INTEGRATION
CHAPITRE II (ETAT 4)
PROPRIETES ELEMENTAIRES DES INTEGRALES DE RADON

Rédaction n° 115

Nombre de pages : 68

Nombre de feuilles : 68

Intégration Chap. II - Etat 4

Propriétés élémentaires des intégrales de Radon

115

I N T E G R A T I O N

CHAPITRE II (Etat 4)

Propriétés élémentaires des intégrales de Radon

§ 1 - <u>Intégrales de Radon sur un espace compact</u>.

1 - Définition d'une intégrale de Radon - 2 - Exemples. 3 - Détermination d'une intégrale. 4 - Norme d'une intégrale, topologie vague. 5 - Intégrales réelles. 6 - Intégrales positives.

§ 2 - <u>Intégrales de Radon sur un espace localement compact</u>.

1 - L'espace $\mathcal{L}(E)$. 2 - Définition des intégrales de Radon - 3 - Intégrales réelles ; intégrales positives. 4 - Support d'une intégrale. 5 - Intégrales discrètes. 6 - Norme d'une intégrale bornée. 7 - Convergence vague de mesures. 8 - Mesures extrémales. 9 - L'algèbre normée $\mathcal{L}_\infty(E)$. 10 - Image d'une intégrale par une application. 11 - Les inégalités de Minkowski.

§ 3 - <u>Produit d'intégrales</u>.

1 - Produit de deux intégrales. 2 - Théorème de Lebergue-Fubini élémentaire. 3 - Propriétés élémentaires et exemples. 4 - Produit fini d'intégrales. 5 - Intégrale de Lebesgue dans R^n .

<u>Appendice</u> : <u>Décompositions spectrales dans les Hilbert</u>.

Commentaires.

Le rédacteur a pris pour principe de ne jamais s'écarter du plan adopté en juin, sauf dans les cas où il lui a paru nécessaire de le modifier. D'autre part, on s'est attaché à éliminer systématiquement les notions trop abstraites, les notations inutiles ou compliquées, et à faire un exposé aussi concret et clair que possible ; on ne se vante du reste pas d'y être parvenu.

La seule modification notable apportée dans ce chapitre aux décisions du Congrès de juin est constituée par les N^{os} 7, 8, 9 du § 2. On y a exposé, de la façon la plus complète si l'on tient compte du peu de résultats dont on dispose à cet endroit, ce qui concerne la topologie vague et la structure des algèbres normées $\mathcal{L}_\infty(E)$. Il est en effet apparu au rédacteur qu'il n'y avait pas de raison de passer sous silence le fait qu'une mesure positive est une forme linéaire positive sur la $*$ - algèbre normée $\mathcal{L}(E)$, ainsi que des faits analogues, et que cela permettrait d'éclairer la lanterne de Bourbaki le jour où il traitera en toute généralité des algèbres normées. Par ailleurs, le rédacteur est convaincu qu'il est extrêmement important de <u>dire</u> (sinon de démontrer) que les algèbres normées $\mathcal{L}_\infty$ sont <u>caractérisées</u> par le fait qu'elles sont complètes, commutatives, et vérifient $\| f \bar{f} \| = \| f \|^2$; c'est en effet la clé des décompositions spectrales dans les Hilbert ; dans un Appendice (destiné à l'édification éventuelle de Bourbaki - la question, de toutes façons, n'étant évidemment pas à sa place au Chap. II puisqu'on a besoin des fonctions mesurables pour pousser jusqu'au bout la décomposition spectrale), on a montré comment cette dernière question peut être élucidée par des procédés qui appartiennent exclusivement à la théorie des Banach et de l'Intégration (<u>sans</u> Gelfand - Mazur, donc sans fonctions analytiques).

----

§ 1 - Intégrales de Radon sur un espace compact.

1 - Définition d'une intégrale de Radon.

Soit E un espace topologique compact. Considérons les fonctions f(x) définies et continues sur E , à valeurs numériques complexes ; on sait qu'elles forment un espace vectoriel complexe $\mathcal{C}(E)$. On peut définir sur $\mathcal{C}(E)$ une structure d'espace de Banach en le munissant de la topologie de la convergence uniforme sur E , définie par la norme

$$(1) \qquad \| f \| = \sup_{x \in E} |f(x)| \; .$$

Notons que l'on peut aussi munir $\mathcal{C}(E)$ d'une structure d'algèbre sur le corps complexe, en définissant de la manière habituelle le produit de deux fonctions ; cette structure est compatible avec la topologie définie ci-dessus ; enfin, si l'on désigne par $\bar{f}$ la fonction imaginaire conjuguée d'une fonction $f \in \mathcal{C}(E)$, l'application $f \to \bar{f}$ est un anti-automorphisme involutif de la structure d'algèbre de $\mathcal{C}(E)$.

Définition 1 - On appelle intégrale de Radon sur un espace compact E une forme linéaire continue définie sur l'espace de Banach C(E).

Une intégrale de Radon sur E fait donc correspondre, à chaque $f \in C(E)$, un nombre complexe $\mu(f)$, de telle sorte que les conditions suivantes soient remplies :

(IR_1) $\quad \mu(f + g) = \mu(f) + \mu(g)$ quelles que soient les fonctions $f \in \mathcal{C}(E)$ et $f \in \mathcal{C}(E)$;

(IR_2) $\quad \mu(\alpha f) = \alpha . \mu(f)$ quels que soient $\alpha \in \mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{C}(E)$;

(IR_3) il existe une constante finie $M \geqslant 0$ telle que $|\mu(f)| \leqslant M . \|f\|$ pour toute $f \in \mathcal{C}(E)$.

Outre la notation fonctionnelle $\mu(f)$, on a l'habitude, pour désigner des intégrales de Radon, d'employer les notations suivantes :

$$\int f \, d\mu \quad , \quad \int f(x) \, d\mu(x) \quad ;$$

dans la dernière, la lettre x joue le rôle d'une variable muette (Ens., Chap.I) et peut donc être remplacée par toute autre lettre d'un alphabet arbitraire et même, si des confusions sont à craindre, par un signe n'appartenant à aucun alphabet connu. On est aussi souvent conduit à introduire plusieurs "signes somme" et à écrire par exemple, dans certaines circonstances,

$$\iiint f(x)\, d\mu(x) .$$

2 - Exemples d'intégrales de Radon.

a - Soit E un espace compact, et x un point de E . Pour toute $f \in \mathcal{C}(E)$, posons

$$(2) \qquad \mu(f) = f(x) ;$$

il est clair qu'on définit ainsi une intégrale de Radon. Pour des raisons qui apparaitront par la suite, on dit qu'elle est constituée par une masse unité placée au point $x \in E$, et on la désigne souvent par le symbole ε_x : on a donc

$$\varepsilon_x(f) = f(x)$$

ou encore

$$\int f(s)\, d\varepsilon_x(s) = f(x) .$$

b - Plus généralement, choisissons une famille finie ou dénombrable (x_n) de points de E ; associons à chacun de ces x_n un nombre complexe μ_n, de telle sorte que

$$\sum |\mu_n| < +\infty .$$

Alors, pour toute $f \in \mathcal{C}(E)$, l'expression

$$(3) \qquad \mu(f) = \sum f(x_n)\mu_n$$

a un sens puisque, f étant continue, la suite $|f(x_n)|$ est bornée par $\|f\|$; $\mu(f)$ dépend évidemment de façon linéaire de f ; enfin, on a

$$|\mu(f)| \leqslant \sum |f(x_n)| \cdot |\mu_n| \leqslant \|f\| \cdot \sum |\mu_n| ,$$

ce qui montre que $\mu(f)$ est encore une intégrale de Radon sur E .
On dit qu'elle est formée des <u>masses</u> μ_n <u>placées aux points</u> $x_n \in E$.

c - Le procédé que voici permet de déduire, d'une intégrale de Radon μ sur un espace compact E , de nouvelles intégrales. Choisissons une fonction $\varphi \in C(E)$, et posons

(4) $$\mu^{\varphi}(f) = \int f(x)\varphi(x)d\mu(x) \qquad \text{pour} \quad f \in \mathcal{C}(E) .$$

On obtient ainsi une forme linéaire sur $C(E)$; celle-ci est continue puisque l'on a

$$\left|\mu^{\varphi}(f)\right| = \left|\mu(f\varphi)\right| \leqslant K.\, \| f\varphi \| \leqslant K.\, \| f \| . \| \varphi \|$$

c'est-à-dire

$$\left|\mu^{\varphi}(f)\right| \leqslant M . \| f \|$$

où M est une constante finie. Par conséquent, $\mu^{\varphi} = \nu$ est une intégrale de Radon ; on dit que c'est <u>l'intégrale possédant la densité</u> $\varphi(x)$ <u>par rapport à</u> μ , et on écrit souvent (4) sous la forme symbolique

(5) $$d\nu(x) = \varphi(x)\, d\mu(x) .$$

d - Désignons par E l'intervalle $[0,1]$ de $\mathbb{R}$; c'est un espace compact ; pour toute $f \in C(E)$, on a défini (Livre Elémentaire, Chap. , §) le nombre

(6) $$I(f) = \int_0^1 f(x)dx ;$$

c'est une forme linéaire sur $\mathcal{C}(E)$, continue en vertu du Théorème de la moyenne :

$$\left| I(f) \right| \leqslant \sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} \left| f(x) \right| ;$$

donc (6) constitue une intégrale de Radon sur E .

e - Avec les notations précédentes, soit $\varphi(x)$ une fonction numérique définie et intégrable sur $[0,1]$ (Livre Elémentaire, Chap. , §) ; pour toute $f \in \mathcal{C}(E)$, la fonction $f.\varphi$ est intégrable, et l'on a l'inégalité

$$\left| \int_0^1 f(x)\varphi(x)dx \right| \leqslant \| f \| . \int_0^1 \left|\varphi(x)\right| dx .$$

Par suite, la formule

$$(7) \qquad \mu(f) = \int_0^1 f(x)\varphi(x)dx$$

définit une intégrale de Radon sur $[0,1]$; on emploie encore la formule

$$d\mu(x) = \varphi(x)dx \quad ,$$

analogue à (5) - et qui se réduit du reste à (5) lorsque φ est continue.

3 - Détermination d'une intégrale.

Une intégrale sur un espace compact E étant une forme linéaire continue sur l'espace de Banach $\mathcal{C}(E)$, on a (Esp. Vect. Top., chap.   , §   ) la propriété suivante :

Proposition 1 - Une intégrale de Radon μ sur un espace compact E est déterminée quand on connait $\mu(f)$ pour des $f \in \mathcal{C}(E)$ qui forment une base topologique de l'espace de Banach $\mathcal{C}(E)$.

Corollaire de la Prop. 1 - Pour qu'une intégrale μ soit identiquement nulle, il faut et il suffit que l'on ait

$$\int f \, d\mu = 0$$

pour les éléments f d'un sous-ensemble partout dense de $\mathcal{C}(E)$.

Indiquons deux applications simples de la Prop.1 .

a - Soit E l'intervalle $[0,1]$ de $\mathbb{R}$. Posons

$$f_n(x) = x^n \qquad (n=0,1,\dots \; ; \; x \in E) \; ;$$

on obtient ainsi des fonctions qui forment une base topologique de $\mathcal{C}(E)$: en effet, leurs combinaisons linéaires - c'est-à-dire les polynomes en x - forment une sous-algèbre de $\mathcal{C}(E)$, qui permet de "séparer" les points de E , en sorte que notre assertion résulte du Théorème de Stone (Livre III, Chap. X, §   , th.   ). Par conséquent on a le résultat suivant :

Proposition 2 - Une intégrale de Radon μ portée par l'intervalle compact $[0,1]$ de $\mathbb{R}$ est déterminée par la connaissance des nombres

$$(8) \qquad \mu_n = \int_0^1 x^n \, d\mu(x) \qquad n = 0,1,\dots .$$

b - Considérons maintenant le cas où $E = \mathbb{T}$ est le tore à une dimension, réalisé comme ensemble des nombres complexes x de module un .
Un raisonnement analogue au précédent montre que les fonctions

$$f_n(x) = x^n \qquad (n \in \mathbb{Z})$$

forment une base topologique de $\mathcal{C}(E)$. Donc :

Proposition 3 - Une intégrale de Radon μ portée par l'espace compact $\mathbb{T}$ est déterminée par la connaissance des nombres

(9) $$\mu_n = \int x^n \, d\mu(x) \qquad (n \in \mathbb{Z}) .$$

Remarque 1. Les nombres (9) sont appelés les coefficients de Fourier de μ .

Remarque 2 - Il ne faudrait pas croire que les nombres (8) ou (9) puissent être choisis arbitrairement ; la recherche des conditions nécessaires et suffisantes que doit vérifier une suite numérique μ_n pour qu'il lui corresponde une intégrale de Radon μ telle que l'on ait (8) ou (9) constitue, dans le premier cas une partie du problème des moments, dans le second, de la transformation de Fourier.

4 - Norme d'une intégrale - Topologie vague.

Une intégrale de Radon étant une forme linéaire continue sur l'espace de Banach $\mathcal{C}(E)$, on peut poser la définition suivante :

Définition 2 - On appelle norme d'une intégrale de Radon μ définie sur un espace compact E le plus petit nombre positif $\|\mu\|$ tel que l'on ait

$$|\mu(f)| \leqslant \|\mu\| \cdot \|f\| \qquad \text{pour tout} \quad f \in \mathcal{C}(E) .$$

D'après les propriétés générales des espaces de Banach, les intégrales de Radon définies sur E constituent un espace vectoriel normé complet $\mathcal{M}(E)$ sur le corps complexe, qui est isomorphe au dual fort de $\mathcal{C}(E)$. On peut donc aussi définir sur $\mathcal{M}(E)$, à côté de la topologie forte déduite de la norme définie ci-dessus, une topologie faible (Esp. vect. Top. , Chap. , § , Déf.) ; cette topologie est généralement nommée, quand il s'agit de mesures de Radon, la topologie vague, et on a immédiatement les propriétés que voici :

Proposition 4 - Pour qu'un filtre $\mathcal{F}$ défini sur $\mathcal{M}(E)$ converge vaguement vers une intégrale μ_0, il faut et il suffit que l'on ait

$$\mu_0(f) = \lim_{\mathcal{F}} \mu(f)$$

pour toute fonction $f \in \mathcal{C}(E)$.

