RÉDACTION N° 138

TITRE : **LIVRE I**
CHAPITRE II (ÉTAT 5) THÉORIE DES ENSEMBLES

ASSOCIATION DES COLLABORATEURS DE NICOLAS BOURBAKI

NOMBRE DE PAGES : **57**

NOMBRE DE FEUILLES : **57**

LIVRE I

CHAPITRE II (Etat 5)

Théorie des Ensembles

COMMENTAIRES DU RÉDACTEUR.

La rédaction du chapitre théorie des ensembles s'écarte plus de la terminologie logique du chap.I (pour se rapprocher de la terminologie mathématique ordinaire) que ce n'était le cas dans l'état précédent. Un dernier § y donne quelques exemples de définitions en termes purement logiques, et universelles, c'est-à-dire applicables sans restriction sur la nature des objets représentés par les lettres qui y figurent. Il serait peut être meilleur de supprimer ce § et de doubler chaque définition du texte d'une définition logique pure équivalente. Je n'ai pas d'opinion bien arrêtée sur ce point.

La partie relative aux structures a été rédigée sous forme d'un chapitre séparé, avec l'~~xx~~ idée qu'il serait possible de mettre ce chapitre après les cardinaux et les entiers (il faudrait alors faire une étude particulière des ordinaux sans avoir la théorie générale de l'ordre, et repousser la théorie de l'ordre après le chapitre sur les structures). Ce n'est là qu'une suggestion basée sur la remarque que la théorie des cardinaux et celle des entiers sont de la pure théorie des ensembles, pas des études de structures. On voudra bien considérer que la rédaction des structures est un état 2 tout au plus ; elle nécessiterait encore (si adoptée en principe) un travail assez sérieux de polissage. Notamment, il faudrait en étoffer considérablement les exemples, sur le modèle de la rédaction antérieure. En tout état de cause, cette rédaction apporte au moins la preuve de la possibilité d'une définition des structures dans laquelle on puisse démontrer un théorème général d'isomorphisme ; vu le fait que certains avaient été jusqu'à nier cette possibilité, la rédaction présente apporte au moins un renseignement factuel important.

Entendant parler des "squelettes typiques", la femme du rédacteur a immédiatement proposé de les vêtir de carapaces de Cartan.

§ 1. L'AXIOME D'EXTENSIONALITÉ .

Définition 1. *La relation* $(\forall x)(x \in X \Rightarrow x \in Y)$ *se désigne par l'une ou l'autre des formules* $X \subset Y$ *ou* $Y \supset X$; *elle se lit* "X *est contenu dans* Y" *ou* "X *est une partie de* Y" , *ou* "Y *contient* X " .

La relation "X est contenu dans Y" signifie donc que tout élément de X est aussi un élément de Y . Si T et U sont des termes, et si on désire démontrer que la relation $T \subset U$ est vraie, on peut introduire une constante auxiliaire x (ne figurant ni dans T dans U) avec l'axiome introducteur $x \in T$; si, dans la théorie ainsi formée, on peut démontrer la relation $x \in U$, il en résultera que $T \subset U$. En pratique, on dit : "soit x un élément de T", et on cherche à démontrer que x est élément de U .

Il est clair que les relations $X \subset Y$ et $Y \subset Z$ entraînent $X \subset Z$.

Nous formulerons maintenant le schéma d'axiomes de la théorie des ensembles connu sous le nom d'axiome d'extensionalité :

S.7 (Axiome d'extensionalité). *La relation*

((X est un ensemble) et (Y est un ensemble) et $(X \subset Y)$ et $(Y \subset X)) \Rightarrow (X=Y)$

est vraie.

Cet axiome exprime que deux ensembles dont chacun est contenu dans l'autre, ou encore, ce qui revient au même, deux ensembles qui ont les mêmes éléments, sont égaux. Si X et Y sont des ensembles, pour démontrer que X=Y , il suffira donc d'établir que tout élément de X est aussi un élément de Y, et que tout élément de Y est aussi un élément de X .

Soit P une relation, et soit x une lettre ; on peut considèrer P comme exprimant une propriété de l'objet x . Supposons qu'il existe un ensemble X tel que les relations P et x X soient équivalentes. Il résulte alors de l'axiome d'extensionalité que cet ensemble est déterminé de manière unique (c'est-à-dire que, si X et X' sont des ensembles tels que P soit équivalente tant à $x \in X$ qu'à $x \in X'$, on a X=X'). L'ensemble X s'appelle

Nous dirons qu'une relation P est <u>collectivisante</u> par rapport à une lettre x si la relation $(\exists X)$ (X est un ensemble, et $x \in X \Longleftrightarrow P$) est vraie. La plupart des schémas d'axiomes de la théorie des ensembles que nous aurons encore à introduire auront pour effet d'affirmer que certaines relations sont collectivisantes : ce seront des axiomes d'existence qui permettront de construire des ensembles. Si P est une relation et x une lettre, nous désignerons la relation $(\exists X)$(X est un ensemble, et $x \in X \Leftrightarrow P$) par Coll (P;x) . Dire que P est collectivisante, c'est donc dire que Coll (P;x) est vrai.

D'autre part, nous désignerons par $(\exists_{ens} \ldots)$ et $(\forall_{ens} \ldots)$ les quantificateurs typiques associés à la relation "... est un ensemble" . Si donc Q est une relation, $(\exists_{ens} X)Q$ est $(\exists X)$(X est un ensemble et Q), tandis que $(\forall_{ens} X)Q$ est équivalente à $(\forall X)$(X est un ensemble $\Rightarrow$ Q).

Définition 2. <u>La relation non</u> $x \in y$ <u>se note</u> $x \notin y$, <u>et se lit</u> "x <u>n'appartient pas à</u> y ", <u>ou</u> "x <u>n'est pas élément de</u> y" .

Montrons que la relation $x \notin x$ <u>n'est pas</u> collectivisante. Supposant en effet que cette relation soit collectivisante, nous allons en déduire une absurdité. Soit X l'ensemble des x tels que $x \notin x$. La relation $X \in X$ est équivalente à non (Sub x/X)($x \notin x$) ; or $x \notin x$ est équivalente à $x \in X$; donc $X \in X$ est équivalente à non $X \in X$. Or cette conclusion est absurde pour la raison suivante. Soit P la relation $X \in X$; si P est vraie, non P est fausse, et par suite non ($P \Rightarrow$ non P) est vraie, donc $P \Longleftrightarrow$ non P est fausse ; si P est fausse, non P est vraie, et non (non $P \Rightarrow P$) est vraie, donc $P \Longleftrightarrow$ non P fausse. La relation $P \Longleftrightarrow$ non P est donc fausse dans tous les cas. L'hypothèse que la relation $x \notin x$ est collectivisante conduit donc à une absurdité.

NBR 041 5

§ 2. L'AXIOME DU COUPLE.

C'est le schéma d'axiomes suivant :

S.8. *Soient* x, y, z *des lettres* ; *la relation*

$$\text{Coll}\,(z;(z=x) \text{ ou } (z=y))$$

est vraie.

Cet axiome exprime que, si x et y sont des objets, il y a un ensemble dont les seuls éléments sont x et y . Il résulte alors de l'axiome d'extensionalité que cet ensemble est uniquement déterminé.

Définition 1. *L'ensemble dont les seuls éléments sont* x *et* y *se note* $\{x,y\}$; *on pose* $\{x\}=\{x,x\}$.

La notation $\{x\}$ représente donc l'ensemble dont le seul élément est x.

Si $x,y,z,t,\ldots$ sont des lettres, on pose aussi

$$\{x,y,z\} = \{x,\{y,z\}\}$$

$$\{x,y,z,t\} = \{x,\{y,z,t\}\} \quad \text{, etc.}$$

Il est clair que $\{x,y,z,t\}$ représente l'ensemble dont les seuls éléments sont x,y,z et t .

Définition 2. *On pose* $(x,y)=\{\{x\},\{x,y\}\}$; (x,y) *s'appelle le couple formé par* x *et* y . *On dit qu'un objet* z *est un couple si la relation* $(\exists x)(\exists y)(z=(x,y))$ *est vraie*.

Théorème 1. *La relation* $(x',y')=(x,y)$ est équivalente à "$x=x'$ *et* $y=y'$ "

Il est clair que la relation $(x=x'$ et $y=y')$ entraîne $(x',y')=(x,y)$. Supposons réciproquement la relation $(x',y')=(x,y)$ vraie. On a alors $\{x'\}\in\{\{x\},\{x,y\}\}$, d'où ou bien $\{x'\}=\{x\}$ ou bien $\{x'\}=\{x,y\}$. Or la relation $\{x'\}=\{x\}$ entraîne $x'=x$, et la relation $\{x'\}=\{x,y\}$ entraîne $x'=x$ et $x'=y$; on a donc dans tous les cas $x'=x$. Par ailleurs, on a $\{x',y'\}\in\{\{x\},\{x,y\}\}$, d'où ou bien $\{x',y'\}=\{x\}$ ou bien $\{x',y'\}=\{x,y\}$; et on voit de même que $\{x,y\}$ est égal soit à $\{x'\}$

soit à $\{x',y'\}$. Si $\{x',y'\}=\{x\}$, on a $x'=x$, $y'=x$ et $\{x,y\}=\{x'\}$, d'où $y=x'$, $x'=x$, $y=x$, $x=y'$ et $y=y'$. Si $\{x',y'\}\neq\{x\}$, on a , puisque $x'=x$, $y'\neq x'$ et $\{x',y'\}=\{x,y\}$, d'où $y'=y$. On a donc toujours $y'=y$, et le th.1 est démontré.

Si $z=(x,y)$ est un couple, il résulte du th.1 que les objets x et y sont uniquement déterminés par la donnée de z . On dit que x est la <u>première coordonnée du couple</u> z , et que y est la <u>seconde coordonnée du couple</u> z , et on écrit

$$x = \mathrm{pr}_1\, z \quad ; \qquad y = \mathrm{pr}_2\, z \quad .$$

Les symboles $\mathrm{pr}_1 z$ et $\mathrm{pr}_2 z$ sont donc des symboles fonctionnels quand z est du "type des couples" c'est-à-dire du type défini par la relation "z est un couple" . Si z est un couple, on a $z=(\mathrm{pr}_1 z, \mathrm{pr}_2 z)$.

Soit R une relation, et soient x et y des lettres ; soit z une lettre qui ne figure pas dans R . Formons la relation S : $(\exists x)(\exists y)(z=(x,y)$ et $R)$. C'est une relation qui contient une lettre de moins que R , et R est évidemment équivalente à la relation $(\exists z)(z=(x,y)$ et $S)$. Cela signifie qu'on peut interprèter une relation entre des objets x et y comme une propriété du couple formé par ces objets

§ 3. L'AXIOME DE SELECTION.

Nous allons maintenant formuler un nouveau schéma d'axiomes de la théorie des ensembles :

S.9. Axiome de sélection. <u>Soient</u> R <u>une relation et</u> x <u>et</u> y <u>des lettres. La relation</u>

$$(\forall y)(\exists_{\mathrm{ens}} X)(R \Rightarrow (x\in X)) \Rightarrow (\forall_{\mathrm{ens}} Y)\mathrm{Coll}((\exists y)(R \text{ et } y\in Y);x)$$

<u>est vraie</u>.

La relation $(\forall y)(\exists_{ens} X)(R \Rightarrow (x \in X))$ signifie qu'étant donné un objet y quelconque, il y a toujours un ensemble X (qui peut dépendre de y) tel que tous les objets x qui sont dans la relation R avec l'objet y donné soient des éléments de X (peut-être d'ailleurs pas tous les éléments de X). L'axiome de sélection affirme que, s'il en est ainsi, et si Y est un ensemble quelconque, il y a un ensemble dont les éléments sont exactement tous les objets qui se trouvent dans la relation R avec un objet au moins de l'ensemble Y .

Théorème 2. Soient P une relation et x une lettre. La relation (X est un ensemble) $\Rightarrow$ Coll(P et $x \in X$; x) est alors vraie.

Soit en effet R la relation "P et x=y" , où y est une lettre ne figurant pas dans P . La relation $R \Rightarrow (x \in \{y\})$ est vraie ; il en est donc de même de $(\forall y)(\exists_{ens} X)(R \Rightarrow (x \in X))$. Il résulte de S.9 que

(X est un ensemble) $\Rightarrow$ Coll(($\exists$ y)(R et $y \in X$) ; x)

est vraie. Or la relation $(\exists y)(R$ et $y \in X)$ est évidemment équivalente à "P et $x \in X$" , ce qui démontre le th.2 .

On voit donc que, si P est une propriété d'un objet x , et X un ensemble donné, ceux des objets x qui appartiennent à X et qui possèdent la propriété P sont les éléments d'un certain ensemble, qu'on appelle l'ensemble des x de X tels que P .

On considère souvent des types d'objets x qui sont définis par une relation A qui possède la propriété que Coll (A;x) soit vraie. C'est dire qu'il existe un ensemble E dont les éléments sont tous les objets du type en question (* par exemple, l'ensemble des nombres réels, pour le type défini par la relation "x est un nombre réel ; etc.etc. ..*). Si P est une propriété quelconque des objets du type en question, on pourra parler de l'ensemble des objets de ce type tels que P .

N6R 041

Si P est une relation telle que la relation $(\exists_{ens} X)(P \Rightarrow (x \in X))$ soit vraie, il y a un ensemble dont les éléments sont tous les objets x qui possèdent la propriété P . On peut en effet introduire une constante auxiliaire E avec l'axiome "(E est un ensemble) et $(P \Rightarrow x \in E)$" . L'ensemble des x de E tels que P sera alors aussi l'ensemble de tous les objets qui possèdent la propriété P .

Il n'existe pas d'ensemble dont tous les objets soient éléments ; car, s'il existait un tel ensemble, il résulterait du th.2 que toute relation serait collectivisante ; or nous avons vu au §1 qu'il y a des relations non collectivisantes.

Soient T un terme, x une lettre et y une lettre ne figurant pas dans T . La relation $(\exists x)(y=T)$ se lit souvent "y peut se mettre sous la forme T pour un x convenable" ; si A est un ensemble, la relation $(\exists x)((y=T)$ et $(x \in A))$ se lit souvent : "y peut se mettre sous la forme T pour un x appartenant à A " .

Théorème 3. <u>Soient</u> T <u>un terme,</u> x <u>une lettre et</u> A <u>un ensemble.</u> <u>Il existe alors un ensemble dont les éléments sont exactement tous les objets qui peuvent se mettre sous la forme</u> T <u>avec des</u> x <u>appartenant à</u> A .

Soit y une lettre ne figurant pas dans T , et soit R la relation $y=T$. La relation $R \Rightarrow (y \in \{T\})$ est vraie ; il en est donc de même de $(\forall x)(\exists_{ens} Y)(R \Rightarrow (y \in Y))$. On déduit alors de S.9 que $\mathrm{Coll}((\exists x)(R$ et $x \in A)\ ;\ y)$ est une relation vraie, ce qui démontre le théorème 3 .

Quand on applique le th.3, il arrive souvent que le contexte indique suffisamment que l'on ne considère que des objets x appartenant à un certain ensemble A fixe ; l'ensemble dont l'existence est affirmée par le th.3 peut alors être nommé l'<u>ensemble des objets de la forme</u> T .

Par ailleurs, s'il existe un ensemble B tel que la relation $(y=T) \Rightarrow (y \in B)$ soit vraie, il résulte tout de suite du théorème 2 qu'il y a un ensemble dont les éléments sont tous les objets qui peuvent se mettre sous la forme T pour des x convenables ; cet ensemble s'appelle l'ensemble des objets de la forme T .

Théorème 4 . Il existe un ensemble qui ne possède aucun élément.

