RÉDACTION N° 128

COTE NBR 035

TITRE CHAPITRE IV (ÉTAT 4)
ESPACES LOCALEMENT CONVEXES MÉTRISABLES

ASSOCIATION DES COLLABORATEURS DE NICOLAS BOURBAKI

NOMBRE DE PAGES NUMÉRISÉES 32

NOMBRE DE FEUILLES PRISES EN COMPTE 32

Archives (du Schwartz) mars 50

NBR 035 128 2

CHAPITRE IV (Etat 4)

ESPACES LOCALEMENT CONVEXES MÉTRISABLES

§ 1. Espaces de Fréchet et espaces de Banach.

1. Espaces localement convexes métrisables.

Sauf mention expresse du contraire, tous les résultats de ce chapitre sont également valables pour les espaces localement convexes considérés, que ces espaces soient réels ou complexes ; il doit seulement être sous-entendu que lorsque E est un espace localement convexe complexe, les semi-normes que l'on considère sur E sont toujours supposées telles que $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ (chap.III, § 4, n°1) ; bien entendu, lorsqu'on parle d'une application linéaire d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F , il est toujours implicitement supposé que le corps des scalaires est le même pour ces deux espaces.

Nous dirons qu'un espace vectoriel topologique est métrisable si, considéré comme groupe additif topologique, il est métrisable (Top.gén., chap.IX, § 3, n°1).

PROPOSITION 1.- Pour qu'un espace localement convexe E soit métrisable, il faut et il suffit qu'il soit séparé, et que sa topologie soit définie par une famille dénombrable de semi-normes.

En effet, pour que le groupe additif E soit métrisable, il faut et il suffit qu'il soit séparé et que l'origine ait un système fondamental dénombrable de voisinages (Top.gén., chap.IX, § 3, n°1, prop.1). Cette dernière condition est évidemment remplie si la topologie de E est définie par une famille dénombrable de semi-normes. Inversement, si l'origine admet un système fondamental dénombrable de voisinages, on peut toujours supposer que ces derniers sont convexes et cerclés (resp. symétriques si E est un espace réel) ; les jauges de ces voisinages forment donc une

une famille dénombrable de semi-normes qui définit la topologie de E .

Si (p_n) est une suite de semi-normes définissant la topologie de E , les fonctions $q_n = \sup_{1 \leq k \leq n} p_k$ sont aussi des semi-normes et définissent encore la topologie de E ; on peut donc toujours supposer que cette dernière est définie par une suite croissante (p_n) de semi-normes. Les espaces normés sont bien entendu des espaces localement convexes métrisables ; il existe des espaces localement convexes métrisables dont la topologie ne peut être définie par une seule norme (exerc.1).

Tout sous-espace vectoriel d'un espace localement convexe métrisable E est évidemment métrisable ; il en est de même de tout espace quotient E/V de E par un sous-espace vectoriel fermé V ; si la topologie de E est définie par les semi-normes p_n , celle de E/V est définie par les semi-normes $p_n(z) = \inf_{x \in \varphi^{-1}(z)} p_n(x)$, où φ désigne l'homomorphisme canonique de E sur E/V (chap.III, §1,n°4). Tout produit d'une famille dénombrable (E_n) d'espaces localement convexes métrisables est un espace localement convexe métrisable ; si la topologie de E_n est définie par les semi-normes p_{nm} $(m \in N)$, celle de $E = \prod_n E_n$ est définie par les semi-normes $q_{nm}((x_n)) = p_{nm}(x_n)$.

Le complété $\hat{E}$ d'un espace localement convexe métrisable E est un espace localement convexe métrisable, dont la topologie est définie par les semi-normes qui prolongent par continuité à $\hat{E}$ les semi-normes définissant la topologie de E (chap.III, §1,n°3). Un espace localement convexe, métrisable et complet est encore appelé espace de Fréchet ; on appelle espace de Banach un espace normé complet.

L'espace produit R^N est un espace de Fréchet ; on peut montrer que sa topologie ne peut être définie par aucune norme (exerc.1).

§ 2. Fonctions linéaires définies dans un espace de Fréchet.

PROPOSITION 2.- Soit E un espace localement convexe métrisable, F un espace localement convexe quelconque. Pour qu'une application linéaire u de E dans F soit continue, il faut et il suffit que l'image par u de tout ensemble borné de E soit bornée dans F .

La condition est nécessaire si E est un espace localement convexe quelconque (chap.I, § 1, prop.8). Pour montrer qu'elle est suffisante, quand E est métrisable, nous allons raisonner par l'absurde et montrer que si u est discontinue, il existe ~~un~~ ensemble borné de E dont l'image par u n'est pas bornée dans F . Si u est discontinue, il existe un voisinage V de 0 dans F telle que l'image réciproque $\overset{-1}{u}(V)$ ne soit pas un voisinage de 0 dans E . Soit (U_n) une base dénombrable du filtre des voisinages de 0 dans E ; $(\frac{U_n}{n})$ en est une autre. Alors, $\overset{-1}{u}(V)$ n'étant pas un voisinage de 0 , il existe, quel que soit n , un point ξ_n de E tel que $\xi_n \in \frac{U_n}{n}$, $\xi_n \notin \overset{-1}{u}(V)$. Comme $x_n = n\,\xi_n \in U_n$, la suite x_n converge vers 0 donc est bornée dans E (chap.I, § 1, prop.9) ; comme $u(x_n) \notin n\,V$, l'image de la suite x_n n'est pas bornée dans F . C.Q.F.D.

[Variante. On démontre d'abord un lemme : dans un espace E localement convexe métrisable, si une suite ξ_n converge vers 0 ; il existe une suite de nombres λ_n tendant vers $+\infty$ telle que la suite des $\lambda_n \xi_n$ converge encore vers 0 . On montre alors directement la continuité de u comme suit. Il suffit de montrer que pour toute suite ξ_n convergeant vers 0, la suite $u(\xi_n)$ converge vers 0 , puisque E est métrisable. D'après le lemme, il existe une suite de nombres λ_n tels que la suite $x_n = \lambda_n \xi_n$ converge vers 0 donc soit bornée dans E ; d'après l'hypothèse, la suite $\lambda_n u(\xi_n)$ est bornée dans F , donc la suite $u(\xi_n)$ converge vers 0 . C.Q.F.D.]

Théorème 1 (Banach) - Si E et F sont deux espaces de Fréchet, toute application linéaire continue u de E sur F est un homomorphisme.

Nous allons montrer que l'image de tout ouvert de E est un ouvert de F. E et F sont deux groupes abéliens métrisables, donc on peut munir chacun d'eux d'une métrique invariante par translation (Top.gén.chap.IX, § 3, prop.2). Dans l'un quelconque de ces deux espaces, appelons $B(d,x)$ la boule fermée de centre x et de rayon d . Le théorème résultera évidemment des deux propositions suivantes :

PROPOSITION 3 : Soient E et F qui sont deux espaces vectoriels topologiques localement convexes métrisables, F complet, E et F étant munis de métriques invariantes par translation, et soit $y = u(x)$ une application linéaire continue de E sur F . Alors quel que soit le nombre $d > 0$ il existe un nombre $\delta > 0$ tel que l'image par u de la boule $B(d,0)$ de E soit dense dans la boule $B(\delta, 0)$ de F .

