \pi$ est intégrable, il en est de même de la fonction mesurable $\varphi_K \circ \pi$ (chap.IV, § 5, th.5), ce qui signifie que $\overset{-1}{\pi}(K)$ est intégrable.

La démonstration précédente montre en outre que l'on a $\left|\int (f \circ \pi)d\mu\right| \leqslant \mu(\overset{-1}{\pi}(S)) \cdot \|f\|$ pour toute fonction continue dont le support est contenu dans S. La forme linéaire $f \to \int (f \circ \pi)d\mu$ est donc une mesure positive sur F.

DÉFINITION 1.- Soit μ une mesure positive sur un espace localement compact E , et soit π une application μ-mesurable de E dans un espace localement compact F , telle que pour tout ensemble compact F , telle que pour tout ensemble compact $K \subset F$, $\overset{-1}{\pi}(K)$ soit μ-intégrable. On dit que la mesure $f \to \int (f \circ \pi) d\mu$ sur F est l'image par π de la mesure μ sur E , et on la note $\pi(\mu)$.

On notera que la condition imposée à l'application π dans cette définition est toujours vérifiée si pour tout ensemble compact $K \subset F$, $\overset{-1}{\pi}(K)$ est relativement compact ; il en est ainsi en particulier lorsque π est une application continue propre de E dans F (Top.gén., chap.I, 2^{e} éd., § 10,n^{o}9). La condition est remplie aussi lorsque π est une application mesurable quelconque, et μ une mesure bornée.

2. Intégration par rapport à l'image d'une mesure.

Dans tout ce n^{o} , μ désignera une mesure positive sur E , $\nu = \pi(\mu)$ l'image de μ par une application μ-mesurable π de E sur F , satisfaisant à la condition de la déf.1 .

PROPOSITION 2.- Pour qu'une partie relativement compacte B de F soit ν-intégrable, il faut et il suffit que $\overset{-1}{\pi}(B)$ soit μ-intégrable; on a alors

$$\nu(B) = \mu(\overset{-1}{\pi}(B)) . \tag{1}$$

Prouvons tout d'abord que pour tout ensemble ouvert relativement compact $U \subset F$, $\overset{-1}{\pi}(U)$ est μ-intégrable et $\nu(U)=\mu(\overset{-1}{\pi}(U))$. Comme $A = \overset{-1}{\pi}(U)$ est μ-mesurable (chap.IV, § 5,prop.   ) et contenu dans l'ensemble μ-intégrable $\overset{-1}{\pi}(\bar{U})$, il est lui-même μ-intégrable (chap.IV, § 5, th.5) ; pour tout $\varepsilon > 0$, il existe donc un ensemble compact $H \subset A$, tel que $\mu(A \cap \complement H) \leqslant \varepsilon$, et que la restriction de π à H soit continue ; il en résulte que $\pi(H)=K$ est un ensemble compact contenu dans U . On a par définition $\vartheta(U)=\sup\int f\,d\vartheta$, lorsque f parcourt l'ensemble des fonctions continues numériques telles que $0\leqslant f\leqslant \varphi_U$; pour une telle fonction, on a $f\circ\pi\leqslant\varphi_A$, donc $\vartheta(f)=\mu(f\circ\pi)\leqslant\mu(A)$. D'autre part, il existe une fonction continue g telle que $\varphi_K\leqslant g\leqslant\varphi_U$ (chap. III, § 2, lemme 1), d'où $\varphi_H\leqslant g\circ\pi$, et par suite $\vartheta(g)=\mu(g\circ\pi)\geqslant\mu(H)\geqslant\mu(A)-\varepsilon$; cela prouve que $\vartheta(U)=\mu(A)$.

On en conclut aussitôt que pour tout ensemble <u>compact</u> $K\subset F$, on a $\vartheta(K)=\mu(\overset{-1}{\pi}(K))$; en effet, si U est un voisinage ouvert relativement compact de K , on a $K=U\cap\complement(U\cap\complement K)$, et $U\cap\complement K$ est ouvert et relativement compact ; comme $\vartheta(K)=\vartheta(U)-\vartheta(U\cap\complement K)$, notre assertion est démontrée.

Il résulte de ces deux remarques que, si un ensemble relativement compact $B\subset F$ est ϑ-intégrable, $\overset{-1}{\pi}(B)$ est μ-intégrable et on a la relation (1). En effet, pour tout $\varepsilon>0$, il existe alors un ensemble compact $K\subset B$ et un ensemble ouvert relativement compact $U\supset B$ tels que $\vartheta(U)-\vartheta(K)\leqslant\varepsilon$; comme $\overset{-1}{\pi}(K)$ et $\overset{-1}{\pi}(U)$ sont intégrables pour μ , que $\overset{-1}{\pi}(K)\subset\overset{-1}{\pi}(B)\subset\overset{-1}{\pi}(U)$ et $\mu(\overset{-1}{\pi}(U))-\mu(\overset{-1}{\pi}(K))=\vartheta(U)-\vartheta(K)\leqslant\varepsilon$, on voit que $\overset{-1}{\pi}(B)$ est μ-intégrable ; d'ailleurs comme $\vartheta(B)$ et $\mu(\overset{-1}{\pi}(B))$ appartiennent tous deux à l'intervalle d'extrémités $\vartheta(K)$ et $\vartheta(U)$, ces deux nombres sont égaux.

Supposons enfin que $B\subset F$ soit relativement compact et que $\overset{-1}{\pi}(B)$ soit μ-intégrable. Tout revient à montrer que B est ϑ-intégrable. Soit U un ensemble ouvert relativement compact contenant B . Comme $\overset{-1}{\pi}(U)$ et $\overset{-1}{\pi}(B)$ sont intégrables, pour tout $\varepsilon>0$, il existe un ensemble compact $H_1\subset\overset{-1}{\pi}(B)$ et un ensemble compact $H_2\subset\overset{-1}{\pi}(U\cap\complement B)$ tels que les restrictions de π à H_1 et H_2 soient continues, et qu'on ait

$\mu(\overset{-1}{\pi}(U))-(\mu(H_1)+\mu(H_2)) \leqslant \varepsilon$. Les ensembles $K_1=\pi(H_1)$ et $K_2=\pi(H_2)$ sont alors compacts, on a $K_1 \subset B \subset U \cap \complement K_2$, et comme $\overset{-1}{\pi}(K_1) \supset H_1$ et $\overset{-1}{\pi}(K_2) \supset H_2$ et sont sans point commun, on a $\nu(U)-(\nu(K_1)+\nu(K_2)) \leqslant \varepsilon$, ce qui démontre que B est intégrable.

COROLLAIRE.- <u>Pour qu'un ensemble</u> $N \subset F$ <u>soit localement négligeable pour</u> $\nu=\pi(\mu)$, <u>il faut et il suffit que</u> $\overset{-1}{\pi}(N)$ <u>soit localement négligeable pour</u> μ.

En effet, supposons que N soit localement négligeable pour ν, et soit H une partie compacte de E ; il existe une suite (H_n) de parties compactes de H, deux à deux sans point commun, telles que la restriction de π à chacun des H_n soit continue et que le complémentaire de $\bigcup_n H_n$ par rapport à H soit μ-négligeable. Comme $\pi(H_n)$ est compact, $N \cap \pi(H_n)$ est ν-négligea-ble, donc (prop.2) $\overset{-1}{\pi}(N \cap \pi(H_n))$ est μ-négligeable ; à plus forte raison, $\overset{-1}{\pi}(N) \cap H_n \subset \overset{-1}{\pi}(N \cap \pi(H_n))$ est μ-négligeable, et par suite $\overset{-1}{\pi}(N) \cap H$ est μ-négligeable.

Inversement, supposons que $\overset{-1}{\pi}(N)$ soit localement négligeable pour μ, et soit K une partie compacte de F ; par hypothèse, $\overset{-1}{\pi}(K)$ est μ-intégrable, donc $\overset{-1}{\pi}(N \cap K) = \overset{-1}{\pi}(N) \cap \overset{-1}{\pi}(K)$ est intégrable et localement négligeable pour μ, et par suite μ-négligeable ; il en résulte (prop.2) que $N \cap K$ est ν-négligeable.

PROPOSITION 3.- <u>Soit</u> f <u>une application de</u> F <u>dans un espace topologique</u> G. <u>Pour que</u> f <u>soit mesurable pour</u> $\nu=\pi(\mu)$, <u>il faut et il suffti que</u> $f \circ \pi$ <u>soit</u> μ-<u>mesura-ble</u>.

Supposons f mesurable pour ν, et soit H une partie compacte de E ; pour tout $\varepsilon>0$, il existe une partie compacte $H_1 \subset H$ telle que $\mu(H \cap \complement H_1) \leqslant \varepsilon$ et que la restriction de π à H_1 soit continue ;

$K_1 = \pi(H_1)$ est alors une partie compacte de F et par hypothèse, il existe une partie compacte $K_2 \subset K_1$ telle que $\nu(K_1 \cap \complement K_2) \leqslant \varepsilon$ et que la restriction de f à K_2 soit continue. L'ensemble $\overset{-1}{\pi}(K_2) = H_2$ est μ-intégrable, et la restriction de $f \circ \pi$ à $H_1 \cap H_2$ est continue ; d'ailleurs, on a $\mu(H_1) - \mu(H_1 \cap H_2) \leqslant \mu(\overset{-1}{\pi}(K_1)) - \mu(\overset{-1}{\pi}(K_2)) \leqslant \varepsilon$; il existe un ensemble compact $H_3 \subset H_1 \cap H_2$ tel que $\mu(H_1 \cap H_2) - \mu(H_3) \leqslant \varepsilon$, donc on a $\mu(H \cap \complement H_3) \leqslant 3\varepsilon$, et la restriction de $f \circ \pi$ à H_3 est continue, ce qui prouve que $f \circ \pi$ est μ-mesurable.

Réciproquement, supposons que $f \circ \pi$ soit μ-mesurable, et soit K un ensemble compact quelconque dans F. Comme $H = \overset{-1}{\pi}(K)$ est μ-intégrable, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble compact $H_1 \subset H$ tel que $\mu(H) - \mu(H_1) \leqslant \varepsilon$ et que les restrictions de π et de $f \circ \pi$ à H_1 soient toutes deux continues. Si $K_1 = \pi(H_1)$, K_1 est donc compact et comme $H_1 \subset \overset{-1}{\pi}(K_1) \subset H = \overset{-1}{\pi}(K)$, on a $\nu(K) - \nu(K_1) \leqslant \varepsilon$; comme K_1 peut être identifié à l'espace quotient de H_1 par la relation $\pi(x) = \pi(y)$, et π à l'application canonique de H_1 sur cet espace quotient (<u>Top. gén.</u>, chap. I, § 10, 2^e éd., cor. 1 de la prop. 8), on voit que la restriction de f à K_1 est continue, ce qui prouve que f est ν-mesurable.

COROLLAIRE.- <u>Pour qu'une partie A de F soit ν-mesurable, il faut et il suffit que $\overset{-1}{\pi}(A)$ soit μ-mesurable.</u>

Il suffit d'appliquer la prop. 3 à la fonction caractéristique de A.

