INTEGRATION, CHAP. III §5
FONCTIONS MESURABLES
(NOUVELLE VERSION CARTAN)

Rédaction n° 131

Nombre de pages : 14

Nombre de feuilles : 14

Intégration Chap III § 5

Fonctions mesurables

131

INTEGRATION, Chap. III - § 5
Fonctions mesurables
(nouvelle version CARTAN)

Le rédacteur est arrivé à la conclusion qu'il est nécessaire de faire la distinction entre fonctions mesurables, et fonctions localement mesurables (les seules dont il était question dans la rédaction précédente, où elles portaient le nom de "mesurables"). De ce fait, les ensembles "mesurables" ne sont autres que ceux que Bourbaki avait appelés "intégrables". Maintenant, il n'y a plus de raison pour s'en tenir à la terminologie barbare des "ensembles intégrables" : il sera donc question, ici, d'ensembles mesurables, et d'ensembles localement mesurables (les premiers ont une mesure finie).

D'autre part, il est apparu que l'on gagne en simplicité et en clarté en ne se limitant pas à faire la théorie des fonctions mesurables sur un espace localement compact, mais qu'il convient d'étudier, plus généralement, les fonctions qui sont définies seulement sur un sous-espace A mesurable (donc de mesure finie) de l'espace E (localement compact, sur lequel est donnée une mesure de Radon). Au fond, cela revient un peu (je le confesse) à étudier des fonctions définies sur un "espace mesuré", qui n'est pas localement compact ; toutefois, il y a un espace localement compact ambiant, et la "mesure abstraite" sur A (si l'on pouvait en parler) provient d'une mesure (une vraie) sur l'espace ambiant.

Dans tout le paragraphe, E désigne un espace localement compact, donné une fois pour toutes, μ une mesure sur E, donnée elle aussi une fois pour toutes. Toutes les fonctions que l'on envisagera sur E, ou sur une partie de E, prendront leurs valeurs dans un espace F topologique métrisable (cette hypothèse ne sera pas toujours répétée). Par exemple, F pourra être la droite numérique (achevée ou non), ou un espace de Banach.

1 - Définition des fonctions mesurables.

DÉFINITION 1.- Soit f une fonction définie sur une partie A de E . On dit que f est mesurable si, pour tout $\varepsilon > 0$, existe un compact K contenu dans A , et jouissant des deux propriétés suivantes :

$$\mu^*(A \cap \complement K) < \varepsilon \quad ,$$

la restriction de f à K est continue.

On remarquera que cette définition implique que l'ensemble A est mesurable (cf. th.1,p.48 ; mais il conviendrait d'y donner la forme utilisée ici). Dorénavant, il sera sous-entendu que A est mesurable.

La terminologie de "mesurable" est justifiée par la

PROPOSITION 1.- Pour qu'un ensemble B contenu dans A mesurable soit mesurable, il faut et il suffit que sa fonction caractéristique, en tant que fonction définie sur A , soit une fonction mesurable.

En effet, soit φ_B cette fonction caractéristique. Dire que la restriction de φ_B à un compact K contenu dans A est continue, c'est dire que $B \cap K$, $K \cap \complement B$ sont compacts. Alors B est réunion d'un compact $B \cap K$ et d'un ensemble de mesure extérieure $< \varepsilon$, puisque contenu dans $A \cap \complement K$, donc B est mesurable,. Réciproquement, si B est mesurable $A \cap \complement B$ l'est aussi ; il existe un compact $K_1 \subset B$ tel que $\mu(B \cap \complement K) < \varepsilon/2$, et un compact $K_2 \subset A \cap \complement B$ tel que $\mu(A \cap \complement B \cap \complement K_2) < \varepsilon/2$; si on appelle K la réunion des compacts disjoints K_1 et K_2 , la restriction de φ_B à K est continue, et $\mu(A \cap \complement K) < \varepsilon$. Ceci achève la démonstration.