Soit en effet V un voisinage convexe cerclé de 0 dans E ; contenu dans $B(d,0)$. La réunion des nV est E ; donc la réunion des $n\,u(V)$ est $u(E) = F$; F étant un espace de Baire (top.gén. Chap.IX, § 5, th.1), l'une au moins des adhérences $n\,\overline{u(V)}$ a un point intérieur, donc $\overline{u(V)}$ aussi. Mais $\overline{u(V)}$ est convexe cerclé, il ne peut avoir un point intérieur sans être un voisinage de 0 (chap.II, §1, prop.9). Il existe alors un nombre $\delta > 0$ tel que $\overline{u(V)} \supset B(\delta, 0)$, et a fortiori $\overline{u[B(d,0)]} \supset$ $\supset B(\delta, 0)$. Naturellement, u étant linéaire on en déduira par translation que l'image par u de $B(d,x)$ est dense dans $B\left[\delta, u(x)\right]$.

PROPOSITION 4.- Soient E et F deux espaces métriques, E complet, $y = u(x)$ une application continue de E dans F ayant la propriété suivante : quel que soit le nombre $d > 0$, il existe un nombre $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in E$, l'image par u de la boule $B(d,x)$ la boule $B(d,x)$ soit

<u>dense dans la boule</u> $B(\delta, u(x))$. <u>Alors l'image de</u> $B(D,x)$ <u>contient</u> $B(\delta, u(x))$, <u>pour tout</u> $D > d$.

Soit en effet (d_n) une suite infinie quelconque de nombres >0 , telle que $d_1 = d$, et $D = \sum d_n < +\infty$. A chacun d'eux on peut attribuer un nombre $\delta_n > 0$ suivant l'hypothèse du lemme, avec $\delta_1 = \delta$; en remplaçant éventuellement δ_n pour $n > 1$ par $\inf(\delta_n, \frac{1}{n})$, on pourra toujours supposer que $\lim_{n \to \infty} \delta_n = 0$.

Soit $a \in E$, $y \in B(\delta, u(a))$. Nous allons montrer que $y \in u[B(D, a)]$.

On déterminera par récurrence une suite $x_0 = a, x_1, x_2 \ldots x_n \ldots$ de points de E telle que, $x_n \in B(d_n, x_{n-1})$, $u(x_n) \in B(\delta_{n+1}, y)$. Supposons en effet déterminés $x_0, x_1, \ldots x_{n-1}$ vérifiant ces relations. Comme $u(x_{n-1}) \in B(\delta_n, y)$, on a aussi $y \in B[\delta_n, u(x_{n-1})]$; mais l'image de $B(d_n, x_{n-1})$ est dense dans $B[\delta_n, u(x_{n-1})]$, donc il existe un point $x_n \in B(d_n, x_{n-1})$ dont l'image $u(x_n)$ est dans un voisinage donné quelconque de y , soit $u(x_n) \in B(\delta_{n+1}, y)$.

La suite (x_n) est une suite de Cauchy, car la distance entre x_n et x_{n+p} est majorée par $d_{n+1} + d_{n+1} + \ldots + d_{n+p}$, qui tend vers 0 pour $n \to \infty$. Comme E est complet, cette suite converge vers un point x de E , et la distance entre a et x est majorée par $d_1 + d_2 + \ldots + d_n + \ldots = D$, donc $x \in B(D,a)$. Comme u est continue, la suite $u(x_n)$ converge vers $u(x)$; mais $u(x_n) \in B(\delta_{n+1}, y)$, donc $u(x_n)$ converge vers y , par suite $y = u(x)$, et y appartient bien à $u[B(D, a)]$.

<u>Corollaire 1</u>.- <u>Si</u> E <u>et</u> F <u>sont des espaces de Fréchet</u>, <u>toute application linéaire continue biunivoque de</u> E <u>sur</u> F <u>est un isomorphisme</u>.

Si en particulier E et F sont des espaces de Banach, le rapport $\|u(x)\| / \|x\|$ sera borné inférieurement par un nombre >0 fixe.

Corollaire 2 - Si E et F sont des espaces de Fréchet, pour qu'une application linéaire continue u de E dans F soit un homomorphisme, il faut et il suffit que $u(E)$ soit fermé dans F .

La condition est nécessaire, car si u est un homomorphisme, $u(E)$ est isomorphe au quotient de E , espace de Fréchet, par $\overset{-1}{u}(0)$, sous-espace fermé, est complet (Top.gén. chap.IX, § 3, prop.4), donc fermé dans F .

La condition est suffisante, car, si $u(E)$ est fermé, c'est un espace de Fréchet, et u, application linéaire continue de E sur $u(E)$, est un homomorphisme.

Corollaire 3.- Soit E un espace vectoriel $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ deux topologies compatibles avec sa structure d'espace vectoriel et pour chacune desquelles E est un espace de Fréchet. Si $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ sont comparables, elles sont identiques.

En effet si E_1 et E_2 sont les espaces de Fréchet obtenus en munissant E de $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$, l'application identique de l'un de ces espaces sur l'autre est continue, donc est un isomorphisme.

Corollaire 4.- Soient E et F deux espaces de Fréchet. Pour qu'une application linéaire u de E dans F soit continue, il faut et il suffit que son graphe dans le produit $E \times F$ soit fermé.

La condition est nécessaire, car le graphe d'une application continue est toujours fermé (référence ?). Pour voir qu'elle est suffisante, remarquons qu'elle entraîne que le graphe G , sous-espace vectoriel fermé de l'espace de Fréchet $E \times F$, soit un espace de Fréchet. L'application pr_E , restreinte à G , est une application linéaire, continue, biunivoque, de G sur E ; c'est donc un isomorphisme et comme son application réciproque est $x \longrightarrow (x, u(x))$, u est bien continue dans E .

On peut mettre ce corollaire sous une autre forme :

Si u est une application linéaire discontinue de E dans F, il existe une suite de points (x_n) de E convergeant vers 0, telle que la suite $u(x_n)$ ait une limite $y \neq 0$.

Corollaire 5.- Soit E un espace de Fréchet. Si V et W sont deux sous-espaces vectoriels fermés supplémentaires dans E, E est somme directe topologique (chap.I, § 1, n°6) de V et de W.

En effet l'application linéaire $(y,z) \rightarrow y+z$ de l'espace de Fréchet $V \times W$ sur l'espace de Fréchet E est continue et biunivoque, c'est donc un isomorphisme.

§ 2. Dual fort d'un espace de Fréchet.

1.- Espaces de fonctions linéaires continues dans un espace de Fréchet.

Soit E un espace de Fréchet, F un espace localement convexe. Sur l'espace $\mathcal{L}(E,F)$ des applications linéaires continues de E dans F, nous considérerons les topologies $\mathcal{C}_s$ de la convergence simple, $\mathcal{C}_c$ de la convergence uniforme dans les parties relativement compactes de E, et enfin $\mathcal{C}_b$ de la convergence uniforme dans les parties bornées de E. On sait que $\mathcal{C}_s$ est moins forte que $\mathcal{C}_c$, elle-même moins forte que $\mathcal{C}_b$; en outre, ces trois topologies sont séparées et compatibles avec la structure d'espace vectoriel de $\mathcal{L}(E,F)$ (chap.III, § 1, prop.6).

PROPOSITION 1.- Si l'espace F est complet, l'espace $\mathcal{L}(E,F)$ est complet pour les topologies $\mathcal{C}_b$ (resp. $\mathcal{C}_c$) de la convergence uniforme sur les parties bornées (resp. relativement compactes) de E.