THÉORÈME 1.- <u>Soit f une fonction définie dans F, à valeurs dans un espace de Banach G, et à support compact. Pour que f soit intégrable pour $\nu = \pi(\mu)$, il faut et il suffit que $f \circ \pi$ soit μ-intégrable, et on a</u>

$$\int f \, d\nu = \int (f \circ \pi) \, d\mu \quad . \tag{2}$$

Supposons d'abord que f soit <u>bornée</u>, soit $|f(y)| \leqslant a$ dans le support compact S de f. Alors, on a $|f(\pi(x))| \leqslant a$ dans l'ensemble intégrable $\overset{-1}{\pi}(S)$; pour que f (resp. $f \circ \pi$) soit intégrable, il faut et il suffit que f (resp. $f \circ \pi$) soit mesurable, puisque $\nu^*(|f|) \leqslant a . \nu(S)$ et $\mu^*(|f \circ \pi|) \leqslant a . \mu(\overset{-1}{\pi}(S))$; on voit donc que pour que f soit intégrable, il faut et il suffit que $f \circ \pi$ le soit. En outre, la formule (2) est vraie lorsque f est combinaison linéaire de fonctions de $\mathcal{K}(F)$ à coefficients dans G ; en général, il existe une suite (f_n) de telles fonctions, à support contenu dans un voisinage compact K de S, qui convergent en moyenne vers f et convergent vers $f(y)$ en tout point y du complémentaire d'une partie ν-négligeable A de K. Les fonctions $f_n \circ \pi$ forment donc une suite de Cauchy dans l'espace $\mathcal{L}^1(\mu)$; elles tendent vers $f(\pi(x))$ en tout point du complémentaire de $\overset{-1}{\pi}(A)$, qui est μ-négligeable (prop. 2), donc elles convergent en moyenne vers $f \circ \pi$, ce qui démontre dans ce cas la formule (2).

Soit maintenant g une fonction numérique $\geqslant 0$, définie dans F et à support compact ; g est l'enveloppe supérieure de la suite croissante des fonctions $g_n = \inf(g, n)$, et $g \circ \pi$ l'enveloppe supérieure de la suite croissante des fonctions $g_n \circ \pi$. Si g est intégrable, il en est de même des g_n, donc des $g_n \circ \pi$ d'après ce qui précède, et comme $\mu(g_n \circ \pi) = \nu(g_n)$, $g \circ \pi$ est intégrable (chap. IV, § 4, th. 4) ; on montre de même que si $g \circ \pi$ est intégrable, il en est de même de g.

Enfin, soit f une fonction définie dans F, à support compact et à valeurs dans G ; comme $|f \circ \pi| = |f| \circ \pi$, il résulte de ce qui précède et de la prop. 3 que f et $f \circ \pi$ sont simultanément intégrables ; la formule (2) se démontre comme lorsque f est bornée.

35

COROLLAIRE 1.- Soit F un espace localement compact dénombrable à l'infini. Pour qu'une fonction f , définie dans F , à valeurs dans un espace de Banach G , soit intégrable pour ν , il faut et il suffit que $f\circ\pi$ soit μ-intégrable, et on a alors la relation (2) .

Soit en effet (K_n) une suite croissante d'ensembles compacts dans F , de réunion F ; posons $A_n = K_n \cap \complement K_{n-1}$, et $f_n = f\varphi_{A_n}$. Si f est intégrable, chacune des fonctions f_n l'est, et la série de terme général $\int |f_n|\, d\nu$ est convergente et a pour somme $\int |f|\, d\nu$. En vertu du th.1, chacune des fonctions $f_n\circ\pi$ est μ-intégrable et on a $\int |f_n\circ\pi|\, d\mu = \int |f_n|\, d\nu$. Comme $f\circ\pi = \sum_{n=1}^{\infty}(f_n\circ\pi)$, la fonction $f\circ\pi$ est intégrable (chap.IV, §4, prop.   ). et on a $\int (f\circ\pi)\, d\mu = \sum_n \int (f_n\circ\pi)\, d\mu = \sum_n \int f_n\, d\mu = \int f\, d\nu$. La réciproque se démontre de la même manière.

On notera que si F n'est pas dénombrable à l'infini, f peut être ν-intégrable sans que $f\circ\pi$ soit μ-intégrable, et inversement $f\circ\pi$ peut être μ-intégrable sans que f soit ν-intégrable (exerc; 4) .

COROLLAIRE 2.- Soit F un espace localement compact dénombrable à l'infini . Pour qu'une partie N de F soit ν-négligeable, il faut et il suffit que $\overset{-1}{\pi}(N)$ soit μ-négligeable.

Il suffit d'appliquer le cor.1 à la fonction caractéristique de N .

COROLLAIRE 3.- Soit F un espace localement compact dénombrable à l'infini, f une application de F dans le dual G' d'un espace de Banach G . Pour que f soit faiblement intégrable pour ν , il faut et il suffit que $f\circ\pi$ soit faiblement intégrable pour μ .

Il suffit d'appliquer le cor.1 à chacune des fonctions $\langle z, f\rangle$, où z est un vecteur quelconque de G (cf.chap.V, §4,th.1) .

3. Propriétés de l'image d'une mesure.

PROPOSITION 4.- *Soient* E,F,G *trois espaces localement compacts,* μ *une mesure sur* E , π *une application* μ*-mesurable de* E *dans* F *telle que* $\overset{-1}{\pi}(K)$ *soit* μ*-intégrable pour toute partie compacte* K *de* F . *Soit* $\mu' = \pi(\mu)$ *et soit* π' *une application* μ'*-mesurable de* F *dans* G *telle que, pour toute partie compacte* H *de* G , $\overset{-1}{\pi'}(H)$ *soit* μ'*-intégrable. Alors* $\pi'' = \pi' \circ \pi$ *est une application* μ*-mesurable de* E *dans* G ; *si en outre* F *est dénombrable à l'infini, pour toute partie compacte* H *de* G , $\overset{-1}{\pi''}(H)$ *est* μ*-intégrable, et on a*

$$\pi''(\mu) = \pi'(\mu') = \pi'(\pi(\mu)) .$$

En effet, soit C une partie compacte de E . Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie compacte C_1 de C telle que $\mu(C \cap \complement C_1) < \varepsilon$ et que la restriction de π à C_1 soit continue. L'ensemble $K_1 = \pi(C_1)$ est donc compact dans F ; il existe par suite une partie compacte $K_2 \subset K_1$ telle que $\mu'(K_1 \cap \complement K_2) < \varepsilon$ et que la restriction de π' à K_2 soit continue. Si $A_2 = C_1 \cap \overset{-1}{\pi}(K_2)$, on a évidemment (prop.2) $\mu(C_1 \cap \complement A_2) < \varepsilon$, et par suite il existe un ensemble compact $C_2 \subset A_2$ tel que $\mu(C_1 \cap \complement C_2) \leq \varepsilon$. Or, il est clair que la restriction de π'' à C_2 est continue et on a $\mu(C \cap \complement C_2) \leq 2\varepsilon$, donc π'' est μ-mesurable. Pour une partie compacte H de G , $\overset{-1}{\pi'}(H)$ est μ'-intégrable, donc si F est dénombrable à l'infini, $\overset{-1}{\pi''}(H) = \overset{-1}{\pi}(\overset{-1}{\pi'}(H))$ est μ-intégrable (cor.1 du th.1). Alors, pour toute fonction f numérique continue et à support compact dans G , $f \circ \pi'$ est μ'-intégrable, donc (th.1), $f \circ \pi'' = (f \circ \pi') \circ \pi$ est μ-intégrable, et on a en posant $\mu'' = \pi'(\mu')$

$$\int f \, d\mu'' = \int (f \circ \pi') d\mu' = \int ((f \circ \pi') \circ \pi) d\mu = \int (f \circ \pi'') d\mu$$; ce qui achève la démonstration.

PROPOSITION 5.- *Soient* E *et* F *deux espaces localement compacts,* μ *une mesure positive sur* E *,* π *une application mesurable et biunivoque de* E *sur* F *, telle que* $\overset{-1}{\pi}(K)$ *soit intégrable pour tout ensemble compact* $K \subset F$ *. Soit* $\nu = \pi(\mu)$ *; l'application réciproque* π' *de* π *est* ν*-mesurable ; en outre, si* F *est dénombrable à l'infini,* $\overset{-1}{\pi'}(H) = \pi(H)$ *est* ν*-intégrable pour tout ensemble compact* $H \subset E$ *, et on a* $\pi'(\nu) = \mu$.

Soit K une partie compacte de F ; par hypothèse $\overset{-1}{\pi}(K) = A$ est μ-intégrable ; donc pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une partie compacte $H_1 \subset A$ telle que $\mu(A \cap \complement H_1) \leqslant \varepsilon$ et que la restriction de π à H_1 soit continue ; $K_1 = \pi(H_1)$ est donc compact, et comme $H_1 = \overset{-1}{\pi}(K_1)$, on a $\nu(K \cap \complement K_1) \leqslant \varepsilon$; d'autre part, la restriction de π à H_1 étant continue et biunivoque, est un homéomorphisme de H_1 sur K_1 , ce qui prouve que la restriction de π' à K_1 est continue, autrement dit que π' est ν-mesurable.

Si F est dénombrable à l'infini, pour toute partie compacte H de E , $\pi(H)$ est ν-intégrable d'après le cor. du th.1, et on a $\nu(\pi(H)) = \mu(H)$; donc $\pi'(\nu) = \mu$.

Les conclusions des prop.4 et 5 qui utilisent l'hypothèse que F est dénombrable à l'infini ne sont plus exactes sans cette hypothèse (exerc. 4) .

Supposons que l'application π de E dans un espace localement compact F satisfasse aux conditions de la déf.1. Si g est une fonction numérique $\geqslant 0$ définie dans F , et localement intégrable pour $\nu = \pi(\mu)$, la fonction $g \circ \pi$ n'est pas nécessairement localement intégrable pour μ , même si E et F sont dénombrables à l'infini (exerc. 5) .

Mais si on suppose que $g \circ \pi$ est localement intégrable pour μ , alors l'image par π de la mesure $(g \circ \pi).\mu$ est la mesure $g.\nu$. En effet, pour toute fonction numérique f continue et à support compact dans F , gf est ν-intégrable et à support compact, donc $(g \circ \pi)(f \circ \pi)$ est μ-intégrable (th.1) et on a $\int gf\, d\nu = \int (g \circ \pi)(f \circ \pi)\, d\mu$, ce qui établit notre assertion.

Si maintenant h est une fonction $\geqslant 0$ localement intégrable pour μ , π est mesurable pour $h.\mu$, mais la mesure $\pi(h.\mu)$ n'est pas nécessairement définie, car $\overset{-1}{\pi}(K)$ n'est pas nécessairement intégrable pour $h.\mu$ pour toute partie compacte K de F . Toutefois, si cette mesure est définie, alors elle est de base ν . En effet, soit N un ensemble localement négligeable pour ν ; pour toute partie compacte K de F , $K \cap N$ est ν-négligeable, donc (prop.2) $\overset{-1}{\pi}(K \cap N)$ est μ-négligeable ; cet ensemble est donc localement négligeable pour $h.\mu$, mais comme il est contenu dans $\overset{-1}{\pi}(K)$ qui est intégrable pour $h.\mu$ par hypothèse, on voit que $\overset{-1}{\pi}(K \cap N)$ est négligeable pour $h.\mu$, ce qui prouve (prop.2) que $K \cap N$ est négligeable pour $\pi(h.\mu)$. Au § 3, nous verrons comment dans certains cas on peut déterminer à partir de h la fonction g localement intégrable pour ν et telle que $\pi(h.\mu) = g.\pi(\mu)$.