Proposition 5 - L'ensemble des intégrales de Radon définies sur un espace compact E, et de norme au plus égale à un, est compact pour la topologie vague.

La Prop. 4 n'est autre que la définition de la topologie vague ;

la Prop. 5 traduit le Théorème du Livre V, chap. , § .

Remarque 3 - On emploie souvent l'expression masse totale pour désigner la norme d'une intégrale.

Remarque 4 - Si à tout point $x \in E$ on associe l'intégrale ε_x (N°2, ex. a), on constate immédiatement que la convergence vague de ε_x vers ε_x équivaut à la convergence, dans E, de x vers x_0. Autrement dit, l'application $x \longrightarrow \varepsilon_x$ est un homéomorphisme de E dans l'espace $\mathcal{M}(E)$ muni de la topologie vague.

5 - Intégrales réelles.

Définition 3 - On dit qu'une intégrale de Radon portée par un espace compact E est réelle si, pour toute fonction réelle $f \in \mathcal{C}(E)$, le nombre $\mu(f)$ est réel.

C'est par exemple le cas lorsque μ est constituée par des masses μ_n, réelles placées en des points $x_n \in E$. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une intégrale μ soit réelle est que l'on ait

(10) $$\mu(\overline{f}) = \overline{\mu(f)} \qquad \text{pour toute } f \in \mathcal{C}(E) ;$$

la démonstration de ce fait peut être laissée au lecteur.

<u>Proposition 6 - Toute intégrale de Radon</u> μ <u>portée par un espace compact</u> E <u>admet une décomposition unique de la forme</u>

(11) $$\mu = \mu' + i\mu''$$

<u>où</u> μ' , μ'' <u>sont des intégrales de Radon réelles portées par</u> E .

En effet, posons, pour $f \in \mathcal{C}(E)$,

(12) $$\bar{\mu}(f) = \overline{\mu(\bar{f})} \quad ;$$

on obtient ainsi visiblement une intégrale de Radon $\bar{\mu}$, dite "imaginaire conjuguée" de μ . Les intégrales

(13) $$\mu' = \frac{1}{2}(\mu + \bar{\mu}) \quad , \qquad \mu'' = \frac{1}{2i}(\mu - \bar{\mu})$$

sont alors réelles et satisfont à (11) comme on le voit aisément.

Réciproquement, (11) implique

$$\bar{\mu} = \mu' - i\mu'' ,$$

d'où l'on déduit (13) : ce qui prouve l'unicité de la décomposition (11).

Les intégrales μ' et μ'' qui interviennent dans (11) sont les <u>parties réelle et imaginaire</u> de μ . La réalité d'une intégrale μ s'exprime, si l'on compare (10) et (12), par l'équation

$$\mu = \bar{\mu} .$$

Si μ est formée d'une masse a placée en un point $x \in E$, $\bar{\mu}$ est formée de la masse $\bar{a}$ placée en x , et les parties réelle et imaginaire de μ , des masses $\mathcal{R}(a)$ et $\mathcal{J}(a)$ resp. placées en x : ces faits justifient la terminologie introduite ici.

<u>Remarque 5</u> - Soit $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(E)$ l'ensemble des fonctions <u>réelles</u> de (E) : c'est un espace de Banach réel. Si μ est une intégrale de Radon réelle sur E , la restriction de μ à $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(E)$ est visiblement une forme linéaire réelle et continue sur $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(E)$. Réciproquement, soit $\mu(f)$ une forme linéaire réelle et continue sur $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(E)$; si l'on pose, pour $g + ih \in \mathcal{C}(E)$,

$$\mu(g + ih) = \mu(g) + i\mu(h)$$

on obtient une forme linéaire sur $\mathcal{C}(E)$; celle-ci est au surplus continue, puisque la convergence vers 0, dans $\mathcal{C}(E)$, de $g + ih$ équivaut à la convergence vers 0, dans $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(E)$, de g et de h . Par suite, on voit que toute forme linéaire réelle et continue sur $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(E)$ est déterminée par une intégrale de Radon réelle sur E . On obtient ainsi une application biunivoque et linéaire de l'espace $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(E)$ des intégrales de Radon réelles définies sur E , sur le dual (topologique) réel de l'espace $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(E)$.

6 - Intégrales positives.

L'ensemble $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(E)$ des fonctions continues réelles définies sur un espace compact E étant, non seulement un espace de Banach, mais un espace de Riesz, on est conduit à passer la définition suivante (Chap. I, § 2, Déf.   ) :

Définition 4 - On dit qu'une intégrale de Radon μ portée par un espace compact E est positive si le nombre $\mu(f)$ est positif pour toute fonction $f \in \mathcal{C}(E)$ à valeurs positives.

Plus généralement, on peut introduire une relation d'ordre dans l'espace vectoriel réel des intégrales de Radon réelles définies sur E ; si μ et ν sont deux telles intégrales, on écrira

$$\mu \leqslant \nu$$

lorsque l'intégrale $\nu - \mu$ sera positive.

Nous allons maintenant montrer que les résultats du Chap.I sont valables pour les intégrales réelles.

Comme ces résultats s'appliquent aux formes linéaires relativement bornées au sens de la structure d'ordre de $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(E)$, tout revient à démontrer le résultat suivant :

Théorème 1 - Soit E un espace compact. Pour qu'une forme linéaire réelle $\mu(f)$ définie sur l'espace $\mathcal{C}_R(E)$ soit relativement bornée au sens de la structure d'espace de Riesz de $\mathcal{C}_R(E)$, il faut et il suffit qu'elle soit continue pour la topologie de la convergence uniforme sur E .

Supposons en effet μ relativement bornée ; on a alors, puisque la fonction 1 est dans $\mathcal{C}_R(E)$:

$$\sup_{0 \leq f \leq 1} |\mu(f)| = M$$

où $0 \leq M < +\infty$. Si alors $f \in \mathcal{C}_R(E)$ est positive, la fonction $f/\|f\|$ étant comprise entre 0 et 1 , on aura

$$|\mu(f)| = \|f\| . \left|\mu\left(\frac{f}{\|f\|}\right)\right| \leq M \|f\| \ ;$$

pour une $f \in \mathcal{C}_R(E)$ de signe quelconque, on aura alors

$$|\mu(f)| = |\mu(f^+) - \mu(f^-)| \leq |\mu(f^+)| + |\mu(f^-)|$$
$$\leq M . \|f^+\| + M. \|f^-\| \leq 2 M . \|f\| \ ,$$

d'où la continuité de μ .

Réciproquement si μ est continue et si $f \in \mathcal{C}_R(E)$ est positive, on aura, pour $0 \leq g \leq f$, $\|g\| \leq \|f\|$ et donc :

$$|\mu(g)| \leq \|\mu\| \cdot \|g\| \leq \|\mu\| \cdot \|f\|$$

en sorte que

$$\sup_{0 \leq g \leq f} \mu(g) < +\infty \ ,$$

ce qui montre que μ est relativement bornée.

Le Théorème 1 étant démontré, nous pouvons appliquer, à l'aide du N° 5, Remarque 5 , les résultats du Chap.I, § 2.

Théorème 2 - Les intégrales de Radon réelles définies sur un espace compact E forment un espace de Riesz absolument réticulé. En particulier, pour une telle intégrale μ existent les intégrales positives

$$\mu^+ = \sup(\mu, 0) \quad ; \quad \mu^- = \sup(-\mu, 0)$$

et on a

$$\mu = \mu^+ - \mu^- .$$

Pour toute fonction f définie, continue et positive sur E , on a

$$\int f\, d\mu^+ = \sup_{\substack{0 \leqslant g \leqslant f \\ g \in \mathcal{C}_R(E)}} \int g\, d\mu .$$

Corollaire du Théorème 2 - Toute intégrale de Radon μ portée par un espace compact E est une combinaison linéaire d'intégrales positives portées par E .

On peut même écrire

$$\mu = \mu_1 - \mu_2 + i\mu_3 - i\mu_4$$

où $\mu_1, \ldots, \mu_4$ sont positives : il suffit pour le voir d'appliquer le Théorème 2 aux parties réelle et imaginaire de μ .

Proposition 7 - Soit μ une intégrale de Radon positive sur un espace compact E . Pour toute fonction f définie sur E , continue et à valeurs complexes, on a

$$\left| \int f(x)\, d\mu(x) \right| \leqslant \int |f(x)|\, d\mu(x) .$$

Donnons-nous en effet un nombre $\varepsilon > 0$. Puisque f est continue, il existe un recouvrement ouvert fini $(G_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de E tel que, si x et y sont deux points de G_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, on ait

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon .$$

On peut d'autre part trouver des fonctions $g_i \in \mathcal{C}_R(E)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ telles que :

a) $0 \leqslant g_i(x) \leqslant 1$; $g_i(x) = 0$ pour $x \notin G_i$

b) $\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} g_i(x) = 1$ pour $x \in E$.

Si l'on choisit dans chaque G_i un point x_i , on aura alors immédiatement

$$|f(x)g_i(x) - f(x_i)g_i(x)| \leqslant \varepsilon\, g_i(x) \quad \text{pour tout} \quad x \in E ,$$

et

$$f = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} f g_i ,$$

d'où l'on déduit

$$\left| f(x) - \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} f(x_i) g_i(x) \right| \leqslant \varepsilon \quad \text{pour} \quad x \in E .$$

Il s'ensuit que

(14) $$\left|\mu(f)-\sum_{1\leqslant i\leqslant n} f(x_i)\mu(g_i)\right|\leqslant \varepsilon\,.\,\|\mu\|\,.$$

En remplaçant f par $|f|$, on trouverait de même que

(15) $$\left|\mu(|f|)-\sum |f(x_i)|\,.\,\mu(g_i)\right|\leqslant \varepsilon\,\|\mu\|.$$

Comme on a, puisque μ est positive, l'inégalité

$$\left|\sum_{1\leqslant i\leqslant n} f(x_i)\mu(g_i)\right|\leqslant \sum_{1\leqslant i\leqslant n}|f(x_i)|\,.\,\mu(g_i)\,,$$

la comparaison de (14) et (15) montre que

$$|\mu(f)|\leqslant \mu(|f|)+2\,\varepsilon\,.\,\|\mu\|\;;$$

$\varepsilon>0$ étant arbitraire, la Proposition est démontrée.

<u>Proposition 8</u> - <u>La norme d'une intégrale de Radon positive</u> μ <u>portée par un espace compact</u> E <u>est donnée par l'équation</u>

$$\|\mu\|=\mu(1)=\int d\mu(x)\,.$$

En effet, pour toute $f\in\mathcal{C}(E)$ on a

$$|f|\leqslant\|f\|\,.\,1\;;$$

d'où (Prop. 7)

$$|\mu(f)|\leqslant\mu(|f|)\leqslant\|f\|\,.\,\mu(1)$$

ce qui montre que l'on a

$$\|\mu\|\leqslant\mu(1)\,.$$

Comme on a par ailleurs

$$|\mu(1)|=\mu(1)\leqslant\|\mu\|\,.\,\|1\|=\|\mu\|\,,$$

la Proposition est démontrée.

<u>Proposition 9</u> - <u>Les intégrales de Radon positives et de masse totale au plus égale à</u> 1 <u>forment un ensemble compact pour la topologie vague</u>.

C'est une conséquence de la Prop.5 et du fait -évident d'après la Prop. 4 - que l'ensemble des intégrales positives est <u>fermé</u> pour la topologie vague.

On notera que les intégrales telles que

$$\mu \geqslant 0 \ , \qquad \|\mu\| = 1$$

forment aussi un ensemble compact pour la topologie vague. Cela tient au fait que, sur l'ensemble des intégrales <u>positives</u>, l'expression $\|\mu\| = \mu(1)$ est vaguement continue.

Par contre, l'ensemble des intégrales de <u>signe quelconque</u> et de masse totale égale à 1 <u>n'est pas</u> compact pour la topologie vague.

CH. II - § 2 - Intégrales de Radon sur un espace localement compact.

1 - L'espace $\mathcal{L}(E)$.

Définition 1 - Etant donné un espace localement compact E , on désigne par $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des fonctions numériques f définies et continues sur E , telles que le sous-ensemble de E défini par la condition « $f(x) \neq 0$ » soit relativement compact.

Si l'on appelle support d'une fonction numérique f le plus petit sous-ensemble fermé de E en dehors duquel f soit nulle, on voit que $\mathcal{L}(E)$ n'est autre que l'ensemble des fonctions continues à support compact définies sur E . Si E est compact, on a évidemment $\mathcal{L}(E) = \mathcal{C}(E)$.

Il est clair que $\mathcal{L}(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(E)$, donc peut être lui-même considéré comme un espace vectoriel complexe ; c'est même une sous-algèbre de $\mathcal{C}(E)$, stable par l'application $f \to \bar{f}$ de $\mathcal{C}(E)$ sur $\mathcal{C}(E)$.

