RÉDACTION N° 139

COTE : NBR 042

TITRE : LIVRE I THÉORIE DES ENSEMBLES
CHAPITRE I (ÉTAT 5)

ASSOCIATION DES COLLABORATEURS DE NICOLAS BOURBAKI

NOMBRE DE PAGES : 60

NOMBRE DE FEUILLES : 60

LIVRE I

THÉORIE DES ENSEMBLES

CHAPITRE I (Etat 5)

COMMENTAIRES DU RÉDACTEUR.

1. Il m'a semblé préfèrable d'adopter le point de vue suivant lequel les signes abréviateurs ne sont pas des signes de la mathématique formelle mais des symboles par lesquels on désigne dans le langage courant (ou semi-courant !) certains assemblages de signes de la mathématique formelle. Cela n'a évidemment pas grande importance ; mais il me semble psychologiquement préfèrable de laisser dans l'esprit l'image d'une mathématique formelle non compromise par tous les à peu près des définitions habituelles. De plus, cela permet de glisser plus continument du style du présent chapitre au style habituel de Bourbaki ; car, dès le début, on parle en langage courant de la mathématique formelle, de sorte qu'il n'y a jamais de saut brusque à effectuer du langage formel au langage ordinaire.

2. Une innovation (par rapport à la rédaction précédente) à laquelle je tiens <u>beaucoup</u> est l'introduction des termes en même temps que des relations, les termes étant les assemblages de signes qui servent à désigner les objets ou les fonctions d'objets. Il me parait du plus haut ridicule de considèrer $ax+b=0$ comme un assemblage de signes significatif, mais pas $ax+b$. Il est vrai que la rédaction antérieure parvenait après coup - et comme par une sorte de remords - à réintégrer les termes au moyen des symboles fonctionnels. Mais le mode d'introduction de ces symboles fonctionnels m'a toujours justement paru l'un des points les plus faibles de cette rédaction. On y dit que les symboles fonctionnels sont des signes abréviateurs ; mais ce n'est pas vrai : ils n'abrévient rien du tout pour la bonne raison qu'avant eux il n'y a aucun assemblage

propre à représenter des objets (sauf des lettres). Par ailleurs, il est de compréhension commune que l'usage d'un signe abréviateur est une pure commodité et que tout ce qui peut être démontré en s'en servant peut l'être aussi sans s'en servir. On ne nous dit pas s'il en est encore ainsi de ces symboles fonctionnels ; en fait, je ne sais pas trop s'il en est ainsi ou non (je crois qu'il en est en effet ainsi en vertu de la démonstration par Bernays que le symbole ε de Hilbert ne permet de démontrer rien de nouveau).

3. J'ai introduit le symbole ε de Hilbert. Si P représente une propriété d'un objet x , $\varepsilon_x(P)$ est censé représenter un objet dont on peut dire que, s'il existe au moins un objet qui possède la propriété P , $\varepsilon_x(P)$ la possède. L'avantage essentiel de ce symbole, c'est qu'il permet d'introduire les symboles fonctionnels comme véritables signes abréviateurs : si P est fonctionnelle en x , le symbole fonctionnel attaché à P est simplement une désignation du terme $\varepsilon_x(P)$ (on pourrait aussi bien employer $\varepsilon_x(P)$ lui-même, n'était la question d'encombrement). On pourrait il est vrai, se contenter d'introduire le symbole $\varepsilon_x(P)$ dans le cas où P est fonctionnelle en x c'est alors le symbole ι de Hilbert ; cette méthode aurait cependant l'inconvénient (assez sérieux à mon avis) de faire dépendre une règle formative de terme du fait qu'une certaine rela- (à savoir "P est fonctionnelle en x") est vraie.

Par ailleurs, le symbole ε permet de définir le quantificateur existentiel : dire que P est vrai d'au moins un x , c'est dire que P est vrai de $\varepsilon_x(P)$; une fois qu'on a $(\exists x)P$, on définit naturellement sans difficulté $(\forall x)P$. Les règles relatives aux quantificateurs sont alors des conséquences du schéma d'axiomes unique $P \rightarrow (\exists x)P$.

Une objection que l'on peut faire à l'introduction du symbole ε , c'est que l'axiome de choix devient un théorème, de sorte qu'il n'y a plus de distinction entre démonstrations avec ou sans l'axiome de choix. Mais je dois dire que cet "inconvénient" me paraît plutôt un avantage. Il me semble que les distinctions entre démonstrations avec ou sans l'axiome de choix n'ont d'intérêt que dans des systèmes beaucoup plus pauvres que celui de Bourbaki. Je rappelle à ce sujet que Gödel a montré que la mathématique <u>sans</u> axiome de choix possède une interprétation dans laquelle l'axiome du choix est un théorème : c'est-à-dire qu'on y peut définir une classe d'ensembles pour lesquels tous les autres axiomes de la théorie des ensembles sont vrais ainsi que l'axiome du choix.

3. J'ai arrangé les choses de telle manière qu'il n'y ait plus de variables liées. Etant donnée la manière dont les quantificateurs sont définis, il suffit de s'arranger pour que x ne figure pas dans $\varepsilon_x(P)$. Cela se fait en convenant que $\varepsilon_x(P)$ est une désignation pour un assemblage de signes qui s'obtient en remplaçant d'abord x par un signe muet (par exemple $\square$) dans P, et en reliant ce signe muet à l'ε qui est en tête par des liens pour indiquer à quel ε chaque occurence de $\square$ se réfère. Le même artifice peut être employé bien entendu si on n'utilise pas le symbole ε et si on introduit les quantificateurs comme termes primitifs. Il me semble que cette manière de faire correspond bien plus à la nature des choses que la manière ordinaire. Une variable liée, c'est-à-dire un indice muet, joue un rôle tout différent des variables libres ; elle n'intervient que par les positions relatives de ses occurences dans une formule. Dans mon système, il n'y a pas besoin de convention spéciale pour dire que rien ne change si on remplace une variable liée par une autre, car on ne fait alors qu'employer une autre désignation pour identiquement la même expression de la mathématique formelle.

Grâce à cela, on peut se débarrasser de tous les canulards relatifs au cas où on a le droit de faire ceci ou cela seulement si certaines lettres sont libres (ou liées) dans certaines expressions. Notamment, on peut sans aucune exception remplacer n'importe quelle lettre par n'importe quel terme dans n'importe quelle expression. Bref, rien n'interdit en principe d'utiliser $\int_a^x f(x)dx$; le cas échéant, on pourra si on le désire faire des restrictions appropriées si on juge que c'est utile dans tel ou tel cas.

4. Je me suis efforcé d'établir le plus souvent des liens aussi précis que possible entre ce qui est dit dans ce chapitre et la manière dont on procède <u>en fait</u> dans les démonstrations mathématiques. Je signale notamment le § IV ainsi que le § IX (ce dernier, je l'avoue, bâclé, en raison de l'ennui qui finit par se dégager de la rédaction d'un chapitre I, mais qui serait peut être à développer). Quel que soit le sort de la présente rédaction, il me semble que les contenus de ces deux § devraient être conservés, ainsi que l'énoncé et la démonstration du théorème de la déduction qui est l'outil essentiel pour justifier les "méthodes de démonstration" que l'on emploie tout le temps. Tout ceci n'est bien entendu qu'une élaboration plus poussée de ce qui était contenu dans la notion de "démonstration" de la rédaction antérieure.

5. En ce qui concerne les quantificateurs typiques, je m'écarte tant au point de vue de Dieudonné que de celui de Cartan. N'ayant plus de variables liées, je suis naturellement d'accord avec Dieudonné que ce sont les quantificateurs qui sont typiques, et non les variables quantifiées. Mais il me semble totalement inutile de vouloir introduire un axiome disant que la variable qu'on quantifie typiquement représente un objet du type en question. Dire qu'il existe un x de type A tel que P,

c'est dire qu'il existe un x qui en même temps est de type A et possède la propriété P ; mais il est bien inutile, avant d'affirmer cela de x , de poser un axiome suivant lequel x ne peut représenter qu'un objet de type A .

6. J'ai ramené le calcul des propositions (i.e. les règles qui ne concernent pas les quantificateurs) aux schémas S.1, S.2, S.3 du § III (système de Lesniewski-Tarski). Il y a 4 pages de démonstrations de règles dérivées avant d'en arriver au point fondamental qui est le théorème de la déduction ; cela ne me paraît pas trop cher à payer pour l'intérêt esthétique d'avoir à partir de si peu. Cependant, on peut naturellement aussi couper ces développements en introduisant plus de schémas d'axiomes primitifs, ou en les renvoyant en appendice.

7. Après le § III, je me suis limité à établir les règles dérivées qui me paraissaient sur le moment essentielles ; le faire a d'ailleurs fourni de nombreux exemples d'applications des méthodes de démonstration exposées au § IV ; peut être trouvera-t-on qu'il y en a encore trop, ou qu'il n'y en a pas assez. Je n'y attache quant à moi aucune importance.

8. Je n'ai pas introduit le couple comme terme primitif, dans l'intention de le définir en théorie des ensembles par l'astuce Gödel : $(x,y) = \{\{x\},\{x,y\}\}$. Si on vomit la dite astuce, il suffira d'ajouter la formation du couple dans les règles formatives.

CHAPITRE I. DESCRIPTION de la MATHEMATIQUE FORMELLE.

I. RÉGLES FORMATIVES.

Les signes que nous utiliserons seront les suivants : les signes (et) ; le signe "est un ensemble" ; le signe = ; le signe $\in$; le signe $\Rightarrow$; le signe ε ; le signe $\square$; les lettres. Nous ne décrirons pas plus précisément les lettres ; nous supposerons qu'il y en a une quantité illimitée, et qu'aucune partie d'un autre signe n'est une lettr (on peut par exemple convenir que les lettres sont les majuscules latine affectées chacune d'un nombre quelconque de prismes). Les signes "non" et "est un ensemble" sont considérés comme des blocs indécomposables.

Nous entendrons par assemblage de signes une suite de signes écrits les uns à côté des autres, certains couples de ces signes pouvant être joints l'un à l'autre par des traits qui courent au-dessus de la ligne, et que nous appellerons des <u>liens</u>. Ainsi, avec la convention faite plus haut en ce qui concerne les lettres,

$$\varepsilon(((\text{non } A=B) \Rightarrow (\ A=C\ )) \Rightarrow A \in \square\ \ )$$

est un assemblage de signes.

Nous utiliserons en général des lettres gothiques pour <u>désigner</u> les signes ou assemblages de signes de la mathématique formelle. Les lettres gothiques ne seront donc pas des signes, mais des noms de signes (ou d'assemblages de signes). Cependant, nous utiliseront souvent aussi les signes autres que les lettres comme des désignations d'eux-mêmes.

Les <u>définitions</u> sont des conventions par lesquelles on décide de désigner certains assemblages de signes par certains symboles. Une définition sera en général telle que le symbole qui représente un certain assemblage de signes en vertu de la définition contienne toutes les lettres qui

qui figurent dans l'assemblage original. Le plus souvent une définition permettra de reconstruire l'assemblage de signes désigné quand on connaîtra le symbole par lequel on le désigne en vertu de la définition.

Si A,B,...,D sont des assemblages de signes, on désignera en général par AB...D l'assemblage de signes obtenu en écrivant les assemblages A,B,...,D (avec leurs liens) à la suite les uns des autres. Cette règle souffre cependant certaines exceptions, dont nous allons signaler dès maintenant la première.

Un assemblage de signes A est dit <u>implicatif</u> quand il y a une occurrence du signe $\Rightarrow$ dans A qui est précédée par exactement autant d'occurrences de (que d'occurrences de) ; dans le cas contraire, A est dit non implicatif. Si on utilise des lettres gothiques A et B pour désigner des assemblages de signes, on convient que non A et A $\Rightarrow$ B représentent non pas les assemblages de signes qui seraient prescrits par la règle précédente (à savoir, par exemple pour le premier, non suivi de l'assemblage A) mais les assemblages de signes qui s'en déduisent en entourant A (resp.:B) de parenthèses dans le cas où A (resp.:B) est implicatif.

Soient A et T des assemblages de signes, et x une lettre. On désigne par (Sub x/T)A l'assemblage de signes obtenu en remplaçant la lettre x , en chacune de ses occurences dans A , par l'assemblage T (on suppose ici qu'aucune occurence de x dans A n'est liée à un autre signe par un lien ; cette condition sera toujours réalisée dans les assemblages de signes que nous aurons à considèrer). Ainsi, si A est par exemple BxCx , où B et C sont des assemblages de signes où x n'intervient pas, (Sub x/T)A est l'assemblage BTCT . Si x ne figure pas dans A , (Sub x/T)A est identique à A . Soient A,T et U des assemblages de signes, et x et y des lettres. Supposons que y n'intervienne pas dans T ; on voit alors facilement que (Sub x/T)(Sub y/U)A est identique à (Sub y/U') (Sub x/T)A , où U' est (Sub x/T)A .

Les règles formatives précisent les modes de construction de certains assemblages de signes, les termes et les relations. Intuitivement, les termes sont des assemblages de signes qui représentent des objets, tandis que les relations sont des assemblages de signes qui représentent des assertions que l'on peut faire sur des objets. Mais la mathématique formelle est naturellement indifférente aux interprétations que l'on peut donner des assemblages de signes qu'on y rencontre. Les règles formatives sont les suivantes :

R.F.1. Toute lettre est un terme.

Cette règle signifie que les lettres sont employées pour représenter des objets.

R.F.2. Si T est un terme "T est un ensemble" est une relation.

Cette relation s'interprète intuitivement par l'assertion que l'objet représenté par T est un ensemble d'objets, cet ensemble étant traité lui-même comme un objet (de même qu'on peut traiter une collectivité comme une nation comme un être individuel).

R.F.3. Si T et T' sont des termes, T=T' est une relation.

Cette relation s'interprète intuitivement par l'assertion que T et T' représentent le même objet.

R.F.4. Si T et T' sont des termes, $T \in T'$ est une relation.

Cette relation s'interprète intuitivement par l'assertion que T' est un ensemble et que T est un élément de cet ~~ex~~ ensemble. La relation T T' se désigne encore par "T est un élément de T' " ou par "T appartient à T' " .

R.F.5 . Si R est une relation, non R est une relation.

Cette relation s'interprète intuitivement par l'assertion que l'assertion exprimée par R est fausse.

R.F.6. *Si* R *et* S *sont des relations*, $R \Rightarrow S$ *est une relation*.

Cette relation s'interprète intuitivement par l'assertion que, si l'assertion représentée par R est vraie, il en est de même de l'assertion représentée par S . La relation $R \Rightarrow S$ se désigne encore par "une condition suffisante pour que S est R " , ou par "une condition nécessaire pour que R est S " .

R.F.7. *Soient* R *une relation et* x *une lettre. Formons l'assemblage de signes* $\varepsilon(R)$, *et joignons-y chaque occurrence de* x *à l'occurrence initiale de* ε *par un lien ; soit* T_0 *l'assemblage de signes ainsi obtenu. L'assemblage* $(\mathrm{Sub}\ x/\square\ )T_0$ *est alors un terme*.

Le terme construit par application de R.F.7 se désigne par $\varepsilon_x(R)$; il importe de remarquer qu'il ne contient pas x . Nous remettons à plus tard l'explication de la signification intuitive du sens qu'il faut attribuer aux termes construits par application de R.F.7.

Les termes et relations sont les assemblages de signes qui sont tels en vertu d'applications répétées des règles précédentes. Ainsi, l'assemblage de signes (1) donné au début comme exemple est un terme.

Il résulte tout de suite de nos règles formatives que tout terme ou relation~~s~~ contient exactement autant d'occurences du signe (que du signe) . D'autre part, les seuls liens qui figurent dans un terme ou une relation joignent une occurence du signe $\square$ à une occurence qui la précède du signe ε , et chaque occurence du signe $\square$ est jointe à une occurence et à une seule du signe ε par un lien.