On peut donner, d'une fonction mesurable, une définition équivalente à la définition 1 :

DÉFINITION 1 bis.- Soit f une fonction définie sur un sous-ensemble mesurable A de E . On dir que f est mesurable s'il existe une suite croissante d'ensembles compacts K_n contenus dans A , tels que :

1) A soit réunion des K_n et d'un ensemble négligeable ;

2) la restriction de f à chaque K_n soit continue.

Il est clair qu'une f qui satisfait à la définition 1 satisfait à la définition 2 : il suffit de prendre une suite de nombres $\varepsilon_n > 0$ et tendant vers 0 . Réciproquement, si f satisfait aux conditions de la déf. 2, la suite des $\mu(A \cap \complement K_n)$ tend vers 0 (p.46, corol.de la prop.4 et par suite les conditions de la définition 1 sont satisfaites.

La définition met en évidence le fait suivant : si deux mesures μ et ν , sur E , sont telles que tout ensemble μ-négligeable soit ν-négligeable, et réciproquement, alors <u>les fonctions mesurables sont les mêmes pour ces deux mesures</u>. (sous la réserve que A soit mesurable pour chacune des mesures μ et ν). En particulier, les ensembles mesurables contenus dans un compact donné sont les mêmes pour les deux mesures.

Soit de nouveau f une fonction définie sur un sous-ensemble mesurable A . Supposons que la fonction f soit mesurable ; alors toute fonction g définie sur A , et presque partout égale à f , est mesurable : car si la restriction de f au compact K (qui figure dans la définition 1) est continue, l'ensemble des points de K où $g \neq f$ est contenu dans un ensemble ouvert U de mesure $< \varepsilon$, donc la restriction de g au compact $K' = K \cap \complement U$ est continue, et $\mu(A \cap \complement K') < 2\varepsilon$.

De là il résulte que la notion de fonction mesurable peut être étendue aux fonctions qui sont définies sur A <u>sauf aux points d'un ensemble négligeable</u>.

<u>2. Propriétés élémentaires des fonctions mesurables</u>.-

<u>PROPOSITION 2</u>.- Soient F et F' deux espaces topologiques métrisables, et u une application continue de F dans F'. Si une fonction f , définie sur une partie mesurable A de E , et à valeurs dans F , est mesurable, l'application composée $u \circ f$ est mesurable. ("Toute fonction continue d'une fonction mesurable est mesurable").

La démonstration est évidente d'après la définition 1.

<u>Scholie</u> : étant donnée une famille dénombrable de fonctions f_n , définies et mesurables sur une même partie A , et à valeurs dans le même espace ou dans des espaces différents, on peut, à chaque $\varepsilon > 0$, associer un compact K contenu dans A , tel que $\mu(A \cap \complement K) < \varepsilon$, et que la restriction <u>de chaque</u> f_n au compact K soit continue.

(La démonstration, très facile, se trouve dans la version précédente, p. 64, prop.5).

PROPOSITION 3.- Soit (F_n) une suite d'espaces topologiques métrisables, $F = \prod_n F_n$ leur produit. Pour chaque indice n, soit f_n une application mesurable de A dans F_n ; alors l'application f de A dans F , définie par $f(x)=(f_n(x))$, est mesurable.

La proposition est évidente grâce au scholie.

En combinant les propositions 2 et 3, on obtient aisément toute une série de conséquences : voir p.61, corollaires 1 à 4 . Ajouter au corollaire 3 l'énoncé explicite : <u>toute fonction étagée sur les ensembles mesurables</u> <u>(contenu dans A)</u> <u>est mesurable</u>.