L'existence de fonctions non nulles appartenant à $\mathcal{L}(E)$ est évidente ; les résultats obtenus en $T_o$pologie générale (Chap. IX, §   , Th.   ) conduisent d'une manière précise à la propriété suivante :

Proposition 1 - Soient E un espace localement compact, K un sous-ensemble compact de E , U un voisinage de K dans E , $\{G_1, \dots, G_n\}$ un recouvrement ouvert fini de K . Alors il existe des fonctions $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant les conditions suivantes :

1) on a $0 \leq f_i(x) \leq 1$ pour tout $x \in E$ et $1 \leq i \leq n$;

2) on a $0 \leq \sum_{i=1}^{n} f_i(x) \leq 1$ pour tout $x \in E$, et

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x) = \begin{cases} 1 \text{ pour tout } x \in K \\ 0 \text{ pour tout } x \in \complement U \end{cases}$$

3) la fonction f_i est nulle en dehors de l'ouvert G_i $(1 \leq i \leq n)$.

Considérons maintenant le sous-ensemble $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E)$ formé des fonctions <u>réelles</u> de $\mathcal{L}(E)$. C'est un espace vectoriel réel, ordonné par la relation $f \leqslant g$. Si f et g sont deux fonctions de $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E)$, il est clair que $\sup(f,g)$ est aussi dans $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E)$ - car son support est contenu dans la réunion de ceux de f et g. Donc, $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E)$ peut être considéré comme un <u>espace de Riesz</u>, dont la partie positive est l'ensemble $\mathcal{L}_{+}(E)$ des fonctions $f \in \mathcal{L}(E)$ à valeurs dans $\mathbb{R}_{+}$.

On notera que, dans l'algèbre $\mathcal{L}(E)$, $\mathcal{L}_{+}(E)$ n'est autre que l'ensemble des éléments f qui peuvent se mettre sous la forme

$$f = g.\bar{g} \qquad \text{où} \qquad g \in \mathcal{L}(E) .$$

2 - <u>Définition des intégrales de Radon</u>

<u>Définition 2</u> - <u>Etant donnés un espace localement compact</u> E <u>et un sous-ensemble compact</u> K <u>de</u> E, <u>on désigne par</u> $\mathcal{L}(E ; K)$ <u>l'ensemble des</u> $f \in \mathcal{L}(E)$ <u>dont le support est contenu dans</u> K.

Pour une $f \in \mathcal{C}(E)$, la condition «$f \in \mathcal{L}(E ; K)$» signifie donc que f est nulle en dehors de K. Il est clair que $\mathcal{L}(E ; K)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$, et même une sous-algèbre et un sous-espace de Riesz de $\mathcal{L}(E)$.

<u>Remarque 1</u> - $\mathcal{L}(E, K)$ peut être réduit à $\{0\}$; d'après la Prop. 1, il faut et il suffit pour cela que K ne contienne pas de point intérieur.

Si E est <u>compact</u> - et dans ce cas seulement - $\mathcal{L}(E)$ lui-même appartient à la famille des sous-espaces $\mathcal{L}(E, K)$: il suffit d'observer qu'alors $\mathcal{L}(E ; E) = \mathcal{L}(E)$.

Comme toute $f \in \mathcal{L}(E)$ est <u>bornée</u> - puisque continue et nulle en dehors d'un compact - on peut introduire sur $\mathcal{L}(E)$, et par conséquent sur les sous-espaces $\mathcal{L}(E ; K)$, la topologie de la <u>convergence uniforme sur</u> E. Grâce à cell-ci, on peut étendre comme suit la notion d'intégrale de Radon.

<u>Définition 3</u> - <u>On appelle intégrale de Radon sur un espace localement compact</u> E <u>une forme linéaire</u> $\mu(f)$ <u>sur l'espace</u> $\mathcal{L}(E)$ <u>vérifiant la condition suivante</u> :

(IR) <u>Pour tout sous-ensemble compact</u> $K \subset E$, <u>la restriction de</u> μ <u>au sous-espace</u> $\mathcal{L}(E\ ;\ K)$ <u>est continue pour la topologie de la convergence uniforme sur</u> E .

Il résulte de la Déf. 3 que, pour tout compact $K \subset E$, il existe un nombre M_K , ne dépendant que de K et de μ , tel que l'on ait

$$|\mu(f)| \leqslant M_K \cdot \|f\|$$

pour toute $f \in \mathcal{L}(E)$ dont le support est contenu dans K .

Il est clair d'après la remarque qu'on a faite plus haut que, si E est compact, on retrouve la Déf.1 du §1 . Si E n'est pas compact, parmi les intégrales de Radon définies sur E se trouvent les formes linéaires définies sur $\mathcal{L}(E)$ et qui y sont continues pour la topologie considérée ; toutefois, on n'obtient pas ainsi toutes les intégrales de Radon définies sur E .

Par exemple, soit N un sous-ensemble de E jouissant de la propriété suivante : pour tout compact $K \subset E$, $N \cap K$ n'a qu'un nombre fini d'éléments. Soit $\varphi(x)$ une fonction numérique quelconque définie sur N . Pour toute $f \in \mathcal{L}(E)$, on peut alors former l'expression

$$\mu(f) = \sum_{x \in N} f(x)\,\varphi(x) \quad ;$$

celle-ci définit une intégrale de Radon sur E , formée des « <u>masses</u> $\varphi(x)$ <u>placées aux points</u> $x \in N$ » et n'est en général pas continue sur $\mathcal{L}(E)$ tout entier. Ce sera en particulier le cas si on prend $E = Z$ (espace discret), $N = Z$, et $\varphi(n)=1$; on a alors

$$\mu(f) = \sum_{n \in Z} f(n) \; .$$

On est par conséquent amené à introduire la distinction suivante , vide dans le cas des espaces compacts :

Définition 4 - On dit qu'une intégrale de Radon μ portée par un espace localement compact E est bornée (ou de masse totale finie) si la forme linéaire $\mu(f)$ est continue sur l'espace vectoriel normé $\mathcal{L}(E)$.

Exemples - a) Soit $E = \mathbb{R}$; pour toute $f \in \mathcal{L}(E)$, il existe un intervalle compact $[a,b]$ en dehors duquel f est nulle ; donc l'intégrale (Livre Elém., Chap. , §)

$$I(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{a}^{b} f(x)dx$$

a un sens, et définit une forme linéaire sur $\mathcal{L}(E)$. D'après l'inégalité de la moyenne

$$|I(f)| \leqslant (b-a).\|f\| ,$$

on voit que I(f) est continue sur tous les sous-espaces $\mathcal{L}(E\ ;\ K)$, donc constitue une intégrale de Radon sur $\mathbb{R}$; on l'appelle l'intégrale de Lebésgue sur $\mathbb{R}$. Cette intégrale n'est pas bornée ; car pour tout entier $n > 0$, il existe une $f \in \mathcal{L}(E)$ prenant la valeur 1 sur $[-n, +n]$, et partout comprise entre 0 et 1 ; on a alors

$$\|f\| = 1 \quad \text{et} \quad I(f) = \int_{-n}^{n} f(x)dx \geqslant \int_{-n}^{n} dx = 2n ,$$

ce qui prouve notre assertion.

b) Par contre, la formule

$$I(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{dx}{1+x^2}$$

définit une intégrale de Radon bornée ; car on a

$$|I(f)| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \frac{dx}{1+x^2} \leqslant \|f\| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi \,.\, \|f\| .$$

c) Soient μ une intégrale de Radon sur un espace localement compact E , et φ une fonction numérique définie et continue sur E . Pour toute $f \in \mathcal{L}(E)$, on a $f.\varphi \in \mathcal{L}(E)$, ce qui permet de considérer la forme linéaire

$$\mu^{\varphi}(f) = \mu(f.\varphi) \quad ;$$

celle-ci est une intégrale de Radon ; en effet, l'application $f \longrightarrow f.\varphi$ conserve chaque sous-espace $\mathcal{L}(E\ ;\ K)$ et y est continue ;

comme μ^φ s'obtient en composant celle-ci avec l'application $f \to \mu(f)$, on voit que μ^φ est continue dans les $\mathcal{L}(E\ ;\ K)$ (K compact).

On dit que μ^φ est l'<u>intégrale définie par la densité</u> φ <u>relativement à</u> μ ; on écrit souvent, de façon symbolique,

$$d\mu^\varphi(x) = \varphi(x).d\mu(x) \qquad \text{ou} \qquad d\mu^\varphi = \varphi.d\mu \ .$$

On a vu un cas particulier de cette notion au § 1, N°2, Ex. c .
Si la fonction φ est à support compact - c'est-à-dire si $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ - l'intégrale μ^φ est <u>bornée</u>. En effet, soit K le support de φ ; pour toute $f \in \mathcal{L}(E)$, on aura

$$f.\varphi \in \mathcal{L}(E\ ;\ K)$$

et donc

$$\left|\mu^\varphi(f)\right| = \left|\mu(f.\varphi)\right| \leqslant M_K \,.\, \|f.\varphi\|$$

où M_K est une constante ; ce qui s'écrit encore

$$\left|\mu^\varphi(f)\right| \leqslant M_K \,.\, \|\varphi\| \,.\, \|f\| = A \,.\, \|f\|$$

où A est une constante : d'où notre assertion.

Comme on le verra au Chap.IV, l'intégrale μ^φ peut être bornée sans que φ soit à support compact.

d) Comme dans le cas des espaces compacts, chaque point $x \in E$ permet de définir une intégrale ε_x ("masse + 1 placée en x ") par $$\varepsilon_x(f) = f(x) \ .$$

Etant donné un espace localement compact E , on désignera par $\mathcal{M}(E)$ l'ensemble des intégrales de Radon définies sur E . Il est clair d'après la Déf. 3 que $\mathcal{M}(E)$ <u>est un sous-espace vectoriel de l'espace des formes linéaires définies sur</u> $\mathcal{L}(E)$. Il en est bien entendu de même de l'ensemble $\mathcal{M}^1(E)$ formé des intégrales de Radon <u>bornées</u> définies sur E .

3 - Intégrales réelles ; intégrales positives.

Comme au § 1, on dira qu'une intégrale μ sur un espace localement compact E est réelle si $\mu(f)$ est réel pour toute $f \in \mathcal{L}_R(E)$; et que μ est positive si $\mu(f)$ est $\geqslant 0$ pour toute fonction positive de $\mathcal{L}(E)$ - c'est-à-dire, si l'on a

$$\mu(f\bar{f}) \geqslant 0 \quad \text{pour toute} \quad f \in \mathcal{L}(E) .$$

Si μ est une intégrale quelconque, la formule

$$\bar{\mu}(f) = \overline{\mu(\bar{f})}$$

définit l'intégrale imaginaire conjuguée ; l'équation

$$\mu = \frac{\mu + \bar{\mu}}{2} + i\, \frac{\mu - \bar{\mu}}{2i}$$

conduit à la décomposition de μ en parties réelle et imaginaire.

Comme le sous-ensemble $\mathcal{L}_R(E)$ engendre (algèbriquement) $\mathcal{L}(E)$, une intégrale réelle définit biunivoquement une forme linéaire réelle sur l'espace de Riesz $\mathcal{L}_R(E)$. On a à ce sujet le résultat suivant, qui généralise le Théorème 1 du § 1 :

Théorème 1 - Pour qu'une forme linéaire réelle μ sur l'espace de Riesz $\mathcal{L}_R(E)$ définisse une intégrale de Radon sur E, il faut et il suffit qu'elle soit relativement bornée.

Tout d'abord, soit μ une intégrale de Radon sur E. Pour une $f \geqslant 0$ de $\mathcal{L}_R(E)$, il existe un compact $K \subset E$ en dehors duquel f est nulle ; toute $g \in \mathcal{L}_R(E)$ vérifiant $0 \leqslant g \leqslant f$ est aussi nulle en dehors de K ; μ étant continue sur $\mathcal{L}(E ; K)$, il existe une constante finie M_K telle que $g \in \mathcal{L}(E ; K)$ implique $|\mu(g)| \leqslant M_K . \|g\|$; pour $0 \leqslant g \leqslant f$ on aura donc

$$|\mu(g)| \leqslant M_K . \|g\| \leqslant M_K . \|f\| ,$$

ce qui prouve que μ est relativement bornée.

Supposons réciproquement μ relativement bornée, et soit un compact $K \subset E$. D'après la Prop. 1, il existe une $f \geqslant 0$ de $\mathcal{L}(E)$ qui prend la valeur un sur K ; pour toute $g \in \mathcal{L}_R(E ; K)$ on aura

$$g \leqslant \|g\| \cdot f \quad ;$$

posons alors

$$\sup_{0 \leqslant g \leqslant f} |\mu(g)| = M \qquad (< +\infty) ;$$

pour $g \in \mathcal{L}_R(E\ ;\ K)$ on aura alors

$$|\mu(g)| = \|g\| \cdot \left|\mu\left(\frac{g}{\|g\|}\right)\right| \leqslant \|g\| \cdot \left|\mu\left(\frac{g^+}{\|g\|}\right)\right| + \|g\| \cdot \left|\mu\left(\frac{g^-}{\|g\|}\right)\right| \leqslant 2\, M . \|g\| ,$$

d'où la continuité de μ sur $\mathcal{L}(E\ ;\ K)$.

Pour les mêmes raisons qu'au § 1, on peut donc dire que les <u>intégrales de Radon réelles définies sur un espace localement compact</u> E <u>forment un espace de Riesz</u> $\mathcal{M}_R(E)$ <u>absolument réticulé</u> ; les définitions et les propriétés exprimées par les équations suivantes :

$$\mu^+ = \sup(\mu, 0) \ ; \qquad \mu^- = \sup(-\mu, 0) \ ; \qquad |\mu| = \sup(\mu, -\mu) \ ;$$
$$\mu = \mu^+ - \mu^- \ ; \qquad |\mu| = \mu^+ + \mu^-$$

ont encore un sens, de même que la formule

$$\int f\, d\mu^+ = \sup_{\underbrace{0 \leqslant g \leqslant f}_{g \in \mathcal{L}(E)}} \int g\, d\mu \qquad \text{pour } f \geqslant 0 ,\ f \in \mathcal{L}(E) .$$

Par contre, la distinction entre mesures bornées et non bornées conduit à la propriété supplémentaire que voici :

<u>Proposition 2</u> - <u>Pour qu'une intégrale de Radon réelle</u> μ <u>portée par un espace localement compact</u> E <u>soit bornée, il faut et il suffit que</u> μ^+ <u>et</u> μ^- <u>le soient</u>.