Nous allons maintenant montrer que si A est une relation (resp.: un terme), x une lettre et T un terme, l'assemblage de signes (Sub x/T)A est une relation (resp.: un terme). C'est évident si A se compose d'une seule lettre ; il suffira de montrer que, si notre assertion est vraie pour les relations et termes plus courts que A , elle est vraie pour A . Si A est une relation de la forme $U=U'$, dû U et U' sont des termes, (Sub x/T)A est (Sub x/T)U = (Sub x/T)U' ; or, U et U' sont plus courts que A , de sorte que (Sub x T)U et (Sub x T)U' sont des termes et que (Sub x/T)A est une relation. Un raisonnement analogue s'applique si A est une relation de l'une des formes "U est un ensemble" (U étant un terme), ou $U \in U'$ (U et U' étant des termes), ou non B (B étant une relation) ou $B \Rightarrow C$ (B et C étant des relations). Supposons maintenant que A soit $\varepsilon_y(R)$, y étant une lettre et R une relation. La relation R est alors un assemblage plus court que A . Choisissons une lettre y', distincte de x et de y , qui n'intervienne ni dans R ni dans T . Soit R' l'assemblage (Sub y/y')R ; R' est donc une relation, de même longueur que R et par suite plus courte que A . Il est clair que A est identique à $\varepsilon_{y'}(R')$. Soit T'_o l'assemblage de signes déduit de $\varepsilon(R')$ en y joignant chaque occurence de y' à l'occurence initiale de ε par un lien. L'assemblage (Sub x/T)A est donc (Sub x/T)(Sub y'/ □)T'_o . Puisque y' n'intervient pas dans T , cet assemblage est identique à (Sub y'/ □) (Sub x/T)T'_o . Or (Sub x/T)T'_o se déduit de ε((Sub x/T)R') en joignant chaque occurence de y' à l'occurence initiale de ε par un lien (car y' n'intervient pas dans T). L'assemblage (Sub x/T)R' étant une relation, il en résulte que (Sub x/T)A est un terme.

Si A est une relation qui contient la lettre x , on peut considérer que R représente l'énoncé d'une propriété que peut possèder l'objet x (dans ses relations avec les objets représentés par les autres lettres qui figurent dans R , s'il y en a). La relation (Sub x/T)R exprime alors que l'objet représenté par le terme T possède la propriété en question

Si T est un terme qui contient des lettres x,y,..., il représente un objet qui dépend d'une certaine manière des objets représentés par les lettres x,y,... Si U est un terme, (Sub y/U)T représente ce que devient l'objet représenté par T si on suppose que y représente l'objet représenté par U .

Les règles formatives que nous avons données sont telles qu'elles permettent, un assemblage de signes étant donné, de reconnaître en un nombre fini d'opérations si cet assemblage est un terme ou une relation. Nous laissons au lecteur le soin de décrire en détail une méthode par laquelle cette vérification puisse se faire.

II. RÈGLES D'INFÉRENCE. THÉORIES.

Les <u>règles du raisonnement</u> ont pour fonction d'indiquer dans quelles conditions certaines relations doivent être appelées <u>vraies</u>. Il y en a deux espèces : les <u>schémas d'axiomes</u> et les <u>règles d'inférence</u>.

Un schéma d'axiomes est une règle qui affirme que toute relation construite (à partir de certaines autres relations ou de certains termes, sur lesquels on ne suppose rien) suivant un certain procédé qui est décrit dans l'énoncé du schéma doit être tenue pour vraie. Nous ne donnerons pas ici la liste de tous les schémas d'axiomes de la mathématique ; nous introduirons ces schémas au fur et à mesure du besoin que nous aurons de les utiliser dans ce chapitre et les suivants. Ce n'est qu'à la fin du chap.IV (quand nous introduirons l'axiome de l'infini) que nous clôrons la liste des schémas d'axiomes de la mathématique. Toute relation formée suivant l'un ou l'autre de nos schémas d'axiomes sera appelée un <u>axiome de la mathématique</u>.

Un caractère commun à tous les schémas d'axiomes de la mathématique est qu'ils ne font jouer de rôle privilégié à aucune lettre. Plus précisément, cela se formule ainsi : si R est un axiome de la mathématique, et si x et y sont des lettres telles que y ne figure pas dans R , (Sub x/y)R sera encore un axiome. Nous laisserons au lecteur le soin de vérifier qu'il en est bien ainsi pour tous les schémas d'axiomes que nous introduirons. Cette particularité exprime le fait qu'il n'y a pas d'objet privilégié en mathématiques : les énoncés mathématiques sont des énoncés portant sur des objets complètement indéterminés.

Les règles d'inférence sont des règles qui affirment que, si certaines relations ont déjà été reconnues pour vraies, certaines autres, qu'on en peut déduire par des procédés décrits par ces règles, doivent être également tenues pour vraies. Les règles d'inférence sont au nombre de deux, que nous allons formuler immédiatement.

R.I. 1 : Règle du syllogisme. Si R et S sont des relations, et si les relations R et R $\Longrightarrow$ S sont vraies, S est vraie.

Cette règle ne fait que traduire le sens intuitif que nous avons donné aux relations de la forme R $\Longrightarrow$ S .

R.I.2. Soient R une relation vraie, x une lettre et T un terme. La relation (Sub x/T)R est alors vraie.

Cette relation précise la notion de relation vraie. Une relation qui contient des lettres doit être tenue pour vraie quand elle exprime une vérité de fait toutes les fois qu'on y considère les lettres qui y figurent comme représentant des objets absolument quelconques. La relation (Sub x/T)R exprime que la relation R est vraie quand on y considère la lettre x comme représentant l'objet T ; il est alors clair que, si une relation est vraie pour un objet x quelconque, elle est aussi vraie si on suppose que x représente l'objet T .

Les relations vraies des mathématiques sont celles qui doivent être tenues pour vraies en vertu des schémas d'axiomes et des règles d'inférence. Nous allons maintenant décrire certains développements formels dans lesquels les règles du raisonnement sont quelque peu différentes de celles de la mathématique : ce sont les <u>théories</u>.

Pour définir une théorie, on se donne d'abord un certain nombre de relations qui, sans être nécessairement vraies dans la mathématique, seront néanmoins tenues pour vraies dans la théorie en question : ces relations sont appelées les <u>axiomes</u> de la théorie (ne pas les confondre avec les axiomes de la mathématique !). Par ailleurs, on restreint l'application de la règle de substitution de la manière suivante. On appelle <u>constantes</u> de la théorie des lettres qui figurent dans ses axiomes, et on convient de n'appliquer la règle de substitution qu'aux lettres qui ne sont pas des constantes de la théorie. Les relations vraies de la théorie sont les axiomes de la mathématique, ceux de la théorie et les relations qu'on peut en déduire par application de la règle du syllogisme et de la règle de substitution modifiée comme nous l'avons explique plus haut (cf. un peu plus bas la description précise d'une démonstration de la théorie).

Intuitivement, une théorie diffère de la mathématique en ceci que toutes les lettres n'y sont pas censées représenter des objets quelconques ; on ne peut en effet rien substituer aux lettres qui figurent dans les axiomes de la théorie. Une théorie est l'étude de certains objets, qui doivent y être considérés comme uniquement déterminés et qui possèdent certaines propriétés, exprimées par les axiomes de la théorie. Le but de la théorie est d'étudier les conséquences du fait que ces objets sont doués de ces propriétés.

Une <u>démonstration</u> dans une théorie $\mathcal{C}$ est une suite $(R_1, \ldots, R_n)$ de relations qui possède la propriété suivante : pour chaque relation R_k de la suite, l'une au moins des quatre conditions suivantes est satisfaite :

a) R_k est un axiome de la mathématique ;

b) R_k est un axiome de la théorie ;

c) il y a dans la suite deux relations R_i et R_j qui précèdent R_k telles que R_j soit la relation $R_i \Rightarrow R_k$;

d) il y a une lettre x , un terme T et une relation R_i de la suite, qui précède R_k , tels que R_k soit identique à (Sub x/T)R_i et que x ne soit pas une constante de la théorie.

On appelle <u>relations vraies</u>, ou <u>théorèmes</u>, de la théorie, les relations qui figurent dans des démonstrations de la théorie. Une démonstration d'un théorème R dans la théorie $\mathcal{C}$ est une démonstration de la théorie dont R est la dernière relation.

Les schémas d'axiomes que nous donnerons seront tels que l'on puisse reconnaître en un nombre fini d'opérations si une relation donnée est un axiome en vertu de l'un de ces schémas. On voit alors sans peine que l'on peut reconnaître en un nombre fini d'opérations si une suite donnée de relations est une démonstration d'une théorie donnée : nous laisserons au lecteur le soin de faire cette vérification. Il n'existe par contre aucun moyen de reconnaître en un nombre fini d'opérations si une relation donnée est un théorème d'une théorie donnée (car rien ne limite la longueur possible des démonstrations).

On notera que la mathématique peut être considérée comme une théorie particulière, à savoir la théorie qui ne comporte aucun axiome. On l'appelle aussi <u>théorie des ensembles</u>.

Une théorie $\mathcal{E}'$ est dite <u>plus forte</u> qu'une théorie $\mathcal{E}$ si tous les axiomes de $\mathcal{E}$ sont des théorèmes de $\mathcal{E}'$. Nous allons montrer que, s'il en est ainsi, tous les théorèmes de $\mathcal{E}$ sont aussi des théorèmes de $\mathcal{E}'$ Soit R un théorème de $\mathcal{E}$, et soit $(R_1,\dots,R_n)$ une démonstration de ce théorème. Parmi les lettres qui figurent dans les relations $R_1,\dots,R_n$, soient $x_1,\dots,x_h$ toutes celles qui sont des constantes de $\mathcal{E}'$ sans l'être de $\mathcal{E}$. A chacune de ces lettres, faisons correspondre une nouvelle lettre qui ne soit une constante ni de $\mathcal{E}$ ni de $\mathcal{E}'$ et qui ne figure dans aucune des relations $R_1,\dots,R_n$; soient $y_1,\dots,y_h$ les lettres ainsi obtenues, y_i correspondant à x_i (nous supposons naturellement ces lettres toutes distinctes les unes des autres). Désignons par R'_k la relation déduite de R_k en y substituant y_1 à $x_1,\dots,y_h$ à x_h. Nous allons faire voir que les relations R'_k sont des théorèmes de $\mathcal{E}'$.

1) Si R_k est un axiome de la mathématique, il en est de même de R'_k en vertu du fait qu'aucune lettre ne joue un rôle privilégié dans les schémas d'axiomes ;

2) Si R_k est un axiome de $\mathcal{E}$, toutes les lettres qui y figurent sont des constantes de $\mathcal{E}$, et R'_k est par suite identique à R_k ; R'_k est donc alors un théorème de $\mathcal{E}'$;

3) Si R_k est précédé dans notre démonstration par deux relations R_i et R_j telles que R_j soit $R_i \Rightarrow R_k$, R'_j est $R'_i \Rightarrow R'_k$; si donc R'_i et R'_j sont des théorèmes de $\mathcal{E}'$, il en est de même de R'_k ;

4) Supposons maintenant que R_k soit de la forme $(\mathrm{Sub}\ x/T)R_i$, où R_i est une relation qui précède R_k dans la suite, x est une lettre qui n'est pas une constante de $\mathcal{E}$ et T un terme. Si x n'est pas une constante de $\mathcal{E}'$, R'_k est $(\mathrm{Sub}\ x/T')R'_i$, où T' est le terme déduit

de T en y remplaçant les lettres $x_1,\ldots,x_h$ par les lettres $y_1,\ldots,y_h$ correspondantes. Si x est l'une des lettres $x_1,\ldots,x_h$, R'_k est $(\text{Sub } y/T')R'_i$, où y est celle des lettres $y_1,\ldots,y_h$ qui correspond à x et où T' est défini comme plus haut. Si donc R'_i est un théorème de $\mathcal{C}'$, il en est de même de R'_k.

Procédant de proche en proche, on voit, au moyen des considérations précédentes que les relations R'_k sont toutes des théorèmes de $\mathcal{C}'$. Il en est en particulier ainsi de R'_n. Or R se déduit de R'_n par une série d'opérations de substitution dont chacune consiste à remplacer une des lettres y_i par la lettre x_i correspondante ; aucune des lettres y_i n'étant une constante de $\mathcal{C}'$, il en résulte que R est un théorème de $\mathcal{C}'$.

Il résulte en particulier de là que tout théorème de la mathématique est aussi un théorème de toute théorie.

III. PREMIERS SCHÈMAS D'AXIOMES. LE THÉOREME DE LA DÉDUCTION.

Nous introduirons ici les trois premiers schémas d'axiomes de la mathématique.

S.1 Soit A une relation. La relation $(\text{non } A \Rightarrow A) \Rightarrow A$ est vraie.

Intuitivement, cela signifie que si la supposition même que A soit fausse entraîne la vérité de A, alors A est vraie.

S.2 Soient A et B des relations. La relation $A \Rightarrow (\text{non } A \Rightarrow B)$ est vraie.

Intuitivement, il est clair que, si A est vrai, l'assertion "si A est fausse, B est vraie" est vraie, car l'hypothèse "si A est fausse" n'étant justement pas satisfaite, notre assertion n'engage à rien

S.3 . Soient A,B et C des relations. La relation $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$ est alors vraie.

Cette relation exprime que, si la vérité de A implique celle de B , alors le fait que la vérité de B entraîne celle de C entraîne que la vérité de A entraîne celle de C .

Nous allons obtenir un certain nombre de résultats valables dans toutes les théories comme conséquence de la validité de ces schémas d'axiomes. Certains de ces résultats auront la forme de règles d'inférence (leur énoncé sera précédé des lettres R.I., suivies d'un numéro) et les autres de schémas d'axiomes (leur énoncé sera précédé des lettres S_d suivies d'un numéro).

R.I.3 . Soient A,B et C des relations. Si $A \Rightarrow B$ est un théorème d'une théorie $\mathcal{C}$, il en est de même de $(B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$. Si $A \Rightarrow B$ et $B \Rightarrow C$ sont des théorèmes de $\mathcal{C}$, il en est de même de $A \Rightarrow C$.

Le premier résultat résulte immédiatement du schéma S.3 et de la règle du syllogisme ; le second résulte du premier et de la règle du syllogisme.

R.I.4. Soient A et B des relations. Si non $B \Rightarrow$ non A est un théorème d'une théorie $\mathcal{C}$, il en est de même de $A \Rightarrow B$.

En effet, (non $A \Rightarrow B) \Rightarrow$ (non $B \Rightarrow B)$ est un théorème de $\mathcal{C}$ en vertu de R.I.3 . Or $A \Rightarrow$ (non $A \Rightarrow B)$ et (non $B \Rightarrow B) \Rightarrow B$ sont des relations vraies (en vertu de S.2 et S.1 respectivement) ; la règle R.I.4 résulte alors d'une double application de R.I.3 .

R.I.5. Soient A une relation et B un théorème d'une théorie $\mathcal{C}$. La relation $A \Rightarrow B$ est alors un théorème de $\mathcal{C}$.

Il résulte de S.2 et de la règle du syllogisme que non $B \Rightarrow$ non A est un théorème de $\mathcal{C}$; la règle R.I.5 résulte alors de R.I.4 .

R.I.6. <u>Soient</u> A <u>un théorème d'une théorie</u> $\mathcal{C}$ <u>et</u> B <u>une relation.</u> <u>La relation</u> $(A \Rightarrow B) \Rightarrow B$ <u>est alors un théorème de</u> $\mathcal{C}$.

En effet, non $B \Rightarrow A$ est un théorème de $\mathcal{C}$ en vertu de R.I.5. Il en est donc de même de $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\text{non } B \Rightarrow B)$ en vertu de R.I.3. Or $(\text{non } B \Rightarrow B) \Rightarrow B$ est vraie (S.1) ; il résulte donc de R.I.3 que $(A \Rightarrow B) \Rightarrow B$ est un théorème de $\mathcal{C}$.