3. <u>Limites de fonctions mesurables</u>.-

THEOREME 1.- <u>Soit</u> A <u>une partie mesurable de l'espace</u> E , <u>et soit</u> (f_n) <u>une suite d'applications mesurables de</u> A <u>dans un espace métrisable</u> F , <u>telles que la suite</u> $(f_n(x))$ <u>ait une limite en tout point</u> x <u>de</u> A <u>sauf en ceux d'un ensemble négligeable</u>. <u>Soit</u> f <u>la fonction limite</u>, <u>définie par</u> $f(x)=\lim f_n(x)$ <u>en tout point où cette limite existe</u>. <u>Alors</u> : 1° f <u>est mesurable</u> ; 2° <u>pour tout</u> $\varepsilon > 0$, <u>existe un compact</u> $K \subset A$, <u>tel que</u> $\mu(A \cap \complement K) < \varepsilon$, <u>et tel que la convergence de la suite</u> (f_n) <u>soit uniforme sur</u> K , <u>les restrictions des</u> f_n <u>à</u> K <u>étant continues</u>.

L'assertion 2° entraîne évidemment que la restriction à K de la fonction limite f est continue ; donc l'assertion 1° résulte de l'assertion 2°, que nous allons maintenant démontrer. Commençons par prendre un compact $K' \subset A$, tel que $\mu(A \cap \complement K') < \varepsilon/2$, de manière que les restrictions des f_n à K' soient continues, ce qui est possible d'après le scholie. Soit, d'autre part, une métrique d, sur F, qui soit compatible avec la topologie. Pour chaque couple d'entiers (m,n), et tout entier r, l'ensemble des x de K' tels que $d(f_m(x), f_n(x)) \geqslant 1/r$ est fermé, puisque les f_n sont continues ; il est donc compact. Soit $B_{q,r}$ l'ensemble des points $x \in K'$ tels que l'on ait $d(f_m(x), f_n(x)) \geqslant 1/r$ pour au moins un couple (m,n) d'entiers tous deux $\geqslant q$ (q entier donné) ; l'ensemble $B_{q,r}$ est une réunion dénombrable d'ensembles compacts contenus dans K', donc c'est un ensemble mesurable. Si l'on fixe r, l'intersection de la suite décroissante des ensembles $B_{q,r}$ (pour $q=1,2,\ldots$) est de mesure nulle, puisque par hypothèse la suite (f_n) converge presque partout ; donc leur mesure tend vers 0, et il existe par suite un entier q_r tel que $\mu(B_{q_r,r}) \leqslant \varepsilon/2^{r+2}$. La réunion (pour $r=1,2,\ldots$) des $B_{q_r,r}$ est un ensemble mesurable B, de mesure $\leqslant \varepsilon/4$. Soit C le complémentaire de B dans K' : sur C, la suite (f_n) converge uniformément. Prenons un compact $K \subset C$ tel que $\mu(C \cap \complement K) \leqslant \varepsilon/4$; alors $\mu(A \cap \complement K) = \mu(A \cap \complement K') + \mu(B) + \mu(C \cap \complement K) \leqslant \varepsilon$, ce qui achève la démonstration.

<u>COROLLAIRE</u>.- Soit (f_n) une suite de fonctions <u>numériques</u> (à valeurs dans la droite achevée $\overline{\overline{R}}$). Si les f_n sont mesurables, $\sup f_n$, $\inf f_n$, $\limsup f_n$, $\liminf f_n$ sont des fonctions mesurables.

En effet, $\sup f_n$ est limite simple de la suite croissante des fonctions $g_n = \sup_{p \leqslant n} f_p$, donc chacune est mesurable (cor. 1 des prop. 2 et 3). Quant à $\limsup f_n$, c'est la limite simple de la suite décroissante des fonctions $h_n = \sup_{p \geqslant n} f_p$, dont chacune est mesurable d'après ce qui précède. Démonstration analogue pour $\inf f_n$ et $\liminf f_n$.

4. <u>Caractérisation diverses des fonctions mesurables.</u>-

THÉORÈME 2.- <u>Pour qu'une fonction</u> f (définie sur une partie mesurable A de E) <u>soit mesurable, il faut et il suffit qu'il existe une suite de fonctions étagées sur les ensembles mesurables, qui converge presque partout vers</u> f .