Il est tout d'abord évident que la condition est suffisante. Pour montrer qu'elle est nécessaire, on peut se borner à examiner μ^+ (puisque μ^- s'en déduit par le changement de μ en $-\mu$).

Or, soit une $f \geqslant 0$ de $\mathcal{L}(E)$. μ étant bornée, il existe une constante M telle que l'on ait

$$|\mu(g)| \leqslant M . \|g\| \qquad \text{pour toute} \quad g \in \mathcal{L}(E) .$$

Pour $0 \leqslant g \leqslant f$ on aura donc

$$\mu(g) \leqslant |\mu(g)| \leqslant M . \|g\| \leqslant M . \|f\|$$

d'où, en prenant la borne supérieure du premier membre :

$$\mu^+(f) \leqslant M \|f\| .$$

En décomposant une f quelconque de $\mathcal{L}(E)$ en parties positives, on parvient alors immédiatement au résultat cherché.

La démonstration donnée au §1 , Prop.7, de l'inégalité

$$\left|\int f\, d\mu\right| \leq \int |f| \cdot d\mu \quad \text{pour} \quad \mu \geq 0 \,,\; f \in \mathcal{L}(E)$$

s'étend sans difficulté au cas général ; tout revient en effet à former une "partition de l'unité" dans $\mathcal{L}(E)$, limitée au support - <u>compact</u> - de f : or ceci est possible d'après les propriétés exposées au N° 1 , de l'espace $\mathcal{L}(E)$.

<u>Proposition 3</u> - <u>Toute intégrale positive, majorée par une intégrale positive et bornée, est elle-même bornée</u>.

Soit en effet $0 \leq \mu \leq \nu$ où ν est bornée. Pour toute $f \in \mathcal{L}(E)$, on aura

$$|\mu(f)| \leq \mu(|f|) \leq \nu(|f|) \leq M.\|f\| \;,$$

d'où la Proposition.

<u>Remarque 1</u> - Si μ est réelle, μ^+ et μ^- sont majorées par $|\mu|$. En combinant les Prop. 2 et 3 , on voit donc que : pour que soit bornée, il faut et il suffit que $|\mu|$ le soit.

<u>Remarque 2</u> - Les intégrales réelles et bornées forment un espace de Riesz <u>absolument réticulé</u>.

<u>4 - Support d'une intégrale.</u>

<u>Définition 5</u> - <u>Etant donnée une intégrale de Radon</u> μ <u>sur un espace localement compact</u> E , <u>on dit que</u> μ <u>est nulle au voisinage d'un point</u> $x \in E$ <u>si l'on a</u> $\mu(f) = 0$ <u>pour toute</u> $f \in \mathcal{L}(E)$ <u>qui est nulle en dehors d'un voisinage déterminé de</u> x <u>dans</u> E .

On dit aussi que μ <u>ne comporte pas de masses au voisinage de</u> x . Il existe alors un voisinage $\mathcal{V}$ de x , qu'on peut supposer ouvert, tel que $\mu(f) = 0$ si f est nulle en dehors de $\mathcal{V}$. Comme $\mathcal{V}$ est un voisinage de chacun de ses points, on voit que tous les $y \in \mathcal{V}$ jouissent de la même propriété que x .

Par suite :

<u>Proposition 4 - Soit</u> μ <u>une intégrale de Radon sur un espace localement compact</u> E . <u>Les points de</u> E <u>au voisinage desquels</u> μ <u>est nulle forment un sous-ensemble ouvert de</u> E

Le complémentaire de cet ouvert est appelé le <u>support</u> ou le <u>noyau</u> de μ ; on le notera souvent $\mathcal{N}(\mu)$. C'est un ensemble <u>fermé</u> ; ses points sont caractérisés par la propriété suivante : pour tout voisinage $\mathcal{V}$ d'un point de $\mathcal{N}(\mu)$, il existe une $f \in \mathcal{L}(E)$, nulle en dehors de $\mathcal{V}$, et telle que $\mu(f) \neq 0$.

<u>Théorème 2 - Le support d'une intégrale</u> μ <u>est le plus petit ensemble fermé</u> F <u>possédant la propriété suivante</u> : <u>pour toute</u> $f \in \mathcal{L}(E)$ <u>qui est nulle sur</u> F , <u>on a</u> $\mu(f) = 0$.

Tout d'abord, tout fermé F vérifiant cette condition contient $\mathcal{N}(\mu)$; car si $x \notin F$, on a $\mu(f) = 0$ pour toute $f \in \mathcal{L}(E)$ nulle sur F , c'est-à-dire en dehors du <u>voisinage</u> $\complement F$ de x ; donc $x \notin F$ implique $x \notin \mathcal{N}(\mu)$, d'où $F \supset \mathcal{N}(\mu)$.

Il reste à montrer que $\mathcal{N}(\mu)$ possède la propriété en question, c'est-à-dire que l'on a $\mu(f)=0$ pour toute $f \in \mathcal{L}(E)$ nulle sur $\mathcal{N}(\mu)$.

Désignons pour cela par K_ε l'ensemble des $x \in E$ tels que $|f(x)| \geqslant \varepsilon$, où ε est un nombre >0 donné arbitrairement f étant continue, K_ε est fermé ; il est contenu dans le support de f - donc, est <u>compact</u>. De plus, $K_\varepsilon \cap \mathcal{N}(\mu)$ est vide par hypothèse, en sorte que l'on peut trouver un <u>ouvert</u> $\mathcal{U}$ contenant K_ε et ne rencontrant pas $\mathcal{N}(\mu)$.

Comme $K_\varepsilon \cap \mathcal{N}(\mu) = \emptyset$, tout $x \in K_\varepsilon$ possède un voisinage $\mathcal{V}(x)$ possédant la propriété suivante : on a $\mu(h)=0$ pour toute $h \in \mathcal{L}(E)$ nulle en dehors de $\mathcal{V}(x)$. K_ε étant compact, on peut le recouvrir par un nombre fini de tels voisinages ; soit $\{\mathcal{V}(x_1), \ldots, \mathcal{V}(x_n)\}$ un tel recouvrement. D'après la Prop. 1, on pourra trouver des $h_i \in \mathcal{L}(E)$ $(1 \leqslant i \leqslant n$

telles que :

1) $0 \leqslant h_i(x) \leqslant 1$ pour tout $x \in E$; $h_i(x) = 0$ en dehors de $\mathcal{V}(x_i)$;

2) la fonction $h(x) = \sum_{i=1}^{n} h_i(x)$ vérifie :

$0 \leqslant h(x) \leqslant 1$ pour tout $x \in E$;

$h(x) = 1$ pour tout $x \in K_\varepsilon$;

$h(x) = 0$ en dehors de $\mathcal{V}$.

Ecrivons alors

$$f = f.h + (f - fh) .$$

On a

$$fh = \sum fh_i \quad ;$$

le support de fh_i étant contenu, comme celui de h_i , dans $\mathcal{V}(x_i)$. , on a $\mu(fh_i) = 0$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ et donc $\mu(fh) = 0$; par suite

$$\mu(f) = \mu(f - fh) .$$

Comme $h(x) = 1$ sur K_ε , la fonction $g = f - fh$ est nulle sur K_ε . En dehors de K_ε , elle prend des valeurs qui sont en module inférieures à ε ; donc

$$\| f - fh \| \leqslant \varepsilon .$$

Ceci étant, soit K le support - compact - de f . μ étant continue sur $\mathcal{L}(E ; K)$, il existe une constante finie M_K telle que l'on ait

$$| \mu(\varphi) | \leqslant M_K . \| \varphi \|$$

pour toute $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ nulle en dehors de K . En particulier, on aura

$$| \mu(f - fh) | \leqslant M_K . \| f - fh \| \leqslant M_K \varepsilon ,$$

c'est-à-dire

$$| \mu(f) | \leqslant M_K . \varepsilon .$$

M_K étant fixe, et $\varepsilon > 0$ arbitraire, il en résulte

$$\mu(f) = 0 ,$$

ce qui démontre le Théorème 2 .

<u>Corollaire 1 du Théorème 2</u> - <u>L'intégrale</u> $\int f\, d\mu$ <u>ne dépend que de la restriction de</u> f <u>au support de</u> μ .

En effet, si deux fonctions $f, g \in \mathcal{L}(E)$ coïncident sur $\mathcal{N}(\mu)$, f-g est nulle sur $\mathcal{N}(\mu)$; on a donc bien $\mu(f) = \mu(g)$.

<u>Corollaire 2 du Théorème 2</u> - <u>Pour qu'une intégrale de Radon</u> μ <u>soit identiquement nulle, il faut et il suffit que son support soit vide</u>.

<u>Corollaire 3 du Théorème 2</u> - <u>Soient</u> μ <u>une intégrale de Radon,</u> $\varphi(x)$ <u>une fonction numérique continue</u> ; <u>pour que l'intégrale de Radon</u>

$$d\mu^{\varphi}(x) = \varphi(x)\, d\mu(x)$$

<u>soit nulle, il faut et il suffit que</u> φ <u>soit nulle sur le support de</u> μ .

La condition est suffisante ; car si φ est nulle sur $\mathcal{N}(\mu)$, il en est de même de $f\varphi$ pour toute $f \in \mathcal{L}$, d'où (Th. 2)

$$\int f\varphi\, d\mu = \mu^{\varphi}(f) = 0 ,$$

en sorte que $\mu^{\varphi} = 0$.

Réciproquement, supposons $\mu^{\varphi} = 0$, et soit x_0 un point où $\varphi(x_0) \neq 0$; φ étant continue, on aura $\varphi(x) \neq 0$ pour tous les points d'un voisinage ouvert $\mathcal{V}$ de x ; toute $f \in \mathcal{L}$ nulle en dehors de $\mathcal{V}$ étant alors de la forme $g.\varphi$ où $\varphi \in \mathcal{L}$, on aura

$$\int f . d\mu = \int g\varphi\, d\mu = \mu^{\varphi}(g) = 0 ;$$

donc μ ne comporte pas de masses au voisinage de x_0 ; ceci prouve que $\varphi(x) = 0$ sur $\mathcal{N}(\mu)$.

Montrons maintenant le caractère <u>local</u> de la notion d'intégrale.

<u>Définition 6</u> - <u>On dit que deux intégrales de Radon</u> μ <u>et</u> ν , <u>portées par un espace localement compact</u> E , <u>coïncident localement en un point</u> $x \in E$ <u>si l'intégrale</u> $\mu - \nu$ <u>ne comporte pas de masses au voisinage de</u> x .

Il revient évidemment au même de dire que x n'appartient pas au support de $\mu - \nu$. D'après le Corollaire 2 du Théorème 2 , on a donc la propriété suivante :

Proposition 5 - Pour que deux intégrales de Radon μ et ν portées par un espace localement compact E soient identiques, il faut et il suffit qu'elles coïncident localement en tout point de E .

Dans le cas des mesures positives, on peut complèter comme suit le Théorème 2 :

Proposition 6 - Soit μ une intégrale positive ; pour qu'une fonction positive $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifie

$$\int f.d\mu = 0 ,$$

il faut et il suffit que f soit nulle sur le support de μ .

Que la condition soit suffisante résulte du Théorème 2 . Si elle n'est pas remplie, il existe un point x du support de μ et un voisinage $\mathcal{V}$ de x tels que l'on ait

(1) $\qquad f(y) > 0 \qquad$ pour $\quad y \in \mathcal{V}$;

μ comportant des masses au voisinage de x , il existe une fonction $g \in \mathcal{L}_+(E)$, nulle en dehors de $\mathcal{V}$, et telle que

$$\mu(g) \neq 0 \;;$$

de (1) résulte une inégalité de la forme $f \geqslant a.g$ avec $a > 0$, d'où comme μ est positive

$$\mu(f) \geqslant a \,.\, \mu(g)$$

ce qui montre que $\mu(f) \neq 0$: la condition de l'énoncé est donc aussi nécessaire.

Notons enfin la propriété suivante :

Proposition 7 . Si une intégrale positive ν est majorée par une intégrale positive μ , le support de ν est contenu dans celui de μ .

Soit en effet x un point n'appartenant pas à $N(\mu)$; on a $\mu(f)=0$ pour toute $f \in \mathcal{L}(E)$ nulle en dehors d'un voisinage $\mathcal{V}$ de x ; comme on a $0 \leqslant \nu(f) \leqslant \mu(f)$ pour toute $f \in \mathcal{L}_+(E)$, on en déduit que

$$\nu(|f|) = 0$$

pour toute $f \in \mathcal{L}(E)$ nulle en dehors de $\mathcal{V}$: donc x n'appartient pas à $\mathcal{N}(\nu)$, en sorte qu'on a

$$\complement \mathcal{N}(\mu) \subset \complement \mathcal{N}(\nu)$$

ce qui démontre la Proposition.

5 - Intégrales discrètes.

Soit E un espace localement compact. Considérons une fonction numérique arbitraire $\varphi(x)$ définie sur E, et supposons que, pour toute $f \in \mathcal{L}(E)$, la série

(1) $$\mu(f) = \sum_{x \in E} f(x).\varphi(x)$$

soit absolument convergente : c'est alors une forme linéaire sur $\mathcal{L}(E)$.

Si φ est réelle, les séries

$$\mu_1(f) = \sum_{x \in E} f(x)\varphi^+(x) , \quad \mu_2(f) = \sum_{x \in E} f(x)\varphi^-(x)$$

sont, comme (1), absolument convergentes ; ce sont des formes linéaires positives sur $\mathcal{L}(E)$, donc (Th.1) des intégrales de Radon ; il en est donc de même de (1), puisque $\mu = \mu_1 - \mu_2$.