Dans le langage du chap.I, cet énoncé peut se formuler comme suit : $(\exists_{ens} X)((\forall x)(x \notin X))$. Soit y une lettre ; l'ensemble des x de l'ensemble $\{y\}$ tels que $x \neq y$ est évidemment un ensemble qui n'a aucun élément.

Il résulte de l'axiome d'extensionalité qu'il n'y a qu'un seul ensemble qui ne possède aucun élément.

Définition 1. L'ensemble qui n'a aucun élément s'appelle l'ensemble vide, il se désigne par $\emptyset$.

Cet ensemble joue un rôle de premier plan dans la pensée mathématique.

Il est clair que l'ensemble vide est contenu dans tout ensemble, et que la seule partie de l'ensemble vide est l'ensemble vide lui-même.

Théorème 4. Soient A et B des ensembles. Il existe alors un ensemble dont les éléments sont tous les couples dont la première coordonnée appartient à A et la seconde à B .

Si y est un objet quelconque, soit C_y l'ensemble des objets de la forme (x,y) avec x A . Soit R la relation $z \in C_y$. Il est clair que la relation $(\forall y)(\exists_{ens} Z)(R \Rightarrow (z \in Z))$ est vraie. Il résulte de S.9 que la relation $(\exists y)(y \in B \text{ et } R)$ est collectivisante en z . L'ensemble des z tels que $(\exists y)(y \in B \text{ et } z \in C_y)$ est évidemment l'ensemble des couples dont la première coordonnée est dans A et la seconde dans B .

Définition 2. <u>L'ensemble dont l'existence est affirmée par le</u> th.4 <u>s'appelle le produit</u> (<u>ou produit cartésien</u>) <u>des ensembles</u> A et B , <u>et se désigne par</u> A B .

De même, si A,B,C,D sont des ensembles, on appelle produit des ensembles A,B et C , et on désigne par $A\times B\times CC$, l'ensemble $A\times(B\times C)$, produit des ensembles A,B,C et D l'ensemble $A\times B\times C\times D = A\times(B\times C\times D)$, etc...

Si A et B sont des ensembles, la relation $(x,y)\in A\times B$ est équivalente à $(x\in A)$ et $(y\in B)$.

Proposition 1. <u>Soient</u> A,B,A' <u>et</u> B' <u>des ensembles non vides. La relation</u> $A'\times B'\subset A\times B$ <u>est alors équivalente à</u> "$(A'\subset A)$ et $(B'\subset B)$".

Supposons que $A'\times B'\subset A\times B$. Soit x' un élément de A' ; puisque B' n'est pas vide, il y a un objet y' qui est élément de B' . On a $(x',y')\in A'\times B'$, d'où $(x',y')\in A\times B$, et par suite $x'\in A$, ce qui montre que $A'\subset A$; on verrait de même que $B'\subset B$. Réciproquement, si A' est une partie de A et B' une partie de B , la relation $(x',y')\in A'\times B'$ entraîne $(x,y)\in A\times B$, d'où $A'\times B'\subset A\times B$.

Proposition 2. <u>Soient</u> A <u>et</u> B <u>des ensembles. Pour que</u> $A\times B=\emptyset$, <u>il faut et suffit que ou bien</u> $A=\emptyset$ <u>ou bien</u> $B=\emptyset$.

C'est évident.

§ 4. CORRESPONDANCES.

Définition 1. <u>On appelle correspondance tout ensemble de couples</u>.

Si Γ est une correspondance, on dit qu'un objet y "correspond" à un objet x par Γ si le couple (x,y) appartenant à Γ .

A toute correspondance Γ , on peut attacher une relation, à savoir la relation $(x,y) \in \Gamma$. Nous allons considèrer tout à l'heure le problème inverse, à savoir celui d'associer une correspondance à une relation donnée. Mais nous introduirons d'abord la notation suivante : lorsque l'on considère une certaine relation R en liaison avec deux lettres déterminées x et y (qui peuvent d'ailleurs figurer ou non dans R), on désigne souvent la relation R par $R\{x,y\}$. Si T et U sont des termes, et si on remplace simultanément x par T et y par U dans toutes leurs occurences dans R , on désigne la relation ainsi obtenue par $R\{T,U\}$. Si x' et y' sont des lettres distinctes de x et de y , ne figurant ni dans R ni dans T ni dans U, $R\{T,U\}$ n'est autre que la relation $(\mathrm{Sub}\ x'/T)(\mathrm{Sub}\ y'/U)(\mathrm{Sub}\ x/x')(\mathrm{Sub}\ y/y')R$. Par exemple, la relation $R\{y,x\}$ se déduit de R en y échangeant les lettres x et y .

Ceci dit, soit $R\{x,y\}$ une relation. S'il existe un ensemble P tel que la relation $R \Rightarrow (x,y) \in P$ soit vraie, on peut affirmer qu'il existe une correspondance Γ (et, naturellement, une seule) telle que R soit équivalente à $(x,y) \in \Gamma$. Il suffit en effet de prendre pour Γ l'ensemble des couples z tels $z \in P$ et $R\{pr_1 z,\ pr_2 z\}$. Si une relation $R\{x,y\}$ est équivalente à $(x,y) \in \Gamma$, où Γ est une correspondanse, on dit que R <u>admet un graphe</u> (par rapport aux lettres x,y) et que Γ est le <u>graphe</u> de R .

Proposition 1. Soit Γ une correspondance. Il existe alors des ensembles A et B qui possèdent les propriétés suivantes : 1) la relation $(\exists y)((x,y)\in\Gamma)$ est équivalente à $x\in A$; 2) la relation $(\exists x)((x,y)\in\Gamma)$ est équivalente à $y\in B$.

En effet, A est l'ensemble des objets de la forme $pr_1 z$ pour $z\in\Gamma$, et B est l'ensemble des objets de la forme $pr_2 z$ pour $z\in\Gamma$ (cf.th.3,§3).

Les ensembles A et B qui possèdent les propriétés énoncées dans la prop.1 sont évidemment uniquement déterminés. Ils s'appellent suivant les cas ou bien le domaine de définition et le domaine des valeurs de Γ, ou bien la première et la seconde projection de Γ.

On notera qu'il résulte de la prop.1 qu'une relation qui admet un graphe par rapport à deux lettres x et y est collectivisante par rapport à chacune de ces deux lettres. La réciproque n'est pas vraie, comme le montre l'exemple de la relation $x=y$, dont on voit facilement qu'elle n'admet pas de graphe.

Si on se donne à l'avance deux ensembles C et D, on appelle correspondance entre C et D une correspondance dont le domaine de définition est contenu dans C et le domaine des valeurs dans D. C'est encore une correspondance qui est contenue dans $C\times D$.

Soit Γ une correspondance, et soit x un objet. Si B est le domaine des valeurs de Γ, la relation $(x,y)\in\Gamma$ entraîne $y\in B$; il y a donc un ensemble dont les éléments sont tous les objets qui correspondent à x par Γ.

Définition 2. Si Γ est une correspondance et x un objet, on désigne par $\Gamma\{x\}$ l'ensemble des objets qui correspondent à x par Γ.

Soient Γ une correspondance et X un ensemble. La relation $(x\in X)$ et $((x,y)\in\Gamma)$ entraîne $(x,y)\in\Gamma$ et admet par suite un graphe Γ'.

Le domaine des valeurs de Γ' se compose évidemment de tous les objets qui correspondent par Γ à des objets de X .

Définition 3. *Soient* Γ *une correspondance et* X *un ensemble. L'ensemble des objets qui correspondent à des éléments de* X *par* Γ *se désigne par* $\Gamma\langle X\rangle$. *Cet ensemble s'appelle l'image de* X *par* Γ .

Il est clair que la condition $X \subset X'$ entraîne $\Gamma\langle X\rangle \subset \Gamma\langle X'\rangle$.

Soient Γ une correspondance, A le domaine de définition de Γ et B son domaine des valeurs. La relation $(y,x) \in \Gamma$ entraîne $(x,y) \in B \times A$; cette relation admet donc un graphe, qui se compose de tous les couples (x,y) tels que (y,x) appartienne à Γ .

Définition 4. *Soit* Γ *une correspondance. La correspondance qui se compose de tous les couples* (x,y) *tels que* $(y,x) \in \Gamma$ *s'appelle la correspondance réciproque de* Γ , *et se désigne par* $\overset{-1}{\Gamma}$.

Si X est un ensemble, $\overset{-1}{\Gamma}\langle X\rangle$ s'appelle l'*image réciproque* de X par Γ .

Proposition 2. *Soit* Γ *une correspondance ; la correspondance réciproque de* $\overset{-1}{\Gamma}$ *est identique à* Γ .

C'est évident.

Proposition 3. *Soit* Γ *une correspondance. Le domaine de définition de* $\overset{-1}{\Gamma}$ *est identique au domaine des valeurs de* Γ , *et son domaine des valeurs est identique au domaine de définition de* Γ .

C'est évident.

Soient Γ et Δ des correspondances. Désignons par A le domaine de définition de Γ et par D le domaine des valeurs de Γ . La relation $(\exists y)((x,y) \in \Gamma$ et $(y,z) \in \Delta\ )$ entraîne $(x,z) \in A \times D$. Cette relation admet donc un graphe.

Définition 5. *Soient Γ et Δ des correspondances. On appelle composée de Δ et de Γ, et on désigne par $\Delta \circ \Gamma$, le graphe de la relation* $(\exists y)((x,y) \in \Gamma$ et $(y,z) \in \Delta)$.

Proposition 4.- *Soient Γ et Δ des correspondances. La correspondance réciproque de $\Delta \circ \Gamma$ est $\overset{-1}{\Gamma} \circ \overset{-1}{\Delta}$.*

En effet, la relation "$(x,y) \in \Gamma$ et $(y,z) \in \Delta$" est équivalente à "$(z,y) \in \overset{-1}{\Delta}$ et $(y,x) \in \overset{-1}{\Gamma}$".

Proposition 5. *Soient Γ_1, Γ_2 et Γ_3 des correspondances. On a alors* $(\Gamma_3 \circ \Gamma_2) \circ \Gamma_1 = \Gamma_3 \circ (\Gamma_2 \circ \Gamma_1)$.

La relation $(x,t) \in (\Gamma_3 \circ \Gamma_2) \circ \Gamma_1$ est équivalente à

$$(\exists y)((x,y) \in \Gamma_1 \text{ et } (\exists z)((y,z) \in \Gamma_2 \text{ et } (z,t) \in \Gamma_3))$$

Puisque z ne figure pas dans la relation $(x,y) \in \Gamma_1$, on voit que la relation $(x,t) \in (\Gamma_3 \circ \Gamma_2) \circ \Gamma_1$ est équivalente à

$$(1) \quad (\exists y)(\exists z)((x,y) \in \Gamma_1 \text{ et } (y,z) \in \Gamma_2 \text{ et } (z,t) \in \Gamma_3).$$

On voit de même que la relation $(x,t) \in \Gamma_3 \circ (\Gamma_2 \circ \Gamma_1)$ est équivalente à

$$(2) \quad (\exists z)(\exists y)((x,y) \in \Gamma_1 \text{ et } (y,z) \in \Gamma_2 \text{ et } (z,t) \in \Gamma_3).$$

Or on sait que les relations (1) et (2) sont équivalentes, ce qui démontre la prop.4 .

La correspondance $\Gamma_3 \circ (\Gamma_2 \circ \Gamma_1) = (\Gamma_3 \circ \Gamma_2) \circ \Gamma_1$ se désigne par $\Gamma_3 \circ \Gamma_2 \circ \Gamma_1$. De même, si $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$ sont des correspondances, on pose $\Gamma_4 \circ (\Gamma_3 \circ \Gamma_2 \circ \Gamma_1) = \Gamma_4 \circ \Gamma_3 \circ \Gamma_2 \circ \Gamma_1$, etc. etc...

Proposition 5. *Soient Γ et Δ des correspondances et* B *le domaine des valeurs de Γ. Le domaine des valeurs de $\Delta \circ \Gamma$ est alors* $\Delta \langle B \rangle$.

En effet, la relation $(\exists x)((x,z) \in \Delta \circ \Gamma)$ est équivalente à $(\exists x)(\exists y)((x,y) \in \Gamma$ et $(y,z) \in \Delta)$, donc aussi à $(\exists y)((y,z) \in \Delta$ et $(\exists x)((x,y) \in \Gamma))$, c'est-à-dire encore à $(\exists y)((y,z) \in \Delta$ et $y \in B)$, donc à $z \in \Delta \langle B \rangle$.

Corollaire. <u>Les notations étant celles de la prop.</u>5, <u>si</u> C <u>est le domaine de définition de</u> Δ , <u>celui de</u> $\Delta\circ\Gamma$ <u>est</u> $\overset{-1}{\Gamma}\langle C\rangle$.

Cela résulte tout de suite des prop.3 et 5 .

Définition 6. <u>Si</u> A <u>est un ensemble, l'ensemble des objets de la forme</u> (x,x), <u>pour</u> $x\in A$, <u>s'appelle la correspondance identique de</u> A , <u>ou encore la diagonale de l'ensemble</u> $A\times A$.

Le domaine de définition et le domaine des valeurs de la correspondance identique de A sont tous deux égaux à A . De plus, la correspondance identique de A est sa propre réciproque.

Soient Γ une correspondance, A un ensemble et I la correspondance identique de A . Il est alors clair que l'ensemble $\Gamma\langle A\rangle$ n'est autre que le domaine des valeurs de la correspondance $\Gamma\circ I$.

Proposition 6. <u>Soient</u> Γ <u>et</u> Δ <u>des correspondances et</u> A <u>un ensemble. On a alors</u> $(\Delta\circ\Gamma)\langle A\rangle = \Delta\langle\Gamma\langle A\rangle\rangle$.

Soit I la correspondance identique de A . L'ensemble $(\Delta\circ\Gamma)\langle A\rangle$ est alors identique au domaine des valeurs de la correspondance $(\Delta\circ\Gamma)\circ I$, laquelle est égale à $\Delta\circ(\Gamma\circ I)$; or $\Gamma\langle A\rangle$ est le domaine des valeurs de $\Gamma\circ I$; la prop.6 résulte donc de la propos. 5.

<u>Remarque</u>. Si Γ est une correspondance et A un ensemble, l'ensemble $\Gamma\langle A\rangle$ se désigne aussi souvent par $\Gamma(A)$, bien que cette notation puisse parfois engendrer des erreurs en vertu de confusions avec une autre notation que nous introduirons au prochain § .

§ 5. FONCTIONS.

Définition 1. *On appelle correspondance fonctionnelle, ou fonction, une correspondance* f *qui possède la propriété suivante* : *si* x *est un objet quelconque du domaine de définition de* f , *il n'existe qu'un seul objet qui corresponde à* x *par* f ; *cet objet s'appelle la valeur prise par la fonction en* f , *et se désigne par* $f(x)$.

La condition pour une correspondance f d'être fonctionnelle peut encore se formuler comme suit : si x est un objet quelconque, et si y et y' sont des objets qui correspondent à x par f , on a $y=y'$.

Si un objet x appartient au domaine de définition d'une fonction f , on dit que cette fonction est *définie en* x ; on a alors $f\{x\} = \{f(x)\}$. Si un objet y appartient au domaine des valeurs de f , on dit que c'est *une valeur prise par* f .

Proposition 1. *Soient* f *et* g *des fonctions. Pour que* $f=g$, *il est nécessaire et suffisant que les conditions suivantes soient satisfaites* : 1) f *et* g *ont le même domaine de définition* A ; 2) *la condition* $x \in A$ *entraîne* $f(x)=g(x)$.

Ces conditions sont évidemment nécessaires. Supposons les satisfaites. La relation $(x,y) \in f$ entraîne alors "$x \in A$ et $y=f(x)$" , donc aussi $y=g(x)$, et par suite encore $(x,y) \in g$; on en déduit (puisque f et g sont des ensembles de couples) que $f \subset g$; on voit de même que $g \subset f$, d'où $f=g$.