R.I.7. <u>Soient</u> A,B <u>et</u> C <u>des relations</u>. <u>Si</u> $B \Rightarrow C$ <u>est un théorème</u> <u>d'une théorie</u> $\mathcal{C}$, <u>il en est de même de</u> $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$.

En effet, la relation $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$ est vraie (en vertu de S.3) ; et la relation $((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ est un théorème de $\mathcal{C}$ en vertu de R.I.6 ; on conclut alors au moyen de R.I.3.

On notera l'analogie de R.I.7 avec R.I.3 .

S_d1. <u>Soient</u> A <u>et</u> B <u>des relations</u>. <u>La relation</u> $(\text{non } A \Rightarrow B) \Rightarrow ((B \Rightarrow A) \Rightarrow A)$ <u>est vraie</u>.

En effet, la relation $(\text{non } A \Rightarrow B) \Rightarrow ((B \Rightarrow A) \Rightarrow (\text{non } A \Rightarrow A))$ est vraie en vertu de S.3 . La relation $(\text{non } A \Rightarrow A) \Rightarrow A$ est vraie en vertu de S.2 ; il résulte donc de R.I.7 que la relation $((B \Rightarrow A) \Rightarrow (\text{non } A \Rightarrow A)) \Rightarrow ((B \Rightarrow A) \Rightarrow A)$ est vraie ; on conclut alors au moyen de R.I.3 .

S_d2 . <u>Soient</u> A <u>et</u> B <u>des relations</u>. <u>La relation</u> $(\text{non } A \Rightarrow \text{non non } B) \Rightarrow (\text{non } B \Rightarrow A)$ <u>est alors vraie</u>.

La relation $(\text{non } A \Rightarrow \text{non non } B) \Rightarrow ((\text{non non } B \Rightarrow A) \Rightarrow A)$ est vraie en vertu de S_d.1 ; non $B \Rightarrow (\text{non non } B \Rightarrow A)$ est vraie en vertu de S.2 . Il résulte donc de R.I.3 , d'abord que la relation $((\text{non non } B \Rightarrow A) \Rightarrow A) \Rightarrow (\text{non } B \Rightarrow A)$ est vraie, puisque la relation $(\text{non } A \Rightarrow \text{non non } B) \Rightarrow (\text{non } B \Rightarrow A)$ est vraie.

S_d3 . <u>Soit</u> A <u>une relation</u>. <u>La relation</u> non non A $\Rightarrow$ A <u>est alors vraie</u>.

La relation non non A $\Rightarrow$ (non non non A $\Rightarrow$ non non A) est vraie en vertu de S.2 . Il résulte donc de S_d.2 et de R.I.3 que la relation non non A $\Rightarrow$ (non A $\Rightarrow$ non non A) est vraie. Or il résulte de S_d.2 que (non A $\Rightarrow$ non non A) $\Rightarrow$ (non A $\Rightarrow$ A) est vraie, et de S.1 que (non A $\Rightarrow$ A) $\Rightarrow$ A est vraie. Il résulte donc d'une double application de R.I.3 que non non A $\Rightarrow$ A est vraie.

S_d4 . <u>Soit</u> A <u>une relation</u>. <u>La relation</u> (A $\Rightarrow$ non A) $\Rightarrow$ non A <u>est vraie</u>.

Nous appliquerons S_d1 en y remplaçant A par non A et B par A . Tenant compte de S_d3 et de la règle du syllogisme, on trouve que (A $\Rightarrow$ non A) $\Rightarrow$ non A est vraie.

S_d5 . <u>Soit</u> A <u>une relation</u>. <u>La relation</u> A $\Rightarrow$ non non A <u>est vraie</u>.

Les relations A $\Rightarrow$ (non A $\Rightarrow$ non non A) et (non A $\Rightarrow$ non non A) $\Rightarrow$ non non A sont vraies en vertu de S.2 et S_d4 . respectivement. On conclut alors au moyen de R.I.3 .

R.I.8. <u>Soient</u> A <u>et</u> B <u>des relations</u>. <u>Si</u> A $\Rightarrow$ B <u>est un théorème d'une théorie</u> $\mathcal{C}$, <u>il en est de même de</u> non B $\Rightarrow$ non A . Puisque non non A $\Rightarrow$ A est vraie (S_d.3), non non A $\Rightarrow$ B est un théorème de $\mathcal{C}$ (R.I.3) ; puisque B $\Rightarrow$ non non B est vraie (S_d.5), non non A $\Rightarrow$ non non B est un théorème de $\mathcal{C}$ (R.I.3) ; il résulte alors de R.I.4 que non B $\Rightarrow$ non A est un théorème de $\mathcal{C}$.

S_d6 . <u>Soient</u> A <u>et</u> B <u>des relations</u>. <u>La relation</u> non A $\Rightarrow$ (A $\Rightarrow$ B) <u>est alors vraie</u>.

La relation non A $\Rightarrow$ (non non A $\Rightarrow$ B) est vraie (S.2). Puisque A $\Rightarrow$ non non A est vraie (S_d.5), (non non A $\Rightarrow$ B) $\Rightarrow$ (A $\Rightarrow$ B) est vraie en vertu de R.I.3 ; on conclut alors au moyen d'une nouvelle application de R.I.3 .

La règle d'inférence que nous allons établir maintenant s'appelle le <u>théorème de la déduction</u> (bien que ce ne soit pas un théorème de la mathématique, ni d'aucune théorie, mais un résultat métamathématique). Cette règle va jouer un rôle essentiel dans la suite.

R.I.9. <u>Théorème de la déduction. Soit</u> $\mathcal{E}$ <u>une théorie, et soit</u> $\mathcal{E}'$ <u>la théorie obtenue en adjoignant une certaine relation</u> A <u>aux axiomes de</u> $\mathcal{E}$. <u>Si</u> B <u>est un théorème de</u> $\mathcal{E}'$, <u>la relation</u> $A \Rightarrow B$ <u>est un théorème de</u> $\mathcal{E}$.

Soit $(B_1, \ldots, B_n)$ une démonstration de B dans la théorie $\mathcal{E}'$. Nous allons montrer de proche en proche que les relations $A \Rightarrow B_k$ sont toutes des théorèmes de $\mathcal{E}$.

1) Si B_k est un axiome de la mathématique ou un axiome de la théorie $\mathcal{E}$, c'est un théorème de $\mathcal{E}$, et il en est de même de $A \Rightarrow B_k$ en vertu de R.I.5 .

2) Si B_k est un axiome de $\mathcal{E}'$ sans l'être de $\mathcal{E}$, il est identique à A , et $A \Rightarrow B_k$ est la relation $A \Rightarrow A$. Or les relations $A \Rightarrow (\text{non } A \Rightarrow A)$ et $(\text{non } A \Rightarrow A) \Rightarrow A$ sont vraies (S.2 et S.1) ; la relation $A \Rightarrow A$ est donc vraie en vertu de R.I.3 .

3) Supposons que B_k soit précédé dans la démonstration considérée par deux relations B_i et B_j telles que B_j soit $B_i \Rightarrow B_k$, et que nous sachions déjà que $A \Rightarrow B_i$ et $A \Rightarrow B_j$ sont des théorèmes de $\mathcal{E}$. Puisque $A \Rightarrow B_i$ est un théorème de $\mathcal{E}$, il résulte de R.I.3 que $(B_i \Rightarrow B_k) \Rightarrow (A \Rightarrow B_k)$ est un théorème de $\mathcal{E}$. Puisque $A \Rightarrow (B_i \Rightarrow B_k)$ est un théorème de $\mathcal{E}$, il résulte de R.I.3 que $A \Rightarrow (A \Rightarrow B_k)$ est un théorème de $\mathcal{E}$. Nous allons déduire de là que $A \Rightarrow B_k$ est un théorème de $\mathcal{E}$. En effet, non $(A \Rightarrow B_k) \Rightarrow$ non A est un théorème de $\mathcal{E}$ en vertu de R.I.8 . Or la relation non $A \Rightarrow (A \Rightarrow B_k)$ est vraie (S_d.6) ;

 22

il résulte donc de R.I.3 que non $(A \Rightarrow B_k) \Rightarrow (A \Rightarrow B_k)$ est un théorème de $\mathcal{E}$. Or (non $(A \Rightarrow B_k) \Rightarrow (A \Rightarrow B_k)) \Rightarrow (A \Rightarrow B_k)$ est une relation vraie en vertu de S.1. La relation $A \Rightarrow B_k$ est donc un théorème de $\mathcal{E}$.

4) Supposons que B_k soit précédé dans la démonstration par une relation B_i telle que B_k soit $(\mathrm{Sub}\ x/T)B_i$, x étant une lettre qui n'est pas une constante de $\mathcal{E}'$ et T un terme, et supposons que nous sachions déjà que $A \Rightarrow B_i$ est un théorème de $\mathcal{E}$. Tout axiome de $\mathcal{E}$ étant aussi un axiome de $\mathcal{E}'$, il en résulte que toute constante de $\mathcal{E}$ est aussi une constante de $\mathcal{E}'$, donc que x n'est pas une constante de $\mathcal{E}$ et que la relation $(\mathrm{Sub}\ x/T)(A \Rightarrow B_i)$ est un théorème de $\mathcal{E}$. De plus, toute lettre qui intervient dans A est une constante de $\mathcal{E}'$, ce qui montre que x n'intervient pas dans A. Il en résulte que $(\mathrm{Sub}\ x/T)(A \Rightarrow B_i)$ est identique à $A \Rightarrow (\mathrm{Sub}\ x/T)B_i$, c'est-à-dire à $A \Rightarrow B_k$, ce qui montre que $A \Rightarrow B_k$ est un théorème de $\mathcal{E}$.

Le théorème de la déduction est donc maintenant établi.

IV. CERTAINES MÉTHODES DE DÉMONSTRATION.

1. <u>Méthode des hypothèses auxiliaires</u>.

Supposons qu'il s'agisse de démontrer dans une certaine théorie $\mathcal{E}$ une relation implicative, donc une relation de la forme $A \Rightarrow B$, où A et B sont des relations. Il suffira pour cela, en vertu du théorème de la déduction, de démontrer B dans la théorie déduite de $\mathcal{E}$ en adjoignant A à la liste de ses axiomes.

En pratique, on indique qu'on va employer cette méthode de démonstration par une phrase du genre de la suivante : "Supposons que A soit vrai". Cette phrase indique que l'on va raisonner pour un moment dans la théorie $\mathcal{E}'$ déduite de la théorie $\mathcal{E}$ en adjoignant l'axiome A.

On reste dans la théorie $\mathcal{T}'$ jusqu'à ce qu'on y ait démontré la relation B ; ceci fait, il est établi que $A \Rightarrow B$ est un théorème de $\mathcal{T}$, et on continue (s'il y a lieu) à raisonner dans la théorie $\mathcal{T}$ sans indiquer en général que l'on abandonne la théorie $\mathcal{T}'$. La relation A que l'on introduit comme nouvel axiome s'appelle l'<u>hypothèse auxiliaire</u>.

2. <u>Méthode de la réduction à l'absurde</u>.

Supposons qu'il s'agisse de démontrer un théorème A dans une théorie $\mathcal{T}$. Formons une théorie $\mathcal{T}'$ qui se déduise de $\mathcal{T}$ par adjonction de l'axiome non A . Si on parvient à démontrer dans la théorie $\mathcal{T}'$ une relation de la forme non B , où B est un théorème de $\mathcal{T}$, on pourra affirmer que A est un théorème de $\mathcal{T}$. En effet, non $A \Rightarrow$ non B sera un théorème de $\mathcal{T}$ en vertu du théorème de la déduction. Il résultera alors de la règle R.I.4 que $B \Rightarrow A$ sera un théorème de $\mathcal{T}$. Puisque B est un théorème de $\mathcal{T}$, il résultera de la règle du syllogisme que A sera un théorème de $\mathcal{T}$. La méthode de démonstration que nous venons d'indiquer s'appelle <u>méthode de réduction à l'absurde</u>. On indique en général qu'on va employer cette méthode par une phrase du genre de la suivante : "Supposons que A soit fausse". Cette phrase indique que l'on va se placer pour un moment dans la théorie déduite de celle dont on s'occupe en y adjoignant l'axiome non A . On reste dans cette théorie jusqu'à ce qu'on y ait démontre un résultat qui soit la négation d'un théorème de la théorie $\mathcal{T}$ dont on s'occupe ; quand on y est parvenu, il est établi que A est un théorème, ce qu'on indique en général par une phrase du genre de la suivante "Or ceci (à savoir, dans les notations utilisées plus haut, non B) est impossible ; donc A est vrai" . Ceci fait, on revient à la théorie dont on s'occupait précédemment.

3. <u>Méthode de la disjonction de cas</u>.

Cette méthode est fondée sur la règle d'inférence suivante :

R.I.10. <u>Soient</u> A <u>et</u> B <u>des relations</u>. <u>Si</u> $A \Rightarrow B$ <u>et</u> non $A \Rightarrow B$ <u>sont des théorèmes d'une théorie</u> $\mathcal{E}$, B <u>est un théorème de</u> $\mathcal{E}$.

Il résulte de R.I.8 que non $B \Rightarrow$ non A est un théorème de $\mathcal{E}$, donc de R.I.3 que non $B \Rightarrow B$ est un théorème de $\mathcal{E}$. Faisant usage de S.1 et de la règle du syllogisme, on en conclut que B est un théorème de $\mathcal{E}$.

Ceci dit, supposons qu'il s'agisse de démontrer une relation B dans une théorie $\mathcal{E}$. Soit A une relation quelconque, et soient $\mathcal{E}'$ la théorie déduite de $\mathcal{E}$ en adjoignant A à la liste de ses axiomes, et $\mathcal{E}''$ la théorie déduite de $\mathcal{E}$ en adjoignant non A à la liste de ses axiomes. Si B est un théorème de chacune des théories $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{E}''$, il résultera du théorème de la déduction et de R.I.10 que B sera un théorème de $\mathcal{E}$. La méthode de démonstration que nous venons d'expliquer s'appelle <u>méthode de disjonction des cas</u>.

4. <u>Méthode des constantes auxiliaires</u>.

Supposons encore qu'il s'agisse de démontrer une relation B dans une théorie $\mathcal{E}$. Soit A une relation qui contient (entre autres) une lettre a qui n'est pas une constante de $\mathcal{E}$ et qui n'intervient pas dans B . Soit $\mathcal{E}'$ la théorie formée en adjoignant A à la liste des axiomes de $\mathcal{E}$; supposons que B soit un théorème de la théorie $\mathcal{E}'$. Supposons de plus que l'on connaisse un terme T tel que (Sub a/T)A soit un théorème de $\mathcal{E}$. Dans ces conditions, on pourra affirmer que B est un théorème de $\mathcal{E}$. En effet, il résultera du théorème de la déduction que $A \Rightarrow B$ sera un théorème de $\mathcal{E}$. Puisque a n'est pas une constante de $\mathcal{C}$, la relation (Sub a/T)(A $\Rightarrow$ B) sera un théorème de $\mathcal{C}$. Or *a* n'intervient pas dans B ; la relation (Sub a/T)(A $\Rightarrow$ B) est donc identique à (Sub a/T)A $\Rightarrow$ B . Puisque (Sub a/T)A est un théorème de $\mathcal{C}$, il en résultera que B est un théorème de $\mathcal{C}$.

La méthode de démonstration que nous venons d'indiquer s'appelle *méthode des constantes auxiliaires* ; la lettre *a* s'appelle la constante auxiliaire, et A *l'axiome introducteur* de cette constante. L'application de la méthode exige que l'on dispose d'un théorème de la forme (Sub a/T)A dans la théorie $\mathcal{C}$; ce théorème est appelé le *théorème de légitimation* de l'introduction de la constante auxiliaire *a* .