Soit en effet Φ un filtre de Cauchy sur $\mathcal{L}(E,F)$ pour la topologie $\mathcal{C}_b$ (resp. $\mathcal{C}_c$). Comme F est complet, il converge simplement dans E vers une forme linéaire u_o ; comme Φ converge uniformément dans toute partie bornée (resp.) compacte de E, u_o est continue; sur toute partie compacte.

Si nous montrons que $u_0 \in \mathcal{L}(E,F)$, Φ convergera vers u_o dans $\mathcal{T}_b$ (resp. $\mathcal{T}_c$) et le théorème sera démontré. Mais l'ensemble formé des éléments x_n d'une suite convergente et de leur limite x est compact, donc l'image par u_o de toute suite convergente dans E , est une suite convergente dans F ; alors E étant métrisable, u_o est continue dans E (référence à un exercice de Bourbaki !) et $u_o \in \mathcal{L}(E,F)$.

Lorsque E et F sont deux espaces de Banach, la topologie $\mathcal{T}_b$ sur $\mathcal{L}(E,F)$ peut être définie par la norme $\|u\| = \sup_{|x| \leq 1} \|u(x)\|$ (chap.III §1, prop.6) ; on a

(1) $$\|u(x)\| \leq \|u\| . \|x\|$$

autrement dit, $(u,x) \longrightarrow u(x)$ est une application bilinéaire continue de $\mathcal{L}(E \times F) \times E$ dans F , lorsqu'on munit $\mathcal{L}(E,F)$ de la topologie $\mathcal{T}_b$.

Z Cette dernière proposition n'est plus exacte lorsque E et F sont des espaces de Fréchet quelconques (exerc. 3 b).

[Je demande qu'on ait dit au chap.I, § 3, ou chap.III, § 1, ce qui suit:

1° Prop.(A) : Pour qu'une partie H de $\mathcal{L}(E,F)$ soit bornée dans la topologie $\mathcal{T}_\mathfrak{S}$, il faut et il suffit que pour toute partie A dans $\mathfrak{S}$, la réunion des u(A) , $u \in H$, soit bornée dans F .

En effet, dire que H est bornée pour $\mathcal{T}_\mathfrak{S}$, c'est dire que toute semi-norme sur $\mathcal{T}_\mathfrak{S}$ est bornée sur H ; d'après la définition de ces semi-normes (Chap.III, §1,prop.6) c'est dire que, pour toute semi-norme p dans F et toute partie A de $\mathfrak{S}$, p(u(x)) reste borné pour $x \in A$, $u \in H$; c'est donc dire que, pour toute partie $A \in \mathfrak{S}$ la réunion des u(A) , $u \in H$, reste bornée dans F .

2° Plus la familled de parties $\mathfrak{S}$ est grande, plus la topologie $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}$ est forte et, plus les ensembles bornés sont rares.

3° <u>Proposition (B)</u> - Si H est une partie équicontinue de $\mathcal{L}(E,F)$, H est bornée pour la topologie $\mathcal{C}_f$, et par suite pour toutes les topologies $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}$ correspondant à des familles $\mathfrak{S}$ de parties bornées de E . Fin de l'entr'acte] .

Si E est un espace de Fréchet, on peut complèter comme suit les prop. (A) et (B) du chap.I, § 3 :

<u>Théorème 1.- Soit E est un espace de Fréchet, F un espace localement convexe. Si une partie H de $\mathcal{L}(E,F)$ est bornée pour la topologie $\mathcal{C}_s$ de la convergence simple, elle est bornée pour la topologie $\mathcal{C}_b$ de la convergence uniforme sur les parties bornées de E , et elle est équicontinue.</u>

Comme toute partie H de $\mathcal{L}(E,F)$ qui est équicontinue est bornée pour la topologie $\mathcal{C}_b$, il suffit de montrer que toute partie H bornée pour la topologie $\mathcal{C}_s$ est équicontinue. Plus généralement, nous montrerons cette propriété toutes les fois que E est un espace de Baire (référence). Soit V un voisinage de 0 dans F , fermé, connexe, cerclé. L'intersection U des $\overset{-1}{u}(V)$, pour $u \in H$, est aussi convexe, cerclée, fermée. Si H est bornée pour la topologie $\mathcal{C}_s$ alors quel que soit $x \in E$, la réunion des $u(x)$, $u \in H$, est bornée donc dans $n\,V$ pour n assez grand, alors $x \in n\,U$ pour n assez grand. Mais la réunion des $n\,U$ est alors l'espace entier E ; E étant un espace de Baire, l'un au moins des $n\,U$, donc U lui-même, a un point intérieur ; U étant connexe cerclé est alors un voisinage de 0 (chap.II, § 1, prop.9), ce qui prouve l'équicontinuité de H à l'origine de E, donc dans E (chap.I, § 5, prop.2).

D'après le théorème 1, la notion d'ensemble borné dans $\mathcal{L}(E,F)$ est la même pour les topologies $\mathcal{T}_s$, $\mathcal{T}_c$, $\mathcal{T}_b$, on peut donc parler d'ensemble borné dans cet espace sans spécifier pour quelle topologie.

Corollaire - Soit E un espace de Fréchet, Φ un filtre sur $\mathcal{L}(E,F)$, ayant une base de filtre bornée. Si Φ converge simplement vers une fonction u_o, u_o est une application linéaire continue de E dans F, et Φ converge uniformément vers u_o dans toute partie compacte de E. En outre, si F est complet, pour que Φ converge simplement dans E, il suffit que Φ converge simplement aux points d'un ensemble total de E.

Cela résulte de ce que H est équicontinue, et des prop. 3 et 4 du chap.1, § 3.

PROPOSITION 2.- Soient E un espace de Fréchet, F un espace localement convexe. Φ un filtre de $\mathcal{L}(E,F)$ ayant une base dénombrable. Si Φ converge simplement vers u_o, u_o est une application linéaire continue de E dans F, et Φ converge vers u_o uniformément sur toute partie compacte de E.

Lorsque le filtre Φ est le filtre élémentaire associé à une suite (u_n), la suite des $u_n(x)$ est convergente dans F, donc bornée, alors la suite (u_n) est bornée dans $\mathcal{L}(E,F)$, d'après le théorème 1, et la prop.2 est conséquence du corollaire précédent.

Soit maintenant un filtre quelconque, à base dénombrable (Φ_n), avec $\Phi_{n+1} \subset \Phi_n$. Soit (u_n) une suite telle que $u_n \in \Phi_n$; la suite u_n converge simplement vers u_o, donc u_o est une application linéaire continue de E dans F. Posons $v = u - u_o$. Si K est un compact de E,

V un voisinage de 0 dans F , nous devons montrer que, pour n assez grand, $v(K) \subset V$ pour $u \in \Phi_n$. Or s'il n'en était pas ainsi, il existerait pour tout n une application $u_n \in \Phi_n$ telle que $v_n(K) \not\subset V$; or ceci est absurde, car la suite u_n converge simplement vers u_o, donc, la prop.2 étant vraie pour des suites, $v_n(K) \subset V$ pour n assez grand, C.Q.F.D.

Remarque. Il ne faudrait pas croire qu'un filtre convergent dans $\mathcal{L}(E,F)$ à base dénombrable ait une base de filtre bornée.