On dit que deux fonctions f et g *coïncident l'une avec l'autre sur un ensemble* A si la relation "$x \in A$ et $(x,y) \in f$ et $(x,y') \in g$" entraîne $y=y'$, c'est-à-dire encore si f et g prennent la même valeur en tout point de A où elles sont toutes deux définies.

Soient f et g des fonctions ; si le domaine de définition A de f est contenu dans celui de g et si g coïncide avec f sur A , on dit que g est un <u>prolongement</u> de f , ou que f est une <u>restriction</u> de g . La relation "g est un prolongement de f", qui se lit encore "g prolonge f" , est une relation importante entre objets du type "fonction". Soient g une fonction et B un ensemble ; soit I la correspondance identique de B . On voit alors tout de suite que la correspondance $g\circ I$ est encore une fonction ; l'ensemble de définition de $g\circ I$ est l'ensemble des points de B en lesquels g est définie, et, si x appartient à cet ensemble, on a $(g\circ I)(x)=g(x)$. La fonction g I est donc une restriction de g ; on l'appelle la <u>restriction de</u> g <u>à l'ensemble</u> B .

Soit A un ensemble ; on appelle <u>application de</u> A une fonction dont l'ensemble de définition est identique à A ;

<u>application de</u> A <u>dans un ensemble</u> B une application de A dont l'ensemble des valeurs est contenu dans B ;

<u>application de</u> A <u>sur un ensemble</u> B une application de A dont l'ensemble des valeurs est identique à B .

<u>Exemples de fonctions</u>.

1. L'ensemble vide est évidemment une fonction ; c'est la seule fonction dont l'ensemble de définition (ou l'ensemble des valeurs) soit vide ; on l'appelle la fonction vide.

2. Si A est un ensemble, la correspondance identique de A est une application de A , qu'on appelle <u>application identique de</u> A . Pour que cette application soit une application de A dans un ensemble B , il faut et suffit que A soit contenu dans B .

3. Soit T un terme, et soit x une lettre. Soit donné un ensemble A ; formons la relation "$x \in A$ et $y=T$". Cette relation entraîne $(x,y) \in A \times B$ où B est l'ensemble des objets de la forme T pour $x \in A$; elle admet donc un graphe f. Il est clair que la relation "$(x,y) \in f$ et $(x,y') \in f$" entraîne $y=y'$; f est donc une fonction. L'ensemble de définition de f est A, et son ensemble de valeurs B ; on a $f(x)=T$. La fonction que nous venons de définir se désigne souvent par la notation

$$x \longrightarrow T \quad (x \in A) .$$

Il arrive souvent que le contexte indique suffisamment dans quel ensemble A on se restreint à prendre x ; on peut alors omettre l'indication $(x \in A)$ dans la notation précédente, et représenter la fonction en question par $x \longrightarrow T$; c'est ce qui arrive notamment quand on fait la convention que la lettre x n'est employée que pour désigner des objets d'un certain type tel qu'il existe un ensemble de tous les objets de ce type : A est alors l'ensemble des objets du type en question. Par ailleurs, il arrive aussi souvent que l'on considère des termes T introduits par des définitions qui ne limitent l'usage au cas dans lequel x représente un objet appartenant à un certain ensemble A ; dans ce cas, on représente encore la fonction $x \longrightarrow T \ (x \in A)$ par $x \longrightarrow T$.

Si B est une partie de l'ensemble A, la fonction $x \longrightarrow T \ (x \in B)$ est la restriction de la fonction $x \longrightarrow T \ (x \in A)$ à l'ensemble B.

Si le terme T ne contient pas la lettre x, on dit que la fonction $x \longrightarrow T \ (x \in A)$ est la <u>fonction constante de valeur</u> T sur l'ensemble A. Si f est une fonction et si la restriction de f à un ensemble A est une fonction constante, on dit que f est <u>constante sur l'ensemble</u> A.

4. Soit Γ un ensemble de couples ; les fonctions

$$z \rightarrow pr_1 z \quad (z \in \Gamma) \qquad \text{et} \qquad z \rightarrow pr_2 z \quad (z \in \Gamma)$$

s'appellent respectivement la <u>première et la seconde fonction coordonnée</u> sur Γ ; ce sont des applications de Γ sur sa première et sur sa seconde projection.

5. Soit Γ un ensemble de couples ; la fonction

$$z \rightarrow (pr_2 z \, , \, pr_1 z)$$

est une application de Γ sur $\overset{-1}{\Gamma}$.

Proposition 2. <u>Si</u> f <u>et</u> g <u>sont des fonctions, la correspondance composée</u> $g \circ f$ <u>est une fonction</u>.

Soient x, z et z' des objets tels que $(x,z) \in g \circ f$, $(x,z') \in g \circ f$. Il existe donc des objets y, y' tels que

$$(x,y) \in f \, , \, (x,y') \in f \, , \, (y,z) \in g \, , \, (y',z') \in g \, .$$

Puisque f est une fonction, on a $y=y'$. Il résulte alors de là et du fait que g est une fonction que $z=z'$.

La correspondance réciproque d'une fonction n'est pas en général une fonction.

Définition 2. <u>On appelle fonction univalente, ou correspondance biunivoque une fonction dont la correspondance réciproque est encore une fonction</u>. <u>Une application d'un ensemble qui est univalente s'appelle une application biunivoque de cet ensemble</u>. <u>Une application bi-univoque d'un ensemble A sur lui-même s'appelle une permutation de</u> A .

Nous avons dit qu'on appelle correspondance entre deux ensembles A et B toute correspondance dont le domaine de définition est contenu dans A et le domaine des valeurs dans B . Cependant, on n'emploie le terme de <u>correspondance biunivoque entre des ensembles</u> A <u>et</u> B que pour désigner une correspondance bi-univoque dont l'ensemble de définition est exactement A et l'ensemble de valeurs exactement B ; on dit encore qu'une telle correspondance <u>met les ensembles</u> A <u>et</u> B <u>en correspondance biunivoque l'un avec l'autre</u>.

<u>Exemples</u> : 1) La fonction vide est univalente.

2) L'application identique d'un ensemble A est une permutation de A .

3) Une fonction constante sur un ensemble A n'est univalente que si A est soit vide un ensemble à un élément (c'est-à-dire de la forme $\{x\}$).

3) Si Γ est une correspondance, pour que la première fonction coordonnée sur Γ soit univalente, il faut et suffit que Γ soit une fonction.

4) Si Γ est une correspondance, la fonction $z \rightarrow (pr_2 z, pr_1 z) (z \in \Gamma)$ est une application biunivoque de Γ sur $\overset{-1}{\Gamma}$.

Proposition 3. <u>Si</u> f <u>et</u> g <u>sont des fonctions univalentes</u>, $g \circ f$ <u>est une fonction univalente</u>. <u>Si</u> f <u>est une application biunivoque de</u> A <u>sur un ensemble</u> B <u>et</u> g <u>une application biunivoque de</u> B <u>sur un ensemble</u> C , $g \circ f$ <u>est une application biunivoque de</u> A <u>sur</u> C .

La correspondance réciproque de $g \circ f$ est $\overset{-1}{f} \circ \overset{-1}{g}$, qui est une fonction puisque $\overset{-1}{f}$ et $\overset{-1}{g}$ sont des fonctions. Les notations étant celles de l'énoncé, on a $(g \circ f) \langle A \rangle = g \langle f \langle A \rangle \rangle = g \langle B \rangle = C$ et $(\overset{-1}{f} \circ \overset{-1}{g}) \langle C \rangle = \overset{-1}{f} \langle \overset{-1}{g} \langle C \rangle \rangle = \overset{-1}{f} \langle B \rangle = A$, ce qui démontre la prop.3 .

Il est par ailleurs évident que la fonction réciproque d'une fonction univalente est encore univalente. On en conclut que, si f et g sont des permutations d'un ensemble A , $g \circ f$ et $\overset{-1}{f}$ sont également des permutations de A .

Proposition 4. <u>Soient</u> A <u>et</u> B <u>des ensembles</u>, f <u>une application de</u> A <u>dans</u> B <u>et</u> g <u>une application de</u> B <u>dans</u> A . <u>Si l'application</u> $g\circ f$ <u>est l'application identique de</u> A , f <u>est biunivoque</u>, <u>et</u> g <u>est une application de</u> B <u>sur</u> A . <u>Si de plus</u> $f\circ g$ <u>est l'application identique de</u> B , f <u>est une application biunivoque de</u> A <u>sur</u> B , <u>et on a</u> $g = \overset{-1}{f}$.

Supposons que $g\circ f$ soit l'application identique de A ; si $x\in A$, on a alors $x=g(f(x))$. Il en résulte d'une part que x est une valeur prise par g , donc que g applique B <u>sur</u> A , et d'autre part que les conditions $x\in A$, $x'\in A$, $f(x)=f(x')$ entraînent $x=x'$, ce qui montre que f est biunivoque. Si de plus $f\circ g$ est l'application identique de B , il est clair en vertu de ce qui précède que f est une application biunivoque de A sur B ; de plus, la relation $y=f(x)$ est équivalente à $x=g(y)$, d'où $g = \overset{-1}{f}$.

<u>Fonctions de deux arguments</u>.

On appelle <u>fonction de deux arguments</u> une fonction dont l'ensemble de définition est un ensemble de couples. Soit f une telle fonction ; si (x,y) est un élément du domaine de définition de f , la valeur $f((x,y))$ de f en (x,y) se désigne en général par $f(x,y)$.

Soit f une fonction de deux arguments, et soit Γ son domaine de définition. Désignons par A et par B la première et la seconde projection de Γ . Soit y un objet quelconque. La relation $((x,y),z)\in f$ entraîne $(x,z)\in A\times f\langle\Gamma\rangle$; cette relation admet donc un graphe par rapport aux lettres x et z . De plus, la relation "$((x,y),z)\in f$ et $((x,y),z')\in f$" entraîne $z=z'$. Le graphe de notre relation est donc une fonction φ . On dit que φ est l'<u>application partielle de</u> f <u>relative à la valeur</u> y <u>du second argument</u>. La fonction φ ne diffère de la fonction vide que si $y\in B$; s'il en est ainsi, on a $\varphi(x)=f(x,y)$ pour tout objet x tel que $(x,y)\in\Gamma$. Il en résulte tout de suite que, si f est univalente, il en est de même de φ . De même, si x est un objet quelconque, la relation $((x,y),z \in f$ admet un graphe par rapport aux lettres y et z , et ce graphe est une fonction que l'on appelle <u>l'application partielle de</u> f <u>relative à la valeur</u> x <u>du premier argument</u>. Si ψ est cette application, on a $\psi(y)=f(x,y)$ pour tout y tel que $(x,y) \in \Gamma$; si f est biunivoque, il en est de même de ψ .

Soit f une fonction de deux arguments. Si, pour tout objet y , l'application partielle de f relative à la valeur y du second argument est une application constante, on dit que la fonction f <u>ne dépend pas</u> de son premier argument. De même, si, pour tout x, l'application partielle de f relative à sa valeur x de son premier argument est un e application constante, on dit que f ne dépend pas de son second argument.

Soient u et v des fonctions. L'~~xxxxx~~ assemblage de signes $(u(x),v(y))$ est un terme, défini lorsque x est élément du domaine de définition A de u et y un élément du domaine de définition B de v . La fonction $z \to (u(pr_1 z),v(pr_2 z))$ $(z \in A \times B)$ se désigne par la notation $[u,v]$;. C'est une application de l'ensemble $A \times B$.

Proposition 2. <u>Soient</u> u <u>et</u> v <u>des fonctions</u>, C <u>et</u> D <u>leurs domaines de valeurs</u> ; <u>le domaine des valeurs de</u> $[u,v]$ <u>est alors</u> $C \times D$. <u>Si</u> u <u>et</u> v <u>sont univalentes, il en est de même de</u> $[u,v]$, <u>et la fonction réciproque de</u> $[u,v]$ <u>est</u> $[\overset{-1}{u}, \overset{-1}{v}]$.

C'est évident.

§ 6. FAMILLES D'ENSEMBLES.

Il arrive fréquemment qu'on introduise (au moyen d'une définition) un terme T qui contient une certaine lettre i en indice. Supposons qu'il en soit ainsi, et soit I un ensemble ; l'application $i \to T$ $(i \in I)$ se désigne alors souvent aussi par la notation $(T)_{i \in I}$, et s'appelle une <u>famille d'objets</u>. L'ensemble I, qui est l'ensemble de définition de la fonction $i \to T$ $(i \in I)$ s'appelle <u>l'ensemble d'indices</u> de la famille $(T)_{i \in I}$; le domaine des valeurs de la fonction $i \to T$ $(i \in I)$ s'appelle l'<u>ensemble des éléments</u> de la famille.

Une <u>famille d'ensembles</u> est une famille $(X_i)_{i \in I}$ telle que la relation $(\forall i)(i \in I \Rightarrow X_i$ est un ensemble) soit vraie.

Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles. La relation $(\forall i)(\exists_{ens} X)((i \in I$ et $x \in X_i) \Rightarrow x \in X)$ est évidemment vraie. Il résulte donc de l'axiome de sélection qu'il existe un ensemble X tel que la relation $x \in X$ soit équivalente à $(\exists i)(i \in I$ et $x \in X_i)$.

Définition 1. <u>Soit</u> $(X_i)_{i \in I}$ <u>une famille d'ensembles.</u> <u>On appelle réunion de cette famille, et on désigne par</u> $\bigcup_{i \in I} X_i$, <u>l'ensemble des</u> x <u>tels que</u> $(\exists i)(i \in I$ et $x \in X_i)$.

Les éléments de la réunion de la famille $(X_i)_{i \in I}$ sont donc tous les objets x qui appartiennent à un ensemble au moins de la forme X_i, avec $i \in I$.

On notera qu'il résulte de l'existence de la réunion d'une famille d'ensembles qu'il n'existe pas d'ensemble de tous les ensembles. Car, si E était un ensemble d'ensembles dont tout ensemble soit élément, tout objet x serait élément de la réunion de la famille constituée par l'application identique de E (en vertu de la relation $x \in \{x\}$) ;

or, nous savons qu'il n'existe pas d'ensemble dont tout objet soit élément.

Soit maintenant $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles dont l'ensemble d'indices I n'est pas vide. Si a est un élément de I, la relation $(\forall i)(i \in I \Rightarrow x \in X_i)$ entraîne $x \in X_a$; on peut donc parler de l'ensemble des x tels que $(\forall i)(i \in I \Rightarrow x \in X_i)$.

Définition 2. <u>Soit</u> $(X_i)_{i \in I}$ <u>une famille d'ensembles dont l'ensemble d'indices n'est pas vide</u>. <u>L'ensemble des</u> x <u>tels que</u> $(\forall i)(i \in I \Rightarrow x \in X_i)$ <u>s'appelle l'intersection de la famille</u> $(X_i)_{i \in I}$ <u>et se désigne par</u> $\bigcap_{i \in I} X_i$.

Cet ensemble est donc l'ensemble des objets qui appartiennent à tous les ensembles de la famille $(X_i)_{i \in I}$.

On notera que, si $(X_i)_{i \in \emptyset}$ est la famille vide d'ensembles, il n'existe pas d'ensemble X tel que $x \in X$ soit équivalent à $(\forall i)(i \in \emptyset \Rightarrow x \in X_i)$. Cette dernière relation est en effet une relation vraie, et on sait qu'il n'existe pas d'ensemble X tel que $x \in X$ soit une relation vraie : ce serait l'ensemble de tous les objets.

Proposition 1. <u>Soit</u> $(X_i)_{i \in I}$ <u>une famille d'ensembles, et soit</u> f <u>une application d'un ensemble</u> J <u>sur l'ensemble</u> I . <u>On a alors</u>
$\bigcup_{j \in J} X_{f(j)} = \bigcup_{i \in I} X_i$, <u>et, si</u> $I \neq \emptyset$, $\bigcap_{j \in J} X_{f(j)} = \bigcap_{i \in I} X_i$.