4. Application : mesures de Stieltjes ; changement de variables dans l'intégrale de Lebesgue.

Soit I un intervalle contenu dans $\mathbb{R}$, et soit ψ une fonction numérique croissante contenue dans I . Désignons par μ_I la mesure induite sur I par la mesure de Lebesgue μ , et cherchons à quelle condition l'image par ψ de la mesure μ_I est définie. Comme ψ , en tant que fonction réglée, est μ_I-mesurable, il suffit évidemment que pour tout intervalle compact $K_n = [-n,n]$, $\overset{-1}{\psi}(K_n)$, qui est un intervalle dans $\mathbb{R}$, soit borné .

Autrement dit, si a est l'origine et b l'extrémité de I , on doit avoir les conditions suivantes :

1° ou bien a est fini, ou bien $a=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \psi(x)=-\infty$;

2° ou bien b est fini, ou bien $b=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \psi(x)=+\infty$.

Soit alors ϑ l'image $\psi(\mu_I)$. Pour tout $y\in\mathbb{R}$, désignons par $\varphi(y)$ la borne supérieure des $x\in I$ tels que $\psi(x)\leqslant y$; les conditions précédentes prouvent que cette borne est finie et φ est une fonction croissante dans $\mathbb{R}$; en outre, l'image réciproque par ψ de l'intervalle $]u,v]$ semi-ouvert à gauche dans $\mathbb{R}$ est un intervalle (ouvert, fermé ou semi-ouvert) d'origine $\varphi(u)$ et d'extrémité $\varphi(v)$; on a donc

(3) $$\vartheta(]u,v]) = \varphi(v)-\varphi(u) .$$

Inversement, soit ϑ une mesure positive quelconque sur $\mathbb{R}$; il existe évidemment une fonction croissante φ satisfaisant à (3), et définie à une constante additive près ; il suffit par exemple de prendre $\varphi(u)=\vartheta([0,u])$ pour $u>0$, $\varphi(0)=\vartheta(\{0\})$ et $\varphi(u)=-\vartheta(]u,0[)$ pour $u<0$. Il est clair en outre que φ est <u>continue à droite</u> en tout point de $\mathbb{R}$, $]u,v]$ étant l'intersection des intervalles $]u,v+\frac{1}{n}]$. Désignons alors par $\psi(x)$, la borne inférieure des y tels que $\varphi(y)\geqslant x$, en tous les points x tels qu'il existe deux nombres y_1,y_2 pour lesquels $\varphi(y_1)\leqslant x\leqslant\varphi(y_2)$. Ces nombres x forment évidemment un intervalle I, et ψ est une fonction croissante dans I ; on vérifie alors aussitôt que ϑ est l'image par ψ de la mesure induite sur I par la mesure de Lebesgue (~~xxxx~~ les relations $x\leqslant\varphi(y)$ et $y\geqslant\psi(x)$ étant équivalentes). Ce procédé détermine d'ailleurs une fonction croissante ψ , et par suite une mesure positive ϑ sur $\mathbb{R}$, à partir d'une fonction croissante et continue à droite <u>quelconque</u> φ définie dans $\mathbb{R}$, deux fonctions qui ne diffèrent que par une constante donnant la même mesure ϑ.

En d'autres termes, il y a correspondance biunivoque entre mesures positives sur $\mathbb{R}$ et fonctions croissantes et continues à droite dans $\mathbb{R}$ (définies à une constante près) ; les mesures sur $\mathbb{R}$ sont dites <u>mesures de Stieltjes</u>, et si une telle mesure ν vérifiée (3), on dit qu'elle est <u>associée</u> à la fonction croissante et continue à droite φ . L'intégrale d'une fonction f par rapport à ν s'écrit alors aussi $\int f(y)d\varphi(y)$.

Ce qui précède, joint au cor. du th.1, montre d'ailleurs que pour que f soit ν-intégrable, il faut et il suffit que $f(\psi(x))$ soit intégrable pour la mesure de Lebesgue (dans I), et on a

(4) $$\int f(y)d\varphi(y) = \int_I f(\psi(x))dx \;.$$

D'après (3), comme tout ensemble réduit à un point y est intersection des intervalles $\left]y-\frac{1}{n}\,,\,y\right]$, on a $\nu(\{y\})=\varphi(y)-\varphi(y-)$; pour que la mesure ν soit <u>non atomique</u> (chap.V, §2,n°4), il faut et il suffit que la fonction φ soit <u>continue</u> dans $\mathbb{R}$.

Si la mesure ν est <u>de base</u> μ , c'est-à-dire si $d\nu(y)=\theta(y)dy$, où θ est une fonction $\geqslant 0$ (bien déterminée à un ensemble de mesure nulle près) localement intégrable pour la mesure de Lebesgue, on a d'après (3)

(5) $$\varphi(v)-\varphi(u) = \int_u^v \theta(y)dy$$

et la formule (4) s'écrit

(6) $$\int f(y)\theta(y)dy = \int_I f(\psi(x))dx \;.$$

Inversement, si la fonction croissante φ satisfait à la relation (5), où θ est localement intégrable pour la mesure de Lebesgue, la mesure de Stieltjes ν associée à θ coïncide avec la mesure $\theta.\mu$ pour tout intervalle $]u,v]$, et par suite ces deux mesures sont égales.

Si la fonction φ satisfait à (5), et si en outre il n'existe aucun intervalle ouvert $]u,v[$ dans lequel θ soit nulle presque partout (ce qui ne signifie nullement que μ et $\nu = \theta.\mu$ soient équivalentes), il résulte de (5) que la fonction φ, qui est continue, est __strictement croissante__, et par suite est un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ sur I ; la fonction ψ est alors l'homéomorphisme réciproque de φ, et la formule (6) s'écrit, en posant $g(x)=f(\psi(x))$

(7) $$\int g(\varphi(y))\theta(y)dy = \int_I g(x)dx$$

(__formule du changement de variables dans l'intégrale de Lebesgue__).

D'ailleurs, si on applique la formule (7) à la fonction $g\varphi_J$, où J est un intervalle quelconque d'extrémités α et β dans $\mathbb{R}$, il vient

(8) $$\int_J g(\varphi(y))\theta(y)dy = \int_{\varphi(J)} g(x)dx$$

qui redonne inversement (7) lorsque $J=\mathbb{R}$.

Avec les notations introduites précédemment, cette formule s'écrit aussi

(9) $$\int_\alpha^\beta g(\varphi(y))\theta(y)dy = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} g(x)dx$$

et nous venons de la démontrer lorsque g est intégrable (pour la mesure de Lebesgue) dans $\varphi(J)$ et φ une fonction continue __strictement croissante__ dans J et satisfaisant à (5) pour une fonction localement intégrable $\theta \geqslant 0$. En réalité, il suffit de supposer que θ est __intégrable__ dans J (mais __de signe quelconque__) de sorte que $\varphi(\alpha)$ et $\varphi(\beta)$ aient un sens, et que g est telle que la fonction $g(\varphi(y))\theta(y)$ soit __intégrable__ dans J (pour la mesure de Lebesgue).

En effet, considérons d'abord le cas où g est la fonction caractéristique d'un __intervalle ouvert__ $]a,b[$: l'image réciproque par φ de cet intervalle est un ensemble ouvert $U \subset J$; soient $U_n =]\alpha_n, \beta_n[$ les composantes connexes de U ; $\varphi(\alpha_n)$ et $\varphi(\beta_n)$ sont nécessairement égaux à a ou à b, à moins que $\alpha_n=\alpha$ ou $\beta_n=\beta$. Montrons qu'il ne peut y avoir qu'un nombre __fini__ d'indices n tels que $\varphi(\alpha_n)\neq\varphi(\beta_n)$;

dans le cas contraire, on aurait $\left|\int_{\alpha_n}^{\beta_n} \theta(y)dy\right| = b-a$, et a fortiori $\int_{\alpha_n}^{\beta_n}|\theta(y)|dy \geqslant b-a$ pour une infinité de valeurs de n , ce qui est contraire à l'hypothèse que $g(\varphi(y))\theta(y)$ est intégrable dans J .

Rangeons alors les U_n pour lesquelles $\varphi(\alpha_n)\neq\varphi(\beta_n)$ par ordre croissant de leurs origines ; on a nécessairement $\varphi(\alpha_{n+1})=\varphi(\beta_n)$. En effet, si on avait par exemple $\varphi(\beta_n)=a$ et $\varphi(\alpha_{n+1})=b$, soit γ la borne supérieure des y tels que $\beta_n\leqslant y\leqslant\alpha_{n+1}$ et que $\varphi(y)\leqslant a$; on aurait $\varphi(\gamma)=a$ et $\varphi(y)>a$ pour $\gamma<y\leqslant\alpha_{n+1}$; si alors δ est la borne ~~xxxxxx~~ inférieure des y tels que $\gamma<y\leqslant\alpha_{n+1}$ et que $\varphi(y)\geqslant b$, on aurait $\varphi(\delta)=b$ et $a<\varphi(y)<b$ pour $\gamma<y<\delta$; U_{n+1} ne serait pas par suite la composante connexe consécutive à U_n . Or, il est clair que $\int_{\alpha_n}^{\beta_n}\theta(y)dy = \varphi(\beta_n)-\varphi(\alpha_n)$; on voit donc que $\int_{\alpha}^{\beta}\varphi_U(y)\theta(y)dy = \varphi(\beta_m)-\varphi(\alpha_1)$, en désignant par U_1 et U_m les composantes connexes extrêmes parmi les U_n . Si par exemple $\varphi(\alpha)\leqslant a<b\leqslant\varphi(\beta)$, on a nécessairement $\varphi(\alpha_1)=a$ et $\varphi(\beta_m)=b$; sans quoi on verrait comme ci-dessus que U_1 ne serait pas la première (ou U_m la dernière) des composantes connexes U_n ; on examine de même tous les autres cas possibles (9 en tout), et on obtient ainsi la formule (9) pour le cas considéré.

On passe de là au cas où g est $\geqslant 0$ et semi-continue inférieurement, en remarquant qu'une telle fonction est enveloppe supérieure d'une suite croissante de combinaisons linéaires de fonctions caractéristiques d'ensembles ouverts. Si ensuite $g\geqslant 0$ est <u>bornée</u> et mesurable, elle est limite presque partout d'une suite décroissante de fonctions semi-continues inférieurement et bornées, d'où encore la proposition dans ce cas ; si $g\geqslant 0$ est mesurable et telle que $g(\varphi(y))\theta(y)$ soit intégrable, g est l'enveloppe supérieure de la suite croissante des fonctions $\inf(g,n)$ et on passe encore à la limite dans ce cas. Abordant enfin le cas où g prend ses valeurs dans un espace de Banach F, on remarquera que g est limite presque partout d'une suite (g_n) de combinaisons linéaires à coefficients dans F de fonctions intégrables et bornées telles que $|g_n| \leqslant |g|$ pour tout n ; $|g(\varphi(y))|.|\theta(y)|$ est intégrable, on peut encore passer à la limite en vertu du th. de Lebesgue.