Intuitivement, la méthode en question consiste à se servir dans une démonstration d'un objet *a* que l'on suppose doué de certaines propriétés, qui sont exprimées par A . Par exemple, dans une démonstration de géomètrie où il s'agit (entre autres choses) d'une droite D , on peut "prendre" un point *a* sur cette droite ; la relation A est alors $a \in D$. Pour qu'on puisse se servir au cours d'une démonstration d'un objet doué de certaines propriétés, il faut évidemment qu'il y ait de tels objets ; la fonction du théorème de légitimation est de nous garantir cette existence.

On indique en général que l'on va introduire une constante auxiliaire *a* au moyen d'un axiome introducteur A par une phrase du genre de la suivante : "soit *a* un objet tel que A " . Le plus souvent, le fait qu'il existe de tels objets est déjà un fait bien connu dans la théorie dont on s'occupe ; s'il n'en est pas ainsi, on établit un théorème de légitimation soit au moment même où on introduit l'objet *a* , soit au contraire à la fin du raisonnement, au moment où on s'apprête à tirer la conclusion que B est un théorème.

On peut aussi introduire plusieurs constantes auxiliaires par un même axiome. Supposant toujours qu'il s'agisse de démontrer une relation B dans une théorie $\mathcal{E}$, soit par exemple A une relation qui contienne deux lettres a et b qui ne sont pas des constantes de $\mathcal{E}$ et qui n'interviennent pas dans B . Supposons que, dans la théorie déduite de $\mathcal{E}$ en adjoignant A à la liste de ses axiomes, on puisse démontrer la relation B . Supposons d'autre part que l'on ait des termes T et U tels que (Sub a/T)(Sub b/U)A soit un théorème de $\mathcal{E}$. Alors B est un théorème de $\mathcal{E}$. En effet, A $\Rightarrow$ B est un théorème de $\mathcal{E}$; puisque a et b ne sont pas des constantes de $\mathcal{E}$ et n'interviennent pas dans B , on en déduit d'abord que (Sub b/U)A $\Rightarrow$ B est un théorème de $\mathcal{E}$, puisque (Sub a/T)(Sub b/U)A $\Rightarrow$ B est un théorème de $\mathcal{E}$.

4. Applications d'une théorie.

Soit $\mathcal{E}$ une théorie, et soient $A_1,\dots,A_m$ les axiomes de $\mathcal{E}$. Nous désignerons par $a_1,\dots,a_h$ les constantes de la théorie $\mathcal{E}$. Soit $\mathcal{E}'$ une autre théorie ; supposons connus des termes $T_1,\dots,T_h$ tels que les relations (Sub a_1/T_1)...(Sub a_h/T_h)A_i (pour i allant de 1 à m) soient des théorèmes de $\mathcal{E}'$. Soit B un théorème de la théorie $\mathcal{E}$. Dans ces conditions, nous allons montrer que la relation (Sub a_1/T_1)...(Sub a_h/T_h)B est un théorème de $\mathcal{E}'$.

Supposons d'abord que la théorie $\mathcal{E}$ ne comporte qu'un seul axiome, soit A . La relation A $\Rightarrow$ B est alors une relation vraie de la mathématique. Faisant un usage répété de la règle de substitution, on voit que (Sub a_1/T_1)..(Sub a_h/T_h)A $\Rightarrow$(Sub a_1/T_1)...(Sub a_h/T_h)B est une relation vraie de la mathématique. Or $(\mathrm{Sub}\ a_1/T_1)\ldots(\mathrm{Sub}\ a_h/T_h)A$ est par hypothèse un théorème de $\mathcal{C}'$; il en est donc de même, en vertu de la règle du syllogisme, de $(\mathrm{Sub}\ a_1/T_1)\ldots(\mathrm{Sub}\ a_h/T_h)B$.

Pour montrer que notre assertion est vraie dans le cas général, il suffira de faire voir que, si elle est vraie pour une théorie $\mathcal{C}$, elle est aussi vraie pour une théorie $\mathcal{C}_1$ qui se déduit de $\mathcal{C}$ par adjonction d'un nouvel axiome A . Le raisonnement est à peu près le même que plus haut. En vertu du théorème de la déduction, $A \Rightarrow B$ est un théorème de $\mathcal{C}$. Sachant que notre assertion est vraie pour la théorie $\mathcal{C}$, on l'applique au théorème $A \Rightarrow B$ de cette théorie (cette étape se substitue ici à l'application répétée faite plus haut de la règle de substitution) ; sachant que $(\mathrm{Sub}\ a_1/T_1)\ldots(\mathrm{Sub}\ a_h/T_h)A$ est un théorème de $\mathcal{C}'$, on conclut comme plus haut en appliquant la règle du syllogisme.

Quand on applique la méthode que nous venons d'expliquer pour démontrer des théorèmes d'une théorie $\mathcal{C}'$, on dit qu'on <u>applique</u> dans $\mathcal{C}'$ les résultats de la théorie $\mathcal{C}$.

Intuitivement, la théorie $\mathcal{C}$ est l'étude de certains objets desquels on suppose qu'ils sont doués des propriétés exprimées par les axiomes de la théorie, <u>et rien d'autre</u>. On s'explique alors que les résultats obtenus dans cette théorie s'appliquent encore à tout système d'objets qui se trouvent être doués des mêmes propriétés.

5. <u>Sur les définitions dans les théories</u>.

Nous avons dit plus haut qu'une définition est une convention par laquelle on utilise un certain symbole D pour représenter un assemblage de signes E . Les seuls assemblages de signes que l'on désire représenter de manière abrégée sont naturellement ceux qui ont une signification intuitive, à savoir les termes et les relations. Les symboles D qui servent à représenter des relations sont le plus souvent (mais pas toujours) des phrases du langage ordinaire, excepté que la place de certains mots y est tenue par des lettres. Quant aux symboles qui servent à représenter des termes, ce sont le plus souvent des combinaisons de lettres et de signes spécifiques dans certaines positions relatives les uns par rapport aux autres ; mais ce peuvent être aussi des substantifs du langage ordinaire, affectés au besoin de qualificatifs ou de compléments qui peuvent être eux-mêmes des lettres.

Nous avons dit que le symbole D que l'on utilise pour désigner un assemblage de signes E contient en général toutes les lettres qui figurent dans E . Si x est une lettre, et si T est un terme, on représente l'assemblage de signes (Sub x/T)E par le symbole déduit de D en y remplaçant x par T . C'est pour pouvoir ainsi substituer des termes aux lettres qu'il est important que les symboles que l'on utilise pour désigner des assemblages de signes contiennent toutes les lettres qui figurent dans les assemblages qu'ils désignent. Si cependant la règle précédente conduit à des confusions, on utilise des artifices typographiques variés, dont le plus fréquent est de remplacer x par (T) au lieu de T . Il est impossible de codifier les règles que l'on suit en la matière ; la plupart dépendent de certains usages établis plus que de conventions systématiques. Dans la suite, nous utiliserons les parenthèses bien plus souvent dans l'intention de rendre claire la signification de symboles substitués que pour désigner les signes (et) de la mathématique formelle.

* Pour donner quelques exemples de notations, supposons que les lettres x,y,z soient employées pour désigner des entiers. On utilise xy pour représenter le produit de x et de y ; si on substitue $y+z$ à y dans ce symbole, on obtient le produit de x par $y+z$, qui se désigne par $x(y+z)$, tandis que $xy+z$ désigne la somme de z et du produit de x par y . On désigne par xy^2 le produit de x par le carré de y , mais par $(xy)^2$ le carré de xy . La notation x^y représente la puissance y-ième de x ; x^{y+z} représente la puissance $(y+z)$-ième de x ; x^{y+z} représente la puissance $(y+z)$-ième de x ; x^{y^z} représente la puissance y^z-ième de x , tandis que $(x^y)^z$ représente la puissance z-ième de x^y . On notera que les définitions précédentes ne sont applicables que si les lettres x,y,z "représentent des entiers" ; c'est un type de restriction à la portée des définitions dont nous parlerons un peu plus en détail au § VII . *

Soit maintenant $\mathcal{T}$ une théorie, et soit E un assemblage de signes (terme ou relation) qui contient, entre autres lettres, certaines constantes de $\mathcal{T}$. Puisque, tant qu'on reste dans la théorie $\mathcal{T}$, on ne peut rien substituer aux constantes, il n'y aura pas d'inconvénient, <u>dans la théorie</u> $\mathcal{T}$, à représenter E par un symbole D qui ne contient pas celles des lettres figurant dans E qui sont des constantes de $\mathcal{T}$.

*Ainsi, la théorie d'un groupe G comporte deux constantes, l'une, G , qui représente un ensemble, et l'autre, μ (la multiplication dans G), qui représente une application de $G \times G$ dans G . Si x et y sont des éléments de G , on désigne en général par xy l'image $\mu(x,y)$

du couple (x,y) par μ : cette notation ne comporte pas la lettre μ, qui figure dans $\mu(x,y)$, mais qui est une constante de la théorie. De plus, on notera qu'elle n'est applicable que si x et y "représentent des éléments de G" ; cf. VII).

Supposons maintenant qu'on applique la théorie $\mathcal{C}$ dans une théorie $\mathcal{C}'$ (cf. n°4). Cela se fait en associant aux constantes $a_1,\dots,a_h$ de $\mathcal{C}$ certains termes $T_1,\dots,T_h$ qui ne contiennent aucune des lettres $a_1,\dots,a_h$. Si nous avons une définition dans la théorie $\mathcal{C}$ par laquelle on convient de représenter dans cette théorie un terme ou une relation E par un symbole D qui ne contient pas celles des lettres $a_1,\dots,a_h$ qui figurent dans E, on convient en général de représenter encore par D l'assemblage de signes obtenu en substituant $T_1,\dots,T_h$ à $a_1,\dots,a_h$ dans E.
* Ainsi, si on rencontre un groupe dans une théorie $\mathcal{C}'$, on désigne encore par xy le produit de x par y dans ce groupe, si x et y représentent dans $\mathcal{C}'$ des éléments du groupe en question ; si μ' est la multiplication du groupe considéré, xy représentera $\mu'(x,y)$ qui se déduit de $\mu(x,y)$ en y substituant μ' à μ.*

Cette manière de faire peut évidemment prêter à deux sortes de confusions : d'une part, il peut arriver que D possède déjà un sens en vertu d'une définition propre à la théorie $\mathcal{C}'$, et d'autre part il arrive fréquemment que l'on applique de plusieurs manières la théorie $\mathcal{C}$ dans la théorie $\mathcal{C}'$ (*par exemple que l'on considère simultanément plusieurs groupes dans la théorie $\mathcal{C}'$*). Tantôt alors le contexte indique suffisamment ce dont on veut parler en utilisant le symbole D, tantôt on modifie D pour éviter les confusions. On cherchera toujours à tenir un juste équilibre entre la tendance à avoir des notations trop simples mais abusivement équivoques et celle à acheter la précision au prix d'une complication typographique de nature à rendre la lecture du texte difficile.

NBR 042 31

V. DISJONCTION, CONJONCTION, EQUIVALENCE.

Soient A et B des relations. Affirmer que l'<u>une au moins</u> de ces relations exprime une vérité sur certains objets représentés par les lettres qui y entrent, c'est dire que, si l'assertion exprimée par A est fausse, celle exprimée par B est vraie. Nous conviendrons donc de désigner par "A ou B" la relation non A $\Longrightarrow$ B .

Affirmer que les assertions exprimées par A et par B sont toutes deux vraies, c'est dire qu'il est faux que l'une ou l'autre de ces assertions soit fausse. Nous conviendrons donc de désigner par "A et B" la relation non ((non A) ou (non B)) .

Enfin, nous conviendrons de désigner par "A $\Longleftrightarrow$ B" la relation "(A $\Longrightarrow$ B) et (B $\Longrightarrow$ A)" , Quand nous voudrons affirmer que la relation A $\Longleftrightarrow$ B est vraie (ou vraie dans une théorie $\mathcal{C}$), nous dirons que les relations A et B sont équivalentes (ou équivalentes dans $\mathcal{C}$).

La relation A $\Longrightarrow$ B se désigne encore souvent par "une condition suffisante pour que B est A " , ou "une condition nécessaire pour que A est B " . Quand à la relation A $\Longleftrightarrow$ B , elle se désigne aussi par "une condition nécessaire et suffisante pour que B est A " .

S_d 7 . <u>Soient</u> A <u>et</u> B <u>des relations</u>. <u>Les relations</u> A $\Longrightarrow$ (A ou B) , B $\Longrightarrow$ (A ou B) <u>sont alors vraies</u>.

La première de ces relations est identique à S.2 . Pour démontrer la seconde, supposons B vraie (cf.IV, n°1) ; non A $\Longrightarrow$ B est alors vraie en vertu de R.I.5 .

R.I.11. <u>Si les relations</u> "A ou B" <u>et</u> non A <u>sont des théorèmes d'une théorie</u> $\mathcal{C}$, B <u>est un théorème de</u> $\mathcal{C}$.

C'est la règle du syllogisme.

32

R.I.12. <u>Si des relations</u> A <u>et</u> B <u>sont des théorèmes d'une théorie</u> $\mathcal{C}$, "A et B" <u>est un théorème de</u> $\mathcal{C}$.

Nous procéderons par réduction à l'absurde. Formons une théorie $\mathcal{C}'$ par adjonction à $\mathcal{C}$ de l'axiome non(A et B). La relation non non (non A ou non B) est alors vraie dans $\mathcal{C}'$; il en est de même, en vertu de $S_d.3$, III, de "(non A) ou (non B)" . Or, A étant vrai dans $\mathcal{C}$, il en est de même de non non A ($S_d.5$, § III), et il résulte de R.I.11 que non B est vrai dans $\mathcal{C}'$: nous sommes arrivés à une absurdité.

R.I.13. <u>Si la relation</u> "A et B" <u>est un théorème d'une théorie</u> $\mathcal{C}$, <u>les relations</u> A <u>et</u> B <u>sont toutes deux des théorèmes de</u> $\mathcal{C}$.

En effet, non A $\Rightarrow$((non A) ou (non B)) est une relation vraie en vertu de $S_d.7$, et ((non A) ou (non B)) $\Rightarrow$ non (A et B) est vraie en vertu de $S_d.5$, § III ; il en résulte par R.I.3, § III que non A $\Rightarrow$ non (A et B) est vraie, et par R.I.4, § III que (A et B) $\Rightarrow$ A est vraie. On voit de la même manière que (A et B) $\Rightarrow$ B est vraie ; on conclut au moyen de la règle du syllogisme.

Il résulte des règles R.I.12 et R.I.13 que, pour établir que des relations A , B sont équivalentes dans une théorie $\mathcal{C}$, il suffit d'établir que A $\Rightarrow$ B et B $\Rightarrow$ A sont des théorèmes de $\mathcal{C}$. Cela se fait souvent en démontrant B dans la théorie obtenue par adjonction de A aux axiomes de $\mathcal{C}$ puis en démontrant A dans la théorie obtenue par adjonction de B aux axiomes de $\mathcal{C}$.

R.I.14. <u>Soient</u> A,B <u>et</u> C <u>des relations</u>. <u>Si</u> A $\Leftrightarrow$ B <u>est un théorème d'une théorie</u> $\mathcal{C}$, <u>il en est de même de</u> B $\Leftrightarrow$ A . <u>Si</u> A $\Leftrightarrow$ C <u>et</u> B $\Leftrightarrow$ C <u>sont des théorèmes de</u> $\mathcal{C}$, <u>il en est de même de</u> A $\Leftrightarrow$ B .

La première assertion résulte tout de suite de ce que nous avons dit juste avant l'énoncé de R.I.14. Si $A \Leftrightarrow C$ et $B \Leftrightarrow C$ sont des théorèmes de $\mathcal{C}$, il en est de même de $A \Rightarrow C$, $C \Rightarrow A$, $B \Rightarrow C$ et $C \Rightarrow B$. Faisant usage de R.I.3, § III, on voit que $A \Leftrightarrow B$ et $B \Leftrightarrow A$ sont des théorèmes de $\mathcal{C}$.