2. Dual fort d'un espace de Fréchet.

Soient E un espace localement convexe, E' son dual (chap.I, § 3) ; comme E' n'est autre que l'espace $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{L}(E, \mathbb{C})$ si E est un espace complexe), on peut le munir de la topologie $\mathcal{C}_b$ de la convergence uniforme sur les parties bornées de E . Muni de cette topologie, nous dirons que E' est le dual fort de E ; rappelons que le dual faible de E (chap.I, § 3) est l'espace E' muni de la topologie $\mathcal{C}_s$ de la convergence simple : on distinguera sur E' les notions relatives à ces deux topologies par l'usage des qualificatifs "fort" et "faible", ou des adverbes "fortement" ou "faiblement". En général, la topologie faible sur E' est strictement moins fine que la topologie forte ; il peut exister dans E' des ensembles convexes fortement mais non faiblement fermés (cf.prop.6).

Pour tout ensemble A borné dans E , soit $|x'|_A = \sup\limits_{x \in A} |\langle x,x'\rangle|$ pour toute forme linéaire continue $x' \in E'$; la topologie forte sur E' est définie par les semi-normes $|x'|_A$, où A parcourt l'ensemble des parties bornées de E (ou seulement des parties bornées convexes et fermées).

Soit (p_i) une famille de semi-normes continues définissant la topologie de E . Pour toute partie bornée A de E , soit $\alpha_i = \sup\limits_{x \in A} p_i(x)$; A est contenu dans la partie bornée de E définie par les inégalités

$p_n(x) \leqslant \alpha_n$ $(n \in \mathbb{N})$. On peut donc, pour définir la topologie forte sur E', se borner à faire parcourir à A l'ensemble des ensembles bornés définis par ces systèmes d'inégalités.

On notera qu'en général, si E est un espace de Fréchet, E', muni de la topologie forte, n'est pas métrisable (§ 3, exerc.4) ; toutefois, lorsque E est un espace de Banach, la topologie forte sur son dual E' peut être définie par la norme.

$$(2) \qquad \|x'\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |\langle x,x'\rangle|$$

(chap.III, § 1, prop.6) ; lorsqu'on parle du dual d'un espace de Banach comme d'un espace normé, il est toujours sous-entendu que c'est de la norme définie par la relation (2) qu'il est question.

PROPOSITION 3.- Si E est un espace localement convexe, H une partie de son dual E', pour que H soit bornée dans la topologie forte (resp. faible) de E', il faut et ils suffit que lorsque x' parcourt H, $\langle x,x'\rangle$ reste borné sur toute partie bornée de E (resp. en tout point de E).

C'est l'application au cas particulier où F = R ou C de la prop.(A) du chap.I § 3 .

PROPOSITION 4.- Le dual fort E' d'un espace de Fréchet E est un espace complet. Le dual fort d'un espace de Banach est un espace de Banach et dans ce cas l'application $(x,x') \to \langle x,x'\rangle$ de $E \times E'$ dans R (resp. C si E est un espace complexe) est continue .

Conséquence immédiate de la prop.1.

Remarque. Si E est un espace de Fréchet, l'application bilinéaire $(x,x') \to \langle x,x'\rangle$ de $E \times E'$ dans R ou C est en général disconti[nue].

Si E est un espace localement convexe complet, E' n'est pas en général complet.

Dans le dual E' d'un espace E localement convexe, toute partie équicontinue est fortement bornée, toute partie fortement bornée est faiblement bornée. D'autre part, d'après la prop.9 du chap.I, § 1, toute partie faiblement relativement compacte est faiblement bornée. La réciproque est vraie si E est un espace de Fréchet.

Théorème 2.- Sur le dual E' d'un espace de Fréchet E , toute partie H faiblement bornée est aussi fortement bornée et équicontinue, et en outre relativement compacte pour la topologie de la convergence compacte sur E (a fortiori faiblement relativement compacte).

L'identité entre les parties faiblement bornées, fortement bornées ou équicontinues de E' résulte du théorème 1 . On pourra donc dire que H est bornée dans E' sans spécifier pour quelle topologie. D'autre part si E est un espace localement convexe et si H est une partie équicontinue quelconque, l'ensemble des $\langle x, x' \rangle$, $x' \in H$, est borné pour tout x , donc relativement compact dans R ou C ; alors d'après le théorème d'Ascoli, chap.X, § 4, théor.1 , H est relativement compacte dans E' pour la topologie de la convergence compacte sur E .

Remarque. On notera qu'en général un ensemble borné dans E' n'est pas fortement relativement compact (chap.III, § 3).

Corollaire 1.- Dans le dual E' d'un espace de Fréchet E , tout ensemble borné et faiblement fermé est faiblement compact.

Corollaire 2.- Soit Φ un filtre ayant une base de filtre bornée, sur le dual E' , d'un espace de Fréchet E .

Si Φ est un filtre de Cauchy faible, il converge faiblement vers un élément x'_0 de E', et la convergence est uniforme sur toute partie compacte de E ; de plus, il suffit pour qu'il en soit ainsi que Φ converge vers une fonction limite simplement sur un ensemble total de E .

C'est un cas particulier du corollaire du théorème 1.

Corollaire 3.- Sur le dual E d'un espace de Fréchet E , tout filtre de Cauchy faible à base dénombrable est faiblement convergent vers un élément x'_0 de E', et la convergence est uniforme sur toute partie compacte de E .

C'est un cas particulier de la prop.2 .

Remarque. Si Φ est le filtre élémentaire associé à une suite (x'_n) de E', cette suite est faiblement convergente donc bornée. De plus, toute semi-norme $|x'|_A$ étant semi-continue inférieurement pour la topologie faible, on a

$$(x')_A \leq \lim_{n \to \infty} . \inf. \quad (x'_n)_A .$$

Contrairement à ce qui est indiqué dans la remarque qui suit la prop.2, on peut montrer que tout filtre de Cauchy faible sur E' à base dénombrable à une base de filtre bornée.

Corollaire 4.- Dans le dual E' d'un espace de Fréchet E , l'enveloppe convexe d'une partie faiblement relativement compacte est faiblement relativement compacte.

En effet, cette enveloppe est bornée (chap.III, § 2, prop.1).

3. Polarité entre voisinages et ensembles bornés.

Nous dirons qu'un ensemble $\mathcal{B}$ de parties bornées d'un espace vectoriel topologique est un système fondamental de parties bornées, si toute partie bornée de l'espace est contenue dans une autre qui appartient à $\mathcal{B}$.
Soit alors E un espace localement convexe complet, E' son dual fort.
On a les relations de polarité suivantes :

1°- Le polaire A° d'un ensemble borné A de E est un voisinage de 0 dans E', par définition ; de plus les polaires des parties bornées de E forment un système fondamental de voisinages de 0 dans E'.

2°- Le polaire V° d'un voisinage de 0 dans E est équicontinu sur E donc borné (chap.I, § 3, prop.B) dans E'. V° est en outre faiblement compact (d'après la démonstration du théorème 2). Mais les polaires des voisinages de 0 de E ne constituent pas nécessairement un système fondamental de parties bornées de E'.

3°- Le polaire V'° d'un voisinage V' de 0 dans E', est borné dans E ; car d'après 1° il existe un ensemble borné A de E tel que $V' \supset A^{\circ}$, alors $V'^{\circ} \subset A^{\circ\circ}$ qui est borné (référence ?). De plus les $A^{\circ\circ}$, et a fortiori les polaires des voisinages de 0 de E' forment un système fondamental de parties bornées de E.

4°- Le polaire A'° d'une partie bornée A' de E' n'est pas nécessairement un voisinage de 0 dans E. Mais ceux des polaires des parties bornées de E' qui sont des voisinages de 0 dans E forment un système fondamental de voisinages de 0 ; car si V est un voisinage de 0 de E, convexe, cerclé, fermé, $V = V^{\circ\circ}$ est le polaire de $A' = V^{\circ}$.