On notera qu'il ne suffit pas que θ soit intégrable dans J et g intégrable dans $\varphi(J)$ pour que $g(\varphi(y))\theta(y)$ soit intégrable dans J (exerc. 6).

On peut aisément étendre la validité de la formule (9) en supposant seulement que l'une des deux fonctions θ^+, θ^- est intégrable dans J, θ étant toujours supposé en outre localement intégrable, et g telle que $g(\varphi(y))\theta(y)$ soit intégrable dans J.

<u>Exercices</u>.- 1) Soient E et F deux espaces localement compacts, μ une mesure positive sur E, π une application μ-mesurable de E dans F.

a) Soit u une fonction $\geqslant 0$ semi-continue inférieurement dans E, et soit H une partie compacte de E telle que la restriction de π à H soit continue ; pour tout $x \in H$, soit $u_0(x)$ la borne inférieure des $u(y)$ pour les $y \in H$ tels que $\pi(x)=\pi(y)$. Montrer que u_0 est semi-continue inférieurement dans H, et est de la forme $g_0 \circ \pi$, où g_0 est semi-continue inférieurement dans $\pi(H)$.

b) On suppose que $\overset{-1}{\pi}(K)$ est μ-intégrable pour toute partie compacte K de F, et on pose $\nu = \pi(\mu)$. Montrer que pour toute fonction numérique $f \geqslant 0$, à support compact dans F, on a

$\nu^*(f)=\mu^*(f\circ\pi)$ (le démontrer d'abord pour une fonction bornée, en utilisant a) ; puis passer au cas général).

c) Montrer que si la mesure μ est <u>bornée</u>, on a $\nu^*(f) = \mu^*(f\circ\pi)$ pour toute fonction $f \geqslant 0$ dans F (même méthode que dans b), en démontrant d'abord la relation pour le cas où f est semi-continue inférieurement et bornée). Dans ce cas, pour qu'une fonction g définie dans F et à valeurs dans un espace de Banach soit intégrable pour ν, il faut et il suffit que $g\circ\pi$ soit μ-intégrable, et on a $\int g\, d\nu = \int (g\circ\pi)d\mu$.

2) Soient E et F deux espaces localement compacts, μ une mesure positive sur E, π une application <u>continue</u> de E dans F, telle que $\overset{-1}{\pi}(K)$ soit μ-intégrable pour toute partie compacte K de F ; on pose $\nu = \pi(\mu)$.

a) Montrer que pour toute fonction $g \geqslant 0$, semi-continue inférieurement dans F, $g\circ\pi$ est semi-continue inférieurement dans E et on a $\nu^*(g) = \mu^*(g\circ\pi)$.

b) Déduire de a) que si f est une fonction ν-intégrable à valeurs dans un espace de Banach, $f\circ\pi$ est μ-intégrable, et on a $\int f\, d\nu = \int (f\circ\pi)d\mu$.

3) Soient E et F deux espaces localement compacts, μ une mesure positive sur E, π une application continue <u>propre</u> de E dans F ; on pose $\nu = \pi(\mu)$.

a) Montrer que pour toute fonction $f \geqslant 0$ définie dans F, on a $\nu^*(f)=\mu^*(f\circ\pi)$ (même méthode que dans l'exerc. 1b)).

b) En déduire que si f est une application de F dans un espace de Banach, pour que f soit ν-intégrable, il faut et il suffit que $f\circ\pi$ soit μ-intégrable, et on a alors $\int f\, d\nu = \int (f\circ\pi)d\mu$.

4) Soient E et μ l'espace localement compact (non dénombrable à l'infini) et la mesure définis dans l'exerc. du chap. IV, §1 . Soit $\mathcal{C}$ la topologie de E .

a) Soit $\mathcal{C}_0$ la topologie discrète sur E , et E_0 l'espace localement compact obtenu en munissant E de $\mathcal{C}_0$. Soit π_0 l'application identique de E sur E_0 , π'_0 l'application réciproque (qui est continue) ; les images $\nu = \pi_0(\mu)$ et $\mu = \pi'_0(\nu)$ sont définies, mais l'ensemble D qui est ouvert dans E_0 , est tel que $\mu^*(D) = +\infty$ et $\nu^*(D)=0$ (cf. exerc. 2) .

b) Soit $\mathcal{C}_1$ la topologie sur E où tout point $x \notin D$ est un ensemble ouvert, et où la topologie sur D est la topologie induite par celle de $\mathbb{R}^2$; soit E_1 l'espace localement compact obtenu en munissant E de $\mathcal{C}_1$. Soit π_1 l'application identique de E sur E_1, et π'_1 l'application réciproque. Soit enfin λ la mesure définie sur E_1 par la masse $\mu(\{x\})$ placée en tout point $x \notin D$. Montrer que π'_1 est λ-mesurable, que pour toute partie compacte K de E , $\overset{-1}{\pi'_1}(K)$ est λ-intégrable et que $\mu = \pi'_1(\lambda)$, mais que $\overset{-1}{\pi_1}(H)$ n'est pas μ-intégrable pour toute partie compacte H de E_1 .

c) Soit π_2 l'application identique de E_0 sur E_1 , π'_2 l'application réciproque ; montrer que π_2 est ν-mesurable et qu'on a $\lambda = \pi_2(\nu)$, bien que l'image de μ par $\pi_1 = \pi_2 \circ \pi_0$ ne soit pas définie.

5) Soit E l'espace compact formé des points 0 et $1/n$ $(n \geqslant 1)$ dans $\mathbb{R}$, et soit μ la mesure sur E définie par la masse 2^{-n} placée en chacun des points $1/n$. Soit E_0 l'espace E muni de la topologie discrète, et soit π l'application identique de E sur E_0 , π' l'application réciproque . Montrer que π est μ-mesurable, et donner un exemple de fonction $f \geqslant 0$, définie dans E_0 , localement intégrable pour $\nu = \pi(\mu)$, mais telle que $f \circ \pi$ ne soit pas intégrable pour μ.

6) Dans l'intervalle $J =]0,1]$ de $\mathbb{R}$, on pose $\theta(y) = \sqrt{n}$ pour $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) < y \leqslant \frac{1}{n}$, $\theta(y) = -\sqrt{n}$ pour $\frac{1}{n+1} < y \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right)$. Soit $\varphi(y) = \int_0^y \theta(z)dz$; montrer que la fonction $f(x) = 1/\sqrt{|x|}$ qui est intégrable dans $\mathbb{R}$ (donc dans $\varphi(J)$) est telle que $f(\varphi(y))\theta(y)$ ne soit pas intégrable dans J.

7) Soient u et v deux fonctions numériques croissantes et continues à droite dans $\mathbb{R}$ et telles que $u(0-)=v(0-)=0$. Soit w la fonction croissante et continue à droite dans $\mathbb{R}$, définie par $w(t)=u(t)v(t)$ pour $t \geqslant 0$, $w(t)=-u(t)v(t)$ pour $t < 0$; soient λ, μ, ν les mesures de Stieltjes associées à u, v, w respectivement.

A toute fonction f définie dans $\mathbb{R}$, à valeurs dans un espace de Banach F, on fait correspondre la fonction $\bar{f}(x,y)$ définie dans $\mathbb{R}^2$ par les conditions : $\bar{f}(x,y) = f(x)$ si $y < x$, $\bar{f}(x,y) = f(y)$ si $y \geqslant x$; montrer que, pour que f soit intégrable pour la mesure ν, il faut et il suffit que $\bar{f}$ soit intégrable pour la mesure produit $\lambda \otimes \mu$, et qu'on a alors $\int f\, d\nu = \iint \bar{f}\, d\lambda\, d\mu$ (le démontrer d'abord pour les fonctions caractéristiques d'intervalles). En déduire la formule

$$\int f(x)dw(x) = \int f(x)v(x-)du(x) + \int f(x)u(x+)dv(x) .$$

En particulier, montrer que si u et v sont <u>continues</u> dans $\mathbb{R}$, on a la <u>formule d'intégration par parties</u>

$$\int_a^b u(x)dv(x) = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b v(x)du(x) .$$

§ 3. Décomposition des mesures. Mesure quotient.

Sauf mention expresse du contraire, tous les espaces localement compacts considérés dans ce paragraphe sont supposés polonisables (et a fortiori dénombrables à l'infini).

1. Décomposition d'une mesure bornée relative à une application mesurable

THÉORÈME 1. Soient E et B deux espaces localement compacts polonisables, μ une mesure positive bornée sur E, π une application μ-mesurable de E dans B, $\nu = \pi(\mu)$ l'image de μ par π (§ 2, n°1). Il existe alors une application $t \to \lambda_t$ de B dans l'espace $\mathcal{M}_+(E)$ des mesures positives sur E, ayant les propriétés suivantes :

1° $\lambda_t = 0$ pour $t \notin \pi(E)$;

2° pour tout $t \in \pi(E)$, $\|\lambda_t\| = 1$ et λ_t est concentrée sur l'ensemble $\overset{-1}{\pi}(t)$;

3° la mesure μ est composée des mesures λ_t par rapport à ν (§ 1).

En outre, si $t \to \lambda'_t$ est une seconde application de B dans $\mathcal{M}_+(E)$ ayant les propriétés précédentes, on a $\lambda'_t = \lambda_t$ pour presque tout $t \in B$ (pour la mesure ν).

On peut se borner au cas où E et B sont compacts et métrisables ; en effet, dans le cas général, si E' (resp. B') désigne l'espace compact et métrisable obtenu par adjonction à E (resp. B) d'un point à l'infini ω (resp. ω_0), on sait qu'on peut prolonger la mesure bornée μ d'une seule manière en une mesure positive sur E', telle que $\mu(\{\omega\}) = 0$ (chap. V, §). On prolonge alors π à E' en lui donnant la valeur ω_0 au point ω ; on vérifie aussitôt que l'image par π de la mesure μ prolongée à E' est la mesure obtenue en prolongeant ν de la même manière à B'. Une fois le théorème démontré pour E' et B', il suffit de restreindre l'application $t \longrightarrow \lambda_t$ à B pour obtenir le théorème pour E et B.