La condition est suffisante, d'après le théorème 1. Montrons qu'elle est nécessaire : soit une suite croissante de compacts $K_p \subset A$, tels que A soit réunion des K_p et d'un ensemble négligeable, et que la restriction f_p de f à chaque K_p soit continue. Il existe une partition finie de K_p en ensembles mesurables arbitrairement petits ; on peut donc choisir cette partition de manière que, sur chaque ensemble de la partition, l'oscillation de la fonction <u>continue</u> f_p soit $\leqslant 1/p$; autrement dit, il existe une fonction étagée g_p , définie sur K_p , et telle que $d(f_p,g_p) \leqslant 1/p$. Soit donné un point fixe $a \in F$; définissons, sur A , la fonction h_p égale à $g_p(x)$ pour $x \in K_p$, à a pour $x \notin K_p$: c'est une fonction étagée. Il est clair que, en tout point x de la réunion des K_p, $f(x)$ est la limite des $h_p(x)$.

<u>Remarque</u> : Lorsque l'espace des valeurs F est un espace vectoriel normé, on peut en outre faire en sorte que les fonctions étagées h_p (qui convergent simplement vers f sauf sur un ensemble négligeable) satisfassent à la condition $|h_p(x)| \leqslant |f(x)|$ pour tout $x \in A$. En effet, d'une part on prendra dans ce cas $a=0$; d'autre part, on peut choisir, sur K_p , la fonction étagée g_p de manière que

$$|g_p(x)| \leqslant |f_p(x)| \quad \text{et} \quad |g_p(x)-f_p(x)| \leqslant 1/p \quad \text{sur } K_p .$$

La vérification de cette dernière assertion est laissée au lecteur.

<u>COROLLAIRE</u>.- Si f est une application mesurable de A (partie mesurable de E) dans un espace métrisable F , f est presque partout égale à une fonction f' telle que l'image $f'(A) \subset F$ soit <u>de type dénombrable</u> (i.e: il existe un ensemble dénombrable partout dense dans $f'(A)$).

En effet, les fonctions h_p de la démonstration du th.2 convergent simplement vers une fonction f', presque partout égale à f ; l'ensemble de toutes les valeurs prises par les h_p est dénombrable, et est partout dense dans l'ensemble des valeurs prises par f' .

THÉORÈME 3.- Soit f une application mesurable d'une partie A (mesurable) de E , dans un espace métrisable F . L'image réciproque, par f , de tout ensemble fermé (resp. ouvert) de F est mesurable.

Il suffit de faire la démonstration pour l'image réciproque $\overset{-1}{f}(B)$ d'un ensemble fermé B de F. Or soit K un compact $\subset A$, tel que $\mu(A \cap \complement K) < \varepsilon$, et que la restriction de f à K soit continue (déf.1). L'intersection de $\overset{-1}{f}(B)$ et K est un ensemble fermé, puisque c'est l'image réciproque d'un fermé B par une application continue de K dans B. Soit C_K cet ensemble compact ; on a $\mu^*(\overset{-1}{f}(B) \cap \complement C_K) < \varepsilon$, et ceci prouve que $\overset{-1}{f}(B)$ est mesurable.

Le corollaire du th.2 et le th.3 donnent deux conditions nécessaires pour qu'une application f soit mesurable. Ces conditions sont suffisantes ; d'une façon précise :

THEOREME 4.- Soit F un espace métrisable de type dénombrable, d une distance compatible avec la topologie. Soit f une application, dans F , d'une partie mesurable A de E . Si l'image réciproque, par f , de toute boule fermée (resp. de toute boule ouverte) de F est mesurable, f est une application mesurable.

La démonstration peut être calquée sur celle donnée p.69, sauf qu'il est inutile d'introduire ici un compact K contenu dans A .