Il résulte de R.I.14 que, si $A \Leftrightarrow B$ et $B \Leftrightarrow C$ sont des théorèmes d'une théorie $\mathcal{C}$, il en est de même de $A \Leftrightarrow C$. On en conclut que, si on a une suite de relations dont chacune (sauf la dernière) est équivalente à la suivante dans une certaine théorie, deux relations quelconques de la suite sont équivalentes dans la théorie.

R.I.15. <u>Soient</u> A <u>et</u> B <u>des relations qui sont équivalentes dans une théorie</u> $\mathcal{C}$. <u>Les relations</u> non A <u>et</u> non B <u>sont alors équivalentes dans</u> $\mathcal{C}$. <u>Si</u> C <u>est une relation, les relations de chacun des couples suivants sont équivalentes l'une à l'autre dans</u> $\mathcal{C}$: a) $A \Rightarrow C$ <u>et</u> $B \Rightarrow C$; b) $C \Rightarrow A$ et $C \Rightarrow B$; c) "A ou C" <u>et</u> "B ou C" ; d) "A et C" <u>et</u> "B et C".

Les relations $A \Rightarrow B$ et $B \Rightarrow A$ sont par hypothèse des théorèmes de $\mathcal{C}$. La première assertion de R.I.15 résulte alors de R.I.8, § III. Les relations $(A \Rightarrow C) \Rightarrow (B \Rightarrow C)$ et $(B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ sont vraies dans $\mathcal{C}$ en vertu de R.I.3, § III ; les relations $(C \Rightarrow A) \Rightarrow (C \Rightarrow B)$ et $(C \Rightarrow B) \Rightarrow (C \Rightarrow A)$ sont vraies dans $\mathcal{C}$ en vertu de R.I.7, § III. Les relations non A et non B étant équivalentes dans $\mathcal{C}$ en vertu de la première assertion de R.I.15, on voit que "A ou C" et "B ou C" sont équivalentes dans $\mathcal{C}$. Il en est de même des relations "(non A) ou (non C)" et "(non B) ou (non C)", donc aussi des relations "A et C" et "B et C".

R.I.16. *Soient* A *et* B *des relations qui sont équivalentes dans une théorie* $\mathcal{T}$ *, et soit* x *une lettre qui n'est pas une constante de* $\mathcal{T}$. *Si* T *est un terme, les relations* (Sub x/T)A *et* (Sub x/T)B *sont alors équivalentes dans* $\mathcal{T}$.

Les relations $A \Rightarrow B$ et $B \Rightarrow A$ étant des théorèmes de $\mathcal{T}$, il en est de même des relations (Sub x/T)($A \Rightarrow B$) et (Sub x/T)($B \Rightarrow A$), qui sont respectivement identiques à (Sub x/T)A $\Rightarrow$ (Sub x/T)B et à (Sub x/T)B $\Rightarrow$ (Sub x/T)A .

S_d8. *Soient* A,B *et* C *des relations*. *Les relations* "A et (B et C)" *et* "B et (A et C)" *sont alors équivalentes*.

Formons en effet la théorie $\mathcal{T}$ dont l'axiome est "A et (B et C)". Dans cette théorie, A et "B et C" sont des théorèmes (R.I.13) ; il en résulte que A,B et C sont des théorèmes de $\mathcal{T}$, donc, en vertu de R.I.12 que B et "A et C" sont des théorèmes de $\mathcal{T}$, puis que "B et (A et C)" est un théorème de $\mathcal{T}$. On en conclut que la relation (A et (B et C)) $\Rightarrow$ (B et (A et C)) est vraie. Echangeant les rôles joués par A et B , on voit que (B et (A et C)) $\Rightarrow$ (A et (B et C)) est aussi une relation vraie.

On convient de désigner la relation "A et (B et C)" par "A et B et C" . Plus généralement, si on a des relations $A_1,\ldots,A_h$, on désigne par "A_1 et ... et A_h" une relation qui se construit de proche en proche par la convention que "A_1 et ... et A_h" désigne la même relation que "A_1 et (A_2 et ... et A_h)" . La relation "A_1 et ... et A_h" est un théorème d'une théorie $\mathcal{T}$ si et seulement si chacune des relations $A_1,\ldots,A_h$ est un théorème de $\mathcal{T}$.

Nous avons défini plus haut une théorie $\mathcal{T}'$ comme étant plus forte qu'une théorie $\mathcal{T}$ quand les axiomes de $\mathcal{T}$ sont des théorèmes de $\mathcal{T}'$;

nous avons vu que tous les théorèmes de $\mathcal{E}$ sont alors des théorèmes de $\mathcal{E}'$. Il peut arriver que chacune des théories $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ soit plus forte que l'autre ; on dit alors que ces deux théories sont <u>équivalentes</u>. S'il en est ainsi, tout théorème de l'une des théories est aussi un théorème de l'autre. Si $A_1, \ldots, A_h$ sont les axiomes d'une théorie $\mathcal{E}$, cette théorie est équivalente, en vertu de ce qui a été dit plus haut, à la théorie admettant l'axiome unique "A_1 et ... et A_h". On voit donc que toute théorie est équivalente à une théorie qui possède un seul axiome et les mêmes constantes que la théorie donnée.

S_d9. <u>Soient</u> A,B <u>et</u> C <u>des relations</u>. <u>La relation</u> (A et (B $\Rightarrow$ C)) $\Rightarrow$ (B $\Rightarrow$ (A et C)) <u>est alors vraie</u>.

Soit $\mathcal{E}$ la théorie dont l'axiome est "A et (B $\Rightarrow$ C)". Les relations A et B $\Rightarrow$ C sont alors des théorèmes de $\mathcal{E}$. Adjoignons l'axiome B à l'axiome de $\mathcal{E}$. Nous obtenons une théorie $\mathcal{E}'$ dans laquelle les relations A,B et C sont vraies. La relation "A et C" est un théorème de $\mathcal{E}'$; il résulte alors du théorème de la déduction que la relation B $\Rightarrow$ (A et C) est un théorème de $\mathcal{E}$, d'où on conclut à la validité de S_d9.

VI. QUANTIFICATEURS.

Nous allons maintenant introduire un nouveau schéma d'axiomes de la mathématique. C'est le suivant :

S.4 . *Soient* R *une relation et* x *une lettre. La relation* $R \Rightarrow (\mathrm{Sub}\ x/\varepsilon_x(R))R$ *est alors vraie*.

On va tirer de là la validité du schéma d'axiomes suivant :

S_d10. *Soient* R *une relation,* x *une lettre et* T *un terme. La relation* $(\mathrm{Sub}\ x/T)R \Rightarrow (\mathrm{Sub}\ x/\varepsilon_x(R))R$ *est alors vraie*.

La relation $(\mathrm{Sub}\ x/T)(R \Rightarrow (\mathrm{Sub}\ x/\varepsilon_x(R))R)$ est vraie en vertu de S.4 et de la règle de substitution. Or le terme $\varepsilon_x(R)$ ne contient pas x ; il en résulte que $(\mathrm{Sub}\ x/\varepsilon_x(R))R$ ne contient pas x , et que la relation $(\mathrm{Sub}\ x/T)(R \Rightarrow (\mathrm{Sub}\ x/\varepsilon_x(R))R)$ est identique à $(\mathrm{Sub}\ x/T)R \Rightarrow (\mathrm{Sub}\ x/\varepsilon_x(R))R$.

Le schéma S_d10 éclaire la signification intuitive qu'il convient de donner aux termes de la forme $\varepsilon_x(R)$. En effet, considérons R comme exprimant une certaine propriété de l'objet désigné par x . La relation dont S_d10 affirme la vérité exprime que, s'il y a un terme T qui possède la propriété en question, alors l'objet représenté par $\varepsilon_x(R)$ possède cette propriété. Le terme $\varepsilon_x(R)$ représente donc un objet dont on peut affirmer qu'il possède la propriété exprimée par R dès qu'on connaît un objet possédant cette propriété. Si on supposait par exemple que l'univers dans lequel nos objets peuvent être pris se réduisait au système des nombres entiers, on pourrait convenir que $\varepsilon_x(R)$ représente le plus petit entier possédant la propriété R dans le cas où il y a au moins un entier la possédant, et 0 (ou n'importe quel autre entier) dans le cas contraire. Ce que nous supposons par S.4, c'est que, dans l'univers dont nos lettres sont censées représenter les objets, à toute propriété R d'un objet correspond un objet privilégié $\varepsilon_x(R)$ duquel on peut affirmer que la propriété R est vraie pour peu qu'elle soit de quelque objet de notre univers.

Affirmer que la relation $(\mathrm{Sub}\ x/\varepsilon_x(R))R$ est vraie revient donc au même que d'affirmer l'existence d'un objet duquel R , considéré comme propriété de x , soit vraie. Il est donc naturel de faire la convention suivante :

si R *est une relation et* x *une lettre, la relation* $(\mathrm{Sub}\ x/\varepsilon_x(R))R$ *se désigne par* "il existe un x tel que R" , *ou, plus brièvement, par* $(\exists\ x)R$.

Le schéma $S_d.10$ devient alors

$S_d.11$. *Soient* R *une relation,* x *une lettre et* T *un terme. La relation* $(\mathrm{Sub}\ x/T)R \Rightarrow (\exists\ x)R$ *est vraie*.

Le terme $\varepsilon_x(R)$ ne contenant pas x , *la relation* $(\exists\ x)R$ *ne contient pas* x . De plus, *si* x' *est une lettre qui n'intervient pas dans* R , *et si* R' *est la relation* $(\mathrm{Sub}\ x/x')R$, *la relation* $(\exists\ x')R'$ *est identique à* $(\exists\ x)R$. En effet, l'assemblage de signes $(\mathrm{Sub}\ x'/\square)R'$ est identique à $(\mathrm{Sub}\ x/\square)R$, donc $\varepsilon_{x'}(R')$ est identique à $\varepsilon_x(R)$, ce qui établir notre assertion.

Si y *est une lettre distincte de* x *et* U *un terme ne contenant pas* x , *la relation* $(\mathrm{Sub}\ y/U)(\exists\ x)R$ *est identique à* $(\exists\ x)(\mathrm{Sub}\ y/U)R$. Soit en effet t le terme $\varepsilon_x(R)$, et soit t' le terme $(\mathrm{Sub}\ y/U)t$. La relation $(\mathrm{Sub}\ y/U)(\exists\ x)R$ est identique à $(\mathrm{Sub}\ y/U)(\mathrm{Sub}\ x/t)R$, donc, puisque U ne contient pas x , à $(\mathrm{Sub}\ x/t')(\mathrm{Sub}\ y/U)R$. Or, U ne contenant pas x et y étant distinct de x , on voit tout de suite que t' est $\varepsilon_x((\mathrm{Sub}\ y/U)R)$, de sorte que $(\mathrm{Sub}\ x/t')(\mathrm{Sub}\ y/U)R$ est $(\exists\ x)(\mathrm{Sub}\ y/U)R$.

Si on a dans une théorie $\mathcal{C}$ un théorème de la forme $(\exists x)R$, ce théorème peut servir de légitimation à l'introduction d'une constante auxiliaire <u>a</u>. Supposons qu'il s'agisse de démontrer une relation S dans la théorie $\mathcal{C}$. On introduit une constante auxiliaire <u>a</u>, ne figurant ni dans R ni dans S ni dans les axiomes de $\mathcal{C}$, avec l'axiome introducteur (Sub x/a)R. La relation (Sub a/ε_x(R))(Sub x/a)R, étant identique à $(\exists x)R$, est un théorème de $\mathcal{C}$, ce qui légitime l'introduction de <u>a</u>. Si on peut démontrer S dans la théorie comportant, en plus des axiomes de $\mathcal{C}$, l'axiome (Sub x/a)R, S sera un théorème de $\mathcal{C}$.

R.I.17. <u>Soient</u> R <u>et</u> S <u>des relations</u>. <u>Supposons que</u> $R \Rightarrow S$ <u>soit un théorème d'une théorie</u> $\mathcal{C}$ <u>dont</u> x <u>n'est pas une constante</u>. <u>La relation</u> $(\exists x)R \Rightarrow (\exists x)S$ <u>est alors un théorème de</u> $\mathcal{C}$.

Puisque x n'est pas une constante de $\mathcal{C}$, la relation (Sub x/ε_x(R))($R \Rightarrow S$) est un théorème de $\mathcal{C}$. Cette relation est $(\exists x)R \Rightarrow$ (Sub x/ε_x(R))S. Or (Sub x/ε_x(R))S $\Rightarrow (\exists x)S$ est une relation vraie (par S_d.11) ; on en conclut, par R.I.3, § III que $(\exists x)R \Rightarrow (\exists x)S$ est un théorème de $\mathcal{C}$.

R.I.18. <u>Soient</u> R <u>et</u> S <u>des relations qui sont équivalentes dans une théorie</u> $\mathcal{C}$. <u>Si</u> x <u>est une lettre qui n'est pas une constante de</u> $\mathcal{C}$, <u>les relations</u> $(\exists x)R$ <u>et</u> $(\exists x)S$ <u>sont équivalentes dans</u> $\mathcal{C}$.

Cela résulte immédiatement de R.I.17.

S_d.12. <u>Soient</u> R <u>et</u> S <u>des relations, et</u> x <u>une lettre qui ne figure pas dans</u> R. <u>Les relations</u> $(\exists x)$(R et S) <u>et</u> "R et $(\exists x)S$" <u>sont alors équivalentes</u>.

Si T est un terme quelconque, (Sub x/T)(R et S) est identique à "(Sub x/T)R et (Sub x/T)S" , donc à "R et (Sub x/T)S ". Soit $\mathcal{C}$ la théorie d'axiome ($\exists$ x)(R et S). Prenant pour T le terme ε_x(R et S), on voit, en vertu de R.I.13, § V , que R et (Sub x/T)S sont des théorèmes de $\mathcal{C}$, donc aussi R et ($\exists$ x)S (en vertu de S_d.11), et "R et ($\exists$ x)S" est un théorème de $\mathcal{C}'$ en vertu de R.I.12, § V . Soit maintenant $\mathcal{C}'$ la théorie d'axiome "R et ($\exists$ x)S " . Prenant pour T le terme ε_x(S), on voit que (Sub x/T)(R et S) est un théorème de $\mathcal{C}$, donc aussi ($\exists$ x)(R et S).

Si R est une relation, et x une lettre, la relation "non ($\exists$ x)R se désigne par "il n'existe aucun x tel que R " . Faisant usage de S_d.11 et de R.I.8, § III, on voit que, si T est un terme, la relation

(1) il n'existe aucun x tel que R $\Rightarrow$ non (Sub x/T)R est vraie.

Intuitivement, affirmer qu'une relation R , considérée comme représentant une propriété d'un objet x , est vraie de tout objet, c'est affirmer qu'elle n'est fausse d'aucun. Il est donc naturel de faire la convention suivante :

<u>si</u> R <u>est une relation et</u> x <u>une lettre, la relation</u> "il n'existe aucun x tel que non R" <u>se désigne par</u> "pour tout x , R" , <u>ou par</u> "quel que soit x,R" , <u>ou, plus brièvement, par</u> ($\forall$ x)R .

La relation ($\forall$ x)R ne contient pas la lettre x . Si x' est une lettre qui n'intervient pas dans R , et R' la relation (Sub x/x')R , la relation ($\forall$ x')R' est identique à ($\forall$ x)R . Si y est une lettre distincte de x et U un terme ne contenant pas x , la relation (Sub y/U)($\forall$ x)R est identique à ($\forall$ x)(Sub y/U)R . Ces assertions se déduisent tout de suite des assertions correspondantes faites plus haut pour les relations de la forme ($\exists$ x)R .

S_d.13. Soient R une relation et x une lettre. Les relations $(\forall x)R$ et $Sub\ (x/\varepsilon_x(\text{non } R))R$ sont équivalentes.

La relation $(Sub\ x/\varepsilon_x\ (\text{non } R))R$ est équivalente (en vertu de S_d.3 et 5, § III) à non non $(Sub\ x/\varepsilon_x\ (\text{non } R))R$, et cette dernière relation est identique à non $(Sub\ x/\varepsilon_x\ (\text{non } R))\text{non } R$, donc à non $(\exists x)$ non R, donc à $(\forall x)R$.