Soit f une fonction numérique continue dans B ; la fonction $f\circ\pi$ est μ-intégrable, et on a $\int(f\circ\pi)d\mu=\int f\,d\nu$. Associons à f la mesure (réelle) m_f sur E définie par

(1) $$m_f=(f\circ\pi).\mu \quad .$$

L'application $f\to m_f$ est une application linéaire de $\mathcal{C}(B)$ dans le <u>dual</u> $\mathcal{M}(E)$ de l'espace de Banach $\mathcal{C}(E)$; en outre, on a (chap.V, §1, prop.7)

(2) $$\|m_f\|=|m_f|(1)=\int|f\circ\pi|\,d\mu=\nu(|f|) \quad .$$

Par suite, l'application $f\to m_f$ est une <u>mesure vectorielle</u> sur B, à valeurs dans $\mathcal{M}(E)$. Comme $\mathcal{C}(E)$ est par hypothèse de type dénombrable, le th. de Dunford-Pettis (chap.V, § 5, th.1) montre (compte tenu de (2)) qu'il existe une application $t\to\lambda_t$ de B dans $\mathcal{M}(E)$, faiblement intégrable et telle que pour toute fonction $f\in\mathcal{C}(B)$, on ait

(3) $$m_f=\int f(t)\lambda_t\,d\nu(t) \quad ;$$

ce qui, vu la définition des fonctions faiblement intégrables, signifie que pour toute fonction $g\in\mathcal{C}(E)$, on a (d'après (1))

(4) $$\int g(x)f(\pi(x))d\mu(x)=\int f(t)d\nu(t)\int g(x)d\lambda_t(x) \quad .$$

Si on remplace en particulier f par la fonction constante égale à 1 dans B, la formule (4) devient

(5) $$\int g(x)d\mu(x)=\int d\nu(t)\int g(x)d\lambda_t(x)$$

et prouve donc que μ est <u>composée</u> des mesures λ_t par rapport à la mesure ν .

Si f et g sont toutes deux <u>positives</u>, il résulte de (4) que le second membre de cette formule est $\geqslant 0$; si on pose $h(t)=\int g(x)d\lambda_t(x)$, la fonction ν-intégrable $h(t)$ est donc telle que $\int f(t)h(t)d\nu(t)\geqslant 0$ pour toute fonction $f\geqslant 0$ de $\mathcal{C}(B)$, ce qui signifie que la mesure $h.\nu$ est <u>positive</u>. Par suite (chap.V, §1, cor.2 de la prop.8) il il existe un ensemble $N(g)$ ν-négligeable, tel que $h(t) \geqslant 0$ pour $t \notin N(g)$.

Cela étant, comme $\mathscr{C}(E)$ est de type dénombrable, il existe une suite partout dense (g_n) dans l'ensemble $\mathscr{C}_+(E)$ des fonctions continues et $\geqslant 0$ dans E ; l'ensemble $N = \bigcup_n N(g_n)$ est ν-négligeable ; pour $t \notin N$, on a $\int g_n(x)d\lambda_t(x) \geqslant 0$ pour <u>tout</u> n, et comme λ_t est une forme linéaire continue dans $\mathscr{C}(E)$, cela entraîne que $\int g(x)d\lambda_t(x) \geqslant 0$ pour toute fonction $g \in \mathscr{C}_+(E)$; autrement dit λ_t est une <u>mesure positive</u> sur E pour tout $t \notin N$.

Prouvons maintenant que, pour presque tout $t \in B$, λ_t est concentrée sur l'ensemble $\overset{-1}{\pi}(t)$ et que $\lambda_t(E)=1$. Pour démontrer la seconde de ces assertions, il suffit de remplacer g par 1 dans (4) ; il vient, compte-tenu de la définition de ν,

$$\int f(t)d\nu(t) = \int f(t)\lambda_t(E)d\nu(t)$$

pour toute fonction $f \in \mathscr{C}(B)$, ce qui prouve que $\lambda_t(E)=1$ presque partout dans B (chap.V, §1, cor.1 de la prop.8).

D'autre part, il résulte du th.1 du §1 que la formule (4) est valable, non seulement pour toute fonction continue g définie dans E, mais aussi pour toute fonction g μ-intégrable. En particulier, on peut l'appliquer à la fonction $g(x)=h(\pi(x))$, où h est une fonction continue dans B, ce qui donne

$$\int h(\pi(x))f(\pi(x))d\mu(x) = \int f(t)d\nu(t)\int h(\pi(x))d\lambda_t(x), \tag{6}$$

la fonction $h(\pi(x))$ étant intégrable pour λ_t en tous les points t du complémentaire d'un ensemble ν-négligeable $N_1(h)$.

D'autre part, la formule (4) où on remplace f par hf et g par 1 donne

$$\int h(\pi(x))f(\pi(x))d\mu(x) = \int f(t)h(t)d\nu(t) \tag{7}$$

compte-tenu de ce que $\lambda_t(E)=1$ presque partout. La comparaison de (6) et (7) montre donc que, pour toute fonction $h \in \mathcal{C}(B)$, il existe un ensemble ν-négligeable $N_2(h) \supset N_1(h)$ tel que, pour tout $t \notin N_2(h)$, $h(\pi(x))$ soit λ_t-intégrable et que l'on ait

$$(8) \qquad \int h(\pi(x))d\lambda_t(x) = h(t) \quad .$$

Comme B est métrisable, il existe une suite (h_n) partout dense dans l'espace de Banach $\mathcal{C}(B)$; l'ensemble $N_2 = \bigcup_n N_2(h_n)$ est ν-négligeable, et pour tout $t \notin N_2$, chacune des fonctions $h_n(\pi(x))$ est λ_t-intégrable et on a

$$\int h_n(\pi(x))d\lambda_t(x) = h_n(t) \quad .$$

Comme toute fonction $h \in \mathcal{C}(B)$ est limite uniforme d'une suite extraite de (h_n), on en conclut que pour <u>toute</u> fonction $h \in \mathcal{C}(B)$, $h(\pi(x))$ est λ_t-intégrable et satisfait à (8). Soit alors U le complémentaire de $\{t\}$ dans B ; c'est un ensemble ouvert, et par suite (B étant métrisable) la fonction caractéristique φ_U est enveloppe supérieure d'une suite croissante de fonctions $u_n \in \mathcal{C}(B)$ telles que $0 \leqslant u_n \leqslant \varphi_U$. Pour tout $t \notin N \cup N_2$, la fonction $\varphi_U(\pi(x))$ qui n'est autre que la fonction caractéristique du complémentaire de $\overset{-1}{\pi}(t)$, est donc intégrable pour λ_t comme enveloppe des fonctions intégrables $u_n(\pi(x))$, et on a d'après (8)

$$\varphi_U(\quad (x))d \quad _t(x) = 0$$

ce qui prouve que λ_t est concentrée sur $\overset{-1}{\pi}(t)$ pour $t \notin N \cup N_2$.

Nous pouvons maintenant modifier λ_t dans $N \cup N_2$ en lui donnant la valeur 0 si $t \notin \pi(E)$, et en prenant pour λ_t une masse +1 en un point de $\overset{-1}{\pi}(t)$ dans le cas contraire. D'autre part, l'intersection de $\complement(\pi(E))$ et de $\complement(N \cup N_2)$ est un ensemble ν-négligeable N_3 (§ 2, prop. 2) ; on modifiera aussi λ_t en lui donnant la valeur 0 aux points de N_3 ; les mesures λ_t ainsi modifiées satisfont alors à toutes les conditions de l'énoncé.

Reste à prouver leur unicité (à un ensemble ν-négligeable près). Les mesures λ'_t étant supposées répondre aux conditions de l'énoncé, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}(B)$ et toute fonction $g \in \mathcal{C}(E)$, la fonction $g(x)f(\pi(x))$ est μ-intégrable, et en vertu du th.1 du § 1, on a

$$\int g(x)f(\pi(x))d\mu(x) = \int d\nu(t)\int g(x)f(\pi(x))d\lambda'_t(x)$$

la fonction $g(x)f(\pi(x))$ étant λ'_t-intégrable pour presque tout $t \in B$. Mais comme $f(\pi(x))$ est constante sur $\overset{-1}{\pi}(t)$ et λ'_t concentrée sur $\overset{-1}{\pi}(t)$, on a, pour presque tout $t \in B$, $\int g(x)f(\pi(x))d\lambda'_t(x) = f(t)\int g(x)d\lambda'_t(x)$ en d'autres termes, on a la formule (4) où λ_t est remplacé par λ'_t ; mais cela signifie que l'on a $m_g = \int f(t)\lambda'_t\, d\nu(t)$ pour toute fonction $f \in \mathcal{C}(B)$. En raison de l'unicité dans le th. de Dunford-Pettis (chap.V, §5,th.1), on a donc $\lambda'_t = \lambda_t$ pour presque tout $t \in B$.

C.Q.F.D.

2. Mesures quotients.

Soient E et B deux espaces localement compacts polonisables, μ une mesure positive quelconque sur E, π une application μ-mesurable de E dans B. En général, si μ n'est pas bornée, l'image réciproque par π d'une partie compacte K de B ne sera pas nécessairement μ-intégrable, et par suite l'image de la mesure μ par π n'est pas définie.

Toutefois, on sait (chap.V, § 2, prop.4) qu'il existe une mesure bornée μ_0 sur E, équivalente à μ ; on peut donc écrire $\mu_0 = f_0 \cdot \mu$, où $f_0(x) > 0$ en tout point, et f_0 est une fonction μ-intégrable, $1/f_0$ une fonction localement μ_0-intégrable. Comme μ et μ_0 sont équivalentes, l'application π est μ_0-mesurable, et comme μ_0 est bornée, son image $\nu_o = \pi(\mu_o)$ par π est définie. Par application du th.1, on voit qu'il existe une application $t \to \lambda'_t$ de B dans $\mathcal{M}_+(E)$ telle que pour tout $t \in \pi(E)$, λ'_t soit positive, concentrée sur $\overset{-1}{\pi}(t)$ et de masse totale 1, que $\lambda'_t = 0$ pour $t \notin \pi(E)$ et que μ_o soit <u>composée</u> des mesures λ'_t par rapport à ν_o, autrement dit que l'on ait $\mu_o = \int \lambda'_t d\nu_o(t)$. Cela étant, pour presque tout $t \in B$ (pour ν_o), la fonction $1/f_o$ est localement intégrable par rapport à λ'_t (§ 1, cor.2 du th.1) ; en modifiant au besoin f_o dans l'image réciproque par π d'un ensemble ν_o-négligeable (ensemble qui est μ_o-négligeable, et par suite μ-négligeable), on peut supposer que $1/f_o$ est localement intégrable par rapport à λ'_t pour <u>tout</u> $t \in B$. Désignons alors par λ_t la mesure $(1/f_o).\lambda'_t$, qui est encore positive, non nulle et concentrée sur $\overset{-1}{\pi}(t)$ pour $t \in \pi(E)$ (mais n'est plus de masse totale 1, ni même bornée). Pour toute fonction $g \in \mathcal{K}(E)$ et tout $t \in B$, on a $\int g(x) d\lambda_t(x) = \int (g(x)/f_o(x)) d\lambda'_t(x)$, et $\int g(x) d\mu(x) = \int (g(x)/f_o(x)) d\mu_o(x)$; on en déduit que

$$\int g(x) d\mu(x) = \int d\nu_o(t) \int g(x) d\lambda_t(x) \tag{9}$$

ce qui signifie que $\mu = \int \lambda_t d\nu_o(t)$. En d'autres termes :

PROPOSITION 1.- <u>Soient</u> E <u>et</u> B <u>deux espaces localement compacts polonisables</u>, μ <u>une mesure positive quelconque sur</u> E , π <u>une application</u> μ-<u>mesurable de</u> E <u>dans</u> B . <u>Il existe une mesure positive</u> ν_o <u>sur</u> B <u>telle que</u> $\complement\,\pi(E)$ <u>soit</u> ν_o-<u>négligeable</u> , <u>et une application</u> $t \to \lambda_t$ <u>de</u> B <u>dans l'espace</u> $\mathcal{M}_+(E)$ <u>des mesures positives sur</u> E , <u>telle que</u> $\lambda_t = 0$ <u>pour</u> $t \notin \pi(E)$, <u>que</u> λ_t <u>soit concentrée sur</u> $\overset{-1}{\pi}(t)$ <u>et</u> $\neq 0$ <u>pour tout</u> $t \in \pi(E)$, <u>et que la mesure</u> μ <u>soit composée des mesures</u> λ_t <u>par rapport à</u> ν_o .