Remarque : il a suffit de considérer les boules de rayon rationnel dont le centre appartient à un sous-ensemble dénombrable partout dense dans F.

Le cas des fonctions numériques (à valeurs dans R , ou dans $\overline{R}$) mérite une mention particulière. Dans ce cas, il suffit (et il faut) que, pour chaque $a \in \overline{R}$, (ou même seulement pour chaque a <u>rationnel</u>), l'ensemble des points x tels que $f(x) \geqslant a$ soit mesurable. En effet, s'il en est ainsi, l'ensemble des x tels que $f(x) \leqslant b$ est mesurable, car il est l'intersection des ensembles définis par $f(x) < b+1/n$, dont chacun est complémentaire de l'ensemble défini par $f(x) \geqslant b+1/n$; finalement, tout ensemble défini par $a \leqslant f(x) \leqslant b$ est mesurable (intersection de deux ensembles mesurables, et le théorème 4 s'applique)

Toujours dans le cas des fonctions numériques, au lieu de supposer que les ensembles $f(x) \geqslant a$ sont mesurables, on pourrait aussi supposer que les ensembles $f(x) > a$ sont mesurables ; la conclusion serait la même : f est alors une fonction mesurable.

Voici encore une proposition particulière qui s'applique aux fonctions mesurables à valeurs dans $\overline{R}$, ou aux fonctions <u>bornées</u> à valeurs dans R :

<u>PROPOSITION 4</u>.- <u>Si l'espace des valeurs</u> F <u>est métrisable et compact, toute application mesurable</u> (de A dans F) <u>est limite</u> uniforme de <u>fonctions étagées sur les ensembles mesurables</u>.

Pour le prouver, il suffit de reprendre la démonstration du théorème 4. Pour chaque entier p , on peut trouver un nombre <u>fini</u> de points $a_n \in F$ tels que F soit couvert par les boules fermées de centres a_n et de rayon $1/p$. La proposition en résulte immédiatement.

5. Fonctions induites.-

Soit A une partie mesurable de l'espace localement compact E , et soit B une partie mesurable contenue dans A .

<u>PROPOSITION 5</u>.- <u>Toute fonction</u> f , <u>définie sur</u> A , <u>à valeurs dans un espace</u> F <u>métrisable, et mesurable, induit sur</u> B <u>une fonction mesurable</u>.

En effet, f est, presque partout, limite d'une suite de fonctions étagées sur les ensembles mesurables (contenus dans A), en vertu du théorème 2 . Ces fonctions induisent évidemment sur B des fonctions étagées sur les ensembles mesurables (contenus dans B), lesquelles convergent presque partout vers la restriction de f à B . D'où la proposition.

Cette proposition admet une sorte de réciproque :

PROPOSITION 6.- Si B est un sous-ensemble mesurable de A (partie mesurable de E), toute fonction f , définie sur B et mesurable, est la restriction d'une fonction définie sur A et mesurable, par exemple la fonction f^* définie comme suit :

$f^*(x) = f(x)$ pour $x \in B$, $f^*(x)=a$ (valeur constante, quelconque) pour $x \notin B$.

En effet, si f est limite, presque partout, d'une suite de f_n étagées, les fonctions f_n^* sont définies sur A , étagées, et ont presque partout f^* pour limite ; donc f^* est mesurable. C.Q.F.D.

PROPOSITION 7 (Principe de localisation).- Soit E un espace compact, et μ une mesure sur E . Soit f une application de E dans un espace F métrisable. Si tout point de E possède un voisinage mesurable A tel que la restriction f_A de f à A soit mesurable, alors f est mesurable.