PROPOSITION 5.- <u>Si</u> E <u>est un espace de Fréchet,</u> E' <u>son dual fort, les polaires des voisinages de</u> 0 <u>de chacun de ces deux espaces forment un système fondamental de parties bornées de l'autre, les polaires des parties bornées de chacun de ces deux espaces forment un système fondamental de voisinages de</u> 0 <u>dans l'autre</u>.

D'après ce qui précède, il suffit de montrer que toute partie bornée A' de E' est contenue dans le polaire d'un voisinage de 0 de E. Or A' est équicontinu sur E (théor.2), donc il existe un voisinage V de 0 dans E sur lequel les formes linéaires $x' \in A'$ sont bornées en valeur absolue par 1, alors $A' \subset V^{\circ}$.

§ 3. Bidual d'un espace de Fréchet. Espaces réflexifs.

1. Bidual d'un espace de Fréchet. Soit E un espace localement convexe, E' son dual fort ; nous appellerons bidual fort E'' le dual de E'. Pour tout $x \in E$, la forme linéaire $x' \rightarrow \langle x, x' \rangle$ sur E' est faiblement continue, donc fortement continue, c'est donc un élément de E'', que nous noterons $\tilde{x}$. On a identiquement $\langle x, x' \rangle = \langle x', \tilde{x} \rangle$. L'application $x \rightarrow \tilde{x}$ est dite application canonique de E dans son bidual E''. Cette application est linéaire et biunivoque car $\tilde{x} = 0$ entraîne $\langle x, x' \rangle = 0$ pour tout $x' \in E'$, donc $x=0$ (chap.III, § 3, prop.1). Elle permet donc d'identifier algébriquement E à un sous-espace $\tilde{E}$ de E''. Mais E et $\tilde{E}$ n'ont pas nécessairement la même topologie. La topologie de $\tilde{E}$ (induite par celle de E'') est plus fine que celle de E, autrement dit l'application $\tilde{x} \rightarrow x$ de $\tilde{E}$ dans E, réciproque de l'application canonique, est continue. En effet, tout voisinage U de 0 dans E, convexe, cerclé, fermé est identique à son bipolaire U^{oo} dans E (référence), donc trace sur $\tilde{E}$ du polaire $(U^o)^o$ de U^o dans E'', et comme U^o est borné dans E', (§ 2, n°3, 2°) $(U^o)^o$ est un voisinage de 0 dans E''.

PROPOSITION 1.- Si E est un espace de Fréchet, et si U parcourt un système fondamental de voisinages de 0 dans E, les bipolaires $(U^o)^o$ forment un système fondamental de voisinages de 0 dans E''.

En effet, d'après la définition, tout voisinage V de 0 dans E'' contient le polaire A'^o d'une partie bornée A' de E' ; mais d'après la prop.5 du § 2, A' est contenue dans le polaire U^o d'un voisinage de 0 de E, donc $V \supset A'^o \supset (U^o)^o$, C.Q.F.D.

Corollaire 1.- Le bidual E'' d'un espace de Fréchet E est métrisable.

Il possède en effet, un système fondamental dénombrable de voisinages de 0.

Corollaire 2.- Si E est un espace de Fréchet, l'application canonique $x \longrightarrow \tilde{x}$ de E dans E" est un isomorphisme.

Autrement dit, E et $\tilde{E}$ ont la même topologie.

Pour le voir, il faut montrer que tout voisinage V de 0 dans E" a pour trace sur E un voisinage de 0 . Or $V \supset (U^0)^0$, donc $V \cap E \supset U$.

Corollaire 3. $\tilde{E}$ est fermé dans E".

En effet $\tilde{E}$ est l'image d'un espace de Fréchet E par un isomorphisme (§ 1, corol.2 du théor.1).

Corollaire 4.- Si E est un espace de Banach, E" est un espace de Banach, et l'application canonique $x \longrightarrow \tilde{x}$ est une isomètrie.

En effet E" est le dual d'un espace de Banach E' (§ 2, prop.4).D'autre part $\|\tilde{x}\| = \sup\limits_{\|x'\|=1} |\langle x,x'\rangle| \leqslant \|x\|$; mais d'après le théorème de Hahn, Banach (chap.III, §2, coroll.2 de la prop.5) il existe une forme linéaire continue $x' \in E'$ telle que $\|x'\| = 1$ et $\langle x,x'\rangle = \|x\|$. d'où $\|\tilde{x}\| = \|x\|$.

Remarque. Si E est un espace de Fréchet, quelconque, E' n'est pas en général un espace de Fréchet, et E" n'est peut être pas complet.

2. Espaces réflexifs et semi-réflexifs.

Définition 1.- On dit qu'un espace localement convexe E est semi-réflexif s'il est identique algèbriquement à son bidual E" ($\tilde{E}$ = E") ; il est réflexif si en outre la topologie de E est identique à celle de $\tilde{E}$, induite par E" .

Il résulte du corollaire 2 de la prop.1 que, si E est un espace de Fréchet, la semi-réflexivité entraîne la réflexivité.

PROPOSITION 2.- Pour que toute partie convexe A' du dual E' d'un espace localement convexe E soit faiblement fermée dès qu'elle est fortement fermée, il faut et il suffit que E soit semi-réflexif.

La condition est suffisante, car A', convexe et fortement fermée, est toujours fermée pour la topologie faible $\sigma(E',E'')$ (référence) donc, si E est semi-réflexif, pour la topologie faible $\sigma(E',E)$. La condition est suffisante : Ca si E n'est pas semi-réflexif il existe une forme linéaire $x'' \in E''$ qui est fortement continue sur E' mais non faiblement continue ; l'hyperplan sur lequel elle s'annule est fortement fermé dans E', mais non faiblement fermé.

Corollaire. Pour qu'un ensemble A' de E' soit total, il faut et il suffit, si E est semi-réflexif, qu'il existe un élément $x \neq 0$ de E sur lequel les formes linéaires de A' soient toutes nulles.

En effet cette condition est nécessaire et suffisante pour que le sous-espace vectoriel engendré par A' soit faiblement dense ; mais, pour un sous-espace vectoriel, faiblement dense signifie fortement dense si E est semi-réflexif.

Théorème 1.- Pour qu'un espace localement convexe E soit semi-réflexif, il faut et il suffit que toute partie bornée de E soit faiblement relativement compacte ou encore que toute partie bornée convexe fermée soit faiblement compacte.

En effet, si A est bornée dans E, $(A^{o})^{o}$ est le polaire de A^{o}, voisinage de 0 dans E', donc est faiblement compacte dans E'' (§ 2, n°3, 2°), c'est-à-dire dans E si E est semi-réflexif et A est faiblement relativement compacte.

Montrons la réciproque. Lorsqu'on munit E' de la topologie $\mathcal{C}_1$ de la convergence uniforme sur les parties bornées fermées convexes de E, son dual est E'' par définition ; lorsqu'on le munit de la topologie $\mathcal{C}_2$ de la convergence uniforme sur les parties convexes faiblement compactes de E, son dual est E (théorème de Mackey-Arens). Si donc les parties bornées fermées convexes de E sont identiques aux parties convexes faiblement compactes, les deux topologies $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont identiques, et E est algèbriquement isomorphe à E".

[Variante. Réciproquement, supposons que dans E, toutes les parties A convexes cerclées fermées sont faiblement compactes, donc faiblement fermées dans E".