Toute mesure ν_o sur B pour laquelle il existe une application $t \to \lambda_t$ de B dans $\mathcal{M}_+(E)$ ayant les propriétés énoncées est dite <u>mesure quotient</u> de μ relative à l'application π, et l'application $t \to \lambda_t$ correspondante est appelée une <u>décomposition</u> de μ relative à la mesure quotient ν_o.

Bien entendu, si l'image $\pi(\mu)$ de μ par l'application π est définie (§ 2, n°1), c'est une mesure quotient de μ relative à π, et on peut supposer en outre que $\lambda_t(E)=1$ pour tout $t \in \pi(E)$ (th.1).

On sait (§ 1, th.1) que la formule (9) est valable, non seulement pour une fonction g continue et à support compact, mais pour toute fonction g μ-<u>intégrable</u> : pour presque tout $t \in B$, la fonction g est alors λ_t-intégrable, et la fonction $t \to \int g(x)d\lambda_t(x)$ est ν_o-intégrable et satisfait à (9). On en déduit d'abord le résultat suivant :

PROPOSITION 2.- <u>Pour tout ensemble</u> ν_o-<u>intégrable</u> $A \subset B$, $\overset{-1}{\pi}(A)$ <u>est</u> μ-<u>mesurable</u>.

La proposition résulte aussitôt de la mesurabilité de π lorsque A est un ensemble fermé ou un ensemble ouvert dans B. Si A est un ensemble ν_o-intégrable quelconque, tout revient à montrer que pour tout ensemble compact $K \subset E$, $K \cap \overset{-1}{\pi}(A)$ est μ-intégrable. Comme A est réunion d'une suite croissante (H_n) d'ensembles compacts et d'un ensemble ν_o-négligeable N, tout revient à montrer que $K \cap \overset{-1}{\pi}(N)$ est μ-négligeable. On peut se borner au cas où N est l'intersection d'une suite décroissante (U_n) d'ensembles ouverts tels que $\nu_o(U_n)$ tende vers 0. L'ensemble $M=K \cap \overset{-1}{\pi}(N)$ est alors intersection des ensembles $P_n=K \cap \overset{-1}{\pi}(U_n)$; en appliquant la formule (9) à la fonction caractéristique de P_n, il vient $\mu(P_n) = \int \lambda_t(P_n)d\nu_o(t)$

$\lambda_t(P_n)$ étant définie pour presque tout $t \in B$, et la fonction $t \to \lambda_t(P_n)$ étant ν_o-intégrable ; on a d'ailleurs $\lambda_t(P_n) = \lambda_t(P_n \cap \overset{-1}{\pi}(t))$ puisque λ_t est concentrée sur $\overset{-1}{\pi}(t)$. D'après le th. de Lebesgue, la fonction $t \to \lambda_t(M)$ est définie presque partout et intégrable pour ν_o. M est μ-intégrable et on a

$$\mu(M) = \int \lambda_t(M) d\nu_o(t)$$

Mais $\lambda_t(M)=0$ en tout point $t \notin N$, puisque M ne rencontre pas alors $\overset{-1}{\pi}(t)$ sur lequel λ_t est concentrée ; la fonction $t \to \lambda_t(M)$ étant ν_o-négligeable, on a bien $\mu(M)=0$, ce qui achève la démonstration.

COROLLAIRE.- Pour qu'un ensemble $N \subset B$ soit ν_o-négligeable, il faut et il suffit que $\overset{-1}{\pi}(N)$ soit μ-négligeable.

En effet, on a montré au cours de la démonstration de la prop. 2 que si N est ν_o-négligeable, $\overset{-1}{\pi}(N)$ est localement négligeable pour μ comme E est polonisable, $\overset{-1}{\pi}(N)$ est μ-négligeable. Réciproquement, si $M = \overset{-1}{\pi}(N)$ est μ négligeable, en appliquant la formule (9) à la fonction μ-intégrable φ_M, on voit que $t \to \lambda_t(M)$ est ν_o-négligeable. Mais comme λ_t est concentrée sur $\overset{-1}{\pi}(t)$ pour tout $t \in \pi(E)$, on a $\lambda_t(M) = \lambda_t(M \cap \overset{-1}{\pi}(t))$ pour tout $t \in B$; or, pour $t \in N \cap \pi(E)$, on a $M \cap \overset{-1}{\pi}(t) = \overset{-1}{\pi}(t)$, donc $\lambda_t(M) \neq 0$; cela montre que $N \cap \pi(E)$ est ν_o-négligeable, et comme il en est de même de $\complement \pi(E)$, N est ν_o-négligeable.

Nous allons voir maintenant qu'une fois connue une mesure quotient toutes les autres, ainsi que les décompositions correspondantes de μ, s'en déduisent aisément ; de façon précise :

PROPOSITION 3.- Soient E et B deux espaces localement compacts polonisables, μ une mesure positive sur E, π une application μ-mesurable *de* E *dans* B . *Si* ν *et* ν' *sont deux mesures quotients de* μ *relatives à l'application* π , *elles sont équivalentes ; en outre, si* $\nu'=f.\nu$, *et si* $t \to \lambda_t$, $t \to \lambda'_t$ *sont deux décompositions de* μ *correspondant respectivement à* ν *et* ν , *on a, pour presque tout* $t \in B$, $\lambda_t = f(t). \lambda'_t$.

En effet, si $N \subset B$ est un ensemble ν'-négligeable, il résulte du cor. de la prop.2 que $\overset{-1}{\pi}(N)$ est μ-négligeable, et le même corollaire montre alors que N est ν-négligeable. On montre de même que tout ensemble ν-négligeable est ν'-négligeable, ce qui établit l'équivalence de ν et ν' . Soit alors $\nu'=f.\nu$, où f est localement intégrable pour ν ; on peut en outre supposer que $f(t)$ est partout fini et > 0 .

Soit H une partie compacte quelconque de B ; la fonction $\varphi_H(\pi(x))$ est μ-mesurable et bornée, donc $g(x)\varphi_H(\pi(x))$ est μ-intégrable pour toute fonction $g \in \mathcal{K}(E)$, et on a (§1, th.1)

$$\int g(x)\varphi_H(\pi(x))d\mu(x) = \int \varphi_H(t)d\nu(t)\int g(x)d\lambda_t(x) =$$
$$= \int \varphi_H(t)f(t)d\nu(t) \int g(x)d\lambda'_t(x)$$

puisque λ_t et λ'_t sont concentrées sur $\overset{-1}{\pi}(t)$. Cette relation ayant lieu pour tout ensemble compact $H \subset B$, on a nécessairement, pour presque tout $t \in B$ (chap.IV , §4, prop.)

$$(10) \qquad \int g(x)d\lambda_t(x) = f(t)\int g(x)d\lambda'_t(x) \quad .$$

De façon plus précise, pour toute fonction $g \in \mathcal{K}(E)$, il existe un ensemble négligeable $N(g) \subset B$ tel que la relation (10) ait lieu pour tout $t \notin N(g)$. Cela étant, comme E est polonisable, il existe une suite (g_n) de fonctions de $\mathcal{K}(E)$ telle que toute fonction $g \in \mathcal{K}(E)$ soit limite uniforme d'une suite extraite de (g_n) et formée de fonctions dont le support est contenu dans un même ensemble compact .

Soit N l'ensemble ν-négligeable réunion des ensembles $N(g_n)$; pour $t \notin N$, on a donc pour <u>tout</u> n,

$$\int g_n(x)d\lambda_t(x) = f(t)\int g_n(x)d\lambda'_t(x)$$

et par suite, en passant à la limite (chap.IV, § 4, prop.) on voit que pour tout $t \notin N$, la relation (10) a lieu pour <u>toute</u> fonction g continue et à support compact dans E. Cela signifie que pour tout $t \notin N$, on a $\lambda_t = f(t)\lambda'_t$, et la prop.3 est ainsi démontrée.

La réciproque de la prop.3 est évidente ; si ν est une mesure quotient, f une fonction finie et >0, localement intégrable pour ν, il est clair que $\nu' = f.\nu$ est encore une mesure quotient et que si $t \longrightarrow \lambda_t$ est une décomposition de μ correspondant à ν, $t \rightarrow \lambda_t/f(t)$ est une décomposition de μ correspondant à ν'.

COROLLAIRE.- <u>Si ν est une mesure quotient de μ relative à l'application π, pour qu'un ensemble $A \subset B$ soit ν-mesurable, il faut et il suffit que $\overset{-1}{\pi}(A)$ soit μ-mesurable.</u>

En effet, si μ_0 est une mesure bornée sur E équivalente à μ, et $\nu_0 = \pi(\mu_0)$ l'image de μ_0 par π, ν_0 est équivalente à ν d'après la prop.3 ; la mesurabilité par rapport à μ (resp. ν) étant équivalente à la mesurabilité par rapport à μ_0 (resp. ν_0), le corollaire est une conséquence du cor. de la prop.3 du § 2.

On notera que la prop.3, appliquée au cas où $\nu' = \nu$, montre que la décomposition $t \longrightarrow \lambda_t$ correspondant à une mesure quotient ν de μ est déterminée à un ensemble ν-négligeable près.

3. <u>Relations d'équivalence mesurables.</u>

Etant donné un espace topologique E et une relation d'équivalence R, nous dirons pour abréger que R est une relation <u>séparée</u> si l'espace quotient E/R (<u>Top.gén.</u>, chap.I, § 9) est <u>séparé</u>.

DEFINITION 1.- Soient E un espace localement compact polonisable μ une mesure positive sur E . On dit qu'une relation d'équivalence R sur E est μ-mesurable s'il existe une partition de E en un ensemble μ-négligeable N et une suite (K_n) d'ensembles compacts, telle que pour tout n , la relation induite par R sur K_n soit séparée.

Il revient au même de dire que, si φ est l'application canonique de E sur l'espace quotient E/R , la restriction de φ à chacun des K_n est telle que $\varphi(K_n)$ soit compact (Top.gén., chap.I, § 10, 2^{è}éd., prop.). Il en résulte que si R est séparée, elle est mesurable, car pour toute partie compacte K de E , $\varphi(K)$, image d'un ensemble compact par une application continue dans un espace séparé, est compacte.

De même, si le saturé pour R d'un ensemble compact dans E est fermé (et en particulier si R est fermée), R est mesurable, car pour toute partie compacte K de E , R_K est fermée, donc séparée (Top.gén., chap.I, 2^{è} éd., § 10, prop.) .