Soit x un élément de $\bigcup_{i \in I} X_i$. Il existe donc un indice i tel que $i \in I$ et $x \in X_i$. Puisque $f\langle J \rangle = I$, il existe un indice j tel que $j \in J$ et $i=f(j)$, d'où $x \in X_{f(j)}$ et par suite $x \in \bigcup_{j \in J} X_{f(j)}$. Réciproquement, si $x \in \bigcup_{j \in J} X_{f(j)}$, il existe un $j \in J$ tel que $x \in X_{f(j)}$; d'où, puisque $f(j) \in I, x \in \bigcup_{i \in I} X_i$. On a donc $\bigcup_{j \in J} X_{f(j)} = \bigcup_{i \in I} X_i$. Supposons maintenant que $I \neq \emptyset$, et soit x un élément de

$\bigcap_{i\in I} X_i$. Pour tout élément j de J, on a $f(j)\in I$, d'où $x \in X_{f(j)}$ et $x \in \bigcap_{j\in J} X_{f(j)}$. Soit réciproquement x un élément de $\bigcap_{j\in J} X_{f(j)}$. Si i est un élément quelconque de I, il existe un élément j de J tel que $i=f(j)$, d'où $x \in X_i$, et par suite $x \in \bigcap_{i\in I} X_i$. On a donc $\bigcap_{j\in J} X_{f(j)} = \bigcap_{i\in I} X_i$.

Définition 3. <u>Soit E un ensemble d'ensembles, et soit $\mathcal{F}$ la famille d'ensembles constituée par l'application identique de E . La réunion des ensembles de $\mathcal{F}$ et (si $E\neq\emptyset$) l'intersection des ensembles de $\mathcal{F}$ s'appellent respectivement la réunion et l'intersection des ensembles de E , et se désignent par $\bigcup_{X\in E} X$ et $\bigcap_{X\in E} X$.</u>

Il résulte tout de suite de la prop.1 que, si $(X_i)_{i\in I}$ est une famille d'ensembles, la réunion et (si $I\neq\emptyset$) l'intersection de cette famille sont respectivement identique à la réunion et à l'intersection des ensembles de l'ensemble des éléments de la famille.

Si A,B,C sont des ensembles, on pose

$$A\cup B = \bigcup_{X\in\{A,B\}} X \qquad A\cap B = \bigcap_{X\in\{A,B\}} X$$

$$A\cup B\cup C = A\cup(B\cup C) = \bigcup_{X\in\{A,B,C\}} X$$

$$A\cap B\cap C = A\cap(B\cap C) = \bigcap_{X\in\{A,B,C\}} X$$

Il est clair que $A\cup B$ est l'ensemble des objets qui appartiennent soit à A soit à B , tandis que $A\cap B$ est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A et à B . Il résulte tout de suite de la prop.1 que l'on a

$$A\cup B = B\cap A \quad ; \quad A\cup(B\cup C) = A\cup B\cup C = (A\cup B)\cup C$$

$$A\cap B = B\cap A \quad ; \quad A\cap(B\cap C) = A\cap B\cap C = (A\cap B)\cap C \; .$$

Si $(X_i)_{i\in I}$ et $(X'_i)_{i\in I}$ sont des familles d'ensembles ayant le même ensemble d'indices i , et si on a $X'_i \subset X_i$ pour tout $i\in I$, on voit tout de suite que l'on a $\bigcup_{i\in I} X'_i \subset \bigcup_{i\in I} X_i$, et, si $I\neq\emptyset$, $\bigcap_{i\in I} X'_i \subset \bigcap_{i\in I} X_i$. En particulier, si A,B,A',B' sont des ensembles tels que $A' \subset A$ et $B' \subset B$, on a $A'\cup B' \subset A\cup B$ et $A'\cap B' \subset A\cap B$.

Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'indices, et soit J une partie de I . On voit alors tout de suite que $\bigcup_{j\in J} X_j \subset \bigcup_{i\in I} X_i$ et, si $J\neq\emptyset$, $\bigcap_{j\in J} X_j \supset \bigcap_{i\in I} X_i$. En particulier, on a $X_i \subset \bigcup_{i\in I} X_i$ pour tout $i\in I$, et, si $I\neq\emptyset$, $\bigcap_{i\in I} X_i \subset X_i$ pour tout $i\in I$.

Soient X un ensemble et $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles. On a alors

$$X \cap \bigcup_{i\in I} X_i = \bigcup_{i\in I}(X\cap X_i)$$

et, si $I\neq\emptyset$,

$$X \cup \bigcap_{i\in I} X_i = \bigcap_{i\in I}(X\cup X_i) .$$

En effet, la relation "$x\in X$ et $(\exists i)(i\in I$ et $x\in X_i)$" est équivalente à $(\exists i)(i\in I$ et $x\in X$ et $x\in X_i)$ (parce que i ne figure pas dans $x\in X$), et la relation "$x\in X$ ou $(\forall i)(i\in I \Rightarrow x\in X_i)$" est équivalente à $(\forall i)(i\in I \Rightarrow (x\in X$ ou $x\in X_i))$.

Il résulte de ces formules que, si A, B, C sont des ensembles, on a

$$A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$$
$$A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C) .$$

Nous donnerons plus tard des formules qui permettent d'exprimer toute intersection de réunions comme une réunion d'intersections et vice-versa .

Proposition 2. <u>Soit</u> $(X_i)_{i\in I}$ <u>une famille d'ensembles dont l'ensemble d'indices</u> I <u>est la réunion d'une famille</u> $(J_a)_{a\in A}$ <u>d'ensembles.</u> <u>On a alors</u> $\bigcup_{i\in I} X_i = \bigcup_{a\in A}(\bigcup_{i\in J_a} X_i)$, <u>et, si</u> $A\neq\emptyset$ et $J_a\neq\emptyset$ <u>pour tout</u> $a\in A$, $\bigcap_{i\in I} X_i = \bigcap_{a\in A}(\bigcap_{i\in J_a} X_i)$.

Soit x un élément de $\bigcup_{i\in I} X_i$. Il y a donc un indice $i\in I$ tel que $x\in X_i$. Puisque I est la réunion de la famille $(J_a)_{a\in A}$, il y a un indice $a\in A$ tel que $i\in J_a$, d'où $x\in \bigcup_{i\in J_a} X_i$, et par suite $x\in\bigcup_{a\in A}(\bigcup_{i\in J_a} X_i)$. Soit inversement x un élément de l'ensemble $\bigcup_{a\in A}(\bigcup_{i\in J_a} X_i)$. Il y a donc un indice $a\in A$ tel que $x\in\bigcup_{i\in J_a} X_i$, d'où il résulte qu'il existe un indice i tel que $i\in J_a$ (d'où $i\in I$) tel que $x\in X_i$; on en conclut que $x\in\bigcup_{i\in I} X_i$. Supposons maintenant $A\neq\emptyset$ et $J_a\neq\emptyset$ pour tout $a\in A$. Soit x un élément de $\bigcap_{i\in I} X_i$. Si a est un élément de A ; on a $x\in X_i$ pour tout $i\in J_a$ (puisque $J_a\subset I$), d'où $x\in\bigcap_{i\in J_a} X_i$. Ceci étant vrai pour tout $a\in A$, on en conclut que x appartient à $\bigcap_{a\in A}(\bigcap_{i\in J_a} X_i)$. Soit réciproquement x un élément de ce dernier ensemble, et soit i un élément quelconque de I. Il existe un $a\in A$ tel que $i\in J_a$; puisque $x\in\bigcap_{i\in J_a} X_i$, on a $x\in X_i$. Ceci étant vrai pour tout $i\in I$, on a $x\in\bigcap_{i\in I} X_i$. La prop.2 est donc démontrée.

Proposition 3. <u>Soit</u> $(X_i)_{i\in I}$ <u>une famille d'ensembles, et soit</u> Γ <u>une correspondance.</u> <u>On a alors</u>

$$\Gamma\langle\bigcup_{i\in I} X_i\rangle = \bigcup_{i\in I}\Gamma\langle X_i\rangle$$

<u>et, si</u> $I\neq\emptyset$,

$$\Gamma\langle\bigcap_{i\in I} X_i\rangle\subset\bigcap_{i\in I}\Gamma\langle X_i\rangle .$$

La relation $(\exists x)(x\in\bigcup_{i\in I} X_i$ et $(x,y)\in\Gamma)$ <u>est équivalente à</u> $(\exists x)(\exists i)(i\in I$ et $x\in X_i$ et $(x,y)\in\Gamma)$, donc à $(\exists i)(i\in I$ et $y\in\Gamma\langle X_i\rangle)$, c'est-à-dire à $y\in\bigcup_{i\in I}\Gamma\langle X_i\rangle$, ce qui démontre

la première formule. Supposons maintenant $I \neq \emptyset$; la relation
$(\exists x)(x \in \bigcap_{i \in I} X_i$ et $(x,y) \in \Gamma)$ est équivalente à
$(\exists x)(\forall i)((i \in I \Rightarrow x \in X_i)$ et $(x,y) \in \Gamma)$, laquelle entraîne
$(\forall i)(\exists x)((i \in I \Rightarrow x \in X_i)$ et $(x,y) \in \Gamma)$, donc aussi
$(\forall i)(i \in I \Rightarrow (\exists x)(x \in X_i$ et $(x,y) \in \Gamma)$, qui est équivalente à
$y \in \bigcap_{i \in I} \Gamma \langle X_i \rangle$, ce qui démontre la seconde formule de la prop.3 .

Si Γ est une correspondance quelconque, la formule $\Gamma \langle \bigcap_{i \in I} X_i \rangle = \bigcap_{i \in I} \Gamma \langle X_i \rangle$ est en général fausse. Mais on a cependant le résultat fort important suivant :

Proposition 4. <u>Soient</u> f <u>une fonction et</u> $(X_i)_{i \in I}$ <u>une famille d'ensembles dont l'ensemble d'indices</u> I <u>n'est pas vide. On a alors</u>

$$\overset{-1}{f} \langle \bigcap_{i \in I} X_i \rangle = \bigcap_{i \in I} \overset{-1}{f} \langle X_i \rangle .$$

Nous savons déjà que l'ensemble représenté par le membre de gauche de cette formule est une partie de celui représenté par le membre de droite. Soit maintenant x un élément de $\bigcap_{i \in I} \overset{-1}{f} \langle X_i \rangle$. On a alors $f(x) \in X_i$ pour tout $i \in I$, d'où $f(x) \in \bigcap_{i \in I} X_i$ et par suite $x \in \overset{-1}{f} \langle \bigcap_{i \in I} X_i \rangle$, ce qui démontre la prop.4 .

<u>Corollaire</u>. <u>Si</u> f <u>est une fonction univalente et si</u> $(X_i)_{i \in I}$ <u>est une famille d'ensembles dont l'ensemble d'indices n'est pas vide, on a</u>
$f \langle \bigcap_{i \in I} X_i \rangle = \bigcap_{i \in I} f \langle X_i \rangle$.

La fonction f est en effet la correspondance réciproque de la fonction $\overset{-1}{f}$.

Soient A et B des ensembles. Il résulte alors de la prop.3 que, si Γ est une correspondance, on a $\Gamma \langle A \cup B \rangle = \Gamma \langle A \rangle \cup \Gamma \langle B \rangle$ et $\Gamma \langle A \cap B \rangle \subset \Gamma \langle A \rangle \cap \Gamma \langle B \rangle$. Si Γ est ou bien la réciproque d'une fonction ou bien une fonction univalente, on a

$$\Gamma \langle A \cap B \rangle = \Gamma \langle A \rangle \cap \Gamma \langle B \rangle .$$

Définition 4. *Soit* A *une partie d'un ensemble* E . *On appelle complémentaire de* A *par rapport à* E , *et on désigne par* $\complement_E A$, *l'ensemble des éléments de* E *qui n'appartiennent pas à* A .

Il arrive fréquemment que le contexte indique suffisamment par rapport à quel ensemble E on prend le complémentaire d'un ensemble A ; on peut alors omettre l'indice E et écrire $\complement A$. Il en est notamment ainsi quand on spécifie que A est un ensemble d'objets d'un certain type et s'il existe un ensemble dont les éléments sont tous les objets de ce type : si E est cet ensemble, on convient que $\complement A$ représente le complémentaire de A par rapport à E .

Si A est une partie d'un ensemble E , on a évidemment

$$\complement_E (\complement_E A) = A .$$

Si B est une autre partie de E , les relations $A \subset B$ et $\complement_E B \subset \complement_E A$ sont équivalentes.

Proposition 5. *Soit* $(X_i)_{i \in I}$ *une famille de parties d'un ensemble* E ; *on suppose que l'ensemble d'indices* I *n'est pas vide*. *On a alors*

$$\complement_E \left(\bigcup_{i\in I} X_i\right) = \bigcap_{i\in I} \complement_E X_i , \quad \complement_E \left(\bigcap_{i\in I} X_i\right) = \bigcup_{i\in I} \complement_E X_i .$$

La relation non $(\exists i)(i \in I \text{ et } x \in X_i)$ est équivalente à $(\forall i)(\text{non } (i \in I \text{ et } x \in X_i))$, c'est-à-dire à $(\forall i)(i \in I \Rightarrow (\text{non } x \in X_i))$, ce qui démontre la première formule ; la seconde en résulte immédiatement.

Proposition 6. *Soient* f *une fonction* , E *un ensemble et* A *une partie de* E . *On a alors* $\overset{-1}{f}\langle \complement_E A \rangle = \complement_{\overset{-1}{f}\langle E\rangle} \overset{-1}{f}\langle A \rangle$.

Pour qu'un objet x appartienne à $\overset{-1}{f}\langle \complement_E A\rangle$, il faut et suffit que $f(x)$ appartienne à E mais non à A , c'est-à-dire que x appartienne à $\complement_{\overset{-1}{f}\langle E\rangle} \overset{-1}{f}\langle A\rangle$.

Corollaire. *Soient* f *une fonction univalente*, E *un ensemble et* A *une partie de* E . *On a alors* $f\langle \complement_E A\rangle = \complement_{f\langle E\rangle} f\langle A\rangle$.

§ 7. RELATIONS D'ÉQUIVALENCE.

Soit $R\{x,y\}$ une relation, x et y étant des lettres. On dit que la relation R est <u>symétrique</u> si la relation

$$R\{x,y\} \Longrightarrow R\{y,x\}$$

est vraie. S'il en est ainsi, il est clair que les relations $R\{x,y\}$ et $R\{y,x\}$ sont équivalentes.

Soit z une lettre ne figurant pas dans R. On dit que la relation R est <u>transitive</u> si la relation

$$(R\{x,y\} \text{ et } R\{y,z\}) \Longrightarrow R\{x,z\}$$

est vraie.

Ainsi, la relation $X \subset Y$ est transitive ; la relation d'égalité $x=y$ est symétrique et transitive.

Une relation qui est à la fois symétrique et transitive s'appelle une <u>relation d'équivalence</u>.

Si R est une relation quelconque, la relation $R\{x,x\} \Longrightarrow (\exists y)R\{x,y\}$ est vraie. Montrons que, si R est une relation d'équivalence, la relation $R\{x,x\}$ est équivalente à $(\exists y)R\{x,y\}$. En effet, supposons la relation $(\exists y)R\{x,y\}$ vraie ; soit b un objet tel que $R\{x,b\}$. La relation $R\{b,x\}$ est alors vraie, puisque R est symétrique ; les relations $R\{x,b\}$ et $R\{b,x\}$ étant vraies, il en est de même de $R\{x,x\}$, puisque R est transitive.