En effet, E , étant compact, peut être recouvert avec une famille finie de A_i mesurables tels que la restriction de f à chacun des A_i soit mesurable. Ces A_i définissent une partition finie de E en ensembles mesurables $B_i \subset A_i$, et la restriction de f à chaque B_i est mesurable (prop.5). Pour chaque B_i , on a une suite de fonctions étagées (sur les ensembles mesurables contenus dans B_i) $f_{i,n}$ ayant presque partout pour limite la fonction induite par f sur B_i . Soit f_n la fonction définie sur E par

$$f_n(x) = f_{i,n}(x) \quad \text{pour} \quad x \in B_i \quad ;$$

f_n est étagée sur les ensembles mesurables de E , et converge presque partout vers f ; donc f est mesurable.

6. Fonctions localement mesurables.-

DÉFINITION 2.- Soit E un espace localement compact, et μ une mesure sur E . Une fonction f , définie sur E , à valeurs dans un espace F métrisable, est dite localement mesurable si tout point de E possède un voisinage mesurable A tel que la fonction induite f_A soit mesurable.

PROPOSITION 8.- Une fonction localement mesurable sur E induit, sur toute partie mesurable A de E , une fonction mesurable.

Supposons d'abord que A soit compact. Alors la fonction induite sur A est localement mesurable d'après la prop.5, donc mesurable (en vertu de la prop.7 : principe de localisation). Considérons maintenant le cas général où A est mesurable, donc réunion d'un ensemble négligeable et d'une suite croissante de compacts K_n . Il existe un n tel que $\mu(A \cap \complement K_n) < \varepsilon$ (ε désignant un nombre > 0 arbitraire) ; sur K_n , la fonction induite est mesurable, d'après ce qu'on vient de démontrer, donc il existe un compact $K'_n \subset K_n$ tel que $\mu(K_n \cap \complement K'_n) < \varepsilon$ et que la fonction induite sur K'_n soit continue. Comme $\mu(A \cap \complement K'_n) < 2\varepsilon$, on voit que la fonction induite sur A est mesurable, en se référant à la déf.1 .

DÉFINITION 3.- Une partie M de E est dite localement mesurable si sa fonction caractéristique est localement mesurable.

D'après la prop.8, l'intersection de M et d'un ensemble mesurable est alors mesurable. Réciproquement d'ailleurs, si l'intersection de M et de tout compact est mesurable, M est localement mesurable.

Exemples : Les ensembles ouverts, les ensembles fermés, sont localement mesurables.

<u>DÉFINITION 4</u>.- Une partie M de E est dite <u>localement négligeable</u> si son intersection avec tout ensemble mesurable est négligeable.

Pour cela, il suffit évidemment que son intersection avec tout compact soit négligeable.

Il est évident que si f est une fonction localement mesurable, et si g est une fonction égale à f sauf aux points d'un ensemble localement négligeable, g est localement mesurable. On peut donc définir une notion de fonction localement mesurable pour des fonctions qui ne sont pas définies sur un ensemble localement négligeable.

Les fonctions <u>localement mesurables</u> jouissent de certaines des propriétés appartenant aux fonctions mesurables. Par exemple, les propositions 2 et 3 s'étendent immédiatement aux fonctions localement mesurables ; ainsi que tous leurs corollaires (somme, produit, etc..); la première partie du théorème 1 (assertion 1°) s'étend également, ainsi que le corollaire de ce théorème. Le théorème 3 s'étend (à condition de remplacer partout "mesurable" par "localement mesurable") ; de même le théorème 4 . Enfin les propositions 5 et 6 deviennent : si A est un sous-espace <u>localement compact</u> de E , toute fonction localement mesurable sur E induit sur A une fonction localement mesurable ; réciproquement, toute fonction définie sur A et localement mesurable est la restriction à A d'une fonction définie sur E et localement mesurable.

<u>7. Lien avec la théorie de l'intégration</u>.-

Dans ce numéro, on ne considère que des fonctions définies sur l'espace localement compact E tout entier, et à valeurs dans un espace de Banach F . On suppose toujours donnée une mesure μ sur E .