Dans le cas général, un raisonnement entièrement analogue s'applique lorsque l'on décompose φ en parties réelle et imaginaire.

On voit donc que, si la série (1) est absolument convergente pour toute $f \in \mathcal{L}(E)$, elle représente une intégrale de Radon sur E.

Définition 7 - On dit qu'une intégrale de Radon μ portée par un espace localement compact E est discrète s'il existe une fonction numérique $\varphi(x)$ définie sur E telle que, pour toute $f \in \mathcal{L}(E)$, la famille $\{f(x)\varphi(x)\}_{x \in E}$ soit sommable et ait pour somme $\mu(f)$. On dit alors que μ est constituée par la répartition de masses $\varphi(x)$.

Par exemple, soit $A \subset E$ un ensemble tel que tout compact rencontre A suivant un ensemble fini : A est alors discret, et réciproquement. (Top.gén., chap. , §). Si $\varphi(x)$ est une fonction arbitraire nulle en dehors de A, l'expression

$$\mu(f) = \sum_{x \in E} f(x).\varphi(x)$$

est une intégrale de Radon discrète sur E ; la série ~~série~~ précédente est en effet absolument convergente pour toute $f \in \mathcal{L}(E)$, puisqu'elle ne comporte qu'un nombre <u>fini</u> de termes non nuls.

Il est clair qu'on peut obtenir ainsi, en particulier, les intégrales ε_x définies par

$$\int f.d\varepsilon_x = f(x) \qquad \text{pour} \quad f \in \mathcal{L}(E) .$$

On notera que les intégrales définies au § 1 , N° 2, Ex. b , sont aussi des intégrales discrètes.

Il est clair que, si μ est une intégrale discrète constituée par les masses $\varphi(x)$, le nombre $\mu(f)$ ne dépend que des valeurs de f aux points où l'on a $\varphi(x) \neq 0$. Il est facile d'en déduire que <u>le support de μ est l'adhérence dans E de l'ensemble $\varphi(x) \neq 0$</u> .

<u>Proposition 8</u> - <u>Toute intégrale de Radon μ dont le support est un ensemble discret est discrète</u>.

Soit en effet $N(\mu)$ le support de μ ; par hypothèse, tout $x \in N(\mu)$ possède un voisinage $\mathcal{V}(x)$ tel que

$$N(\mu) \cap \mathcal{V}(x) = \{x\} \; ;$$

donc, pour les $f \in \mathcal{L}(E)$ dont le support est porté par $\mathcal{V}(x)$, $\mu(f)$ ne dépend que de $f(x)$ (Théorème 2), et ce de façon nécessairement linéaire ; d'où un nombre $\varphi(x)$ tel que

$$\mu(f) = f(x)\,\varphi(x)$$

pour les f considérées.

Si maintenant $f \in \mathcal{L}(E)$ est arbitraire, et si K est le support-compact - de f , $K \cap N(\mu)$ est un ensemble <u>fini</u> ; soient $x_1, \ldots, x_n$ ses points ; en combinant ce qui précède avec la Prop.1 , on trouve facilement que

$$(2) \qquad \mu(f) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\, \varphi(x_i)$$

Soit alors $\rho(x)$ la fonction définie sur E par

$$\rho(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{si } x \in N(\mu) \\ 0 & \text{si } x \notin N(\mu) \,; \end{cases}$$

la formule (2) s'écrit

$$\mu(f) = \sum_{x \in E} f(x)\, \rho(x) \,,$$

ce qui démontre la Proposition.

En particulier, toute intégrale μ dont le support est formé d'un nombre <u>fini</u> de points $x_1, \ldots, x_n$ est de la forme

$$\mu = a_1 \,.\, \varepsilon_{x_1} + \ldots + a_n \,.\, \varepsilon_{x_n}$$

où $a_1, \ldots, a_n$ sont des nombres arbitraires dont aucun n'est nul. Par exemple, une intégrale dont le support est réduit à un seul point x est proportionnelle à ε_x.

S

<u>Remarque 2</u> - Il ne faudrait pas croire que le support d'une intégrale discrète soit toujours un ensemble discret. Par exemple, prenons pour E l'espace compact $[0,1]$, et rangeons les points <u>rationnels</u> de E en une suite $(x_n)_{n \in Z_+}$; la formule

$$\mu(f) = \sum_{n \in Z_+} \frac{1}{n^2} \,.\, f(x_n) \qquad \text{pour} \quad f \in \mathcal{L}(E)$$

définit une intégrale discrète sur E, dont le support est E tout entier.

<u>Proposition 9 - Sur un espace discret, toute intégrale de Radon est discrète, et correspond à une répartition de masses arbitraire.</u>

La première assertion résulte directement de la Prop. 6. Pour démontrer la seconde, il faut prouver que <u>toute</u> fonction numérique $\varphi(x)$, définie sur l'espace E considéré, définit, par la formule

$$\mu(f) = \sum_{x \in E} f(x)\, \varphi(x) \,,$$

une intégrale de Radon. Or, les sous-ensembles <u>compacts</u> de E ne sont autres que les sous-ensembles <u>finis</u> de E ; donc, les $f \in \mathcal{L}(E)$ sont nulles sauf en un nombre *fini* de points, en sorte que la formule précédente a toujours un sens, et définit par suite une intégrale de Radon sur E dont la répartition de masses est $\varphi(x)$. C.Q.F.D.

Bien entendu, la correspondance entre μ et la fonction φ est linéaire, biunivoque, et préserve les relations d'ordre. Par suite, *sur un espace discret* E , *l'espace des intégrales de Radon est isomorphe à l'espace des fonctions numériques définies sur* E .

Proposition 10 - *Pour qu'une intégrale de Radon* *sur un espace discret* E *soit bornée*, *il faut et il suffit qu'elle soit définie par une répartition de masses* $\varphi(x)$ *vérifiant la condition*

$$\sum_{x \in E} |\varphi(x)| < +\infty .$$

Que cette condition soit suffisante résulte de

$$|\mu(f)| = \Big|\sum_{x \in E} f(x)\varphi(x)\Big| \leqslant \|f\| . \sum_{x \in E} |\varphi(x)| .$$

Réciproquement, si μ est bornée, il existe une constante M telle que

$$|\mu(f)| \leqslant M . \|f\| \qquad \text{pour toute} \quad f \in L(E) \; ;$$

donc, quel que soit le sous-ensemble *fini* F de E , on aura - en prenant $f(x) = 1$ sur F , $= 0$ sur $\complement F$ - l'inégalité

$$\Big|\sum_{x \in F} \varphi(x)\Big| \leqslant M$$

il en résulte (Top. Gén., Chap. IV, §) que la famille $\{\varphi(x)\}_{x \in E}$ est sommable. C.Q.F.D.

Il résulte de là que, *sur un espace discret*, *le support d'une intégrale de Radon bornée comporte au plus une infinité dénombrable de points*.

6 - *Norme d'une intégrale bornée*.

Définition 8 - *On appelle norme d'une intégrale de Radon bornée définie sur un espace localement compact* E , *le plus petit nombre positif* $\|\mu\|$ *tel que l'on ait*

$$|\mu(f)| \leq \|\mu\| \cdot \|f\| \quad \underline{\text{pour}} \quad f \in \mathcal{L}(E) .$$

Il est clair que $\|\mu\|$ n'est pas autre chose que la norme de μ considérée comme forme linéaire continue sur l'espace vectoriel <u>normé</u> $\mathcal{L}(E)$. Il s'ensuit que <u>les mesures de Radon bornées forment un espace vectoriel normé complet</u>, que nous noterons $\mathcal{M}^1(E)$, et qui est isomorphe au dual fort de l'espace vectoriel normé $\mathcal{L}(E)$.

<u>Proposition 11</u> - <u>La norme d'une intégrale</u> μ , <u>positive et bornée, est donnée par</u>

$$\|\mu\| = \sup_{\substack{0 \leq f \leq 1 \\ f \in \mathcal{L}(E)}} \mu(f) .$$

Comme la condition $0 \leq f \leq 1$ implique $\|f\| \leq 1$ et donc

$$\mu(f) \leq \|\mu\| ,$$

on voit que le nombre

$$M = \sup_{\substack{0 \leq f \leq 1 \\ f \in \mathcal{L}(E)}} \mu(f)$$

est au plus égal à $\|\mu\|$.

Mais pour une $f \in \mathcal{L}(E)$, on a

$$0 \leq \frac{|f|}{\|f\|} \leq 1$$

et donc

$$\mu\left(\frac{|f|}{\|f\|}\right) \leq M ;$$

il en résulte que

$$|\mu(f)| \leq \mu(|f|) \leq M \cdot \|f\| \quad \text{pour} \quad f \in \mathcal{L}(E) .$$

On a donc

$$M \leq \|\mu\| \leq M ,$$

d'où la proposition.

<u>Proposition 12</u> - <u>Si</u> μ <u>et</u> ν <u>sont deux intégrales positives et bornées, on a</u>

$$\|\mu + \nu\| = \|\mu\| + \|\nu\| .$$

En effet, on a tout d'abord, puisque $\|\mu\|$ est une <u>norme</u> :

$$\|\mu + \nu\| \leq \|\mu\| + \|\nu\| .$$

D'autre part, pour tout nombre $\varepsilon > 0$, on pourra trouver (Prop.11) des fonctions $g, h \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant

$$0 \leqslant g \leqslant 1 \quad , \quad 0 \leqslant h \leqslant 1$$

et $$\mu(g) \geqslant \|\mu\| - \varepsilon \quad , \quad \nu(h) \geqslant \|\nu\| - \varepsilon \ ;$$

posant $f = \sup(g,h)$, on aura $f \in \mathcal{L}(E)$, $0 \leqslant f \leqslant 1$ et en outre

$$\mu(f) \geqslant \|\mu\| - \varepsilon \ , \quad \nu(f) \geqslant \|\nu\| - \varepsilon \quad ,$$

d'où
$$(\mu + \nu)(f) \geqslant \|\mu\| + \|\nu\| - 2\varepsilon \ ;$$

il s'ensuit que
$$\|\mu + \nu\| \geqslant \|\mu\| + \|\nu\| - 2\varepsilon ,$$

d'où la Proposition.

7 - <u>Convergence vague de mesures</u>.

Les intégrales de Radon définies sur un espace localement compact E étant des formes linéaires particulières sur l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E)$, on peut, comme au §1, introduire la notion suivante :

<u>Définition</u> 9 - <u>On appelle topologie vague sur l'ensemble</u> $\mathcal{M}(E)$ <u>des intégrales de Radon définies sur un espace localement compact</u> E <u>la topologie la moins fine qui, pour chaque</u> $f \in \mathcal{L}(E)$, <u>rend continue la fonction</u> $\mu(f)$.

On dira donc qu'une intégrale variable μ <u>converge vaguement</u> vers une intégrale μ_0 si, pour toute $f \in \mathcal{L}(E)$, le nombre $\int f.d\mu$ converge vers le nombre $\int f.d\mu_0$.

Par exemple, l'application $x \longrightarrow \varepsilon_x$ de E dans $\mathcal{M}(E)$ est continue pour les topologies considérées - c'est même un <u>homéomorphisme</u>. D'autre part, si x tend vers l'infini sur E, ε_x converge vaguement vers 0 - puisque, pour toute $f \in \mathcal{L}(E)$, $\varepsilon_x(f) = f(x)$ est nul dès que x est extérieur à un compact convenable de E . On peut donc prolonger par continuité l'application $x \longrightarrow \varepsilon_x$ à l'espace compact

$\hat{E}$ obtenu en adjoignant à E un point à l'infini ; et on voit alors que $\hat{E}$ est homéomorphe à l'ensemble (compact pour la topologie vague) formé des intégrales 0 et ε_x $(x \in E)$.

Il est clair que, si une intégrale est limite vague d'intégrales réelles (resp. positives), elle est elle-même réelle (resp. positive).

<u>Proposition</u> 13 - <u>L'ensemble</u> $\mathcal{M}_+(E)$ <u>des intégrales de Radon positives, muni de la topologie vague, est complet</u>.

Soit en effet $\mathcal{F}$ un filtre sur $\mathcal{M}_+(E)$, vérifiant le critère de Cauchy. Pour toute $f \in \mathcal{L}(E)$ et tout nombre $\varepsilon > 0$, il existera donc un ensemble $\Phi \in \mathcal{F}$ tel que l'on ait

$$|\mu(f) - \nu(f)| < \varepsilon \qquad \text{pour} \quad \mu \in \Phi, \quad \nu \in \Phi;$$

par conséquent, le nombre

$$(1) \qquad \mu_0(f) = \lim_{\mathcal{F}} \mu(f)$$

existe pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$. μ_0 est évidemment une forme linéaire sur $\mathcal{L}(E)$, positive sur $\mathcal{L}_+(E)$; on en conclut que μ_0 est une <u>intégrale</u> positive ; et l'équation (1) donne

$$\mu_0 = \lim_{\mathcal{F}} \mu ,$$

ce qui prouve la Proposition

<u>Proposition</u> 14 - <u>Pour qu'un ensemble</u> Φ <u>d'intégrales de Radon positives soit relativement compact pour la topologie vague, il faut et il suffit que l'on ait</u>

$$\sup_{\mu \in \Phi} \mu(f) < +\infty \qquad \underline{\text{pour toute}} \quad f \in \mathcal{L}_+(E) .$$

Montrons d'abord que la condition est nécessaire. Si $\Phi \subset \mathcal{M}_+(E)$ est relativement compact, son adhérence dans $\mathcal{M}_+(E)$ sera compacte ; donc la fonction $\mu(f)$, sera <u>bornée</u> sur Φ, pour toute $f \in \mathcal{L}(E)$.