On appelle <u>relation d'équivalence dans un ensemble</u> E <u>une relation</u> d'équivalence $R\{x,y\}$ telle que la relation $(\exists y)R\{x,y\}$ (donc aussi la relation $R\{x,x\}$) soit équivalente à $x \in E$.

Soit $R\{x,y\}$ une relation d'équivalence dans un ensemble E. La relation $R\{x,y\}$ entraîne alors $(\exists y)R\{x,y\}$ donc aussi $x \in E$;

elle entraîne aussi $R\{y,x\}$, donc également $y \in E$. Il en résulte que $R\{x,y\}$ entraîne $(x,y) \in E \times E$; on en conclut que R admet un graphe. On appelle <u>équivalence dans un ensemble</u> E une correspondance qui est le graphe d'une relation d'équivalence dans E.

Proposition 1. <u>Pour qu'une correspondance</u> Γ <u>soit une équivalence dans un ensemble</u> E, <u>il faut et suffit que les conditions suivantes soient satisfaites</u> : a) E <u>est le domaine de définition de</u> Γ ; b) <u>on a</u> $\overset{-1}{\Gamma} = \Gamma$; c) <u>on a</u> $\Gamma \circ \Gamma = \Gamma$.

Si Γ est une équivalence dans E, la relation $(x,y) \in \Gamma$ est évidemment une relation d'équivalence dans E. La condition a) est satisfaite parce que la relation $x \in E$ est équivalente à $(\exists y)((x,y) \in \Gamma)$. La condition b) est satisfaite parce que la relation $(x,y) \in \Gamma$ est symétrique, et par suite équivalente à $(y,x) \in \Gamma$. Puisque la relation $(x,y) \in \Gamma$ est transitive, la relation "$(x,y) \in \Gamma$ et $(y,z) \in \Gamma$" entraîne $(x,z) \in \Gamma$, ce qui montre que $\Gamma \circ \Gamma \subset \Gamma$. Par ailleurs, la relation $(x,y) \in \Gamma$ entraîne $x \in E$ et par suite aussi $(x,x) \in \Gamma$; la relation $(x,y) \in \Gamma$ entraîne donc "$(x,x) \in \Gamma$ et $(x,y) \in \Gamma$", et par suite aussi $(x,y) \in \Gamma \circ \Gamma$, ce qui montre que $\Gamma \subset \Gamma \circ \Gamma$; la condition c) est donc satisfaite.

Réciproquement, supposons les conditions a), b), c) satisfaites. La relation $(x,y) \in \Gamma$ est symétrique (en vertu de b)) et transitive (en vertu de c)) ; c'est donc une relation d'équivalence, et il résulte de a) que c'est une relation d'équivalence dans E.

<u>Exemples</u>. 1. La relation "X est un ensemble et Y est un ensemble et il existe une application biunivoque de X sur Y" est une relation d'équivalence (cf. prop. 3, §5) ; cette relation n'admet pas de graphe.

2. Si E est un ensemble, la relation "$x \in E$ et $y \in E$" est une relation d'équivalence dans E, dont le graphe est $E \times E$.

3. Si E est un ensemble, la relation "$x \in E$ et $y \in E$ et $x=y$" est une relation d'équivalence dont le graphe est la correspondance identique de E.

4. Soit f une application d'un ensemble E. On vérifie alors sans aucune difficulté que la relation "$x \in E$ et $y \in E$ et $f(x)=f(y)$" est une relation d'équivalence dans E. Nous appellerons cette relation la *relation d'équivalence associée à* f. Elle est équivalente à la relation $(\exists z)((x,z) \in f$ et $(y,z) \in f)$; son graphe est donc la correspondance $f \circ \overset{-1}{f}$.

Nous allons maintenant montrer que toute relation d'équivalence dans un ensemble E est équivalente à une relation du type construit dans l'exemple 4. Nous poserons pour cela les définitions suivantes :

Définition 1. *Soit* $R\{x,y\}$ *une relation d'équivalence dans un ensemble* E, *et soit* Γ *le graphe de* R. *Si* $x \in E$, *l'ensemble* $\Gamma\{x\}$ *s'appelle la classe d'équivalence de* x (*suivant* R) ; *tout ensemble qui peut se mettre sous la forme* $\Gamma\{x\}$ *avec un* $x \in E$ *s'appelle une classe d'équivalence* (*suivant* R). *L'ensemble des classes d'équivalence* (*c'est-à-dire l'ensemble des objets de la forme* $\Gamma\{x\}$ *pour* $x \in E$) *s'appelle l'ensemble quotient de* E *par* R *et se désigne par* E/R. *L'application* $x \longrightarrow \Gamma\{x\}$ $(x \in E)$, *dont le domaine de définition est* E *et le domaine des valeurs* E/R, *s'appelle l'application canonique de* E *sur* E/R.

Théorème 5. *Soient* R *une relation d'équivalence dans un ensemble* E *et* f *l'application canonique de* E *sur* E/R. *La relation* R *est alors équivalente à la relation d'équivalence associée à* f.

Soit Γ le graphe de R . Soient x et y des éléments de E tels que $(x,y) \in \Gamma$. On a donc d'abord $x \in E$ et $y \in E$; nous allons montrer que $\Gamma\{x\} = \Gamma\{y\}$. Puisque $y \in \Gamma\{x\}$, on a $\Gamma\{y\} \subset (\Gamma \circ \Gamma)\{x\} = \Gamma\{x\}$; par ailleurs, on a aussi $(y,x) \in \Gamma$, d'où $\Gamma\{x\} \subset \Gamma\{y\}$, et par suite $\Gamma\{x\} = \Gamma\{y\}$, c'est-à-dire $f(x)=f(y)$. Soient réciproquement x et y des éléments de E tels que $f(x)=f(y)$. On a alors $y \in \Gamma\{y\} = \Gamma\{x\}$, d'où $(x,y) \in \Gamma$, ce qui démontre le théor.5.

Définition 2. <u>Soient</u> R <u>et</u> S <u>des relations d'équivalence</u>. <u>Nous dirons que</u> S <u>est plus fine que</u> R (<u>ou que</u> R <u>est moins fine que</u> S) <u>si la relation</u> $S \Rightarrow R$ <u>est vraie</u>.

Ainsi, la relation d'égalité $x=y$ est une relation d'équivalence qui est plus fine que toute relation d'équivalence. Si E est un ensemble, la relation "$x \in E$ et $y \in E$ et $x=y$" est plus fine que toute relation d'équivalence dans E , tandis que la relation "$x \in E$ et $y \in E$" est moins fine que toute relation d'équivalence dans E .

Définition 3. <u>Soient</u> R <u>une relation d'équivalence dans un ensemble</u> E <u>et</u> f <u>une application de cet ensemble</u>. <u>On dit que l'application</u> f <u>est compatible avec la relation</u> R <u>si la relation d'équivalence associée à</u> f <u>est moins fine que</u> R .

Pour qu'il en soit ainsi, il faut et suffit que la relation R entraîne $f(x)=f(y)$ (on sait que R entraîne $x \in E$ et $y \in E$), c'est-à-dire encore que l'on ait $f(x)=f(y)$ toutes les fois que x et y appartiennent à une même classe d'équivalence suivant R (car il résulte immédiatement du th.5 que R est équivalente à la relation "x et y appartiennent à une même classe d'équivalence"). Or, dire qu'il en est ainsi, c'est dire que la restriction de f à une classe d'équivalence quelconque suivant R est une application constante.

Proposition 2. *Soient* R *une relation d'équivalence dans un ensemble* E *et* g *l'application canonique de* E *sur* E/R . *Pour qu'une application* f *de* E *soit compatible avec* R , *il faut et suffit que* f *puisse se mettre sous la forme* $h \circ g$, h *étant une application de* E/R .

Si $f = h \circ g$, h étant une application de E/R , on a, pour $x \in E$, $f(x) = h(g(x))$; si x et y appartiennent à une même classe d'équivalence suivant R , on a $g(x) = g(y)$, d'où $f(x) = f(y)$, et f est compatible avec R. Supposons réciproquement que f soit compatible avec R . Si $K \in E/R$, on a $\varepsilon_u(u \in K) \in K$, d'où $\varepsilon_u(u \in K) \in E$, et la fonction $K \rightarrow f(\varepsilon_u(u \in K))$ $(K \in E/R)$ est une application h de E/R . Soient x un élément quelconque de E et K la classe d'équivalence de x ; x et ε_u $(u \in K)$ sont alors éléments de la même classe d'équivalence K , d'où $f(x) = f(\varepsilon_u(u \in K)) = h(K) = h(g(x))$; on a donc $f = h \circ g$.

Si f est compatible avec R , l'application h de E/R telle que $f = h \circ g$ est uniquement déterminée ; car, si $K \in E/R$, on a $h(K) = f(x)$ pour tout $x \in K$. On dit que h est l'*application déduite de* f *par passage aux quotients suivant* R . Il est clair que $h\langle E/R\rangle = f\langle E\rangle$.

Considérons en particulier le cas où R est la relation d'équivalence associée à f , auquel cas f est évidemment compatible avec R . L'application h est alors biunivoque ; car, si K et K' sont des classes d'équivalence telles que $h(K) = h(K')$, on a $f(x) = f(x')$ pour tout $x \in K$ et tout $x' \in K'$, ce qui entraîne $K = K'$. On dit dans ce cas que $f = h \circ g$ est la *décomposition canonique de* f .

On peut généraliser comme suit la ~~[illegible]~~ notion d'application compatible avec une relation d'équivalence. Soient f une application d'un ensemble E dans un ensemble F , R une relation d'équivalence dans E et S une relation d'équivalence dans S . Soit u l'application canonique de F sur F/S .

On dit que f <u>est compatible avec les relations d'équivalence</u> R <u>et</u> S si $u \circ f$ est compatible avec R . L'application de E/R dans F/S déduite de $u \circ f$ par passage aux quotients suivant R s'appelle alors aussi l'<u>application déduite de</u> f <u>par passage aux quotients suivant</u> R <u>et</u> S .

Soient R et S des relations d'équivalence dans un même ensemble E ; supposons que S soit plus fine que R . Soient f et g les applications canoniques de E sur E/R et sur E/S . Il est clair que f est compatible avec S ; soit h l'application déduite de f par passage aux quotients suivant S ; c'est une application de E/S sur E/R . La relation d'équivalence associée à h dans E/S s'appelle le <u>quotient de</u> R <u>par</u> S et se désigne par R/S . Soit $h=h_2 \circ h_1$ la décomposition canonique de l'application h ; h_1 est donc l'application canonique de E/S sur (E/S)/(R/S), tandis que h_2 est une application biunivoque de (E/S)/(R/S) sur E/R . On dit que h_2 est l'<u>application canonique de</u> (E/S)/(R/S) <u>sur</u> E/R .

Lorsque, dans une théorie mathématique, on a défini une certaine application biunivoque φ d'un ensemble A sur un ensemble B , on "<u>identifie</u>" souvent A avec B au moyen de l'application φ . Cela signifie, entre autres, que l'on convient que, toutes les fois qu'une lettre x représente un certain élément de A , on emploie la même lettre x pour représenter l'élément $\varphi(x)$ de B ; de même, si une lettre y représente un élément de B , on convient d'employer la même lettre pour représenter l'élément $\overset{-1}{\varphi}(y)$ de A . Plus généralement, si X représente une partie de A , on désigne aussi par X la partie $\varphi\langle X\rangle$ de B ; si f représente une application de B , on représente aussi par f l'application $f \circ \varphi$ de A , etc.etc. Bref, on convient d'une manière générale de tout faire comme si les ensembles A et B étaient égaux, φ étant alors l'application identique de cet ensemble. Ces "identifications" se pratiquent très fréquemment ;

leur usage se justifie par la nécessité dans laquelle on se trouve de ne pas augmenter indûment la complexité des notations. Se plaçant à un point de vue purement formel, il est naturellement facile de dériver des absurdités de formules qui n'ont été écrites qu'en vertu de certaines identifications ; seuls un certain flair logique et une grande habitude du raisonnement permettent d'évaluer ces formules à leur vraie valeur.

Ceci dit, l'application canonique h_2 définie plus haut (de $(E/S)/(R/S)$ sur E/R) est l'une de celles que l'on emploie souvent pour procéder à des identifications : on identifie $(E/S)/(R/S)$ à E/R au moyen de l'application canonique du premier de ces ensembles sur le second.

Soient f une application d'un ensemble E dans un ensemble F et S une relation d'équivalence dans S . Si u est l'application canonique de F sur F/S , la relation d'équivalence associée à l'application $u \circ f$ de E s'appelle l'<u>image réciproque</u> de S par f . Soit R cette relation ; $R\{x,y\}$ est alors équivalente à $S\{f(x),f(y)\}$.

Soient R une relation d'équivalence dans un ensemble E et A une partie de E ; l'image réciproque de R par l'application identique de A (qui est une application de A dans E) s'appelle la <u>relation d'équivalence induite par</u> R <u>dans</u> A . Soient Γ le graphe de R et Δ le graphe de la relation d'équivalence qu'elle induit dans A . On a alors

$\Delta = \Gamma \cap (A \times A)$; si $x \in A$, on a $\Delta\{x\} = \Gamma\{x\} \cap A$.

Définition 2. <u>Soient</u> R <u>une relation d'équivalence dans un ensemble</u> E <u>et</u> A <u>une partie de</u> E . <u>Soit</u> f <u>l'application canonique de</u> E <u>sur</u> E/R . <u>On dit que</u> A <u>est saturé par rapport à</u> R <u>s'il existe une partie</u> B <u>de</u> E/R <u>telle que</u> $A = \overset{-1}{f}\langle B \rangle$.

S'il en est ainsi, on a $f\langle A\rangle = f\langle \overset{-1}{f}\langle B\rangle\rangle$; or on voit tout de suite que $f \circ \overset{-1}{f}$ est l'application identique de E/R, d'où $B = f\langle A\rangle$.

Proposition 2. <u>Les notations étant celles de la déf.2, soit</u> $\underline{\mathfrak{A}}$ <u>un ensemble de parties saturées de</u> E . <u>La réunion et</u> (<u>si</u> $\underline{\mathfrak{A} \neq \emptyset}$) <u>l'intersection des ensembles de</u> $\underline{\mathfrak{A}}$ <u>sont des parties saturées. Si A est une partie saturée de</u> E , <u>il en est de même de</u> $\complement_E A$.

Cela résulte tout de suite des prop.3,4 et 6, § 6 .

Toute classe d'équivalence K de E suivant R est une partie saturée, car $K = \overset{-1}{f}\langle \{K\}\rangle$. Il en résulte que toute partie de E qui est la réunion d'un ensemble de classes d'équivalence est saturée. Soit réciproquement $A = \overset{-1}{f}\langle B\rangle$ une partie saturée, B étant une partie de E/R . L'ensemble B est la réunion de l'ensemble des ensembles de la forme $\{K\}$ pour $K \in B$; puisque $\overset{-1}{f}\{K\} = K$, on voit que A est la réunion d'un ensemble de classes d'équivalence suivant R .

Si A est une partie saturée de E , et K une classe d'équivalence telle que $A \cap K \neq \emptyset$, on a $K \subset A$. En effet, si $x \in A \cap K$, on a $K = f(x) \in f\langle A\rangle$, d'où $K = \overset{-1}{f}\{K\} \subset \overset{-1}{f}\langle f\langle A\rangle\rangle = A$. Réciproquement, soit A une partie de E qui possède la propriété que toute classe d'équivalence K telle que $A \cap K \neq \emptyset$ soit contenu e dans A . On a évidemment $A \subset \overset{-1}{f}\langle f\langle A\rangle\rangle$; réciproquement, si $K \in f\langle A\rangle$, il y a un $x \in A$ tel que $f(x) = K$, d'où $x \in K$, $K \cap A \neq \emptyset$ et par suite $K \subset A$; on en conclut que $A = \overset{-1}{f}\langle f\langle A\rangle\rangle$, donc que A est saturé.