THÉORÈME 5.- Soit p un nombre réel $\geqslant 1$ et $< +\infty$. Pour qu'une fonction f appartienne à l'espace $\mathcal{L}^p_F$ (espace des "fonctions de puissance p-ième intégrable"), il faut et il suffit que f soit localement mesurable et que sa norme $N_p(f)$ soit finie.

Pour $p=1$, ce théorème donne en particulier une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction soit intégrable. Notamment : les ensembles mesurables peuvent être caractérisés comme les ensembles qui sont à la fois localement mesurables et de mesure extérieure finie.

Pour prouver le théorème 5 , montrons d'abord : si $f \in \mathcal{L}^p_F$, f est localement mesurable. Il suffit de montrer, d'après le th.1, que f est presque partout limite simple d'une suite de fonctions continues ; or ceci a été prouvé au §3 de la rédaction polycopiée, p.31 .

Il reste à montrer que, réciproquement, toute fonction f localement mesurable, telle que $N_p(f) < +\infty$, appartient à $\mathcal{L}^p_F$. Nous procéderons en deux temps :

1° supposons d'abord que f soit à support compact. D'après le th.2, f est presque partout limite d'une suite de fonctions f_n , étagées sur les ensembles mesurables ; et, d'après la remarque qui suit le th.2, on peut supposer que $|f_n(x)| \leq |f(x)|$ en tout point x . Puisque $N_p(f) < +\infty$, le théorème de Lebesgue (§ 3, th.5) montre que la limite f de la suite (f_n) appartient à $\mathcal{L}^p_F$. On a admis implicitement qu'une fonction étagée sur les ensembles mesurables appartient à $\mathcal{L}^p_F$; pour cela, il suffit de savoir que la fonction caractéristique d'un ensemble mesurable appartient à $\mathcal{L}^p_F$. On laisse au lecteur le choix de la meilleure démonstration de ce fait.

2^o dans le cas général, remarquons d'abord ceci : si une fonction f (localement mesurable ou non) est telle que $N_p(f)$ soit fini, f s'annule hors de la réunion d'un ensemble négligeable et d'une suite dénombrable de compacts : en effet, l'ensemble des points x où $|f(x)| \geqslant 1/n$ est de mesure extérieure finie (puisque au plus égale à $(nN_p(f))^p$) . Il est donc contenu dans la réunion d'un ensemble négligeable et d'une suite dénombrable de compacts. Ainsi f est nulle hors d'une réunion dénombrable d'ensembles de ce type, qui est un ensemble du même type.

Cela dit, soit une suite croissante de compacts K_n telle que f soit nulle presque partout hors de la réunion des K_n . Soit f_n la fonction égale à f sur K_n , à 0 ailleurs. Les f_n sont localement mesurables, à support compact, et $N_p(f_n) \leqslant N_p(f)$ est fini ; d'après le 1^o ci-dessus, f_n appartient donc à $\mathcal{L}^p_F$. Mais alors le théorème de Lebesgue prouve que f , qui est presque partout limite des f_n , appartient aussi à $\mathcal{L}^p_F$. Et ceci achève la démonstration du théorème.

<u>COROLLAIRE 1</u>.- Voir corollaire 2, p.73 de la rédaction polycopiée.

<u>COROLLAIRE 2</u>.- <u>Le produit d'une fonction de</u> $\mathcal{L}^p$ <u>et d'une fonction bornée, localement mesurable, appartient à</u> $\mathcal{L}^p$. ("produit" s'entend au sens du produit ordinaire, s'il s'agit de fonctions numériques ; l'une des fonctions peut aussi être à valeurs dans un Banach F , l'autre à valeurs numériques). En effet, ce produit est localement mesurable, et sa norme N_p est finie.

De l'avis du rédacteur, les actuels n^{os} 8 et 9 (pp. 74-77) doivent sauter. "Ce n'est pas ici le lieu ..." .