Intuitivement, S_d.13 signifie que, si une relation R est considérée comme exprimant une propriété d'un objet x, il y a un objet tel que l'on puisse affirmer que, si R est vraie de cet objet, R est vraie de tout objet.

S_d14 . Soient R une relation, x une lettre et T un terme. La relation $(\forall x)R \Rightarrow (Sub\ x/T)R$ est alors vraie.

Il résulte de (1) que $(\forall x)R \Rightarrow$ non $(Sub\ x/T)$ non R est vraie. Or non $(Sub\ x/T)$ non R est identique à non non $(Sub\ x/T)R$, et non non $(Sub\ x/T)R \Rightarrow (Sub\ x/T)R$ est vraie en vertu de S_d.3, § III. On conclut au moyen de R.I.3, § III.

R.I.19. Supposons qu'une relation R soit un théorème d'une théorie $\mathcal{C}$ et que x est une lettre qui n'est pas une constante de $\mathcal{C}$. La relation $(\forall x)R$ est alors un théorème de $\mathcal{C}$.

En effet, $(Sub\ x/\varepsilon_x\ (\text{non } R))R$ est un théorème de $\mathcal{C}$, et on conclut au moyen de S_d.13.

S Par contre, si x est une constante de la théorie $\mathcal{C}$, on n'a nullement le droit de conclure de la vérité de R dans $\mathcal{C}$ à celle de $(\forall x)R$. Car, le fait que R soit vrai de x, qui est, dans $\mathcal{C}$, un objet fixe bien déterminé, n'entraîne évidemment pas que R soit vrai de tout objet.

R.I.20. <u>Soient</u> R <u>et</u> S <u>des relations et</u> x <u>une lettre</u>. <u>Si</u> R $\Rightarrow$ S <u>est un théorème d'une théorie</u> $\mathcal{C}$ <u>dont</u> x <u>n'est pas une constante</u>, $(\forall x)R \Rightarrow (\forall x)S$ <u>est un théorème de</u> $\mathcal{C}$.

Formons une théorie $\mathcal{C}'$ en adjoignant $(\forall x)R$ aux axiomes de $\mathcal{C}$; x , ne figurant pas dans $(\forall x)R$, n'est pas une constante de $\mathcal{C}'$. La relation R est un théorème de $\mathcal{C}'$ en vertu de S_d.14 (appliqué en prenant pour T la lettre x). Il en résulte que S est un théorème de $\mathcal{C}'$, donc aussi $(\forall x)S$ en vertu de R.I.19 .

R.I.21. <u>Soient</u> R <u>et</u> S <u>des relations qui sont équivalentes dans une théorie</u> $\mathcal{C}$ <u>et</u> x <u>une lettre qui n'est pas une constante de</u> $\mathcal{C}$. <u>Les relations</u> $(\forall x)R$ <u>et</u> $(\forall x)S$ <u>sont alors équivalentes dans</u> $\mathcal{C}$.

Cela résulte immédiatement de R.I. 20 .

S_d16. <u>Soient</u> R <u>et</u> S <u>des relations, et</u> x <u>une lettre</u>. <u>Les relations</u> $(\forall x)$(R et S) <u>et</u> "$(\forall x)R$ et $(\forall x)S$" <u>sont alors équivalentes</u>.

Soit $\mathcal{C}$ la théorie fondée sur l'axiome $(\forall x)$(R et S). La lettre x n'est pas une constante de $\mathcal{C}$. La relation "R et S" est un théorème de $\mathcal{C}$ en vertu de S_d.14 ; R et S sont donc des théorèmes de $\mathcal{C}$ (R.I.13, § V), et il en est de même de $(\forall x)R$ et de $(\forall x)S$ en vertu de R.I.19 . La relation "$(\forall x)R$ et $(\forall x)S$" est un théorème de $\mathcal{C}$ en vertu de R.I.12, § V .

Soit $\mathcal{C}'$ la théorie fondée sur l'axiome "$(\forall x)R$ et $(\forall x)S$" . Les relations $(\forall x)R$, $(\forall x)S$ sont des théorèmes de $\mathcal{C}'$; il en est donc de même de R , de S et de "R et S" ; x n'étant pas une constante de $\mathcal{C}'$, $(\forall x)$(R et S) est un théorème de $\mathcal{C}'$.

VII. TYPES D'OBJETS.

Soit A une relation qui ne contient qu'une seule lettre *a* . Cette relation peut s'interprèter intuitivement comme exprimant une propriété de l'objet désigné par *a* . On donne souvent un nom générique aux objets qui possèdent cette propriété. Cela se fait par une définition dans laquelle il est stipulé que la phrase "*a* est un ..." (nous laissons en blanc le nom que l'on choisit de donner) désigne la relation A . Si T est un terme quelconque, "T est un ..." désigne alors la relation (Sub a/T)A .

Dans ce qui suit ici, nous supposerons que, si A est une relation qui ne contient qu'une seule lettre *a* , on convient d'appeler "objets de type A " les objets qui possèdent la propriété exprimée par A ; ce que nous dirons s'appliquera *mutatis mutandis* au cas où on choisit d'autres noms génériques. Au lieu d'écrire "T est un objet de type A" , nous écrirons "T est de type A " .

Quand on veut démontrer une relation R dans une théorie $\mathcal{T}$ et qu'on désire se servir au cours de la démonstration d'un objet de type A , on introduit cet objet par une phrase du genre de : "soit *b* un objet de type A " . Cette manière de faire n'est bien entendu légitime que si on a un théorème de légitimation pour l'introduction de *b* , c'est-à-dire si $(\exists\, a)A$ est un théorème de $\mathcal{T}$, et si *b* n'intervient ni dans les axiomes de $\mathcal{T}$ ni dans R .

Il arrive fréquemment que certaines définitions comportent la convention qu'on ne les appliquera que si certaines lettres représentent des objets de types déterminés. D'une manière plus précise, soient A,B,...,C des relations qui ne contiennent chacune qu'une seule lettre, et soit E un assemblage de signes qui comporte (entre autres) certaines lettres x,y,...,z , en nombre égal à celui des relations A,B,...,C .

N6K 042 43

On pourra alors convenir de représenter E par un certain symbole D dans le cas où x est de type A, y de type B,...,z de type C . Cela signifie qu'on convient de n'employer le symbole D pour représenter E que dans des théories dans lesquelles les relations "x est de type A" , "y est de type B" ,...,"z est de type C" sont vraies ; et de même on convient de ne substituer à x,y,...,z dans le symbole D que des termes dont il est vrai (dans la théorie dans laquelle on est) qu'ils sont des types A,B,...,D .

Dans ce qui va suivre, A et B représenteront des relations ne contenant chacune qu'une seule lettre.

Soient R une relation et x une lettre. Considérant intuitivement R comme exprimant une propriété de l'objet représenté par x , dire qu'il y a un objet de type A qui possède cette propriété, c'est dire qu'il y a un objet x qui possède en même temps la propriété d'être de type A et la propriété exprimée par R . Nous ferons donc la convention suivante

<u>si</u> R <u>est une relation et</u> x <u>une lettre, on désigne la relation</u> $(\exists x)((x \text{ est de type } A) \text{ et } R)$ <u>par</u> "il existe un x de type A tel que R " , <u>ou, plus brièvement, par</u> $(\exists_A x)R$.

Dire que tous les objets de type A possèdent la propriété R , c'est dire que R n'est fausse d'aucun objet de type A . On fait donc la convention suivante :

<u>si</u> R <u>est une relation et</u> x <u>une lettre, on désigne la relation</u> non $(\exists_A x)$ non R <u>par</u> " pour tout x de type A , R" <u>ou par</u> "quel que soit x de type A ,R" <u>ou, plus brièvement, par</u> $(\forall_A x)R$.

Aucune des deux relations $(\exists_A x)R$, $(\forall_A x)R$ ne contient x . Si x' est une lettre ne figurant pas dans R , et R' la relation (Sub x/x')R , les relations $(\exists_A x')R'$ et $(\forall_A x')R'$ sont respectivement identiques à $(\exists_A x)R$ et à $(\forall_A x)R$. Si y est une lettre distincte de x , et U un terme ne contenant pas x , la relation (Sub y/U)($\exists_A$ x)R est identique à ($\exists_A$ x)(Sub y/U)R , et (Sub y/U)($\forall_A$ x)R est identique à ($\forall_A$ x)(Sub y/U)R . Celles des assertions précédentes qui se réfèrent aux relations comportant un ($\exists_A$ x) se déduisent tout de suite des assertions correspondantes faites au § VI sur les relations de la forme ($\exists$ x)R ; celles qui se réfèrent aux assertions comportant un ($\forall_A$ x)R se déduisent tout de suite de celles qui se réfèrent aux relations qui comportent un ($\exists_A$ x).

S_d.16. <u>Soient</u> R <u>une relation et</u> x <u>une lettre</u>. <u>Les relations</u> ($\forall_A$ x)R <u>et</u> ($\forall$ x)((x est de type A) $\Rightarrow$ R) <u>sont équivalentes</u>.

La relation ($\forall_A$ x)R est non ($\exists$ x)((x est de type A) et non R). Or ((x est de type A) et non R) est identique à la relation non ((non (x est de type A)) ou (non non R)), c'est-à-dire encore à non ((x est de type A) $\Rightarrow$ non non R). Or, non non R est équivalente à R (S_d.3 et 5, § III) ; non ((x est de type A) $\Rightarrow$ non non R) est donc équivalente à non ((x est de type A) $\Rightarrow$ R) en vertu de R.I.15, § V , et il résulte de R.I.18, § VI que la relation ($\forall_A$ x)R est équivalente à non ($\exists$ x) non ((x est de type A) $\Rightarrow$ R), qui est identique à ($\forall$ x)((x est de type A) $\Rightarrow$ R).

S_d.17. <u>Soient</u> R <u>une relation et</u> x <u>une lettre</u>. <u>Les relations</u> ($\exists_A$ x)R $\Rightarrow$ ($\exists$ x)R <u>et</u> ($\forall$ x)R $\Rightarrow$ ($\forall_A$ x)R <u>sont vraies</u>.

Il résulte immédiatement de R.I.13, § V et du théorème de la déduction que ((x est de type A) et R) $\Rightarrow$ R est une relation vraie. La première assertion de S_d.17 résulte alors de R.I.17, § VI. La seconde résulte de la première (appliquée à non R au lieu de R) et de R.I.4 , § III .

R.I.22. Soit R une relation et x une lettre. Supposons que la relation R $\Rightarrow$ (x est de type A) soit un théorème d'une théorie $\mathcal{E}$ et que x ne soit pas une constante de $\mathcal{E}$. Les relations $(\exists_A x)R$ et $(\exists x)R$ sont alors équivalentes dans $\mathcal{E}$, et il en est de même des relations $(\forall_A x)R$ et $(\forall x)R$.

Soit U la relation "x est de type A". La relation R $\Rightarrow$ (U et R) est un théorème de $\mathcal{E}$. Adjoignons en effet R aux axiomes de $\mathcal{E}$; nous obtenons une théorie $\mathcal{E}'$ dont R et R $\Rightarrow$ U sont des théorèmes. Il en résulte que R,U et par suite aussi "U et R" (R.I.12, § V) sont des théorèmes de $\mathcal{E}'$, et par suite que R $\Rightarrow$ (U et R) est un théorème de $\mathcal{E}$. La relation $(\exists x)R \Rightarrow (\exists_A x)R$ est donc vraie dans $\mathcal{E}$ en vertu de R.I.17, § VI, et la première assertion de R.I.22 résulte de S_d.17. La seconde résulte de la première (appliquée à non R) et de R.I.15, § V.

Supposons en particulier que A soit une relation vraie de la mathématique. Il en est alors de même de "x est de type A", et par suite aussi de R $\Rightarrow$ (x est de type A) (en vertu de R.I.5, § III). On en conclut que, dans ce cas, les relations $(\exists_A x)R$ et $(\exists x)R$ sont équivalentes, et qu'il en est de même des relations $(\forall_A x)R$ et $(\forall x)R$. L'étude des relations de la forme $(\exists x)R$ et $(\forall x)R$ peut donc rentrer comme cas particulier dans celle des relations de la forme $(\exists_A x)R$ et $(\forall_A x)R$.

R.I.23. Soient R une relation, x une lettre et T un terme. Si "T est de type A" est un théorème d'une théorie $\mathcal{E}$, il en est de même des relations (Sub x/T)R $\Rightarrow (\exists_A x)R$ et $(\forall_A x)R \Rightarrow$ (Sub x/T)R.

Soit $\mathcal{E}'$ la théorie formée en adjoignant (Sub x/T)R aux axiomes de $\mathcal{E}$. Il résulte alors de R.I.12, § V que la relation

(Sub x/T)((x est de type A) et R), qui est identique à "(T est de type A) et (Sub x/T)R" est un théorème de $\mathcal{C}'$; il en est donc de même de $(\exists_A x)R$ en vertu de S_d.11, § VI, ce qui établit la première assertion de R.I.20. La seconde résulte de la première (appliquée à non R au lieu de R), de R.I.4, § III et du fait que non (Sub x/T)R est identique à (Sub x/T) non R .

R.I.24. <u>Soient</u> R <u>une relation et</u> x <u>une lettre</u>. <u>Si la relation</u> (x est de type A) $\Longrightarrow$ R <u>est vraie dans une théorie</u> $\mathcal{C}$ <u>dont</u> x <u>n'est pas une constante, il en est de même de la relation</u> $(\forall_A x)R$.

Cela résulte de R.I.19, § VI et de S_d.16 .

Si $(\exists_A x)R$ est un théorème d'une théorie $\mathcal{C}$, ce théorème peut servir de théorème de légitimation à l'introduction d'une constante auxiliaire <u>a</u> avec l'axiome introducteur "a est de type A et (Sub x/a)R " Dans la théorie ainsi construite, les relations "<u>a</u> est de type A" et (Sub x/a)R sont vraies, en vertu de R.I.13, § V . Quand on introduit une constante auxiliaire <u>a</u> avec l'axiome introducteur cité plus haut, on le fait en général par une phrase du genre de la suivante : "Soit <u>a</u> un objet de type A tel que (Sub x/a)R " ; la lettre <u>a</u> ne doit naturellement figurer ni dans R ni dans la relation que l'on désire démontrer ni dans les axiomes de la théorie dans laquelle on se trouve.

Il arrive fréquemment que l'on démontre par l'absurde des relations de la forme $(\forall_A x)R$. Supposons qu'il s'agisse de démontrer $(\forall_A x)R$ dans une théorie $\mathcal{C}$; on introduit alors l'hypothèse supplémentaire non $(\forall_A x)R$; soit $\mathcal{C}'$ la théorie ainsi obtenue. Dans $\mathcal{C}'$, non non $(\exists_A x)$ non R est un théorème, et il en est donc de même de $(\exists_A x)$ non R (en vertu de S_d.3, § III). On pourra donc introduire une constante auxiliaire a (ne figurant ni dans les axiomes de $\mathcal{C}$ ni dans R) avec l'axiome introducteur "a est de type A et non (Sub x/a)R ". En pratique, on procède en général comme suit : on dit "Supposons qu'il existe un objet a de type A tel que (Sub x/a)R soit faux ; ...", et on cherche alors à établir avec cette hypothèse un théorème de la forme non B , où B soit un théorème de $\mathcal{C}$ ne contenant pas a . Si on y parvient, il sera établi que $(\forall_A x)R$ est un théorème de $\mathcal{C}$.

R.I.25. Soient R et S des relations et x une lettre. Supposons que la relation (x est de type A) $\Rightarrow$ (R $\Rightarrow$ S) soit un théorème d'une théorie $\mathcal{C}$ dont x n'est pas une constante. Les relations $(\exists_A x)R \Rightarrow (\exists_A x)S$ et $(\forall_A x)R \Rightarrow (\forall_A x)S$ sont alors des théorèmes de $\mathcal{C}$.