On voit donc que, pour qu'une partie A de E soit saturée par rapport à R , il faut et suffit que les conditions $x \in A$ et $R\{x,y\}$ entraînent $y \in A$.

Soit maintenant A une partie quelconque de E . L'ensemble $\overset{-1}{f}\langle f\langle A\rangle\rangle$ contient A et est saturé. Réciproquement, si une partie saturée A' de E

NBR 044

contient A , on a $\overset{-1}{f}\langle A'\rangle \supset \overset{-1}{f}\langle A\rangle$, d'où $A' = \overset{-1}{f}\langle f\langle A'\rangle\rangle \supset \overset{-1}{f}\langle f\langle A\rangle\rangle$. On peut donc dire que $\overset{-1}{f}\langle f\langle A\rangle\rangle$ est "la plus petite" partie saturée de E contenant A . On appelle cet ensemble le saturé de A (par rapport à R) .

Proposition 3. Soient R une relation d'équivalence dans un ensemble E, et $(X_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E . Soit A_i le saturé de X_i ; le saturé de $\bigcup_{i\in I} X_i$ est alors $\bigcup_{i\in I} A_i$.

Cela résulte immédiatement des prop.3 et 4, § 6 .

Soient $R\{x,y\}$ et $R'\{x',y'\}$ des relations d'équivalence. Désignons par $S\{u,v\}$ la relation $(\exists x)(\exists y)(\exists x')(\exists y')$ ($u=(x,x')$ et $v=(y,y')$ et R et R') ; on vérifie sans aucune difficulté que cette relation est une relation d'équivalence, que l'on appelle produit des relations d'équivalence R ~~et~~ R', et que l'on désigne par $R\times R'$. Supposons que R soit une relation d'équivalence dans un ensemble E et R' une relation d'équivalence dans un ensemble E'. La relation $S\{u,u\}$ est alors équivalente à $(\exists x)(\exists x')$($u=(x,x')$ et $R\{x,x\}$ et $R'\{x',x'\}$), c'est-à-dire à $(\exists x)(\exists x')$($u=(x,x')$ et $x\in E$ et $x'\in E'$), donc à $u\in E\times E'$; il en résulte que $R\times R'$ est une relation d'équivalence dans $E\times E'$. Si $u(x,x')$ est un élément de $E\times E'$, la relation $S\{u,v\}$ est équivalente à $(\exists y)(\exists y')$($v=(y,y')$ et $R\{x,y\}$ et $R'\{x',y'\}$) ; si Γ et Γ' sont les graphes de R et de R', cette relation est encore équivalente à $v\in\Gamma\{x\}\times\Gamma'\{x'\}$. Les classes d'équivalence suivant $R\times R'$ sont donc les produits de classes d'équivalence suivant R par des classes d'équivalence suivant R' . Soient f et f' les applications canoniques de E sur E/R et de E' sur E'/R' ; ces applications permettent de construire une application (f,f') de $E\times E'$ sur $(E/R)\times(E'/R')$ telle que $(f,f')(x,x')=(f(x),f'(x'))$ pour tout $(x,x')\in E\times E'$.

Les images réciproques par (f,f') des éléments de $E/R \times E'/R'$ sont évidemment les produits de classes d'équivalence suivant R par des classes d'équivalence suivant R' ; il en résulte que la relation d'équivalence associée à (f,f') est équivalente à $R \times R'$. L'application (f,f') peut donc se mettre sous la forme $G \circ H$ où H est l'application canonique de $E \times E'$ sur $(E \times E')/(R \times R')$ et où H est une application biunivoque, dite *canonique*, de $(E \times E')/(R \times R')$ sur $(E/R) \times (E'/R')$. On identifie souvent $(E \times E')/(R \times R')$ avec $(E/R) \times (E'/R')$ au moyen de l'application canonique du premier de ces ensembles sur le second.

§ 8. RECOUVREMENTS. PARTITIONS.

Définition 1. *On dit qu'une famille d'ensembles* $(X_i)_{i \in I}$ *est un recouvrement d'un ensemble* E *si* $E \subset \bigcup_{i \in I} X_i$. Soient $(X_i)_{i \in I}$ *et* $(Y_j)_{j \in J}$ *sont des recouvrements de* E, *on dit que le second de ces recouvrements est plus fin que le premier* (*ou que le premier est moins fin que le second*) *si, pour tout* $j \in J$, *il existe un* $i \in I$ *tel que* $Y_j \subset X_i$. *Si chacun des recouvrements* $(X_i)_{i \in I}$ *et* $(Y_j)_{j \in J}$ *est plus fin que l'autre, on dit que ces recouvrements sont équivalents*.

Il est clair que la relation "$\underline{R}$ est un recouvrement de E et $\underline{R}'$ est un recouvrement de E et $\underline{R}'$ est équivalent à $\underline{R}$" est une relation d'équivalence.

Soient $(X_i)_{i \in I}$ et $(Y_j)_{j \in J}$ des recouvrements d'un ensemble E. La famille d'ensembles $(X_i \cap Y_j)_{(i,j) \in I \times J}$ est encore un recouvrement de E. En effet, si $x \in E$, il existe des indices $i \in I$ et $j \in J$ tels que $x \in X_i$ et $x \in Y_j$, d'où $x \in X_i \cap Y_j$. De plus, il est clair que le recouvrement $(X_i \cap Y_j)_{(i,j) \in I \times J}$ est plus fin que chacun des recouvrements

$(X_i)_{i\in I}$ et $(Y_j)_{j\in J}$. Soit réciproquement $(Z_k)_{k\in K}$ un recouvrement de E qui est plus fin que chacun des recouvrements $(X_i)_{i\in I}$ et $(Y_j)_{j\in J}$; si $k\in K$, il existe alors des indices $i\in I$ et $j\in J$ tels que $Z_k\subset X_i$ et $Z_k\subset Y_j$, d'où $Z_k\subset X_i\cap Y_j$, ce qui montre que le recouvrement $(Z_k)_{k\in K}$ est plus fin que le recouvrement $(X_i\cap Y_j)_{(i,j)\in I\times J}$.

Soit $(X_i)_{i\in I}$ un recouvrement d'un ensemble E, et soit f une application de E sur un ensemble F. La famille $(f\langle X_i\rangle)_{i\in I}$ est alors un recouvrement de F (prop.3, §6), qui s'appelle l'*image du recouvrement* $(X_i)_{i\in I}$ *par* f. Si g est une application d'un ensemble G dans l'ensemble E, la famille $(\overset{-1}{g}\langle X_i\rangle)_{i\in I}$ est un recouvrement de G, qu'on appelle l'*image réciproque* du recouvrement $(X_i)_{i\in I}$ par l'application g.

Soient E et F des ensembles, $(X_i)_{i\in I}$ un recouvrement de E et $(Y_j)_{j\in J}$ un recouvrement de F. La famille $(X_i\times Y_j)_{(i,j)\in I\times J}$ est alors un recouvrement de $E\times F$ qu'on appelle le *produit* des recouvrements $(X_i)_{i\in I}$ de E et $(Y_j)_{j\in J}$ de F.

Définition 2. *On dit que des ensembles A et B sont disjoints si $A\cap B=\emptyset$; s'il n'en est pas ainsi, on dit que ces ensembles se rencontrent. Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles ; on dit que les ensembles de cette famille sont mutuellement disjoints si les conditions* $i\in I$, $j\in I$, $i\neq j$ *entraînent* $X_i\cap X_j=\emptyset$.

Si $\mathfrak{E}$ est un ensemble d'ensembles, on dit de même que *les ensembles de $\mathfrak{E}$ sont mutuellement disjoints* si les conditions $X\in\mathfrak{E}$, $Y\in\mathfrak{E}$, $X\neq Y$ entraînent $X\cap Y=\emptyset$. Il revient au même de dire que la famille constituée par l'application identique de $\mathfrak{E}$ est une famille d'ensembles mutuellement disjoints.

Si $(X_i)_{i \in I}$ est une famille d'ensembles mutuellement disjoints, et si f est une fonction, les ensembles de la famille $(\overset{-1}{f}\langle X_i \rangle)_{i \in I}$ sont mutuellement disjoints (en vertu de la prop.4, § 6), mais il n'en est en général pas ainsi de ceux de la famille $(f\langle X_i \rangle)_{i \in I}$, sauf cependant dans le cas où f est univalente.

Définition 3. *On appelle partition d'un ensemble* E *une famille de parties mutuellement disjointes de* E *qui est un recouvrement de* E .

Si f est une application d'un ensemble F dans l'ensemble E , et $(X_i)_{i \in I}$ une partition de E , la famille $(\overset{-1}{f}\langle X_i \rangle)_{i \in I}$ est une partition de F . Si $(X_i)_{i \in I}$ est une partition d'un ensemble E et $(Y_j)_{j \in J}$ une partition d'un ensemble F , la famille $(X_i \times Y_j)_{(i,j) \in I \times J}$ est une partition de $E \times F$. Si $(X_i)_{i \in I}$ et $(Y_j)_{j \in J}$ sont des partitions du même ensemble E , la famille $(X_i \cap Y_j)_{(i,j) \in I \times J}$ est encore une partition de E . Une partition $(X'_{i'})_{i' \in I'}$ d'un ensemble E est dite plus fine qu'une partition $(X_i)_{i \in I}$ du même ensemble quand elle est plus fine que $(X_i)_{i \in I}$ en tant que recouvrement de E . On voit donc qu'étant données deux partitions de E , il y a toujours une partition de E qui est plus fine que chacune des deux partitions données.

Proposition 1. *Soient* E *un ensemble, et* $(X_i)_{i \in I}$ *un recouvrement de* E. *Si deux applications* f *et* g *de* E *sont telles que, pour tout* $i \in I$, *la restriction de* f *à* X_i *coïncide avec celle de* g , *on a* $f=g$. *Supposons maintenant que* $(X_i)_{i \; I}$ *soit une partition de* E , *et soit* $(f_i)_{i \in I}$ *une famille de fonctions telle que, pour tout* $i \in I$, *le domaine de définition de* f_i *soit* X_i . *Il existe alors une application* f *de* E , *et une seule, qui prolonge toutes les applications* f_i , $i \in I$.

Soit x un élément quelconque de E ; il y a donc un $i \in I$ tel que $x \in X_i$. Les restrictions de f et de g à X_i étant identiques, on a $f(x)=g(x)$. Supposons maintenant que $(X_i)_{i \in I}$ soit une partition de E. Si $x \in E$, posons $g(x)=\varepsilon_i(i \in I$ et $x \in X_i)$; la relation $(\exists i)(i \in I$ et $x \in X_i)$ étant vraie, on a $g(x) \in I$, $x \in X_{g(x)}$. Soit f l'application $x \to f_{g(x)}(x)$ $(x \in E)$. Si $x \in X_i$, on a $x \in X_i \cap X_{g(x)}$, d'où $i=g(x)$, puisque les ensembles de la famille $(X_i)_{i \in I}$ sont mutuellement disjoints. Il en résulte que $f(x)=f_i(x)$, donc que f prolonge chacune des applications f_i. L'unicité de f résulte de la première assertion de la prop.1.

Soit R une relation d'équivalence dans un ensemble E. L'application identique de E/R est alors évidemment une partition de E ; de plus, les ensembles de cette partition sont tous non vides.

Soit réciproquement $(X_i)_{i \in I}$ une partition d'un ensemble E telle que $X_i \neq \emptyset$ pour tout $i \in I$. La relation $(\exists i)(i \in I$ et $x \in X_i$ et $y \in X_i)$ est alors évidemment une relation d'équivalence R dans l'ensemble E. Les classes d'équivalence suivant R ne sont autres que les ensembles X_i de la partition ; si f est l'application canonique de E sur E/R, il existe une application biunivoque g de E/R sur I telle que $x \in X_{g(f(x))}$ pour tout $x \in E$.

§ 8. L'AXIOME DE L'ENSEMBLE DES PARTIES.

Nous introduirons maintenant le nouveau schéma d'axiomes suivant :

S.10 (Axiome de l'ensemble des parties). *Si* X *est une lettre, la relation* (X est un ensemble) $\Rightarrow$ Coll $(Y \subset X \,;\, Y)$ *est vraie*.

Cet axiome signifie que, X étant un ensemble, il y a un ensemble dont les éléments sont toutes les parties de X. Cet ensemble, qui est évidemment uniquement déterminé, s'appelle l'*ensemble des parties de* X, et se désigne par $\underline{P}(X)$.

Il est clair que, si Y est une partie de l'ensemble X, on a $\underline{P}(Y) \subset \underline{P}(X)$.

Soient Γ une correspondance et E un ensemble. La fonction $X \to \Gamma\langle X\rangle \; (X \in \underline{P}(E))$ s'appelle l'*extension canonique de* Γ à $\underline{P}(E)$; c'est une application de l'ensemble F, il est clair que l'extension canonique de Γ à $\underline{P}(E)$ applique $\underline{P}(E)$ dans $\underline{P}(F)$.

Soient Γ et Δ des correspondances, et E un ensemble. Désignons par $\hat{\Gamma}$ l'extension canonique de Γ à $\underline{P}(E)$, par F un ensemble contenant $\Gamma\langle E\rangle$ et par $\hat{\Delta}$ l'extension canonique de Δ à $\underline{P}(F)$. Il résulte alors tout de suite de la prop.6, § 4 que l'extension canonique de $\Delta \circ \Gamma$ à $\underline{P}(E)$ est $\hat{\Delta} \circ \hat{\Gamma}$.

Proposition 1. *Si* f *est une application biunivoque d'un ensemble* E *sur un ensemble* F, *l'extension canonique* $\hat{f}$ *de* f à $\underline{P}(E)$ *est une application biunivoque de* $\underline{P}(E)$ *sur* $\underline{P}(F)$.

La correspondance $f \circ \overset{-1}{f}$ est l'application identique de F. Si Y est une partie de F, on a $Y = f\langle \overset{-1}{f}\langle Y\rangle\rangle$, $\overset{-1}{f}\langle Y\rangle \in \underline{P}(E)$, d'où $Y \in \hat{f}\langle \underline{P}(E)\rangle$, ce qui montre que $\hat{f}$ applique $\underline{P}(E)$ sur $\underline{P}(F)$. De plus, si X est une partie de E telle que $f\langle X\rangle = Y$, on a $X = \overset{-1}{f}\langle Y\rangle$, ce qui montre que $\hat{f}$ est biunivoque.

Soient E et F des ensembles. Toute application de E dans F est une partie de $E \times F$. L'ensemble des éléments de $\underline{P}(E \times F)$ qui possèdent la propriété d'être des applications de E dans F est donc un ensemble dont les éléments sont toutes les applications de E dans F.

Définition 1. <u>Si</u> E <u>et</u> F <u>sont des ensembles, on désigne par</u> F^E <u>l'ensemble des applications de</u> E <u>dans</u> F.

Soient E, E', F et F' des ensembles. Soient u une application de E' dans E et v une application de F dans F'. L'application $f \to v \circ f \circ u$ $(f \in F^E)$ est alors une application de F^E dans $F'^{E'}$; désignons la par φ. L'application $f' \to v' \circ f' \circ u'$ $(f' \in F'^{E'})$ est une application de $F'^{E'}$ dans $F''^{E''}$; désignons la par ψ. Soient u' une application d'un ensemble E'' dans E' et v' une application de F' dans un ensemble F''. Les applications $\psi \circ \varphi$ et $f \to (v' \circ v) \circ f \circ (u \circ u')$ $(f \in F^E)$ sont des applications de F^E dans $F''^{E''}$. Ces applications sont égales, comme il résulte aisément d'applications répétées de la prop. 5; §4.