Réciproquement, supposons la condition remplie, et soit $\mathcal{F}$ un ultra-filtre sur Φ. Pour toute $f \in \mathcal{L}(E)$, on aura d'après l'hypothèse

$$\sup_{\mu \in \Phi} |\mu(f)| \leqslant \sup_{\mu \in \Phi} \mu(|f|) < +\infty \quad ;$$

donc l'ultrafiltre image de $\mathcal{F}$ par l'application $\mu \longrightarrow \mu(f)$ de Φ dans $\mathcal{C}$ sera <u>borné</u>. On peut donc introduire, pour toute $f \in \mathcal{L}(E)$, le nombre

$$\mu_0(f) = \lim_{\mathcal{F}} \mu(f) \quad ;$$

μ_0 est une forme linéaire sur $\mathcal{L}(E)$, positive sur $\mathcal{L}_+(E)$ puisque $\Phi \subset \mathcal{M}_+(E)$; c'est donc une intégrale de Radon, et l'on a

$$\mu_0 = \lim_{\mathcal{F}} \mu$$

ce qui achève la démonstration.

<u>Corollaire de la Prop.</u> 14 - <u>L'ensemble des mesures de Radon positives majorées par une mesure fixe</u> μ_0 <u>est compact pour la topologie vague</u>.

En effet, cet ensemble Φ est relativement compact puisque l'on a

$$\sup_{\mu \in \Phi} \mu(f) = \mu_0(f) < +\infty \qquad \text{pour } f \in \mathcal{L}_+(E) \quad ;$$

comme par ailleurs toute limite vague de mesures appartenant à Φ est majorée par μ_0, donc appartient à Φ elle-même, notre assertion est démontrée.

Un résultat analogue au précédent, et qui généralise la Prop.5 du §1, est le suivant :

<u>Proposition</u> 15 - <u>Les intégrales de Radon bornées, définies sur un espace localement compact</u> E , <u>dont la masse est</u> $\leqslant 1$, <u>forment un ensemble compact pour la topologie vague</u>.

Si on considère l'espace vectoriel normé obtenu en munissant $\mathcal{L}(E)$ de la topologie de la convergence uniforme, la Prop. 15 revient purement et simplement au fait que, dans le dual fort de $\mathcal{L}(E)$, la boule unité est faiblement compacte.

8 - Mesures extrémales.

Considérons l'espace $\mathcal{L}_{R}(E)$ des fonctions réelles de $\mathcal{L}(E)$; muni de la topologie de la convergence, uniforme sur E , c'est un espace vectoriel normé dont le dual réel est l'espace $\mathcal{M}^1_R(E)$ des intégrales de Radon réelles et bornées définies sur E ; sur une partie bornée de $\mathcal{M}^1_R(E)$, la topologie vague apparait donc comme étant la topologie faible du dual de $\mathcal{L}_R(E)$. (Esp. Vect. Top., Chap.). On peut donc appliquer ici les résultats du Livre V , chap. et en particulier le théorème de Krein et Milman : toute partie convexe et vaguement compacte de $\mathcal{M}^1_R(E)$ est l'enveloppe convexe et vaguement fermée de l'ensemble de ses points extrémaux.

Il est clair que ce résultat s'applique en particulier à l'ensemble Ω des mesures μ positives vérifiant

$$\|\mu\| \leqq 1 .$$

Nous allons maintenant déterminer les points extrémaux de Ω ; ceux-ci, comme on va le voir, sont la mesure 0 et les mesures ε_x (masse + 1 placée au point $x \in E$) .

Montrons d'abord que 0 est un point extrémal de Ω . En effet, si 0 appartient au segment $[\mu, \nu]$ de Ω , on aura

$$(1) \qquad 0 = a . \mu + b . \nu$$

où les nombres a, b vérifient

$$(2) \qquad 0 \leqq a , \ b \leqq 1 , \qquad a + b = 1 .$$

De (1) et (2) résulte (Prop. 10)

$$0 = a . \|\mu\| + b . \|\nu\| ,$$

et donc

$$a . \|\mu\| = b . \|\nu\| = 0 ;$$

si $a \neq 0$, on a donc $\mu = 0$; si $a = 0$, on a d'après (1) et (2) $\nu = 0$: dans tous les cas, 0 est une extrémité du segment $[\mu, \nu]$, ce qui prouve notre assertion.

<u>Proposition</u> 16 - <u>Pour qu'une intégrale</u> $\mu \neq 0$ <u>soit un point extrémal de</u> Ω, <u>il faut et il suffit qu'elle possède les propriétés suivantes</u> :

a) $\|\mu\| = 1$;

b) <u>toute mesure positive majorée par</u> μ <u>est proportionnelle à</u> μ.

1 - <u>Nécessité des conditions</u>. Si $\mu \neq 0$ est dans Ω, μ appartient au segment $\left[0, \frac{\mu}{\|\mu\|}\right]$ de Ω ; si μ est extrémale, on a donc

$$\mu = \frac{\mu}{\|\mu\|},$$

ce qui implique a).

Soit maintenant une mesure ν vérifiant

$$0 \leq \nu \leq \mu \quad ;$$

on peut écrire

$$\mu = \nu + \nu'$$

où la mesure ν' est positive et majorée par μ ; il s'ensuit d'abord que ν et ν' sont, comme μ, <u>bornées</u> (Prop. 3). Si l'on suppose ν et ν' non nulles (ce qui est permis, car la condition b) est trivialement vérifiée lorsque ν ou ν' est nulle), et si l'on utilise les identités

$$\mu = \|\nu\| \cdot \frac{\nu}{\|\nu\|} + \|\nu'\| \cdot \frac{\nu'}{\|\nu'\|}$$
$$\|\nu\| + \|\nu'\| = \|\mu\| = 1 ,$$

on voit que μ appartient au segment de Ω dont les extrémités sont

$$\frac{\nu}{\|\nu\|} , \quad \frac{\nu'}{\|\nu'\|} ;$$

μ étant extrémale, deux cas sont possibles :

- ou bien

$$\frac{\nu}{\|\nu\|} = \mu ,$$

auquel cas b) est démontré

- ou bien

$$\frac{\nu'}{\|\nu\|} = \mu ,$$

auquel cas on a

$$\nu = \mu - \nu' = \mu - \|\nu'\| \cdot \mu ,$$

ce qui prouve encore b) .

2 - <u>Suffisance des conditions</u>. Supposons qu'une mesure μ vérifie les conditions a) et b), et soit $[\nu_1 , \nu_2]$ un segment de Ω auquel μ appartient. On aura donc

$$(3) \qquad \mu = a_1 . \nu_1 + a_2 . \nu_2$$

où les nombres a_1, a_2 vérifient

$$(4) \qquad 0 \leqslant a_1 \ , \ a_2 \leqslant 1 \ , \qquad a_1 + a_2 = 1 .$$

D'après (3) et (4), les mesures positives $a_1 . \nu_1$ et $a_2 . \nu_2$ sont majorées par μ ; la condition b) implique donc

$$(5) \qquad a_1 . \nu_1 = b_1 . \mu \ , \qquad a_2 . \nu_2 = b_2 . \mu$$

où b_1 , b_2 sont des nombres vérifiant

$$(6) \qquad 0 \leqslant b_1 \ , \ b_2 \leqslant 1 .$$

Portant (5) dans (6) on voit que l'on a

$$(7) \qquad 1 = b_1 + b_2 \ ;$$

d'autre part, la Prop.10 et la condition a) donnent

$$(8) \qquad a_1 . \|\nu_1\| + a_2 . \|\nu_2\| = \|\mu\| = 1 \ ;$$

comme on a

$$0 \leqslant \|\nu_i\| \leqslant 1 \qquad (1 \leqslant i \leqslant 2)$$

(8) n'est possible que dans deux cas :

ou bien $\|\nu_1\| = 1$; (4) donne alors, en passant aux normes, $a_1 = b_1$ et donc $\nu_1 = \mu$;

ou bien $\|\nu_2\| = 1$, auquel cas on a , de même, $\nu_2 = \mu$.

Dans ces deux cas, μ est une extrémité du segment $[\nu_1, \nu_2]$, ce qui achève la démonstration.

Nous allons maintenant caractériser autrement les "mesures extrémales".

<u>Proposition 17</u> - <u>Soit μ une intégrale de Radon positive non nulle</u> ; <u>pour que le support de μ soit réduit à un seul point, il faut et il suffit que toute intégrale positive majorée par μ soit proportionnelle à μ</u> .

1 - <u>Nécessité de la condition</u>. Si le support de μ est réduit à un seul point x , μ est discrète (Prop.6) et est constituée par une seule masse placée en x ; tout revient donc à montrer que le support d'une intégrale $\nu \geqslant 0$ majorée par μ est lui-même réduit à $\{x\}$ ou à $\emptyset$: mais ceci résulte directement de la Prop. 7.

2 - <u>Suffisance de la condition</u>. Supposons que toute intégrale ν vérifiant $0 \leqslant \nu \leqslant \mu$ soit proportionnelle à μ , et prenons une fonction continue $\varphi(x)$ vérifiant

(9) $\qquad 0 \leqslant \varphi(x) \leqslant 1 \qquad$ pour $\quad x \in E$.

On aura alors

$$0 \leqslant \mu^{\varphi} \leqslant \mu$$

car, pour $f \in \mathcal{L}_+$, on aura $0 \leqslant f\varphi \leqslant f$ et donc

$$0 \leqslant \mu^{\varphi}(f) \leqslant \mu(f) .$$

Par conséquent, il existe une constante a $(0 \leqslant a \leqslant 1)$ telle que

$$\mu^{\varphi} = a\,\mu$$

ce qui signifie que la mesure μ^{ψ} où

$$\psi(x) = \varphi(x) - a$$

est nulle. D'après le Coroll. 3 du Th. 2, on a donc $\psi(x)=0$ sur le support $N(\mu)$ de μ , ou encore

$$\varphi(x) = a = C^{te} \qquad \text{sur } N(\mu) ;$$

la fonction continue φ étant assujettie à la seule condition (9), cela exige que $N(\mu)$ soit réduit à un seul point.

C.Q.F.D.

Une conséquence évidente des Prop. 16 et 17 est la suivante :

Proposition 18 - L'ensemble convexe Ω , formé des intégrales positives de masse totale au plus égale à un , admet pour points extrémaux les intégrales 0 et ε_x $(x \in E)$.

Si on applique à Ω le théorème de Krein et Milman, on parvient au résultat suivant :

Théorème 3 - Toute intégrale de Radon μ , positive et bornée, est limite vague d'intégrales discrètes formées d'un nombre fini de masses positives de somme au plus égale à $\|\mu\|$.

En effet, l'enveloppe convexe de l'ensemble formé par 0 et les ε_x $(x \in E)$ est formé des mesures de la forme

$$(14) \qquad a_1 . \varepsilon_{x_1} + \ldots + a_n . \varepsilon_{x_n}$$

où l'on a

$$0 \leqslant a_i \leqslant 1 \qquad (1 \leqslant i \leqslant n) , \quad \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} a_i \leqslant 1 \ ;$$

la mesure $\dfrac{\mu}{\|\mu\|} \in \Omega$ est donc limite vague de mesures (14) ; en multipliant celles-ci par $\|\mu\|$, on obtient le résultat cherché.

Corollaire du Théorème 3 - Toute intégrale de Radon positive est limite vague d'intégrales discrètes formées de masses positives en nombre fini.

Tout revient, d'après le Th. 3, à montrer qu'une intégrale $\mu \geqslant 0$ est limite vague d'intégrales positives et bornées. Pour cela, soient $f_1, \ldots, f_n$ des fonctions de $\mathcal{L}(E)$ en nombre fini ; il existe une $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $0 \leqslant f \leqslant 1$, et égale à 1 en tout point où les f_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ ne sont pas toutes nulles ; on a alors

$$f . f_i = f_i \qquad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

et donc

$$\mu(f_i) = \mu(f . f_i) \qquad (1 \leqslant i \leqslant n) \ ;$$

si l'on introduit la mesure μ^f définie par

$$\mu^f(g) = \mu(f.g) ,$$

on voit que l'on a

$$\mu(f_i) - \mu^f(f_i) = 0 \qquad (1 \leqslant i \leqslant n) ;$$

mais μ^f est <u>bornée</u> (N^o 2, Ex. c), en sorte que l'équation précédente prouve notre assertion.

<u>Remarque</u> 3 - On peut démontrer le résultat précédent sans employer le théorème de Krein et Milman. Soit en effet σ l'ensemble constitué par 0 et les ε_x , et soit $\mathbb{P}$ le cône convexe vaguement fermé engendré par σ dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}(E)$. $\mathcal{L}$ et $\mathcal{M}$ étant mis en dualité faible par la forme bilinéaire $\int f \, d\mu$, il résulte du théorème de Hahn-Banach que $\mathbb{P}$ est l'ensemble des $\mu \in \mathcal{M}$ qui vérifient la propriété suivante : pour toute $f \in \mathcal{L}$ telle que

$$\int f.d\lambda \geqslant 0 \qquad \text{pour} \qquad \lambda \in \sigma$$

on a $\int f \, d\mu \geqslant 0$. Or la condition précédente s'écrit $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in E$, donc équivaut à $f \in \mathcal{L}_+$; par suite, les $\mu \in \mathbb{P}$ sont caractérisées par $\int f \, d\mu \geqslant 0$ pour $f \in \mathcal{L}_+$; autrement dit, $\mathbb{P} = \mathcal{M}_+$, ce qui est le Corollaire du Th. 3 .

Une démonstration analogue s'applique au Th.3 lui-même si l'on fait intervenir, au lieu de $\mathcal{L}$, l'espace $\mathcal{L}_\infty$ (cf. N^o 9) .