Soit $\mathcal{C}'$ la théorie formée par adjonction aux axiomes de l'hypothèse auxiliaire $(\exists_A x)R$. Introduisons une constante auxiliaire a (ne figurant ni dans R ni dans S ni dans les axiomes de $\mathcal{C}$) avec l'axiome introducteur "(a est de type A) et (Sub x/a)S" . La lettre x n'est pas une constante de $\mathcal{C}'$; il résulte alors de la règle de substitution que (a est de type A) $\Rightarrow$ (Sub (x/a)R $\Rightarrow$ (Sub x/a)S) est un théorème de $\mathcal{C}'$. Or "a est de type A" et (Sub x/a)R sont des théorèmes de la théorie $\mathcal{C}''$ que nous avons formée en introduisant a . Il en est donc de même (par la règle du syllogisme) de (Sub x/a)S , et, en vertu de R.I.23, de $(\exists_A x)S$. Cette dernière relation, ne contenant pas a , est un théorème de $\mathcal{C}'$, ce qui établit la première assertion de R.I.25 . Il résulte de R.I.8, § III et du théorème de la déduction que (R $\Rightarrow$ S) $\Rightarrow$ (non S $\Rightarrow$ non R) est une relation vraie. La relation (x est de type A) $\Rightarrow$ (non S $\Rightarrow$ non R) est donc vraie dans $\mathcal{C}$. La seconde assertion de R.I.25 résulte alors de la première et de R.I.8, § III .

R.I.26. Soient R et S des relations et x une lettre. Supposons que (x est de type A) $\Rightarrow$ (R $\Leftrightarrow$ S) soit un théorème d'une théorie $\mathcal{T}$ dont x n'est pas une constante. Les relations $(\exists_A x)R$ et $(\exists_A x)S$ sont alors équivalentes dans $\mathcal{T}$, et il en est de même des relations $(\forall_A x)R$ et $(\forall_A x)S$.

Les relations (R $\Leftrightarrow$ S) $\Rightarrow$ (R $\Rightarrow$ S) et (R $\Leftrightarrow$ S) $\Rightarrow$ (S $\Rightarrow$ R) sont vraies en vertu de R.I.13, § V et du théorème de la déduction. Les relations (x est de type A) $\Rightarrow$ (R $\Rightarrow$ S) et (x est de type A) $\Rightarrow$ (S $\Rightarrow$ R) sont donc vraies dans $\mathcal{T}$, et R.I.26 résulte de R.I.25.

Remarque. Les conclusions de R.I.25 (resp.: de R.I.26) demeurent valables si on suppose seulement que R $\Rightarrow$ S (resp.: R $\Leftrightarrow$ S) est un théorème de $\mathcal{T}$. Car il résulte alors de R.I.5, § III que (x est de type A) $\Rightarrow$ (R $\Rightarrow$ S) (resp.: (x est de type A) $\Rightarrow$ (R $\Leftrightarrow$ S)) est un théorème de $\mathcal{T}$.

R.I.27. Soient R une relation, x et y des lettres distinctes et T et U des termes. Supposons que "T est de type A" et "U est de type B" soient des théorèmes d'une théorie $\mathcal{T}$. Les relations

(Sub x/T)(Sub y/U)R $\Rightarrow$ $(\exists_B y)(\exists_A x)R$ et

$(\forall_B y)(\forall_A x)R$ $\Rightarrow$ (Sub x/T)(Sub y/U)R sont alors des théorèmes de $\mathcal{T}$.

Soit $\mathcal{T}'$ la théorie formée en adjoignant aux axiomes de $\mathcal{T}$ l'hypothèse auxiliaire (Sub x/T)(Sub y/U)R. La relation

(Sub x/T)(Sub y/U)((x est de type A) et (y est de type B) et R)

est un théorème de $\mathcal{T}'$. Ce théorème peut servir de théorème de légitimation à l'introduction de deux constantes auxiliaires a et b ne figurant ni dans R ni dans les axiomes de $\mathcal{T}$ et distinctes l'une de l'autre et de x, y avec l'axiome introducteur "(a est de type A) et (b est de type B) et (Sub x/a)(Sub y/b)R " . Soit $\mathcal{C}'$ la théorie ainsi formée ; désignons par R' la relation (Sub x/a)(Sub y/b)R . Les relations "a est de type A" , "b est de type B" et R' sont des théorèmes de $\mathcal{C}'$. Il résulte de R.I.23 que $(\exists_A a)$R' est un théorème de $\mathcal{C}'$. Cette relation est identique à $(\exists_A a)$ (Sub x/a) (Sub x/b)R , donc à $(\exists_A x)$(Sub y/b)R (car a n'intervient pas dans (Sub y/b)R) donc à (Sub y/b)$(\exists_A x)$R . Il résulte donc de R.I.23' que $(\exists_B b)$(Sub y/b)$(\exists_A x)$R est un théorème de $\mathcal{C}''$. Or cette relation est identique à $(\exists_B y)(\exists_A x)$R car b n'intervient pas dans $(\exists_A x)$R . La relation $(\exists_B y)(\exists_A x)$R , ne contenant ni a ni b , est un théorème de $\mathcal{C}''$, et (Sub x/T)(Sub y/U)R $\Longrightarrow$ $(\exists_B y)(\exists_A x)$R est un théorème de $\mathcal{C}'$. La relation $(\forall_B y)(\forall_A x)$R est identique à non $(\exists_B y)$ non non $(\exists_A x)$ non R . Or la relation non non $(\exists_A x)$ non R est équivalente dans la mathématique à $(\exists_A x)$ non R (par S_d.3 et 5, § III) ; il résulte donc de R.I.26 que $(\forall_B y)(\forall_A x)$R est équivalente à non $(\exists_B y)(\exists_A x)$ non R . La relation

non (Sub x/T)(Sub y/U)R $\Longrightarrow$ $(\exists_B y)(\exists_A x)$ non R

est vraie dans $\mathcal{C}$ en vertu de ce que nous avons démontré plus haut. On en conclut que $(\forall_B y)(\forall_A x)$R $\Longrightarrow$ non non (Sub x/T)(Sub y/U)R est vraie dans $\mathcal{C}$ en vertu de R.I.4, § III . Or la relation non non (Sub x/T)(Sub y/U)R $\Longrightarrow$ (Sub x/T)(Sub y/U)R est vraie en vertu de S_d3., § III. La relation $(\forall_B y)(\forall_A x)$R $\Longrightarrow$ (Sub x/T)(Sub y/U)R est donc vraie dans $\mathcal{C}$.

Soient R une relation et x et y des lettres distinctes. Supposons que $(\exists_A x)(\exists_B y)$R soit un théorème d'une théorie $\mathcal{C}$. Introduisons une constante auxiliaire a (ne figurant ni dans R ni dans les axiomes de $\mathcal{C}$)

avec l'axiome introducteur "(a est de type A) et (Sub x/a)($\exists_B$y)R " . Dans la théorie ainsi obtenue, la relation (Sub x/a)($\exists_B$y)R est un théorème. Or cette relation est identique à ($\exists_B$y)(Sub x/a)R . Introduisons une constante auxiliaire b , distincte de a , de x et de y , ne figurant ni dans R ni dans les axiomes de $\mathcal{C}$) avec l'axiome introducteur "(b est de type B) et (Sub y/b)(Sub x/a)R " . Nous obtenons ainsi une théorie $\mathcal{C}'$ dans laquelle les relations "a est de type A" , "b est de type B" et (Sub y/b)(Sub x/a)R sont des théorèmes. De plus, tout théorème de $\mathcal{C}'$ qui ne contient ni a ni b est un théorème de $\mathcal{C}$. La relation (Sub x/a)(Sub y/b)R , qui est identique à (Sub y/b)(Sub x/a)R , est un théorème de $\mathcal{C}'$; il résulte alors de R.I.27 que la relation ($\exists_B$y)($\exists_A$x)R est un théorème de $\mathcal{C}$.

S_d.18. Soient R une relation et x et y des lettres distinctes. Les relations ($\exists_A$x)($\exists_B$y)R et ($\exists_B$y)($\exists_A$x)R sont alors équivalentes, et il en est de même des relations ($\forall_A$x)($\forall_B$y)R et ($\forall_B$y)($\forall_A$x)R .

Il résulte de ce que nous venons de dire que la relation ($\exists_A$x)($\exists_B$y)R $\Rightarrow$ ($\exists_B$ y)($\exists_A$x)R est vraie. Echangeant les rôles joués par x et par y , on voit que ($\exists_B$y)($\exists_A$x)R $\Rightarrow$ ($\exists_A$x)($\exists_B$y)R est vraie, ce qui montre que les relations ($\exists_A$x)($\exists_B$y)R et ($\exists_B$y)($\exists_A$x)R sont équivalentes.

Nous avons vu plus haut que la relation ($\forall_A$x)($\forall_B$y)R est équivalente à non ($\exists_A$x)($\exists_B$y) non R . De même, la relation ($\forall_B$y)($\forall_A$x)R est équivalente à non ($\exists_B$y)($\exists_A$x) non R . L'équivalence de ($\forall_A$x)($\forall_B$y)R et de ($\forall_B$y)($\forall_A$x)R résulte donc de la première partie de S_d.18 et de R.I.15, § III .

S_d.19. <u>Soient</u> R <u>une relation et</u> x <u>et</u> y <u>des lettres distinctes</u> : $(\exists_A x)(\forall_B y)R \Rightarrow (\forall_B y)(\exists_A x)R$ <u>est une relation vraie</u>.

Soit $\mathcal{C}$ la théorie fondée sur l'axiome $(\exists_A x)(\forall_B y)R$. Introduisons une constante auxiliaire <u>a</u> (distincte de x et de y et ne figurant pas dans) avec l'axiome introducteur "(a est de type A) et (Sub x/a) $(\forall_B y)R$ " . Nous formons ainsi une théorie $\mathcal{C}'$. La relation $(\forall_B y)$(Sub x/a)R , qui est identique à (Sub x/a)$(\forall_B y)R$, est un théorème de $\mathcal{C}'$. Par ailleurs, la relation "a est de type A" est un théorème de $\mathcal{C}'$; il en est donc de même, en vertu de R.I.23, de (Sub x/a)R $\Rightarrow$ $\Rightarrow (\exists_A x)R$, et aussi, en vertu de R.I.25, de la relation $(\forall_B y)$(Sub x/a)R $\Rightarrow (\forall_B y)(\exists_A x)R$ (on notera que y n'est pas une constante de $\mathcal{C}'$). On en conclut que $(\forall_B y)(\exists_A x)R$, qui ne contient pas a , est un théorème de $\mathcal{C}$, ce qui établit S_d.19 .

Par contre, si $(\forall_B y)(\exists_A x)R$ est un théorème d'une théorie $\mathcal{C}$, on n'a nullement le droit d'en conclure qu'il en soit de même de $(\exists_A x)(\forall_B y)R$. Intuitivement, la relation $(\forall_B y)(\exists_A x)R$ signifie qu'étant donné un objet y quelconque de type B , il existe toujours un objet x de type A tel que R soit vrai de x et de y . Mais l'objet x dépendra en général du choix de l'objet y , tandis que $(\exists_A x)(\forall_B y)R$ signifie qu'il y a un objet fixe x , toujours le même, et de type A , tel que R soit vrai de cet objet et de tout objet y de type B . Par contre, on a le résultat suivant :

R.I.28. <u>Soient</u> R <u>une relation et</u> x <u>et</u> y <u>des lettres distinctes. Soit</u> T <u>un terme qui ne contient pas</u> y ; <u>si</u> "T est de type A" <u>est un théorème d'une théorie</u> $\mathcal{C}$, <u>il en est de même de la relation</u> $(\forall_B y)$(Sub x/T)R $\Rightarrow (\exists_A x)(\forall_B y)R$.

VIII. L'ÉGALITÉ.

Nous allons maintenant introduire deux schémas d'axiomes qui traduisent en termes formels des propriétés évidentes de la notion d'égalité.

S.5. <u>Si</u> x <u>est une lettre, la relation</u> $x=x$ <u>est vraie</u>.

S.6. <u>Soient</u> R <u>une relation et</u> x <u>et</u> y <u>des lettres</u>. <u>La relation</u> $(x=y) \Rightarrow ((\mathrm{Sub}\ y/x)R \Leftrightarrow R)$ <u>est vraie</u>.

S_d.21. <u>Si</u> x <u>et</u> y <u>sont des lettres, la relation</u> $(x=y) \Rightarrow (y=x)$ <u>est vraie</u>.

Appliquant S.6 à la relation $y=x$, nous voyons que la relation $(x=y) \Rightarrow (x=x \Leftrightarrow y=x)$ est vraie. Si $\mathcal{C}$ est la théorie d'axiome $x=y$, $x=x \Rightarrow y=x$ est un théorème de $\mathcal{C}$, donc aussi $y=x$ en vertu de S.5 .

S_d22. <u>Si</u> x,y <u>et</u> z <u>sont des lettres, la relation</u> $x=y \Rightarrow (y=z \Rightarrow x=z)$ <u>est vraie</u>.

Il résulte de S.6 que la relation $(x=y) \Rightarrow (x=z \Leftrightarrow y=z)$ est vraie. Or la relation $(x=z \Leftrightarrow y=z) \Rightarrow (y=z \Rightarrow x=z)$ est vraie en vertu de R.I.13, § V et du théorème de la déduction.

Supposons qu'on ait une suite de termes $T_1, T_2, \ldots, T_h$ et que chacune des relations $T_1=T_2$, $T_2=T_3, \ldots, T_{h-1}=T_h$ soit vraie dans une théorie $\mathcal{C}$. La relation $T_1=T_h$ est vraie dans $\mathcal{C}$. En effet, il résulte de S_d.22, de la règle de substitution et de la règle du syllogisme que, si T,T' et T" sont des termes et si $T=T'$ et $T'=T''$ sont des théorèmes de $\mathcal{C}$, $T=T''$ est un théorème de $\mathcal{C}$.

Soit T un terme ; supposons qu'on veuille démontrer une certaine relation R dans une théorie $\mathcal{C}$. On peut alors toujours introduire une constante auxiliaire <u>a</u> (qui ne figure ni dans R ni dans T ni dans les axiomes de $\mathcal{C}$) avec l'axiome introducteur $a=T$. En effet, la relation $T=T$ est vraie en vertu de S.5, et sert de théorème de légitimation à l'introduction de <u>a</u> . Quand on introduit une constante auxiliaire <u>a</u> avec l'axiome a=T , on le fait en général en disant : "Posons a=T" .

R.I.29. <u>Soient</u> R <u>une relation</u>, x <u>une lettre et</u> T <u>et</u> T' <u>des termes</u>. <u>Supposons que</u> T=T' <u>soit un théorème d'une théorie</u> $\mathcal{C}$. <u>Il en est alors de même de la relation</u> (Sub x/T)R $\Longleftrightarrow$ (Sub x/T')R .

Nous nous servirons de deux lettres a et y que nous supposerons distinctes l'une de l'autre et n'intervenant ni dans R ni dans T ni dans T' ni dans les axiomes de $\mathcal{C}$. Nous introduirons <u>a</u> comme constante auxiliaire avec l'axiome a=T ; soit $\mathcal{C}'$ la théorie ainsi obtenue. Il résulte de S_d.21 que T=a est un théorème de $\mathcal{C}'$, et de S.6 que la relation (y=a) $\Longrightarrow$ ((Sub a/y)(Sub x/a)R $\Longleftrightarrow$ (Sub x/a)R) est vraie. Or, y n'est pas une constante de $\mathcal{C}'$; faisant usage de la règle de substitution et observant que (Sub y/T)(Sub a/y)(Sub x/a)R est identique à (Sub x/T)R , on voit que (Sub x/T)R et (Sub x/a)R sont équivalentes dans $\mathcal{C}'$. Or, T=T' étant un théorème de $\mathcal{C}'$, il en est de même de a=T' , et on voit comme plus haut que les relations (Sub x/T')R et (Sub x/a)R sont équivalentes dans $\mathcal{C}'$. La relation (Sub x/T)R $\Longleftrightarrow$ $\Longleftrightarrow$ (Sub x/T')R est donc vraie dans $\mathcal{C}'$. Ne contenant pas a , elle est vraie dans $\mathcal{C}$.