Proposition 2. <u>Soient</u> u <u>une application biunivoque d'un ensemble</u> E' <u>sur un ensemble</u> E <u>et</u> v <u>une application biunivoque d'un ensemble</u> F <u>sur un ensemble</u> F'. <u>L'application</u> $f \to v \circ f \circ u$ $(f \in F^E)$ <u>est alors une application biunivoque de</u> F^E <u>sur</u> $F'^{E'}$.

Soit φ cette application. La correspondance $\overset{-1}{u}$ est une application biunivoque de E' sur E ; $u \circ \overset{-1}{u}$ est l'application identique de E et $\overset{-1}{u} \circ u$ est l'application identique de E'. La correspondance $\overset{-1}{v}$ est une application de F dans F' ; $\overset{-1}{v} \circ v$ est l'application identique de F, et $v \circ \overset{-1}{v}$ est l'application identique de F'. Soit ψ l'application $f' \to \overset{-1}{u} \circ f' \circ \overset{-1}{v}$ $(f' \in F'^{E'})$; il résulte de ce qui a été dit un peu plus haut que $\psi \circ \varphi$ est l'application identique de F^E et que $\varphi \circ \psi$ est l'application identique de $F'^{E'}$. On conclut alors au moyen de la prop. 4, §5.

Soit maintenant f une fonction de deux arguments, dont l'ensemble de définition soit le produit $E\times F$ de deux ensembles E et F . Si y est un objet quelconque, soit $f_{/y}$ l'application partielle de f relative à la valeur y du second argument. Soit D un ensemble contenant le domaine des valeurs de f . La fonction $y \longrightarrow f_{/y}$ $(y\in F)$ est alors une application de F dans D^E . Réciproquement, si φ est une application quelconque d'un ensemble F dans un ensemble de la forme D^E , où D et E sont des ensembles, l'application $(x,y) \longrightarrow (\varphi(y))(x)$ $(x,y)\in E\times F)$ est une fonction f de deux arguments dont le domaine de définition est $E\times F$ et dont le domaine des valeurs est dans D ; de plus, on a, pour $y\in F$, $f_{/y} = \varphi(y)$. Des considérations analogues s'appliqueraient au cas où on considère les applications partielles d'une fonction de deux arguments relatives à des valeurs du premier argument.

Soit $(X_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille d'ensembles dont l'ensemble d'indices est un produit de deux ensembles non vides I et J . (Remarque : on devrait normalement désigner une telle famille par une notation telle que $(X_k)_{k\in I\times J}$; mais il est plus commode d'employer la notation $(X_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$, qui permet de substituer des termes convenables aux indices i et j ; on supprime même quelquefois la virgule entre i et j) . Nous allons démontrer les formules

$$\boxed{\begin{aligned} \bigcup_{i\in I}\Big(\bigcap_{j\in J} X_{ij}\Big) &= \bigcap_{f\in J^I}\Big(\bigcup_{i\in I} X_{i,f(i)}\Big) \\ \bigcap_{i\in I}\Big(\bigcup_{j\in J} X_{i,j}\Big) &= \bigcup_{f\in J^I}\Big(\bigcap_{i\in I} X_{i,f(i)}\Big) \end{aligned}} .$$

Observons d'abord que, pour montrer que deux ensembles A et B sont égaux, il suffit de montrer que tout élément de A est élément de B et qu'un objet qui n'appartient pas à A n'appartient pas non plus à B .

Ceci dit, soit d'abord x un élément de $\bigcup_{i \in I}(\bigcap_{j \in J} X_{i,j})$. Soit f un élément quelconque de J^I. Il existe un indice $i \in I$ tel que $x \in \bigcap_{j \in J} X_{i,j}$; on a donc $x \in X_{i,f(i)}$ et par suite $x \in \bigcup_{i \in I} X_{i,f(i)}$. Ceci étant vrai pour tout $f \in J^I$, on a $x \in \bigcap_{f \in J^I} (\bigcup_{i \in I} X_{i,f(i)})$. Soit maintenant x un objet qui n'appartient pas à l'ensemble $\bigcup_{i \in I}(\bigcap_{j \in J} X_{i,j})$. Il en résulte que, pour tout $i \in I$, $x \notin \bigcap_{j \in J} X_{i,j}$, ce qui signifie que, pour tout $i \in I$, il existe un indice j tel que $j \in J$, $x \notin X_{i,j}$. Désignons par $\xi(i)$ le terme $\varepsilon_j(j \in J$ et $x \notin X_{i,j})$; la relation $(\forall i)(i \in I \Rightarrow x \notin X_{i,\xi(i)})$ est donc vraie. Or la fonction $i \to \xi(i)$ $(i \in I)$ est un élément de J^I. L'objet x n'appartenant pas à l'ensemble $\bigcup_{i \in I} X_{i,\xi(i)}$, n'appartient pas non plus à l'ensemble $\bigcap_{f \in J^I}(\bigcup_{i \in I} X_{i,f(i)})$. La première formule est donc démontrée. La seconde se démontre d'une manière analogue, comme nous laissons au lecteur le soin de le vérifier.

§ 9. PRODUITS DE FAMILLES D'ENSEMBLES.

Définition 1. *Soit* $(X_i)_{i \in I}$ *une famille d'ensembles. Désignons par* A *la réunion des ensembles de cette famille ; l'ensemble des applications* f *de* I *dans* A *telles que* $f(i) \in X_i$ *pour tout* $i \in I$ *s'appelle le produit de la famille d'ensembles* $(X_i)_{i \in I}$ *et se désigne par* $\prod_{i \in I} X_i$. *Si* $i \in I$, X_i *s'appelle le facteur d'indice* i *du produit ; l'application* $f \to f(i)$ $(f \in \prod_{i \in I} X_i)$ *s'appelle la fonction coordonnée d'indice* i *sur le produit ; image d'une partie* A *de* $\prod_{i \in I} X_i$ *par la fonction coordonnée d'indice* i *s'appelle la projection d'indice* i *de* A.

Si tous les facteurs X_i du produit sont égaux à un même ensemble X, on a $A=X$, et $\prod_{i\in I} X_i$ est alors identique à l'ensemble A^I des applications de I dans A.

En particulier, si I ne comporte qu'un seul élément i, c'est-à-dire si $I=\{i\}$, on a $\prod_{i\in I} X_i = X_i^{\{i\}}$. Or l'application $f \to f(i)$ est évidemment une application biunivoque de $X_i^{\{i\}}$ sur X_i ; <u>nous identifierons toujours</u> $\prod_{i\in\{i\}} X_i$ <u>avec</u> X_i <u>au moyen de cette application</u>.

Nous allons maintenant montrer que la notion de produit que nous venons de définir peut être considérée comme une généralisation de celle de produit cartésien de deux ensembles. Désignons par 1 l'ensemble $\{\emptyset\}$, et par 2 l'ensemble $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ (* ces définitions sont en accord avec les définitions que nous donnerons plus loin des <u>nombres entiers</u> 1 et 2 *). Il est clair que $1\neq 2$; soit I l'ensemble $\{1,2\}$. Si a et b sont des objets quelconques, il existe une application f et une seule de I telle que $f(1)=a$ et $f(2)=b$; de plus, a et b sont uniquement déterminés quand f est connue. Or, la définition explicite du couple que nous avons donnée au §2 n'intervient jamais en mathématiques ; la propriété fondamentale de la notion de couple, et la seule qu'on ait jamais à prendre en considération, est celle qui affirme qu'avec deux objets donnés dans un certain ordre on peut toujours former un couple, et que les objets (ainsi que l'ordre dans lequel ils sont donnés) sont uniquement déterminés quand le couple qu'ils forment est connu. Il apparaît donc naturel de faire la convention suivante : <u>nous identifierons désormais tout couple</u> (a,b) <u>avec l'application</u> f <u>de l'ensemble</u> $\{1,2\}$ <u>définie par</u> $f(1)=a$ <u>et</u> $f(2)=b$.

Ceci dit, soient A et B des ensembles. Le couple (A,B) est alors une famille d'ensembles dont l'ensemble d'indices est $\{1,2\}$, et le produit de cette famille d'ensembles est l'ensemble des applications f de $\{1,2\}$ telles que $f(1)\in A$ et $f(2)\in B$; ce produit est donc l'ensemble des couples (a,b) tels que $a\in A$ et $b\in B$: c'est le produit cartésien $A\times B$ des ensembles A et B .

On a $1=\{\emptyset\}$, $2=\{\emptyset,1\}$; posons encore $3=\{\emptyset,1,2\}$. On voit tout de suite que $1\neq 2$, $1\neq 3$, $2\neq 3$. Si a,b,c sont des objets quelconques, on désigne par (a,b,c) l'application de l'ensemble 1,2,3 telle que $f(1)=a$, $f(2)=b$, $f(3)=c$. Un objet de la forme (a,b,c) s'appelle un <u>triplet</u> ; on dit que a est sa première coordonnée, b sa seconde coordonnée et c sa troisième coordonnée. Si (A,B,C) est un triplet d'ensembles, c'est une famille d'ensembles admettant l'ensemble $\{1,2,3\}$ comme ensemble d'indices ; on désigne le produit de cette famille d'ensembles par $A\times B\times C$: c'est l'ensemble des triplets (a,b,c) tels que $a\in A$, $b\in B$ et $c\in C$.

Introduisant encore le signe "4" par la définition $4=\{\emptyset,1,2,3\}$, on définit d'une manière analogue les quadruplets comme étant les applications de l'ensemble $\{1,2,3,4\}$, puis les produits $A\times B\times C\times D$ de quadruplets (A,B,C,D) d'ensembles ; etc. etc.

Théorème 6. <u>Soient</u> $(X_i)_{i\in I}$ <u>et</u> $(X'_i)_{i\in I}$ <u>des familles d'ensembles qui ont le même ensemble d'indices</u> I . <u>Si on a</u> $X_i\subset X'_i$ <u>pour tout</u> $i\in I$, <u>on a</u> $\prod_{i\in I} X_i \subset \prod_{i\in I} X'_i$. <u>Réciproquement, si</u> $\prod_{i\in I} X_i$ <u>est contenu dans</u> $\prod_{i\in I} X'_i$ <u>et si</u> $X_i\neq\emptyset$ <u>pour tout</u> $i\in I$, <u>on a</u> $X_i\subset X'_i$ <u>pour tout</u> $i\in I$.

La première assertion est évidente. Supposons maintenant que $\prod_{i\in I} X_i \subset \prod_{i\in I} X'_i$ et que $X_i \neq \emptyset$ pour tout $i\in I$. Soit i un élément de I ; nous voulons montrer que $X_i \subset X'_i$. Soit x un élément de X_i. Soit f la fonction

$$j \rightarrow \varepsilon_y((j=i \Rightarrow y=x) \text{ et } (j\neq i \Rightarrow y\in X_j)) \quad (j\in I).$$

La relation $(j\in J) \Longrightarrow (\exists y)(y\in X_j)$ est vraie ; il en est donc de même de la relation

$$(j\in I) \Longrightarrow (\exists y)((j=i \Rightarrow y=x) \text{ et } (j\neq i \Rightarrow y\in X_j)),$$

d'où on conclut que la relation

$$(j\in I) \Longrightarrow ((j = i \Rightarrow f(j)=x) \text{ et } (j \neq i \Rightarrow f(j)\in X_j))$$

est vraie. Puisque $x\in X_i$, la relation $(j\in I) \Rightarrow (f(j)\in X_j)$ est vraie, d'où $f \in \prod_{i\in I} X_i$. On en conclut que $f\in \prod_{i\in I} X'_i$, d'où $x=f(i)\in X'_i$, et par suite $X_i \subset X'_i$.

Corollaire. <u>Soit</u> $(X_i)_{i\in I}$ <u>une famille d'ensembles</u>. <u>Pour que</u> $\prod_{i\in I} X_i = \emptyset$, <u>il faut et suffit qu'il existe un indice</u> $i\in I$ <u>tel que</u> $X_i = \emptyset$.

La condition est évidemment suffisante. Supposons maintenant que $\prod_{i\in I} X_i = \emptyset$. On a alors $I\neq\emptyset$, car il est clair que le produit de la famille d'ensembles comporte exactement un élément, à savoir la fonction vide. Ceci dit, il résulte du th.6 que l'hypothèse $X_i\neq\emptyset$ pour tout $i\in I$ entraînerait $X_i \subset \emptyset$ pour tout $i\in I$, ce qui est absurde puisque $I\neq\emptyset$; l'hypothèse en question est donc fausse, ce qui montre que la condition du corollaire est nécessaire.

Le corollaire montre que, si on a une famille d'ensembles $(X_i)_{i\in I}$ telle que $X_i\neq\emptyset$ pour tout $i\in I$, on peut introduire (à titre de constante auxiliaire) une application f de I qui possède la propriété que $f(i)\in X_i$ pour tout $i\in I$.

Proposition 1. *Soit* $(X_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ *une famille d'ensembles dont l'ensemble d'indices est le produit de deux ensembles* I *et* J ; *on suppose* $J\neq\emptyset$. *On a alors* $\bigcap_{j\in J}(\prod_{i\in I} X_{i,j}) = \prod_{i\in I}(\bigcap_{j\in J} X_{i,j})$.

Les deux membres de l'égalité qu'il s'agit de démontrer sont des ensembles d'applications de I . Pour qu'une application f de I appartienne au premier membre, il faut et suffit que, pour tout $j\in J$, $f\in\prod_{i\in I}X_{i,j}$, c'est-à-dire que, pour tout $(i,j)\in I\times J$, $f(i)$ appartienne à $X_{i,j}$; pour que f appartienne au second membre, il faut et suffit que, pour tout $i\in I$, $f(i)\in\bigcap_{j\in J}X_{i,j}$, c'est-à-dire encore que, pour tout $(i,j)\in I\times J$, $f(i)$ appartienne à $X_{i,j}$. La proposition 1 est donc démontrée.

Soient $(X_i)_{i\in I}$ et $(X'_i)_{i\in I}$ des familles d'ensembles ayant le même ensemble d'indices I . Prenant pour J un ensemble à deux éléments, par exemple $\{1,2\}$, on déduit tout de suite de la prop.1 que l'on a

(1) $$(\prod_{i\in I}X_i)\cap(\prod_{i\in I}X'_i) = \prod_{i\in I}(X_i\cap X'_i) .$$

Plus particulièrement encore, on voit que, si X,Y,X',Y' sont des ensembles, on a

$$(X\times Y)\cap(X'\times Y') = (X\cap X')\times(Y\cap Y') .$$

Proposition 2. *Soit* $(X_i)_{i\in I}$ *une famille d'ensembles ; soit* $((X_{i,j})_{j\in J_i})_{i\in I}$ *une famille (admettant* I *comme ensemble d'indices) de familles d'ensembles. Supposons que, pour tout* $i\in I$, $(X_{i,j})_{j\in J_i}$ *soit un recouvrement de* X_i . *Soit* $J=\prod_{i\in I}J_i$; *si* $\varphi\in J$, *soit* P_φ *l'ensemble* $\prod_{i\in I}X_{i,\varphi(i)}$. *La famille* $(P_\varphi)_{\varphi\in J}$ *est alors un recouvrement de* $\prod_{i\in I}X_i$. *Si, pour chaque* $i\in I$, $(X_{i,j})_{j\in J_i}$ *est une partition de* X_i , *la famille* $(P_\varphi)_{\varphi\in J}$ *est une partition de* $\prod_{i\in I}X_i$.