Nous avons vu (Prop. 17) que les points extrémaux 0 et ε_x $(x \in E)$ de l'ensemble convexe Ω sont des mesures dont le support est vide ou réduit à un point. Nous allons en donner maintenant une autre propriété remarquable et caractéristique.

<u>Proposition</u> 18 bis - <u>Pour qu'une forme linéaire</u> μ <u>définie sur</u> $\mathcal{L}$ <u>définisse une mesure extrémale, il faut et il suffit que</u> $f \longrightarrow \mu(f)$ <u>soit une représentation de l'algèbre</u> $\mathcal{L}$ <u>dans le corps complexe</u>.

Il est évident que les applications

$$f \longrightarrow 0 \quad , \quad f \longrightarrow f(x)$$

sont bien des représentations de $\mathcal{L}$ dans $\mathcal{C}$. Tout revient à prouver que, réciproquement, une telle représentation $f \longrightarrow \mu(f)$ est de la forme précédente.

Montrons tout d'abord que la forme linéaire μ est alors une <u>intégrale positive</u>, c'est-à-dire que l'on a

$$\mu(f) \geqslant 0 \qquad \text{pour} \quad f \in \mathcal{L}_+ .$$

On peut pour cela se borner au cas où μ n'est pas nulle ; or, supposons qu'il existe une fonction $f \in \mathcal{L}_+$ telle que $\mu(f) = a$ ne soit pas dans $\mathcal{R}_+$; la fonction continue $f-a$ ne prenant pas la valeur 0, la fonction

$$g = \frac{f}{f-a}$$

sera dans $\mathcal{L}$, et on aura

$$f = fg - ag$$

d'où, puisque μ est une représentation,

$$\mu(f) = \mu(f)\,\mu(g) - a\,\mu(g) ;$$

ce qui s'écrit

$$a = a\,\mu(g) - a\,\mu(g) = 0$$

contrairement à $a \notin \mathcal{R}_+$. $\mu(f)$ est donc bien une intégrale positive, vérifiant

$$\int fg.d\ = \int f\,d\mu \,.\int g\,d\mu \qquad \text{pour} \quad f,g \in \mathcal{L} .$$

Je dis maintenant que le support de μ est réduit à un point. En effet, si ce support contenait deux points distincts x_1, x_2, ceux-ci possèderaient des voisinages disjoints $\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_2$; on pourrait trouver des fonctions f_1, f_2 de $\mathcal{L}$, nulles en dehors de $\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_2$ respectivement, telles que $\mu(f_1) \neq 0$, $\mu(f_2) \neq 0$; ce qui est absurde puisque, $\mathcal{V}_1$ et $\mathcal{V}_2$ étant disjoints, on a $f_1 f_2 = 0$ et donc $\mu(f_1)\,\mu(f_2) = \mu(f_1 f_2) = 0$.

D'après la Prop. 17, on a donc

$$\mu(f) = \alpha f(x)$$

où x est un point fixe de E et α une constante ; α est égal à <u>un</u> puisque, μ étant une représentation, on a

$$\alpha f(x) g(x) = \alpha f(x) . \alpha g(x) \qquad \text{pour} \quad f, g \in \mathcal{L} .$$

En conclusion, $\mu = \varepsilon_x$ et ceci démontre la Proposition.

9 - <u>L'algèbre normée complète</u> $\mathcal{L}_\infty(E)$.

Une intégrale <u>bornée</u> μ étant une forme linéaire continue sur l'espace vectoriel normé $\mathcal{L}(E)$, on peut la prolonger par continuité au complété de $\mathcal{L}(E)$. Or, celui-ci peut se réaliser concrètement d'une façon très simple ; soit en effet (f_n) une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}(E)$; les fonctions $f_n(x)$ convergeront alors, uniformément sur E, vers une fonction $f(x)$ qui sera évidemment <u>continue</u> et telle que, pour tout nombre $\varepsilon > 0$, l'ensemble $|f(x)| \geqslant \varepsilon$ soit <u>compact</u>. Réciproquement, si une fonction f définie sur E possède ces deux propriétés, elle est limite uniforme de fonction de $\mathcal{L}(E)$; car pour tout $n \in Z_+$ l'ensemble K_n défini par $|f(x)| \geqslant \frac{1}{n}$ sera compact ; il existera donc une fonction $f_n \in \mathcal{L}$ qui coïncidera avec f sur K_n et vérifiera

$$|f_n(x)| < \frac{1}{n} \qquad \text{pour} \qquad x \notin K_n \ ;$$

on aura alors $\|f - f_n\| \leqslant \frac{2}{n}$, ce qui prouve notre assertion.

On est donc conduit à introduire la notion suivante :

<u>Définition</u> 10 - <u>Etant donné un espace localement compact</u> E, <u>on désigne par</u> $\mathcal{L}_\infty(E)$ <u>le sous-espace de</u> $\mathcal{C}(E)$ <u>formé des fonctions</u> f <u>telles que, pour tout nombre</u> $\varepsilon > 0$, <u>l'inégalité</u> $|f(x)| \geqslant \varepsilon$ <u>définisse une partie compacte de</u> E.

Si on désigne par $\mathcal{F}$ le filtre des complémentaires des parties relativement compactes de E, une fonction continue f appartient à $\mathcal{L}_\infty(E)$ si, et seulement si l'on a

$$\lim_{\mathcal{F}} f(x) = 0 \quad ;$$

autrement dit, $\mathcal{L}_\infty(E)$ <u>est l'ensemble des fonctions continues qui tendent vers zéro quand x s'éloigne à l'infini dans</u> E . Ceci met en évidence le fait que $\mathcal{L}_\infty(E)$ est <u>complet</u> pour la topologie de la convergence uniforme sur E ; comme $\mathcal{L}(E)$ est, d'après ce qu'on a vu, un sous-espace vectoriel <u>partout dense</u> de $\mathcal{L}_\infty(E)$, on peut identifier le complété de $\mathcal{L}(E)$ à l'espace de Banach $\mathcal{L}_\infty(E)$. En outre, comme on a

$$\|fg\| \leqslant \|f\| \cdot \|g\|$$

quelles que soient les fonctions continues et bornées f,g, on peut considérer $\mathcal{L}_\infty(E)$ non seulement comme un espace de Banach, mais comme une <u>algèbre normée complète sur le corps complexe</u>. On notera que cette algèbre n'admet d'élément unité que si E est <u>compact</u> ; on a alors $\mathcal{L}_\infty(E) = \mathcal{L}(E) = \mathcal{C}(E)$. Il est clair par ailleurs que l'application $f \to \overline{f}$ définit un antiautomorphisme involutif dans $\mathcal{L}_\infty(E)$ comme dans $\mathcal{L}(E)$, vis-à-vis duquel la norme se comporte suivant les équations que voici :

$$\|\overline{f}\| = \|f\| \quad ; \quad \|f\overline{f}\| = \|f\| \cdot \|\overline{f}\| = \|f\|^2$$

On verra dans un Livre ultérieur de ce Traité que ces propriétés "internes" <u>caractérisent</u> les algèbres du type $\mathcal{L}_\infty(E)$; en d'autres termes, toute algèbre normée complète <u>commutative</u>, dans laquelle il existe une involution $x \to \overline{x}$ vérifiant

$$\|\overline{x}\| = \|x\| \quad , \quad \|x\overline{x}\| = \|x\|^2 \quad ,$$

est isomorphe à une algèbre $\mathcal{L}_\infty(E)$. La Remarque 4 ci-dessous donnera au lecteur une idée de la méthode par laquelle on démontrera cette propriété.

Si μ est une intégrale de Radon bornée, la forme linéaire $\mu(f)$ peut, comme on l'a vu, être prolongée par continuité à l'espace $\mathcal{L}_\infty(E)$, et ceci de façon unique. Nous désignerons encore par $\mu(f)$, ou par

$$\int f \, d\mu \quad , \quad \int f(x) \, d\mu(x),$$

la forme linéaire continue ainsi définie sur $\mathscr{L}_\infty(E)$, et on dira que $\int f \, d\mu$ est l'<u>intégrale de la fonction</u> $f \in \mathscr{L}_\infty(E)$ <u>par rapport à</u> μ. On verra au Chap.III que ce procédé de prolongement rentre dans un cadre plus général.

$\mathscr{L}$ étant partout dense dans $\mathscr{L}_\infty$, il résulte du N°6 que l'espace vectoriel normé $\mathscr{M}^1(E)$ formé par les intégrales de Radon bornées définies sur E est isomorphe au <u>dual fort</u> de $\mathscr{L}_\infty$ et que, <u>sur toute boule</u> de $\mathscr{M}^1(E)$, la topologie vague est identique à la topologie faible déterminée par $\mathscr{L}_\infty(E)$. Donc :

<u>Proposition</u> 18 ter - <u>Pour qu'un filtre borné</u> $\mathscr{F}$ <u>sur l'espace</u> $\mathscr{M}^1(E)$ <u>converge vaguement vers une mesure</u> μ_0 <u>bornée, il faut et il suffit qu'on ait</u>

$$\int f \, d\mu_0 = \lim_{\mathscr{F}} \int f \, d\mu$$

<u>pour toute fonction</u> $f \in \mathscr{L}_\infty(E)$.

La Prop. 18 ter n'est pas exacte quand $\mathscr{F}$ n'est pas supposé borné. Par exemple, prenons $E = \mathbb{R}$, et soit μ_n la masse $+n$ placée au point n de $\mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{Z}_+)$; pour toute $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R})$, on aura $\mu_n(f) = 0$ pour n assez grand - donc μ_n converge vaguement vers zéro. Mais si l'on pose

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } |x| < 1 \\ \dfrac{1}{|x|} & \text{pour } |x| \geqslant 1, \end{cases}$$

on aura $f \in \mathscr{L}_\infty$ et $\mu_n(f) = n.f(n) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{Z}_+$, en sorte que l'<u>on n'aura pas</u> $\lim\limits_{n\,\infty} \mu_n = 0$ dans le dual faible de $\mathscr{L}_\infty(E)$.

Puisque toute forme linéaire continue sur $\mathscr{L}_\infty$ est une intégrale de Radon ~~xxmé~~ bornée, on peut énoncer le résultat suivant :

Théorème 4 - Soit $\mathcal{D}$ un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}_\infty(E)$; pour que $\mathcal{D}$ soit partout dense dans $\mathcal{L}_\infty(E)$, il faut et il suffit que 0 soit la seule intégrale de Radon bornée μ vérifiant

$$\int f \, d\mu = 0 \qquad \text{pour toute} \quad f \in \mathcal{D} \; .$$

Enfin, la Prop. 18 bis, qui caractérise les représentations de l'algèbre $\mathcal{L}$ dans le corps complexe, est encore valable pour $\mathcal{L}_\infty$; il suffit pour le voir d'observer que :

1) toute mesure ε_x détermine une telle représentation, car on a $\int f \, d\varepsilon_x = f(x)$ pour $f \in \mathcal{L}_\infty$;

2) une représentation μ de $\mathcal{L}_\infty$ dans $\mathcal{C}$ vérifie

(1) $\quad \mu(f) \geqslant 0$ pour toute $f \geqslant 0$ de $\mathcal{L}_\infty$,

et conduit donc à une intégrale de Radon bornée ; la démonstration de (1) est identique à celle de la propriété correspondante dans $\mathcal{L}$.

Remarque 4 - La propriété précédente montre comment la connaissance de l'algèbre normée "abstraite" $\mathcal{L}_\infty$ permet de réaliser concrètement l'espace E correspondant. En effet, d'après ce qu'on vient de voir, toute représentation de $\mathcal{L}_\infty$ dans $\mathcal{C}$ est continue, et définit donc un élément du dual fort de $\mathcal{L}_\infty$. Désignons alors par $\hat{E}$ l'ensemble des éléments ainsi obtenus dans ce dual, par $\hat{x}$, $\hat{y}$ ... les points de $\hat{E}$, par $\langle f, \hat{x} \rangle$ la valeur au point $f \in \mathcal{L}_\infty$ de la forme linéaire $\hat{x}$; on aura

$$\langle fg , \hat{x} \rangle = \langle f, \hat{x} \rangle . \langle g , \hat{x} \rangle \quad \text{pour} \quad f, g \in \mathcal{L}_\infty$$

et réciproquement, cette propriété caractérise les points de E ; il s'ensuit que $\hat{E}$ est fermé pour la topologie faible du dual de $\mathcal{L}_\infty$; or, $\hat{E}$ est contenu dans la boule de rayon 1 ; donc $\hat{E}$ est faiblement compact. Ceci étant, associons à tout $x \in E$ le point $\hat{x} \in \hat{E}$ tel que

$$\langle f , \hat{x} \rangle = f(x) \; ;$$

on obtient une application biunivoque de E sur l'ensemble E_0 obtenu en privant $\hat{E}$ du point 0 ; comme

$$\lim x = y \qquad \text{dans } E$$

équivaut à

$$\lim f(x) = f(y) \qquad \text{pour toute } f \in \mathcal{L}_\infty ,$$

cette application est bicontinue lorsque l'on munit $\hat{E}$ de la topologie faible. Donc, E est homéomorphe à E_0 , c'est-à-dire, à l'ensemble, muni de la topologie faible, des homomorphismes de $\mathcal{L}_\infty$ sur $\mathcal{C}$. Ceci prouve que la structure algèbrique de $\mathcal{L}_\infty$ (E) détermine la structure topologique de E ; ou encore : pour que deux espaces localement compacts E et F soient homéomorphes, il faut et il suffit que les algèbres $\mathcal{L}_\infty$(E) et $\mathcal{L}_\infty$(F) soient isomorphes (au sens purement algèbrique de ce terme).

On démontrera aisément que l'espace compact $\hat{E}$ est homéomorphe à l'espace compact obtenu en adjoignant à E un point à l'infini (Top. Gén., Chap.I, Th. d'Alexandroff).