Nous allons donner plusieurs conditions équivalentes à la déf.1 :

PROPOSITION 4.- Pour qu'une relation d'équivalence R sur E soit μ-mesurable, il faut et il suffit que, pour toute partie compacte K de E et tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie compacte $K_1 \subset K$ telle que $\mu(K \cap \complement K_1) \leqslant \varepsilon$ et que la relation induite par R sur K_1 soit séparée .

En effet, si R est mesurable, il existe une suite (H_n) d'ensembles compacts deux à deux sans point commun, tels que le complémentaire N de $\bigcup_n H_n$ soit négligeable et que la relation induite sur chacun des H_n par R soit séparée ; K est réunion de l'ensemble négligeable $N \cap K$ et des ensembles compacts $K \cap H_n$; en prenant m assez grand pour que la mesure de la réunion des $K \cap H_n$ d'indice $n > m$ soit $\leqslant \varepsilon$, l'ensemble compact K_1 , réunion des $K \cap H_n$ d'indice $n \leqslant m$ répondra à la question.

Inversement, supposons la condition de l'énoncé satisfaite ; E étant dénombrable à l'infini, est réunion d'une suite (A_n) d'ensembles compacts, deux à deux sans point commun, et d'un ensemble négligeable N . Pour chaque A_n , on définit, par récurrence sur m , une suite (K_{mn}) d'ensembles compacts $(m=1,2,\ldots)$ deux à deux sans point commun, tels que $\mu(A)-\sum\limits_{h=1}^{m}\mu(K_{hn})\ \frac{1}{m}$, que $K_{mn} \subset A \cap \complement\,(\bigcup\limits_{h=1}^{m-1} K_{hn})$ et que la relation induite sur chacun des K_{mn} par R soit séparée ; si P_n est le complémentaire dans A_n de la réunion des K_{mn} $(m \geqslant 1)$, P_n est négligeable, donc aussi $P=N \cup \bigcup\limits_{n} P_n$, et la relation R est par suite mesurable.

PROPOSITION 5.- Soient E un espace localement compact polonisable μ une mesure positive sur E et R une relation d'équivalence dans E . Les propositions suivantes sont équivalentes :

a) La relation R est μ-mesurable.

b) Il existe une suite (f_n) de fonctions numériques (finies ou non) μ-mesurables, définies dans E , et telles que la relation $R\{x,y\}$ soit équivalente à la relation "pour tout n , $f_n(x)=f_n(y)$" .

c) Il existe un espace localement compact polonisable B et une application μ-mesurable π de E dans B telle que $R\{x,y\}$ soit équivalente à $\pi(x)=\pi(y)$.

1° Montrons d'abord que c) entraîne a). Si π est μ-mesurable, il existe une suite (K_n) de parties compactes de E , deux à deux sans point commun, telles que le complémentaire N de la réunion des K_n soit négligeable, et que la restriction de π à chacun des K_n soit continue. Mais alors la restriction de R à K_n étant équivalente à $\pi(x)=\pi(y)$, est séparée, puisque $\pi(K_n)$ est compact et la restriction de π à K_n continue.

2° En second lieu, montrons que b) entraîne c). Supposons b) vérifiée, et considérons le cube $B=\overline{R}^{\mathcal{N}}$, qui est un espace compact métrisable. Si on pose $\pi(x)=(f_n(x))_{n\in\mathcal{N}}$, π est une application mesurable de E dans B (chap.IV, §5,th.1) et la relation "pour tout n, $f_n(x)=f_n(y)$" est évidemment équivalente à $\pi(x)=\pi(y)$.

3° Reste à prouver que a) entraîne b). Si R est mesurable, il existe une suite (H_n) d'ensembles compacts deux à deux sans point commun, telle que le complémentaire N de $\bigcup_n H_n$ soit négligeable, et que la restriction de R à chacun des H_n soit séparée. Désignons par K_n la réunion des H_k d'indice $k \leqslant n$; la restriction de R à K_n est encore séparée, car l'image canonique $\varphi(K_n)$ de K_n dans E/R est réunion des $\varphi(H_n)$, qui sont compacts, donc est compacte.

Chacun des espaces $\varphi(K_n)$, image continue d'un espace compact métrisable, est un espace compact métrisable ; il existe donc une suite $(f_{np})_{p\geqslant 1}$ de fonctions numériques continues dans $\varphi(K_n)$, et partout denses dans l'espace de Banach $\mathcal{C}(\varphi(K_n))$. En particulier si on a $f_{np}(\varphi(x)) = f_{np}(\varphi(y))$ pour tout indice p, on a nécessairement $\varphi(x)=\varphi(y)$, c'est-à-dire que la restriction de R à K_n est équivalente à "pour tout p, $g_{np}(x)=g_{np}(y)$", on posant $g_{np}=f_{np}\circ\varphi$.

Remarquons maintenant qu'en vertu du th.d'Urysohn, chacune des fonctions f_{np} peut, par récurrence sur h, être prolongée successivement à chacun des espaces compacts $\varphi(K_{n+h})$ qui forment une suite croissante ; on peut donc ainsi définir $g_{np}=f_{np}\circ\varphi$ dans $\complement N$ tout entier, de sorte que la restriction de g_{np} à chacun des K_m $(m\geqslant 1)$ soit continue et constante dans toute classe suivant R. On prolonge g_{np} à E de la façon suivante : si $x\in N$ est congru (mod.R) à un élément $y\in\complement N$, on pose $g_{np}(x)=g_{np}(y)$; dans le cas contraire, on pose $g_{np}(x)=0$.

Il est clair que toutes les fonctions g_{np} ainsi définies sont mesurables.

Enfin, soit N_o la partie de N formée des points non congrus mod. R à aucun point de $\complement N$ (autrement dit, le complémentaire du saturé de $\complement N$ pour R). Comme E est polonisable, sa puissance est égale à celle du continu ; donc N_o/R_{N_o} est équipotent à une partie P de l'intervalle $]0,1[$; soit f_o une application biunivoque de N_o/R_{N_o} sur P, et posons $g_o=f_o\circ\varphi$ dans N_o, $g_o(x)=0$ dans $\complement N_o$; il est clair que g_o est mesurable.

Cela étant, montrons que la famille des fonctions g_o et g_{np} répond à la question. En effet, ces fonctions sont par construction constantes sur toute classe mod. R. Inversement, soient x et y deux points de E non congrus mod. R ; s'ils sont tous eux dans N_o, on aura $g_o(x)\neq g_o(y)$, et il en sera de même si l'un d'eux appartient à N_o et non l'autre. Si x et y sont tous deux dans $\complement N_o$, on peut les supposer dans $\complement N$ (puisqu'ils sont congrus à des points de $\complement N$) ; alors il existe un indice m tel que x et y appartiennent à K_m, puis un indice p tel que $g_{mp}(x)\neq g_{mp}(y)$.

C.Q.F.D.

PROPOSITION 6.- <u>Soient</u> E <u>un espace localement compact polonisable</u> μ <u>une mesure positive sur</u> E, R <u>une relation d'équivalence dans</u> E. <u>Pour que</u> R <u>soit</u> μ-<u>mesurable, il faut et il suffit qu'il existe une suite</u> (A_n) <u>d'ensembles</u> μ-<u>mesurables saturés pour</u> R, <u>tels que pour tout</u> $x\in E$, <u>la classe de</u> x <u>suivant</u> R <u>soit l'intersection des</u> A_n <u>tels que</u> $x\in A_n$.

La condition est suffisante. En effet, soit alors f_n la fonction caractéristique de A_n, qui est mesurable ; la relation $R\{x,y\}$ est par hypothèse équivalente à "pour tout n, $f_n(x)=f_n(y)$", donc R est mesurable (prop. 5).

La condition est nécessaire. Supposons en effet R mesurable ; il existe alors un espace localement compact polonisable B et une application μ-mesurable π de E dans B telle que la relation $\pi(x)=\pi(y)$ soit équivalente à $R\{x,y\}$ (prop.5). Soit (B_n) une base dénombrable de la topologie de B ; les ensembles $A_n = \overset{-1}{\pi}(B_n)$ sont μ-mesurables puisque les B_n sont ouverts dans B , et ils répondent à la question, car ils sont saturés pour R , et si x et y sont tels que $\pi(x) \neq \pi(y)$, il existe un indice n tel que $\pi(x) \in B_n$ et $\pi(y) \notin B_n$ puisque B est séparé ; ce qui signifie que $x \in A_n$ et $y \notin A_n$.

<u>Remarque</u>.- On notera que, pour une relation mesurable R sur un espace localement compact polonisable E , le saturé d'une partie <u>compacte</u> K de E <u>n'est pas nécessairement mesurable</u> (exerc.1).

4. <u>Décomposition d'une mesure par une relation d'équivalence mesurable.</u>

Soient E un espace localement compact polonisable, μ une mesure positive sur E , R une relation d'équivalence μ-mesurable sur E . Il existe alors (prop.5) un espace localement compact polonisable B et une application μ-mesurable π de E dans B telle que la relation $R\{x,y\}$ soit équivalente à $\pi(x)=\pi(y)$. Toute <u>mesure quotient</u> ν ($n^o 2$) de μ relative à l'application π sera dite une <u>mesure quotient de μ par la relation</u> R ; si $t \to \lambda_t$ est une décomposition de μ correspondant à la mesure ν , on dira que $t \to \lambda_t$ est une <u>décomposition de μ par la relation</u> R . Il résulte des propriétés vues au $n^o 2$ que pour tout $t \in \pi(E)$, λ_t est une mesure sur E qui n'est pas nulle et est concentrée sur $\overset{-1}{\pi}(t)$. En vertu de la définition de π , cela signifie qu'il existe une <u>correspondance biunivoque</u> entre l'espace quotient E/R et l'ensemble des mesures λ_t , telle qu'à chaque classe d'équivalence $\overset{-1}{\pi}(t)$ suivant R corresponde une mesure λ_t <u>non nulle et concentrée sur $\overset{-1}{\pi}(t)$</u> .

L'espace B, l'application π et la mesure ν sur B peuvent en général être choisis d'une infinité de manières de façon à satisfaire aux conditions précédentes. Toutefois, les diverses décompositions de μ par R peuvent toutes se déduire de l'une d'elles, comme il résulte du théorème suivant :

THÉORÈME 2. - Soient E un espace localement compact polonisable, μ une mesure positive sur E, R une relation d'équivalence μ-mesurable dans E. Soient B et B' deux espaces localement compacts polonisables, π et π' deux applications μ-mesurables de E dans B et B' respectivement, tels que la relation $R\{x,y\}$ soit équivalente à $\pi(x)=\pi(y)$, ainsi qu'à $\pi'(x)=\pi'(y)$; soient ν et ν' des mesures quotients de μ sur B et B' respectivement, relatives aux applications π et π' ; soient $t \to \lambda_t$ et $u \to \lambda'_u$ des décompositions de μ correspondant à π et π'.