Alors les bipolaires $(A^o)^o$ dans E" de toutes les parties A sont encore dans E. Les A^o forment un système fondamental de voisinages de 0 dans E' par définition ; tout élément x" de E", forme linéaire continue sur E', est dans le polaire d'un tel voisinage de 0, donc dans E, C.Q.F.D]

Corollaire 1.- Pour qu'un espace de Fréchet E soit réflexif, il faut et il suffit que toutes les parties bornées de E soient faiblement relativement compactes.

Corollaire 2.- Tout sous-espace fermé F d'un espace E semi-réflexif est semi-réflexif.

En effet, toute partie A convexe fermée bornée de F est aussi fermée et bornée dans E, donc faiblement compacte puisque E est semi-réflexif; comme la topologie faible de F est induite par la topologie faible de E (référence ?), A est aussi faiblement compacte dans F, et F est semi-réflexif.

§4. Continuité forte et continuité faible. Transposées.

1. Ensembles faiblement et fortement bornés.

PROPOSITION 1.- Dans tout espace localement convexe E, tout ensemble faiblement borné est fortement borné.

Montrons-le d'abord lorsque E est un espace de Banach. Alors E', E" sont aussi des espaces de Banach, et toute partie faiblement bornée dans E" est fortement bornée (théorème 2).

Supposons maintenant E localement convexe quelconque. Soient A une partie faiblement bornée de E , p une semi-norme sur E . Considérons la topologie $\mathcal{T}_p$, moins fine que celle de E , définie sur E par la seule semi-norme p, et l'espace E_p associé à E par cette topologie (chap.III, §1, n°4) ; son complété $\hat{E}_p$ est un espace de Banach. Toute forme linéaire continue sur $\hat{E}_p$ est continue sur E_p, donc sur E ; alors l'image A_p de A par l'application canonique de A dans E_p est faiblement bornée dans $\hat{E}_p$, donc fortement bornée puisque $\hat{E}_p$ est un espace de Banach ; on en déduit que p reste bornée sur A , et comme cette propriété sera vraie pour toute semi-norme p , A est fortement bornée dans E .

2. <u>Continuité forte et continuité faible</u>.

Nous avons vu (chap.III, §3, cor.4 de la prop.2) que si E et F sont deux espaces localement convexes quelconques, toute application linéaire fortement continue de E dans F est aussi faiblement continue.

PROPOSITION 2.- <u>Si</u> E <u>est un espace localement convexe métrisable</u>, F <u>un espace localement convexe quelconque</u>, <u>toute application linéaire faiblement continue de</u> E <u>dans</u> F <u>est aussi fortement continue</u>.

En effet, l'image par cette application de toute partie faiblement bornée de E est faiblement bornée dans F (chap.I, § 1,prop.8) ; mais dans E comme dans F , il y a identité entre parties faiblement et fortement bornées (prop.2), l'application est alors fortement continue d'après la prop.2 du §1 .

Corollaire 1.- <u>Pour qu'une application linéaire de</u> E <u>dans</u> F <u>soit continue</u>, <u>il faut et il suffit que l'image réciproque de tout hyperplan fermé de</u> F <u>soit fermée dans</u> E .

Corollaire 2.- Si E et F sont deux espaces localement convexes métrisables, tout isomorphisme faible de E dans F est un isomorphisme fort.

En effet, l'application linéaire u de E sur u(E) et sa réciproque sont faiblement continues, (la topologie faible de u(E) étant induite par la topologie faible de F) donc fortement.

Corollaire 3.- Deux topologies $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ sur un espace vectoriel E, compatibles avec sa structure d'espace vectoriel, pour lesquelles E soit localement convexe métrisable et ayant la même topologie faible associée, sont identiques.

En effet, soient E_1 et E_2 les espaces vectoriels topologiques définies sur E par $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$; l'application identique de E_1 sur E_2 est xxxx unisomorphisme faible, donc fort. On peut encore dire :

Sur un espace vectoriel, toute topologie d'espace localement convexe métrisable est entièrement déterminée par la connaissance de la topologie faible correspondante (ou du dual, ou des hyperplans fermés, ou des convexes fermés).

3.- Transposée d'une application linéaire continue.

Si E et F sont deux espaces localement convexes quelconques, u une application linéaire continue de E dans F, elle est faiblement continue, donc aussi sa transposée, ${}^t u$ (référence). De plus :

PROPOSITION 3.- Si E et F sont deux espaces localement convexes, u une application linéaire continue de E dans F, sa transposée ${}^t u$ est une application linéaire fortement continue de F' dans E'.

Cela résulte immédiatement de la prop.11 du § 3 du chap.I, et de ce que l'image par u de toute partie bornée de E est bornée dans F (chap.I, § 1, prop.8).

 23

Lorsque E et F sont des espaces de Banach on peut préciser ce résultat de la manière suivante : on a

$$\| {}^t u \| = \| u \| .$$

En effet, par définition

$$\| {}^t u \| = \sup_{\|y'\| \leq 1} \| {}^t u(y') \| = \sup_{\substack{\|x\| \leq 1 \\ \|y'\| \leq 1}} \left| \langle x, {}^t u(y') \rangle \right|$$

$$= \sup_{\substack{\|x\| \leq 1 \\ \|y'\| \leq 1}} \left| \langle u(x), y' \rangle \right| = \sup_{\|x\| \leq 1} \| u(x) \| = \| u \|$$

<u>Corollaire 1</u>. <u>Si</u> E <u>est un espace localement convexe métrisable</u>, F <u>un espace localement convexe quelconque, toute application linéaire faiblement continue de</u> F' <u>dans</u> E' <u>est aussi fortement continue</u>.

En effet, elle est transposée ${}^t u$ d'une application linéaire u de E dans F , qui est faiblement continue ; alors u est fortement continue (prop.4) donc aussi ${}^t u$ (prop.5) .

<u>Remarque</u>. Par contre une application fortement continue de F' dans E' n'est pas en général faiblement continue. Par exemple, si F n'est pas semi-réflexif, et si $x'' \in F''$ et $\notin F$, x" est une forme linéaire sur F', fortement et non faiblement continue. Mais :

<u>Si</u> E <u>et</u> F <u>sont localement convexes</u>, F <u>semi-réflexif, toute application linéaire fortement continue de</u> F' <u>dans</u> E' <u>est faiblement continue</u>.

En effet, elle est continue (chap.III, §3, corol.4 de la prop.2) pour les topologies $\sigma(F',F'')$ et $\sigma(E',E'')$; mais $\sigma(F',F'') = \sigma(F',F)$, et $\sigma(E',E'')$ est plus fine que $\sigma(E',E)$.

<u>Corollaire 2</u>.- <u>Si</u> E <u>et</u> F <u>sont deux espaces localement convexes</u> ; u <u>un isomorphisme de</u> E <u>sur</u> F <u>sa transposée</u> ${}^t u$ <u>est un isomorphisme de</u> F' <u>sur</u> E'.

En effet u et $\overset{-1}{u}$ sont continues, donc ${}^t u$ et $(\overset{-1}{{}^t u})$ sont continues. Il s'agit d'ailleurs ici d'un simple transport de structure.

PROPOSITION 4.- Soient E et F deux espaces de Fréchet réflexifs. Toute application v linéaire continue biunivoque de F' sur E' est un isomorphisme.

En effet, F étant semi-réflexif, v est une application faiblement continue, donc c'est la transposée $v = {}^t u$ d'une application linéaire u faiblement continue de E dans F . Puisque $v(F')=E'$, u est un isomorphisme faible de E dans F, (référence ?), donc un isomorphisme fort puisque E et F sont métrisables (corol.2 de la prop.2); mais v étant biunivoque, u(E) est dense dans F et aussi fermé (corollaire du théorème 1 du § 1), donc $u(E) = F$; u est alors un isomorphisme de E sur F , et par suite v un isomorphisme de F' sur E' (corol.2 de la prop.3).