Soit f un élément de $\prod_{i\in I} X_i$. Si i est un élément quelconque de I, $f(i)$ appartient à X_i , d'ou' il résulte qu'il existe un élément j de J_i tel que $f(i)\in X_{i,j}$; en d'autres termes, l'ensemble des j tels que "$j\in J_i$ et $f(i)\in X_{i,j}$" n'est pas vide. Il résulte donc du corollaire au th.6, on voit qu'il existe un $\varphi\in J$ tel que $f(i)\in X_{i,\varphi(i)}$ pour tout $i\in I$, d'où $f\in P_\varphi$; ceci montre que $(P_\varphi)_{\varphi\in J}$ est un recouvrement de $\prod_{i\in I} X_i$. Supposons maintenant que, pour tout $i\in I$, $(X_{i,j})_{j\in J_i}$ soit une partition de X_i . On a donc d'abord $X_{i,j}\subset X_i$ pour tout $i\in I$ et tout $j\in J_i$, d'où $P_\varphi\subset \prod_{i\in I} X_i$ pour tout $\varphi\in J$. Soient d'autre part φ et φ' des éléments distincts de J . Il existe alors un $i\in I$ tel que $\varphi(i)\neq\varphi'(i)$, d'où $X_{i,\varphi(i)}\cap X_{i,\varphi'(i)}=\emptyset$. Il résulte alors de la formule (1) que $P_\varphi\cap P_{\varphi'}=\emptyset$, ce qui montre que $(P_\varphi)_{\varphi\in J}$ est une partition de $\prod_{i\in I} X_i$.

Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles, et soit $(g_i)_{i\in I}$ une famille de fonctions admettant encore I pour ensemble d'indices ; supposons que, pour tout $i\in I$, g_i soit une application de X_i dans un ensemble Y_i . Si f est un élément de $\prod_{i\in I} X_i$, la fonction $i\to g_i(f(i))$ $(i\in I)$ est un élément de $\prod_{i\in I} Y_i$. Désignons cet élément par h_f ; la fonction $f\to h_f$ $(f\in\prod_{i\in I} X_i)$ est alors une application de $\prod_{i\in I} X_i$ dans $\prod_{i\in I} Y_i$; on désigne souvent cette application par $[g_i]_{i\in I}$, ou même, s'il n'y a pas de danger de confusion avec la famille $(g_i)_{i\in I}$, par $(g_i)_{i\in I}$. On notera que la notion que nous venons de définir généralise celle définie à la fin du § 5 dans le cas d'un produit de deux ensembles. Soit maintenant $(g'_i)_{i\in I}$ une nouvelle famille de fonctions ; supposons que, pour tout i I , g'_i soit une application de Y_i dans un ensemble Z_i . On vérifie alors tout de suite que l'application $[g'_i\circ g_i]_{i\in I}$ de $\prod_{i\in I} X_i$ dans $\prod_{i\in I} Z_i$

est identique à $[g_i']_{i\in I}\circ[g_i]_{i\in I}$.

Proposition 3. <u>Soit</u> $(X_i)_{i\in I}$ <u>une famille d'ensembles ; soit</u> $(g_i)_{i\in I}$ <u>une famille de fonctions ; supposons que, pour tout</u> $i\in I$, g_i <u>soit une application biunivoque de</u> X_i <u>sur un ensemble</u> Y_i ; $[g_i]_{i\in I}$ <u>est alors une application biunivoque de</u> $\prod_{i\in I}X_i$ <u>sur</u> $\prod_{i\in I}Y_i$.

En effet, $[\overset{-1}{g_i}]_{i\in I}\circ[g_i]_{i\in I}$ est l'application identique de $\prod_{i\in I}X_i$, tandis que $[g_i]_{i\in I}\circ[\overset{-1}{g_i}]_{i\in I}$ est l'application identique de $\prod_{i\in I}Y_i$.

Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles, et soit E un ensemble. Désignons par p_i la fonction coordonnée d'indice i du produit $\prod_{i\in I}X_i$. Soit φ une application de E dans $\prod_{i\in I}X_i$; $p_i\circ\varphi$ est alors une application de E dans X_i, donc un élément de X_i^E, et la fonction $i\to p_i\circ\varphi$ $(i\in I)$ est un élément de $\prod_{i\in I}X_i^E$; désignons cet élément par u_φ. La fonction $\varphi\to u_\varphi$ $(\varphi\in(\prod_{i\in I}X_i)^E)$ est alors une application, dite <u>canonique</u>, de $(\prod_{i\in I}X_i)^E$ dans $\prod_{i\in I}X_i^E$.

Proposition 4. <u>Soient</u> $(X_i)_{i\in I}$ <u>une famille d'ensembles et</u> E <u>un ensemble. L'application canonique de</u> $(\prod_{i\in I}X_i)^E$ <u>dans</u> $\prod_{i\in I}X_i^E$ <u>est une application biunivoque du premier de ces ensembles sur le second.</u>

Utilisons les mêmes notations que plus haut. Soient φ et φ' des applications de E dans $\prod_{i\in I}X_i$ telles que $u_\varphi = u_{\varphi'}$. On a donc $p_i\circ\varphi = p_i\circ\varphi'$ pour tout $i\in I$; or, si $x\in E$, il est clair que $\varphi(x)$ est la fonction $i\to(p_i\circ\varphi)(x)$ $(i\in I)$; on en conclut que $\varphi(x)=\varphi'(x)$ pour tout $x\in E$, ce qui prouve que l'application canonique est biunivoque. Soit maintenant $i\to g(i)$ $(i\in I)$ un élément de $\prod_{i\in I}X_i^E$; $g(i)$ est donc, pour tout $i\in I$, une application de E dans X_i. Si $x\in E$, la fonction $i\to(g(i))(x)$ $(i\in I)$ est un élément

φ_x de $\prod_{i\in I} X_i$; et la fonction $x \to \varphi_x$ $(x \in E)$ est une application φ de E dans $\prod_{i\in I} X_i$; on voit tout de suite que $p_i \circ \varphi = g(i)$ pour tout $i \in I$; ceci montre que l'application canonique applique $(\prod_{i\in I} X_i)^E$ sur $\prod_{i\in I} X_i^E$.

Proposition 5. <u>Soit</u> $(X_i)_{i\in I}$ <u>une famille d'ensembles ; soit</u> u <u>une application biunivoque d'un ensemble</u> J <u>sur l'ensemble</u> I. <u>L'application</u> $f \to f \circ u$ $(f \in \prod_{i\in I} X_i)$ <u>est alors une application biunivoque de</u> $\prod_{i\in I} X_i$ <u>sur</u> $\prod_{j\in J} X_{u(j)}$.

Soit A la réunion des ensembles de la famille $(X_i)_{i\in I}$; c'est aussi la réunion des ensembles de la famille $(X_{u(j)})_{j\in J}$ (prop.1, § 6). L'application $f \to f \circ u$ $(f \in A^I)$ est une application biunivoque de A^I sur A^J (prop.2, § 8). Il est évident que la condition "pour tout $i \in I$, $f(i) \in X_i$" est équivalente à "pour tout $j \in J$, $(f \circ u)(j) \in X_{u(j)}$", ce qui démontre la prop.5 .

Les notations étant celles de la prop.5, on dit que l'application $f \to f \circ u$ $(f \in \prod_{i\in I} X_i)$ est l'application <u>canoniquement associée à</u> u ; les applications d'un produit $\prod_{i\in I} X_i$ qui sont canoniquement associées aux <u>permutations</u> de l'ensemble I s'appellent des <u>applications canoniques</u> de ce produit. Considérant en particulier le cas où $I = \{1,2\}$, on voit facilement qu'il existe exactement deux permutations de I, l'une qui est l'application identique et l'autre qui applique 1 sur 2 et 2 sur 1 . Les applications correspondantes d'un produit $A \times B$ de deux ensembles sont d'une part l'application identique, d'autre part l'application g de $A \times B$ sur $B \times A$ qui est définie par $g(x,y) = (y,x)$ si $x \in A$ et $y \in B$.

Dans le cas où $I = \{1,2,3\}$, nous laissons au lecteur le soin de vérifier qu'il y a six applications canoniques d'un produit $A \times B \times C$ et qu'elles appliquent ce produit sur les ensembles suivants :
$A \times B \times C$, $B \times C \times A$, $C \times A \times B$, $B \times A \times C$, $C \times B \times A$, $A \times C \times B$.

Proposition 6. <u>Soit</u> $(X_i)_{i \in I}$ <u>une famille d'ensembles, et soit</u> $(J_a)_{a \in A}$ <u>une partition de</u> I . <u>Posons</u> $P = \prod_{i \in I} X_i$, <u>et, pour</u> $a \in A$, $Q_a = \prod_{i \in J_a} X_i$. <u>Si</u> $f \in P$, <u>soit</u> f_a <u>la restriction de</u> f <u>à</u> J_a , <u>et soit</u> $\varphi(f)$ <u>l'élément</u> $a \to f_a$ $(a \in A)$ <u>de</u> $\prod_{a \in A} Q_a$. <u>L'application</u> φ : $f \to \varphi(f)$ $(f \in P)$ <u>est alors une application biunivoque de</u> P <u>sur</u> $\prod_{a \in A} Q_a$.

Puisque $(J_a)_{a \in A}$ est un recouvrement de I , les conditions $f \in P$, $f' \in P$, $f_a = f'_a$ pour tout $a \in A$ entraînent $f = f'$, ce qui montre que φ est biunivoque. Soit maintenant g un élément quelconque de $\prod_{a \in A} Q_a$. Si $a \in A$, $g(a)$ est une application de J_a dans X_i . Puisque $(J_a)_{a \in A}$ est une partition de I, il existe une application f de I qui prolonge toutes les applications $g(a)$ pour $a \in A$ (prop.1, § 8) ; il est clair que $\varphi(f) = g$, ce qui montre que φ applique P sur $\prod_{a \in A} Q_a$.

L'application φ de la prop.6 s'appelle l'application de P canoniquement associée à la partition $(J_a)_{a \in A}$ de I . D'une manière générale, nous conviendrons d'appeler <u>canoniques</u> toutes les applications de produits d'ensembles qui peuvent s'obtenir en composant de toutes les manières possibles des applications canoniquement associées à des permutations ou à des partitions d'ensembles d'indices .

Considérons par exemple un triplet d'ensembles (A,B,C). L'application canoniquement associée à la partition $(\{1,2\},\{3\})$ de l'ensemble d'indices $\{1,2,3\}$ est une application biunivoque F de $A\times B\times C$ sur $(A\times B)\times C$; on a $F(x,y,z)=((x,y),z)$ si $x\in A$, $y\in B$, $z\in C$. Composant F avec l'application canonique de $(A\times B)\times C$ sur $C\times(A\times B)$ attachée à la permutation de $\{1,2\}$ qui échange 1 et 2, on obtient une application canonique F' de $A\times B\times C$ sur $C\times(A\times B)$ telle que $F'(x,y,z) = (z,(x,y))$. Il est également facile de construire une application canonique F'' de $A\times B\times C$ sur $A\times(B\times C)$ telle que $F''(x,y,z) = (x,(y,z))$; nous laissons au lecteur le soin de faire cette construction.

§ 10. REMARQUE SUR LES DÉFINITIONS DE LA THÉORIE DES ENSEMBLES.

La plupart des définitions que nous avons données en théorie des ensembles comportent dans leurs énoncés certaines restrictions quant à leur applicabilité. Ainsi, la définition du produit de deux ensembles définit le symbole $A\times B$ <u>dans le cas où</u> A et B sont des ensembles ; la définition de $\Gamma\langle X\rangle$ définit ce symbole <u>dans le cas où</u> Γ est une correspondance et X un ensemble ; la définition de $f(x)$ définit ce symbole <u>dans le cas où</u> f est une fonction et x un élément du domaine de définition de f. Il convient donc de ne substituer aux lettres A et B dans $A\times B$ que des termes dont on s'est assuré qu'ils représentent des ensembles dans la théorie dans laquelle on se trouve, etc. etc.. Ces restrictions, pour naturelles qu'elles soient en mathématique, n'en sont pas moins fort gênantes du point de vue logique : elles obligeraient en principe à apporter des correctifs assez sérieux à l'énoncé de la règle de substitution

On peut cependant éviter ces restrictions en substituant à nos définitions restrictives des définitions "universelles". Nous donnerons quelque exemples de la manière dont cela peut se faire, laissant au lecteur qui s'intéresse à la question le soin de formuler de pareilles définitions universelles qui puissent se substituer à toutes les définitions que nous avons données dans ce chapitre.

1. Si A et B sont des lettres, on peut définir le terme $A \times B$ comme étant $\varepsilon_Z((\forall x)(\forall y)((x,y) \in Z \Longleftrightarrow ((x \in A$ et $y \in B))$. La relation $(x \in A$ et $y \in B) \Longleftrightarrow (x,y) \in A \times B$ n'est alors pas une relation vraie de la mathématique ; mais la relation qu'on en déduit en y substituant à x,y,A,B des termes x',y',A',B' sera vraie dans toute théorie dans laquelle les relations "A' est un ensemble" et "B' est un ensemble" sont vraies.

2. Si z est une lettre, on définit les termes $pr_1 z$ comme étant $\varepsilon_x((\exists y)((x,y)=z))$ et $pr_2 z$ comme étant $\varepsilon_y((\exists x)((x,y)=z))$.

3. Si T est un terme et x et A des lettres, on définit l'ensemble des objets de la forme T pour $x \in A$ comme étant le terme

$$\varepsilon_X((\forall y)\ (y \in X \Longleftrightarrow (\exists x)(x \in A \text{ et } y = T))).$$

4. Si R est une relation, on définit l'ensemble des éléments de A tels que R comme étant $\varepsilon_X((\forall x)(x \in X \Longleftrightarrow (x \in A$ et $R))$.

5. On définit le domaine de définition de Γ comme étant le terme $\varepsilon_X((\forall x)(x \in X \Longleftrightarrow (\exists y)((x,y) \in \Gamma)))$ et le domaine des valeurs de Γ comme étant $\varepsilon_Y((\forall y)(y \in Y \Longleftrightarrow (\exists x)((x,y) \in \Gamma)))$.

6. On définit $\overset{-1}{\Gamma}$ comme étant l'ensemble des objets de la forme $(pr_2 z, pr_1 z)$ pour $z \in \Gamma$.

7. On définit le symbole $f(x)$ comme étant le terme $\varepsilon_y((x,y) \in f)$.

Sommes de familles d'ensembles.

Définition 2. *Soit* $(X_i)_{i\in I}$ *une famille d'ensembles. On dit qu'un ensemble X est une somme de cette famille d'ensembles s'il existe une partition* $(X'_i)_{i\in I}$ *de X, admettant I comme ensemble d'indices, telle que, pour tout* $i\in I$*, il existe une application biunivoque de* X_i *sur* X'_i.

Proposition 7. *Toute famille d'ensembles admet au moins une somme.*

Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles ; soit A la réunion des ensembles de cette famille ; si $i \in I$, soit f_i l'application $x \to (x,i)$ $(x\in X_i)$ de X_i dans $A\times I$. Il est clair que f_i est une application biunivoque de X_i sur une partie $X'_i = f_i\langle X_i\rangle$ de $A\times I$. De plus, l'image de X'_i par la seconde fonction coordonnée sur $A\times I$ est contenue dans l'ensemble $\{i\}$; il en résulte immédiatement que $X'_i \cap X'_j = \emptyset$ si i et j sont des indices distincts de I. L'ensemble $X = \bigcup_{i\in I} X'_i$ est donc une somme de la famille $(X_i)_{i\in I}$.

Proposition 8. *Si X et Y sont des sommes d'une même famille d'ensembles* $(X_i)_{i\in I}$*, il existe une application biunivoque de X sur Y.*

Soient $(X'_i)_{i\in I}$ et $(X''_i)_{i\in I}$ des partitions de X et de Y telles que, pour tout $i\in I$, il existe des applications biunivoques f'_i et f''_i de X_i sur X'_i et sur X''_i. La fonction $f''_i \circ f'^{-1}_i$ est donc une application biunivoque de X'_i sur X''_i. Il résulte de la prop. 1, §8 qu'il existe une application f de X qui prolonge simultanément toutes les applications $f''_i \circ f'^{-1}_i$. On voit tout de suite que f est une application biunivoque de X sur Y.