<u>Relations fonctionnelles</u>.

Soit $\mathcal{C}$ une théorie. Soient R une relation et x une lettre. On dit que R est <u>fonctionnelle en</u> x <u>dans la théorie</u> $\mathcal{C}$ si x n'est pas une constante de $\mathcal{C}$ et si les relations ($\exists$ x)R et R $\Longrightarrow$ (x = ε_x(R)) sont des théorèmes de $\mathcal{C}$. La règle suivante est celle qu'on utilise le plus souvent pour établir qu'une relation est fonctionnelle dans une théorie.

R.I.30. <u>Soient</u> R <u>une relation et</u> x <u>une lettre</u>. <u>Soit</u> $\mathcal{T}$ <u>une théorie dont</u> x <u>n'est pas une constante</u>. <u>Soit</u> y <u>une lettre ne figurant pas dans</u> R <u>et qui n'est pas une constante de</u> $\mathcal{T}$. <u>Pour que</u> R <u>soit fonctionnelle en</u> x <u>dans une théorie</u> $\mathcal{T}$, <u>il faut et suffit que les relations</u> $(\exists x)R$ <u>et</u> $R \Rightarrow ((\text{Sub } x/y)R \Rightarrow x=y)$ <u>soient des théorèmes de</u> $\mathcal{T}$.

Soit $\mathcal{T}'$ la théorie formée en adjoignant R aux axiomes de $\mathcal{T}$. Supposont d'abord que R soit fonctionnelle en x dans $\mathcal{T}$. Puisque x n'est pas une constante de $\mathcal{T}$ et ne figure pas dans $\varepsilon_x(R)$, il résulte de la règle de substitution que la relation $(\text{Sub } x/y)R \Rightarrow (y=\varepsilon_x(R))$ est vraie dans $\mathcal{T}$. Il en est donc de même, en vertu de $S_d.21$, de $(\text{Sub } x/y)R \Rightarrow (\varepsilon_x(R)=y)$ Or la relation $x = \varepsilon_x(R)$ est vraie dans $\mathcal{T}'$; il en est donc de même (par $S_d.22$) de $(\varepsilon_x(R)=y) \Rightarrow (x=y)$, d'où on conclut que $(\text{Sub } x/y)R \Rightarrow x=y$ est un théorème de $\mathcal{T}'$ et que $R \Rightarrow ((\text{Sub } x/y)R \Rightarrow x=y)$ est un théorème de $\mathcal{T}$. Supposons maintenant que $(\exists x)R$ et $R \Rightarrow ((\text{Sub } x/y)R \Rightarrow x=y)$ soient des théorèmes de $\mathcal{T}$. La relation $(\text{Sub } x/y)R \Rightarrow x=y$ est alors un théorème de $\mathcal{T}'$. Or, y n'est pas une constante de $\mathcal{T}'$, et la relation $(\text{Sub } y/\varepsilon_x(R))(\text{Sub } x/y)R$ est identique à $(\text{Sub } x/\varepsilon_x(R))R$, donc à $(\exists x)R$. On en conclut que $(\exists x)R \Rightarrow x = \varepsilon_x(R)$ est un théorème de $\mathcal{T}'$, donc que $x= \varepsilon_x(R)$ est un théorème de $\mathcal{T}'$ et par suite que $R \Rightarrow (x=\varepsilon_x(R))$ est un théorème de $\mathcal{T}$.

<u>Remarque</u>. On n'a d'ailleurs pas besoin de se servir du fait que $(\exists x)R$ est vraie dans $\mathcal{T}$ pour conclure de la vérité de $R \Rightarrow ((\text{Sub } x/y)R \Rightarrow x=y)$ dans $\mathcal{T}$ à celle de $R \Rightarrow (x=\varepsilon_x(R))$. Faisant usage de la méthode de disjonction des cas et de ce que nous avons établi plus haut, il suffit de montrer que, si non $(\exists x)R$ est vrai dans $\mathcal{T}$, il en est de même de $R \Rightarrow (x=\varepsilon_x(R))$. Or la relation $R \Rightarrow (\exists x)R$ est vraie ($S_d.11$, § VI) ; il en est donc de même de

non ($\exists$ x)R $\Rightarrow$ non R (R.I.4, § III). Par ailleurs, la relation non R $\Rightarrow$ (R $\Rightarrow$ ($x=\varepsilon_x(R)$)) est vraie en vertu de $S_d.6$, § III, ce qui établit notre assertion.

Intuitivement, la relation R $\Rightarrow$ ((Sub x/y)R $\Rightarrow$ x=y) signifie que, si des objets x et y possèdent la propriété exprimée par R , ces objets sont identiques. La relation ($\forall$ x)($\forall$ y)(R $\Rightarrow$ ((Sub x/y)R $\Rightarrow$ x=y) se désigne par "il n'y a qu'un x au plus tel que R ", et la relation "il existe un x tel que R et il n'y a qu'un x au plus tel que R" se désigne par "il y a un x et un seul tel que R" . Affirmer que cette relation est vraie dans une théorie $\mathcal{C}$ revient au même que d'affirmer que R est fonctionnelle en x dans $\mathcal{C}$ (cf.$S_d.14$ et R.I.19, § VI).

Soient R une relation et x une lettre. Supposons que R soit fonctionnelle en x dans une théorie $\mathcal{C}$. Si on introduit, comme cela se fait très souvent, un symbole F pour représenter le terme $\varepsilon_x(R)$ dans la théorie $\mathcal{C}$, on dit que F est un <u>symbole fonctionnel</u> de la théorie $\mathcal{C}$. Conformément à ce qui a été dit au § IV, n°5, le symbole F contiendra en général toutes les lettres qui figurent dans $\varepsilon_x(R)$, c'est-à-dire les lettres distinctes de x qui figurent dans R , sauf celles de ces lettres qui sont des constantes de $\mathcal{C}$.

La situation suivante se présente fréquemment. Soit $\mathcal{C}$ une théorie ; soient R une relation, x une lettre qui n'est pas une constante de $\mathcal{C}$, et y,...,z d'autres lettres qui ne sont pas des constantes de $\mathcal{C}$ et qui figurent dans R . Il peut se produire que R , sans être fonctionnelle en x dans la théorie $\mathcal{C}$, le devienne dans la théorie $\mathcal{C}'$ obtenue par adjonction aux axiomes de $\mathcal{C}$ des axiomes "y est de type B",..., "z est de type C", où B,...,C sont des relations dont chacune ne contient qu'une seule lettre. On dit alors que "R est fonctionnelle en x dans $\mathcal{C}$ si y est de type B ,...,z est de type C ". On peut alors représenter $\varepsilon_x(R)$ par un symbole F dans la théorie $\mathcal{C}$, et on dit que F est un symbole fonctionnel si y est de type B,...,z de type C . On convient de ne remplacer, dans un tel symbole fonctionnel, les lettres y,...,z que par des termes U,...,V tels que "U est de type B" ,..., "V est de type C" soient des théorèmes de $\mathcal{C}$.

R.I.31. Soient R une relation, x et y des lettres distinctes, B une relation ne comportant qu'une seule lettre. Supposons que R soit fonctionnelle en x si y est de type B dans une théorie $\mathcal{C}$ dont y n'est pas une constante. Soit U un terme qui ne contient pas x ; supposons que "U est de type B" soit un théorème de $\mathcal{C}$. La relation (Sub y/U)R est alors fonctionnelle en x dans $\mathcal{C}$.

Il résulte du théorème de la déduction que les relations

$$(y \text{ est de type } B) \Longrightarrow (\exists x)R$$

$$(y \text{ est de type } B) \Longrightarrow (R \Rightarrow (x = \varepsilon_x(R)))$$

sont des théorèmes de $\mathcal{C}$. De plus, x n'est pas une constante de la théorie $\mathcal{C}'$ obtenue par adjonction de "y est de type B" aux axiomes de $\mathcal{C}$; a fortiori, x n'est pas une constante de $\mathcal{C}$. La lettre y n'étant pas une constante de $\mathcal{C}$, il résulte par substitution des relations écrites plus haut que les relations

$$(U \text{ est de type } B) \Longrightarrow (\text{Sub } y/U)(\exists x)R$$

$$(U \text{ est de type } B) \Longrightarrow ((\text{Sub } y/U)R \Rightarrow (x=(\text{Sub } y/U)\varepsilon_x(R)))$$

sont vraies dans $\mathcal{C}$.

Or, "U est de type B" est par hypothèse un théorème de $\mathcal{C}$. Le terme U ne contenant pas x , (Sub y/U)($\exists$ x)R est identique à ($\exists$ x)(Sub y/U)R , et (Sub y/U)ε_x(R) est identique à ε_x((Sub y/U)R) . On voit donc que (Sub y/U)R est fonctionnelle en x dans $\mathcal{C}$.

On voit donc que, si F est un symbole fonctionnel attaché à R dans $\mathcal{C}$, le symbole F' obtenu de F en y remplaçant y par U sera un symbole fonctionnel dans $\mathcal{C}$, attaché à la relation (Sub y/U)R . Cela veut dire que, si on a un terme T tel que la relation (Sub x/T)(Sub y/U)R soit un théorème de $\mathcal{C}$, la relation T=F' sera un théorème de $\mathcal{C}$: cela se voit tout de suite en substituant T à x dans le théorème
(Sub y/U)R $\Rightarrow$ (x=ε_x((Sub y/U)R) .

On pourrait développer des considérations analogues pour le cas d'une relation R qui est fonctionnelle en x sous condition que plusieurs lettres y,...,z soient de types déterminés ; nous laissons au lecteur le soin de formuler des règles analogues à R.I.31 pour ce cas.

Soient enfin R une relation, x,y,...,z des lettres distinctes, et A,B,...,C des relations ne comportant chacune qu'une seule lettre. Soit $\mathcal{C}$ une théorie dont x,y,...,z ne sont pas des constantes. Il peut arriver que R ne soit pas fonctionnelle en x dans $\mathcal{C}$, même si on suppose que y,...,z sont de types B,...,C , mais que la relation "R et (x est de type A)" soit fonctionnelle en x si y est de type B,...,z est de type C . Dans ce cas, si on utilise un symbole F pour représenter le terme ε_x(R et (x est de type A)), on dit encore que F est un symbole fonctionnel attaché à R . On convient naturellement de ne remplacer dans F les lettres y,...,z que par des termes U,...,V tels que "U est de type B",...,"V est de type C" soient des théorèmes de $\mathcal{C}$. Si F' est le résultat de semblables substitutions, la relation "F' est de type A" sera un théorème de $\mathcal{C}$. De plus, si on a un terme T tel que (Sub x/T)R et "T est de type A" soient des théorèmes de $\mathcal{C}$, la relation T=F' sera un théorème de $\mathcal{C}$.

Dans la situation que nous venons de décrire dans les lignes qui précèdent, l'introduction du symbole fonctionnel F se fait en général par une phrase du genre de la suivante : "Soient y un objet du type B,..., z un objet du type C ; on désigne alors par F l'objet x de type A tel que R ".

<u>Elimination de lettres</u>.

Soient T un terme et x une lettre. Soit $\mathcal{C}$ une théorie dont x n'est pas une constante. Soit y une lettre qui n'est pas une constante de $\mathcal{C}$ et qui ne figure pas dans T . Le terme T représente intuitivement un objet qui dépend des objets représentés par les lettres qui figurent dans T. Mais, supposons que la relation (Sub x/y)T=T soit un théorème de $\mathcal{C}$. Dans ces conditions, on voit que l'objet représenté par T restera le même si on change l'objet représenté par x . On convient donc de désigner la relation $(\forall y)((\mathrm{Sub}\ x/y)T=T)$ par "T ne dépend pas de x" . Si cette relation est un théorème d'une théorie $\mathcal{C}$, il n'y aura pas d'inconvénient à désigner, dans la théorie $\mathcal{C}$, le terme T par un symbole qui ne contienne plus la lettre x .

Soient T un terme, x,y,...,z des lettres distinctes, A,B,...,C des relations dont chacune ne contient qu'une seule lettre. Soit $\mathcal{C}$ une théorie dont x,y,...,z ne sont pas des constantes. Soit $\mathcal{C}'$ la théorie formée en adjoignant "x est de type A", "y est de type B",..., "z est de type C" aux axiomes de $\mathcal{C}$. Soit x' une lettre qui ne figure ni dans T ni dans les axiomes de $\mathcal{C}'$; si la relation $(\forall_A x')((\mathrm{Sub}\ x/x')T=T)$ est un théorème de $\mathcal{C}'$, on dit que T ne dépend pas de x dans la théorie $\mathcal{C}$ à condition que x,y,...,z soient de types respectifs A,B,...,C .

IX. EQUATIONS.

Soient R une relation, x une lettre figurant dans R et $\mathcal{C}$ une théorie dont x n'est pas une constante. Intuitivement, R peut être considéré comme représentant une propriété de l'objet désigné par x . On peut se proposer de déterminer quels sont les objets x qui possédent cette propriété ; se proposer ce problème, c'est considèrer R comme étant l'énoncé d'un problème à résoudre : on dit alors que R est une équation (ce terme provient de ce que, très souvent, R a la forme T=T', où T et T' sont des termes).

Une <u>solution</u> de l'équation R dans la théorie $\mathcal{C}$ est un terme S tel que la relation (Sub x/S)R soit vraie. Ce terme pourra contenir les lettres qui figurent dans R (à l'exception en général de x) ainsi que d'autres lettres t,u,.. . Si S est une solution qui contient des lettres t,u,... qui ne figurent pas dans R , on dit que ces lettres sont des <u>paramètres</u> dont dépend la solution. Considérons pour simplifie le cas où on a une solution S ne dépendant que d'un paramètre t . Soit S' une solution de l'équation R dans la théorie $\mathcal{C}$; on dit que "la solution S' est contenue dans la solution paramètrique S" , ou que "S' peut se mettre sous la forme S " si S' ne contient pas t et si la relation $(\exists\, t)(S=S')$ est vraie dans $\mathcal{C}$. On dit que S fournit une <u>solution complète</u> de l'équation R dans la théorie $\mathcal{C}$ si la relation $R \Rightarrow (\exists\, t)(x=S)$ est un théorème de $\mathcal{C}$. S'il en est ainsi, toute solution de R dans la théorie $\mathcal{C}$ peut se mettre sous la forme S .

Deux équations R et R' sont dites <u>équivalentes</u> dans la théorie $\mathcal{C}$ si les relations R et R' sont équivalentes dans $\mathcal{C}$. S'il en est ainsi, toute solution de l'une de ces équations est aussi une solution de l'autre.

Le plus souvent, on ne recherche pas des solutions d'une équation R en objets quelconques x mais en objets d'un type déterminé A , où A est une relation ne contenant qu'une seule lettre. On appelle alors <u>solution de</u> R <u>de type</u> A un terme S tel que les relations (Sub x/S)R et "S est de type A" soient des théorèmes de la théorie dont on s'occupe. Soit encore P une relation qui ne contienne qu'une seule lettre. Supposons qu'on ait un terme S contenant une lettre t ne figurant pas dans R et tel que la relation (t est de type P) $\Rightarrow$ (Sub x/S)R soit vraie dans la théorie considérée, et qu'il en soit de même de (t est de type P) $\Rightarrow$ (S est de type A). On dit alors que S est une <u>solution de type</u> A <u>contenant le paramètre</u> t <u>de type</u> P . On dit que cette solution est la solution complète de R en objets de type A si la relation

$$(x \text{ est de type } A) \Rightarrow (R \Rightarrow (\exists_P t)\ (x=S))$$

est vraie dans la théorie considérée.