[la référence étant peut être imaginaire, voici la démonstration.
u est évidemment biunivoque. Montrons que si un filtre Φ sur E est tel que $u(\Phi)$ converge faiblement vers 0 dans F , Φ converge faiblement vers 0 dans E . Or l'image de Φ par l'application $x \longrightarrow \langle u(x),y'\rangle =$ $= \langle x, v(y')\rangle$ converge vers 0 ; comme $v(y')$ est n'importe quel point de E', Φ converge bien faiblement vers 0 dans E].

4.- Parties bornées de $\mathcal{L}(F',E')$.

Si (E,E') et (F,F') sont deux couples d'espaces vectoriels en dualité faible, H une partie de l'espace $\mathcal{L}(E,F)$ des applications linéaires faiblement continues de E dans F , ${}^tH$ l'ensemble des transposées, l'égalité $\langle u(x),y'\rangle = \langle x, u'(y')\rangle$ montre que ${}^tH$ est borné dans $\mathcal{L}(F',E')$ muni de la topologie de la convergence simple faible si et seulement si H est borné dans $\mathcal{L}(E,F)$ pour la topologie de la convergence simple faible.

PROPOSITION 5.- Soient E et F deux espaces de Fréchet, H une partie de l'espace $\mathcal{L}(E,F)$ des applications continues de E dans F . Si l'ensemble ${}^tH$ des transposées des $u \in H$ est borné dans $\mathcal{L}(F',E')$ pour la topologie de la convergence simple faible, H est bornée dans $\mathcal{L}(E,F)$, et ${}^tH$ est bornée dans $\mathcal{L}(F',E')$ pour la topologie $\mathcal{T}'_b$ de la convergence uniforme sur les parties bornées de F', et en outre équicontinue sur F' .

D'après ce qui précède, il résulte de l'hypothèse que H est borné dans $\mathcal{L}(E,F)$ pour la topologie de la convergence simple faible ; cela signifie que pour tout $x \in E$, l'ensemble $H(x)$ des $u(x)$, $u \in H$, est faiblement borné dans F , donc fortement borné (prop.1), H est donc borné dans $\mathcal{L}(E,F)$ pour les topologies $\mathcal{T}_s$ et $\mathcal{T}_b$ et équicontinu sur E (prop.1 du § 2). Il reste à montrer que ${}^tH$ est équicontinu sur F', ce qui entraînera que ${}^tH$ est borné dans $\mathcal{L}(F',E')$ (pour la topologie $\mathcal{T}'_b$).

Soit U un voisinage de 0 dans E', qu'on peut supposer, par définition, être le polaire A° d'une partie bornée A de E .

Mais $({}^{t}u^{-1})\; A^{\circ} = [u(A)]^{\circ}$ (référence ?) ; comme A est bornée et H bornée dans $\mathcal{L}(E,F)$, la réunion des $u(A)$, $u \in H$, est bornée dans F , donc l'intersection des $[u(A)]^{\circ}$ ou $({}^{t}u^{-1})V$ est un voisinage de 0 dans F', ce qui prouve que ${}^tH$ est équicontinue à l'origine de F', donc dans F' (chap.I, § 3, prop.2).

Compléments sur les théorèmes de GROTHENDIECK et BANACH.

Chap. III, § 1, après la proposition 7, le théorème de Grothendieck :

Théorème. Soit E un espace localement convexe, $\mathfrak{S}$ un ensemble de parties précompactes convexes, cerclées, fermées, de E engendrant E. La complétion du dual E' de E muni de la topologie $\mathcal{T}_{\mathfrak{S}}$ de la convergence uniforme sur les parties de $\mathfrak{S}$ est l'espace $E'_{\mathfrak{S}}$ des formes linéaires dont les restrictions aux parties de $\mathfrak{S}$ sont continues.

Il est d'abord évident que tout élément de la complétion de E' est une forme linéaire continue sur toutes les parties de $\mathfrak{S}$.

Soit maintenant u une forme linéaire continue sur chaque partie de $\mathfrak{S}$, et soit $A \in \mathfrak{S}$. Il suffit, pour la réciproque, de montrer que, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe une forme linéaire continue v sur E, telle que $|(u-v)(A)| < \varepsilon$. Puisque u est continue sur A, il existe un voisinage V de 0 dans E, convexe, cerclé, fermé, tel que $|u(A \cap V)| < \varepsilon/4$. Mais A est précompact, il existe donc un sous-espace vectoriel de dimension finie M, tel que le voisinage $(A \cap M) + V$ recouvre A (référence).

Nous imposerons alors à la forme linéaire cherchée v de coïncider avec u sur M. Si x est un point quelconque de A, x_1 un point de $A \cap M$ tel que $(x - x_1) \in V$, on aura alors.

$$v(x) - u(x) = \left[v(x) - v(x_1)\right] - \left[u(x) - u(x_1)\right]$$

d'où

$$(u-v)(A) \subset u(2A \cap V) + V(2A \cap V) \subset 2u(B) + 2v(B)$$

où $B = A \cap V$ (car $A - A = 2A$, A étant convexe cerclé). Comme $|u(B)| < \varepsilon/4$, v satisfera à toutes les propriétés voulues si $|v(B)| < \varepsilon/4$.

Le problème se pose donc ainsi : u_o (restriction de u à M) étant une forme linéaire donnée sur le sous-espace M , vérifiant $|u_o(B \cap M)| < \varepsilon/4$ la prolonger en une forme linéaire continue v sur E , donc sur sa complétion $\hat{E}$, telle que $|v(B)| < \varepsilon/4$. Comme B est cerclé, il suffira pour cela que l'hyperplan H de $\hat{E}$ sur lequel $v = \varepsilon/4$ soit fermé, ne rencontre pas B, et coupe M suivant le sous-espace H_o sur lequel $u_o = \varepsilon/4$.
H_o est de dimension finie, il est donc identique à son adhérence $\overline{H_o}$ dans $\hat{E}$; B a pour adhérence $\overline{B}$, compact, dans $\hat{E}$; H_o et $\overline{B}$ sont sans point commun, car un tel point, situé sur H_o serait dans E donc, B étant fermé dans E, sur $H_o \cap B = \emptyset$. Il existe alors un voisinage convexe ouvert U de $\overline{B}$ dans $\hat{E}$ qui ne rencontre pas H_o ; il reste alors à appliquer le théorème de Hahn-Banach (chap.III, § 2, théor.1) en faisant passer par H_o un hyperplan fermé H de $\hat{E}$ ne rencontrant pas U .

Corollaire 1.- La complétion du dual E' d'un espace localement convexe E muni de la topologie faible $\sigma(E',E)$, est le dual algèbrique de E , espace de toutes les formes linéaires sur E .

Corollaire 2.- La complétion du dual E' d'un espace localement convexe E muni de la topologie $\mathcal{T}_b$ de la convergence uniforme sur les parties bornées de E , est l'espace E_b^* des formes linéaires sur E , faiblement continues sur toutes les parties bornées.

En effet, les parties bornées sont faiblement précompactes (Tychonoff). (Référence (?)).

§ 2 du présent chapitre, n°2 .Dual fort.

PROPOSITION (A). Pour que le dual fort E' d'un espace localement convexe E soit complet, il faut et il suffit que toute forme linéaire faiblement continue sur toutes les parties bornées de E soit continue sur E .