Alors, il existe dans B et B' des ensembles N et N', négligeables pour ν et ν' respectivement, et une application biunivoque f de $\complement N$ sur $\complement N'$, tels qu'on ait les propriétés suivantes :

a) f (définie presque partout dans B) est ν-mesurable et son application réciproque g est ν'-mesurable ; en outre la mesure quotient de ν (resp. ν') relative à l'application f (resp. g) est équivalente à ν' (resp. ν) ;

b) pour tout $t \in \complement N$, la mesure λ_t (sur E) est proportionnelle à la mesure $\lambda'_{f(t)}$.

En vertu de la prop.3, on peut se limiter au cas où ν et ν' sont des mesures bornées : on a vu au n°2 (prop.1) qu'il existe toujours de telles mesures quotients relatives à une application μ-mesurable. Soit N_0 (resp. N'_0) le complémentaire de $\pi(E)$ (resp. $\pi'(E)$) dans B (resp. B') ; on sait que N_0 (resp. N'_0) est ν-négligeable (resp. ν'-négligeable). Par définition, il existe alors une application biunivoque f de $\complement N_0$ sur $\complement N'_0$, définie par la condition $f(\pi(x))=\pi'(x)$ pour tout $x \in E$. On sait par définition de la mesure quotient, que N_0 est ν-négligeable et que N'_0 est ν'-négligeable, donc f et g sont définies presque partout. Pour toute partie M de B, la relation "M est ν-mesurable" équivaut à "$\overset{-1}{\pi}(M)$ est μ-mesurable" (cor. de la prop.3), donc par définition à "$\overset{-1}{\pi}{}'(f(M))$ est μ-mesurable" ; mais cette dernière relation à son tour équivaut à "$f(M)$ est ν'-mesurable" (cor. de la prop.3). On voit donc que f (resp. g) transforme tout ensemble ν-mesurable (resp. ν'-mesurable) en un ensemble ν'-mesurable (resp. ν-mesurable) ; comme B et B' sont métrisables et de type dénombrable, on en déduit (chap.IV, § 5, th.   ) que f et g sont mesurables (pour ν et ν' respectivement). En outre, si $M \subset B$ est ν-négligeable, $\overset{-1}{\pi}(M)$ est μ-négligeable (cor. de la prop.2) ; mais cela signifie que $\overset{-1}{\pi}{}'(f(M))$ est μ-négligeable, donc (cor. de la prop.2) que $f(M)$ est ν'-négligeable. On montre de même que g transforme tout ensemble ν'-négligeable en ensemble ν-négligeable ; par suite, l'image de ν par f (qui est définie, puisque ν est bornée) est équivalente à ν', et l'image de ν' par g équivalente à ν (§ 2, cor.2 du th.1).

Reste à montrer que pour presque tout $t \in B$, λ_t et $\lambda'_{f(t)}$ sont proportionnelles. En vertu de la prop.3, on peut se limiter au cas où ν' est l'image de ν par l'application f ; alors, on a (§ 2, cor.3 du th.1), $\mu = \int \lambda_t d\nu(t) = \int \lambda'_u d\nu'(u) = \int \lambda'_{f(t)} d\nu(t)$; comme par hypothèse, pour tout $t \in \complement N_0$, on a $\lambda'_{f(t)} \neq 0$ et que $\lambda'_{f(t)}$ est portée par $\overset{-1}{\pi}(t)$, il résulte de la prop.3 que $\lambda'_{f(t)} = \lambda_t$ pour presque tout $t \in \complement N_0$, et par suite pour presque tout $t \in B$.

C.Q.F.D.

Remarques.- 1) Lorsque la mesure donnée μ sur E est bornée, il est possible d'associer à la relation d'équivalence μ-mesurable R sur E un espace compact B_o , une application μ-mesurable π_o de E dans B_o et une mesure quotient ν_o sur B_o d'une façon canonique . En effet, soient B un espace localement compact polonisable et π une application μ-mesurable de E dans B telle que $\pi(x)=\pi(y)$ soit équivalente à $R\{x,y\}$; si ν est l'image de μ par π , il existe une décomposition $t \to \lambda_t$ de μ correspondant à la mesure quotient ν , telle que pour tout $t\in\pi(E)$, λ_t soit de masse totale 1 (th. 1) et $\lambda_t=0$ pour $t\notin\pi(E)$. Considérons alors dans l'espace $\mathcal{M}^1(E)$ des mesures bornées sur E le sous-espace B_o des mesures positives de masse totale $\leqslant 1$; on sait que B_o est vaguement compact (chap.III, § 2,prop.   ) ; en outre, E est polonisable, donc l'espace compact E' obtenu en adjoignant à E un point à l'infini est métrisable, et par suite l'espace de Banach $\mathcal{C}(E')$ est de type dénombrable ; comme la topologie vague sur B_o est identique à la topologie faible dans le dual de $\mathcal{C}(E')$, B_o est métrisable pour cette topologie. A tout $x\in E$, faisons alors correspondre le point $\lambda_{\pi(x)}\in B_o$; comme λ_t est concentrée sur $\overset{-1}{\pi}(t)$, on a $\lambda_t\neq\lambda_{t'}$ pour $t\neq t'$ (si t et t' appartiennent à $\pi(E)$), puisque $\overset{-1}{\pi}(t)$ est de mesure 1 pour λ_t et de mesure 0 pour $\lambda_{t'}$; par suite, la relation $\lambda_{\pi(x)}=\lambda_{\pi(y)}$ équivaut à $R\{x,y\}$; enfin, la fonction $t\to\lambda_t$ est ν-mesurable pour la topologie vague dans $\mathcal{M}^1(E)$, puisque pour toute fonction $g\in\mathcal{K}(E)$, $t\to\langle g,\lambda_t\rangle=\int g(x)d\lambda_t(x)$ est ν-intégrable, et que $\mathcal{C}(E')$ est de type dénombrable (chap.V, § 4, prop.8) ; il en résulte que $x\to\lambda_{\pi(x)}=\pi_o(x)$ est μ-mesurable (§ 2,prop.4). Soit alors ν_o l'image $\pi_o(\mu)$ de la mesure de μ ~~relative~~ sur l'espace compact B_o ; si $z\to\rho_z$ est une décomposition de μ relative à la mesure quotient ν_o ; ρ_z est concentrée sur $\overset{-1}{\pi}_o(z)$ pour presque tout $z \in B_o$, et est de masse totale 1 ; le th. 2 montre donc que sur presque toute classe $\overset{-1}{\pi}(t) = \overset{-1}{\pi}_o(z)$ suivant R ; les mesures ρ_z et λ_t sont <u>identiques</u> (ce qui signifie par définition que $\rho_z = z$), d'où résulte aussitôt l'<u>unicité</u> (à un ensemble μ-négligeable près et saturé pour R) de l'application π_o de E dans B_o et l'<u>unicité</u> de la mesure ν_o sur B_o .

2) Lorsque μ n'est pas bornée, on ne peut plus "normaliser" les mesures λ_t en leur imposant la condition $\lambda_t(E)=1$ pour tout $t \in \pi(E)$ puisqu'en général elles ne seront pas bornées. Toutefois, on peut faire en sorte que l'image par l'application $t \rightarrow \lambda_t$ de B dans $\mathcal{M}(E)$ soit <u>vaguement borné</u>, donc <u>vaguement relativement compact</u> (chap.III, § 2,prop.   ). En effet, il existe une mesure bornée μ_o sur E équivalente à μ , et on peut même supposer que $\mu_o = f_o . \mu$, où pour tout ensemble compact $K \subset E$, $\inf_{x \in K} f_o(x) > 0$ (chap.V, § 2, prop.4). Il existe alors une application μ_o-mesurable π de E dans un espace localement compact B , telle que $\pi(x) = \pi(y)$ soit équivalente à $R\{x,y\}$; soit ν l'image de μ par π , et $t \rightarrow \lambda'_t$ une décomposition de μ_o correspondant à la mesure quotient ν ; alors si on pose $\lambda_t = (1/f_o). \lambda'_t$, $t \rightarrow \lambda_t$ sera une décomposition de μ correspondant à la mesure quotient ν (n°2). Or, pour tout ensemble compact $K \subset E$, $\lambda'_t(K) \leqslant \lambda'_t(E) = 1$ pour tout $t \in B$, et $1/f_o$ est majoré dans K ; donc il existe une constante a_K telle que $\lambda_t(K) \leqslant a_K$ pour tout $t \in B$, ce qui prouve que l'ensemble des mesures λ_t est vaguement borné. Si B_o est le sous-espace vaguement compact de $\mathcal{M}(E)$, adhérence de l'image de B par $t \rightarrow \lambda_t$, on voit alors comme dans la remarque 1 que B_o est compact et métrisable pour la topologie vague, et que l'application $t \rightarrow \lambda_t$ de B dans B_o est ν-mesurable (il faut pour cela généraliser la prop.8 du chap.V, § 4) .

Appliquant le th.2, on pourra donc transporter sur B_0 la mesure ν, à laquelle correspondra une décomposition $z \to \rho_z$ de μ telle que $z = \rho_z$ pour tout $z \in \lambda_{\pi(E)}$. Mais ici il n'y a naturellemtn plus unicité.

3) Dans l'énoncé du th.2, on notera que l'image par f de la mesure ν n'est pas nécessairement définie, car il se peut que pour un ensemble compact $K' \subset B'$, $\overset{-1}{f}(K')$ ne soit pas ν-intégrable (exerc.3).

Exercices.- 1) Soit E la réunion de l'ensemble triadique de Cantor K dans $[0,1]$, et de l'intervalle $I =]1,2]$ de $\mathbb{R}$, et soit μ la mesure induite sur l'espace compact E par la mesure de Lebesgue. Soit P une partie non mesurable de I ayant la puissance du continu (chap.IV, § 4, exerc.), et soit ψ une application biunivoque de K sur P. On considère dans E la relation d'équivalence pour laquelle tout point x n'appartenant pas à $K \cup P$ est sa propre classe d'équivalence, et où la classe d'un point $y \in K$ est formée de y et de $\psi(y)$. Montrer que R est μ-mesurable, mais que le saturé de K pour R n'est pas μ-mesurable.

2) Soient E et F deux espaces localement compacts polonisables, μ une mesure positive sur E, π une application μ-mesurable de E dans F, telle que $\nu = \pi(\mu)$ soit définie. Soit h une fonction localement intégrable pour μ, telle que l'image par π de la mesure $h.\mu$ soit définie. Si $t \to \lambda_t$ est la décomposition de μ correspondant à la mesure quotient ν, et si on pose pour tout $t \in F$, $g(t) = \int h(x)d\lambda_t(x)$ (fonction définie presque partout dans F), montrer que l'on a $\pi(h.\mu) = g.\nu$.

3) Soit E l'espace compact formé des points 0 et $1/n$ $(n \geqslant 1)$ dans $\mathbb{R}$, et soit μ la mesure sur E définie par la masse 2^{-n} en chacun des points $1/n$. Soit E_0 l'espace localement compact obtenu en munissant E de la topologie discrète, et soit ν la mesure sur E_0 définie par la masse +1 en chacun des points $1/n$. Si π est l'application identique de E_0 sur E, montrer que μ et ν sont des mesures quotients de μ pour la relation d'équivalence $x = y$, mais que l'image de ν par π n'est pas définie.