§ 3, bidual, n° final.

Théorème . Si E est un espace vectoriel localement convexe complet, toute forme linéaire faiblement continue sur toutes les parties équicontinues de E', est faiblement continue sur E', donc définition par une application $x' \to \langle x, x' \rangle$, où $x \in E$.

En effet, toutes les parties équicontinues de E', sont faiblement relativement compactes donc faiblement précompactes, (chap. I, § 3, théor. 2) et on peut appliquer Grothendieck. Alors la forme linéaire considérée v sur E' est limite de points de E pour la topologie $\mathcal{C}_0$ de la convergence uniforme sur les parties équicontinues de E' ; mais les polaires des voisinages de 0 de E forment un système fondamental de parties équicontinues de E', donc $\mathcal{C}_0$ est la topologie de E , et comme E est complet $v \in E$.

Corollaire (Banach). Si E est un espace de Fréchet, toute forme linéaire sur E' faiblement continue sur toutes les parties bornées de E', est faiblement continue sur E' .

En effet, toute partie bornée de E' est équicontinue (théor. 2).

Commentaires.

Plusieurs des théorèmes-clés sont relatifs à un couple de deux espaces, mais pourraient être énoncés dans un seul espace ; d'autre part, on peut disséquer les diverses propriétés qui, dans chaque théorème relatif à un Fréchet, sont fondamentales. On arrive à ce qui suit.

§ 1.- Topologie et parties bornées.

Définition. On dit qu'un espace vectoriel localement convexe E est "bornographique" si toute partie convexe qui par homothétie peut avaler tout ensemble borné est un voisinage de 0 .

PROPOSITION A.- Tout espace localement convexe métrisable est bornographique.

Soit en effet V une partie de E capable d'avaler tous les bornés. Soit V_n une base du filtre des voisinages, $V_{n+1} \subset V_n$. Si V n'était pas un voisinage, il existerait un point $x_n \in \frac{V_n}{n}$ et $\notin V$. La suite $(n\, x_n)$ convergerait vers 0 $(n\, x_n \in V_n)$ donc serait bornée, et cependant $x_n \notin V$ montre qu'aucune de ses homothétiques ne rentrerait dans V ce qui est absurde.

Remarque - Quoique non métrisable, un espace $\mathcal{L}\mathcal{F}$ est bornographique.

PROPOSITION A'.- Si E est bornographique, F localement convexe, toute application linéaire u de E dans F telle que l'image par u de tout borné de E soit bornée dans F est continue.

En effet, si V est un voisinage convexe de 0 dans F , $\overset{-1}{u}(V)$ est une partie convexe de E qui peut par homothétie avaler tous les bornés de E, donc c'est un voisinage et u est continue.

§ 2. Topologie et parties convexes fermées.

Définition. On dit qu'un espace E localement convexe est "fort" si toute partie convexe, cerclée équilibrée en 0, et fermée, est un voisinage de 0 .

Quel que soit E localement convexe, on pourra lui associer un espace E^f, plus fin que lui, qui ait pour voisinages les parties convexes, cerclées, équilibrées, fermées de E . Je ne crois pas si E^f soit fort, mais peu importe .

PROPOSITION B.- Tout espace localement convexe de Baire est fort.

Si en effet V est équilibré, fermé, la réunion des n V est E , donc d'après Baire, nV et par suite V a un point intérieur ; si V est convexe cerclé, c'est alors un voisinage de 0 .

Remarque. Toute puissance R^{N} de la droite réelle est un espace de Baire, donc fort, ce qui donne des exemples en dehors des espaces de Fréchet.

Un espace $\mathcal{L}\mathcal{F}$, quoique ni Fréchet ni Baire, est fort.

PROPOSITION B'.- Si E est fort, F localement convexe, et si H est bornée dans $\mathcal{L}(E,F)$ pour la topologie $\mathcal{C}_s$, H est équicontinue.

En effet, si V est un voisinage de 0 dans F , convexe, cerclé, fermé, l'intersection U des $\overset{-1}{u}(V)$ est dans E convexe, cerclée, fermée ; d'après l'hypothèse elle est équilibrée, donc c'est un voisinage, et H est équicontinue.

§ 4. Parties faiblement et fortement bornées.

Le § 4 doit venir après 3 malgré les apparences, parce que sa démonstration de la prop.1 utilise le bidual. On peut cependant faire venir § 4 juste après § 2 ce qui est sa place normale, avec ce qui suit.

PROPOSITION C.- Si E est localement convexe, et si A est une partie de E bornée, convexe, cerclée et relativement semi-complète ($\bar{A}$ complète pour les suites), A est bornée pour la topologie E^f dont les voisinages sont les parties convexes, cerclées, équilibrées, fermées de E .

On peut supposer $\bar{A}$ équilibrée en 0 , car il suffit de raisonner dans le sous-espace vectoriel engendré par $\bar{A}$. $\bar{A}$ peut alors servir de boule unité pour une topologie d'espace normé sur E ; soit B l'espace E muni de cette topologie.

Cette topologie est plus fine que celle de E , puisque A est bornée. Montrons que B est un espace complet, donc un espace de Banach. Si (x_n) est une suite de Cauchy pour B , elle est bornée dans B , donc contenue dans un homothétique de $\bar{A}$; comme $\bar{A}$ est semi-complet, et que (x_n) est une suite de Cauchy, au sens de la topologie de E , cette suite converge dans E vers un point x_0. Pour n assez grand, l'ensemble des x_{n+p} , $p \geqslant 0$, est dans une boule (de la topologie de B) de rayon $\leqslant \varepsilon$; cette boule est semi-fermée dans E , donc x_0 lui appartient, et par conséquent la suite (x_n) converge vers x_0 pour la topologie de B , qui est bien complet.

Alors B est un espace de Baire, donc fort (§ 2) ; la topologie de E étant moins fine que celle de B , la topologie de E^f est moins fine que celle de $B^f = B$, et $\bar{A}$, borné dans B , est bien borné dans E^f ,

C.Q.F.D.

Applications particulières.

1° E fort, A borné quelconque, car $E^f = E$.

2° E semi-complet, A bornée quelconque, car on raisonnera sur l'enveloppe convexe, cerclée de A , qui sera encore bornée, et nécessairement relativement semi-complète.

Si E est semi-complet, il a donc les mêmes parties bornées que E^f .

3° E quelconque ; A convexe, relativement semi-compacte ; en particulier, convexe compact.

PROPOSITION C'.- E et F quelconque, toute partie H de $\mathcal{L}(E,F)$ bornée pour la topologie de la convergence simple, est bornée pour la topologie de la convergence uniforme sur les parties bornées, convexes, cerclées, complètes.

En effet, soit V un voisinage de O dans E , convexe, cerclé, fermé, U l'intersection des $\overset{-1}{u}(V)$, $u \in H$. U est convexe, cerclée, fermée ; d'après l'hypothèse elle est équilibrée, donc elle pourra par homothétie avaler toutes les parties A de E , qui sont bornées convexes, cerclées, complètes.

PROPOSITION C".- Toute partie A de E, faiblement bornée, est fortement bornée.

Munissons en effet E' de la topologie faible. A est alors par hypothèse bornée pour la convergence simple sur E', donc d'après la prop. (C') pour la convergence uniforme sur les convexes faiblement compacts ; mais le polaire d'un voisinage fort de E est convexe faiblement compact dans E', donc A est ~~fxxxxx~~ fortement bornée .