9 - Image d'une intégrale par une application.

Soient E et F deux espaces localement compacts, μ une intégrale de Radon définie sur E , et φ une application continue de E dans F . Pour toute fonction $f \in \mathcal{L}$(E) , $f\circ\varphi$ est une fonction numérique définie et continue sur E ; si $K \subset F$ est le support de f , celui de $f\circ\varphi$ sera contenu dans $\overset{-1}{\varphi}(K)$; en effet, K étant fermé et φ continue, $\overset{-1}{\varphi}(K)$ est un ensemble fermé , en dehors duquel $f\circ\varphi$ est évidemment nulle.

Si l'application φ est propre - c'est-à-dire (Top.gén., chap. ,) si $\overset{-1}{\varphi}(K)$ est compact pour tout compact $K \subset F$ - on aura donc $f\circ\varphi \in \mathcal{L}$(E) pour toute $f \in \mathcal{L}$(F) ; on pourra alors former le nombre

$$\nu(f) = \mu\,(f\circ\varphi) ;$$

on obtient ainsi une forme linéaire sur $\mathcal{L}(F)$, puisque $f \longrightarrow f\circ\varphi$ est une application linéaire de $\mathcal{L}(F)$ dans $\mathcal{L}(E)$. Si μ est __positive__, il en sera de même de ν - puisque $f \geqslant 0$ entraîne $f\circ\varphi \geqslant 0$ - en sorte que ν sera alors une __intégrale de Radon__ (positive) sur F. Dans le cas général, il suffit de décomposer μ en parties positives pour constater que ce résultat est encore valable. On peut donc poser la définition suivante :

__Définition__ 11 - __Soient__ E __et__ F __deux espaces localement compact__, μ __une intégrale de Radon définie sur__ E , φ __une application continue et propre de__ E __dans__ F . __On appelle image de__ μ __par l'application__ φ __l'intégrale de Radon__ ν __définie sur__ F __par la formule__

$$\nu(f) = \mu(f\circ\varphi) \qquad \underline{\text{pour}} \quad f \in \mathcal{L}(F) .$$

Il est clair que $\mu \longrightarrow \nu$ est une application __linéaire__ de $\mathcal{M}(E)$ dans $\mathcal{M}(F)$; que ν est positive lorsque μ l'est ; que ν est bornée lorsque μ l'est, et qu'on à alors

$$\|\nu\| \leqslant \|\mu\| .$$

Si μ est constituée par une masse + 1 placée en un point $x \in E$, ν est constituée par une masse + 1 placée au point $\varphi(x) \in F$. Enfin, l'application $\mu \longrightarrow \nu$ est __continue__ pour les topologies vagues sur $\mathcal{M}(E)$ et $\mathcal{M}(F)$.

Un cas particulier intéressant des notions précédentes est celui où l'on a un espace localement compact E , une intégrale de Radon μ définie sur E , et un __automorphisme__ σ de E (c'est-à-dire une application biunivoque et bicontinue de E sur lui-même). L'image de μ par l'application σ - qui est évidemment __propre__ - est une intégrale de Radon μ_σ définie sur E ; on a la formule

$$\int f(x)\, d\mu_\sigma(x) = \int f\left[\sigma(x)\right] . d\mu(x) \quad ;$$

en particulier, l'image de la mesure ε_x $(x \in E)$ par σ est la ~~xxxx~~ mesure $\varepsilon_{\sigma(x)}$. On dit que μ est invariante, ou stable par σ si l'on a

$$\mu_\sigma = \mu \, .$$

Il est clair que l'application $\mu \to \mu_\sigma$ est un endomorphisme A_σ de l'espace vectoriel $\mathcal{M}(E)$, et que l'application $\sigma \to A_\sigma$ est une représentation linéaire dans $\mathcal{M}(E)$ du groupe des automorphismes de E .

Proposition 19- L'intégrale de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ est invariante par les translations du groupe additif $\mathbb{R}$.

C'est une conséquence directe des résultats du Livre Elémentaire - plus précisément, de la formule

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x + a)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$$

valable pour toute $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$.

On verra (Chap.VI) que, sur tout groupe localement compact G , il existe une intégrale de Radon invariante par les translations à gauche de G , de même qu'une intégrale invariante à droite, et que ces deux intégrales sont parfaitement déterminées à des constantes multiplicatives près.

10 - L'inégalité de Minkowski.

Soit μ une intégrale de Radon positive sur un espace localement compact E , et choisissons un nombre réel p vérifiant $1 \leq p < +\infty$. Pour toute $f \in \mathcal{L}(E)$, la fonction

$$|f|^p$$

est dans $\mathcal{L}_+(E)$; on peut donc considérer le nombre

$$N_p(f) = \{\mu(|f|^p)\}^{1/p}$$

Théorème 5 - Pour $1 \leq p < +\infty$, l'expression

$$N_p(f) = \left\{\int |f(x)|^p \cdot d\mu(x)\right\}^{1/p}$$

est une semi-norme sur l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E)$.

Tout revient évidemment à prouver que l'on a

(1) $\quad \mathcal{N}_p(f+g) \leqslant \mathcal{N}_p(f) + \mathcal{N}_p(g)$

pour $f, g \in \mathcal{L}(E)$, ou encore

(2) $\quad \mathcal{N}_p\left(\frac{f+g}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}\left[\mathcal{N}_p(f) + \mathcal{N}_p(g)\right]$

Comme on a d'autre part évidemment

$$\mathcal{N}_p(f+g) \leqslant \mathcal{N}_p(|f|+|g|) ,$$

tout revient à prouver (2) dans le cas où f et g sont <u>positives</u>.

Or, posons

(3) $\quad \varphi_\mu(\alpha) = \mu\left[(\alpha f + (1-\alpha)g)^p\right]^{1/p} \quad$ pour $\alpha \in [0,1]$;

(2) s'écrit

$$\varphi_\mu\left(\tfrac{1}{2}\right) \leqslant \tfrac{1}{2}\left[\varphi_\mu(0) + \varphi_\mu(1)\right] ;$$

donc, tout revient à prouver que <u>la fonction</u> $\varphi_\mu(\alpha)$ <u>est convexe dans</u> $[0,1]$.

Or, μ, étant positive, est limite vague de mesures discrètes λ formées d'un nombre fini de masses ponctuelles (Coroll. du Th.3) ; $\varphi_\mu(\alpha)$ est donc limite simple des fonctions $\varphi_\lambda(\alpha)$ correspondantes ; toute limite de fonctions convexes étant convexe, tout revient donc à prouver la proposition dans le cas où μ est de la forme

$$\mu = \sum_{1\leqslant i\leqslant n} a_i\, \varepsilon_{x_i} \qquad \text{avec} \quad a_i \geqslant 0 .$$

Mais on a alors

$$\varphi_\mu(\alpha) = \left\{\sum_{1\leqslant i\leqslant n} a_i\left[\alpha f(x_i) + (1-\alpha)\, g(x_i)\right]^p\right\}^{\frac{1}{p}} ,$$

(4) $\quad \varphi(\alpha) = \left\{\sum_{1\leqslant i\leqslant n} (\lambda_i \alpha + \mu_i(1-\alpha))^p\right\}^{\frac{1}{p}}$,

où les nombres

$$\lambda_i = f(x_i).\, a_i^{\frac{1}{p}} \quad , \quad \mu_i = g(x_i).\, a_i^{\frac{1}{p}}$$

sont <u>positifs</u>. En définitive on est ramené à prouver que <u>la fonction</u> (4) <u>est convexe pour</u> $\lambda_i \geqslant 0$, $\mu_i \geqslant 0$, $p \geqslant 1$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Pour cela, il suffit de montrer que la nous distinguerons deux cas.

1) Supposons $\varphi_\mu(\alpha)\neq 0$ pour $0\leqslant\alpha\leqslant 1$; alors φ_μ possède des dérivées d'ordre quelconque, et on est ramené à prouver que $\varphi''_\mu(\alpha)$ est $\geqslant 0$ dans $[0,1]$; or on trouve

$$\varphi''(\alpha) = (p-1).\left\{\sum_i\left[a_i\lambda + b_i(1-\lambda)\right]^p\right\}^{\frac{1}{p}-2}$$
$$\times\left\{\sum_i\left[a_i\lambda+b_i(1-\lambda)\right]^p . \sum_j (a_j-b_j)^2\left[a_j\lambda+b_j(1-\lambda)\right]^{p-2}\right.$$
$$\left.-\left[\sum_i(a_i-b_i).\left[a_i\lambda+b_i(1-\lambda)\right]^{p-1}\right]^2\right\} ;$$

en introduisant les quantités réelles

$$x_i = \left[a_i\lambda + b_i(1-\lambda)\right]^{\frac{p}{2}} \quad ; \quad y_i = (a_i-b_i).\left[a_i\lambda + b_i(1-\lambda)\right]^{\frac{p}{2}-1} ,$$

et en observant que $p-1\geqslant 0$, on est donc ramené à prouver l'inégalité

$$(5) \qquad \left(\sum_i x_iy_i\right)^2 \leqslant \sum_i x_i^2 . \sum_i y_i^2 ,$$

laquelle résulte du fait que le trinôme du second degré en X

$$\sum_i (x_i + Xy_i)^2 = \sum x_i^2 + 2X\sum x_iy_i + X^2.\sum y_i^2$$

est <u>positif</u> quand on donne à l'indéterminée X une valeur réelle arbitraire.

2) Si l'on a $\varphi_\mu(\alpha_0)=0$ pour un $\alpha_0\in[0,1]$, on aura nécessairement, les termes de (4) étant tous $\geqslant 0$:

$$\lambda_i\alpha_0 + \mu_i(1-\alpha_0) = 0 \qquad (1\leqslant i\leqslant n) ;$$

d'où, pour $\alpha\in[0,1]$ quelconque :

$$\lambda_i\alpha + \mu_i(1-\alpha) = (\lambda_i-\mu_i)(\alpha-\alpha_0) \qquad (1\leqslant i\leqslant n) ;$$

si φ_μ prend la valeur 0 en <u>un</u> point au moins, on a donc

$$\varphi_\mu(\alpha) = K.(\alpha-\alpha_0) \qquad (0\leqslant\alpha\leqslant 1)$$

où K est une constante : dans ce cas, φ_μ est encore convexe, et le Théorème 4 est donc complètement démontré.

<u>Remarque</u> 5 - L'inégalité

$$\mathcal{N}_p(f+g)\leqslant\mathcal{N}_p(f) + \mathcal{N}_p(g)$$

est connu sous le nom d'<u>inégalité de Minkowski</u>. Si on l'applique au cas où E est formé des points $1,2,\ldots,n$ et où μ est obtenue en plaçant une masse $+1$ en chaque point de E, elle prend la forme

$$\left\{ \sum_{1\leq i\leq n} (x_i + y_i)^p \right\}^{\frac{1}{p}} \leq \left\{ \sum_{1\leq i\leq p} x_i{}^p \right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{ \sum_{1\leq i\leq p} y_i{}^p \right\}^{\frac{1}{p}} ,$$

où les x_i, y_i désignent des nombres positifs arbitraires.

L'inégalité (5) est l'inégalité de <u>Cauchy-Schwartz</u>, qu'on généralisera au Chap.III (Inégalités de Hölder).

On trouvera d'autres inégalités plaisantes et délectables au Chap.V, où l'on verra comment celles-ci peuvent se tirer d'un seul et unique théorème de "convexité".

L'inégalité de Minkowski montre que la donnée d'une intégrale positive μ sur E permet de définir, de la façon suivante, une famille d'<u>espaces vectoriels normés.</u>

Pour un nombre p ($1 \leq p < +\infty$) donné, l'équation

$$\mathcal{N}_p(f) = 0$$

définit un <u>sous-espace vectoriel</u> de $\mathcal{L}$; si on note L_p l'espace quotient, et $f \to \tilde{f}$ l'application linéaire canonique de $\mathcal{L}$ sur L_p, la formule $\| \tilde{f} \|_p = \mathcal{N}_p(f) = \left\{ \int |f(x)|^p \, d\mu(x) \right\}^{1/p}$ définit une <u>norme</u> sur L_p.

En général, les espaces vectoriels normés L_p <u>ne sont pas complets</u> ; le but du Chap.III sera principalement de montrer comment l'on peut réaliser concrètement, au moyen de fonctions ou de "classes" de fonctions, les éléments des <u>complétés</u> des espaces L_p.

<u>Remarque</u> 6 - On peut montrer que, au point de vue de leur structure algèbrique, les espaces L_p définis ci-dessus sont tous isomorphes entre eux. Tout revient à prouver évidemment que le sous-espace de $\mathcal{L}$ défini par $\mathcal{N}_p(f) = 0$ est <u>indépendant de</u> p (cf. Exerc.).

CHAPITRE II - § 3 - PRODUIT D'INTÉGRALES

1 - Produit de deux intégrales.

Soient F et G deux espaces localement compacts, et λ et μ deux intégrales de Radon définies respectivement sur F et G ; nous allons voir comment l'on peut en déduire une intégrale ν portée par l'espace produit

$$H = F \times G$$

Proposition 1 - Pour toute fonction $h \in \mathcal{L}(H)$, la formule

$$(1) \qquad g(y) = \int h(x,y)\, d\lambda(x)$$

définit une fonction appartenant à $\mathcal{L}(G)$.

Pour chaque $y \in G$, considérons en effet la fonction h_y définie (et continue) sur F par

$$h_y(x) = h(x, y) \quad ;$$

h étant, dans H, à support compact, il en est de même de h_y dans F ; par suite l'expression

$$(2) \qquad g(y) = \lambda(h_y) \; .$$

a un sens - et (2) n'est autre, aux notations près, que la formule (1).

Si h est nulle - ce qu'on peut supposer (Top. gén., chap.I, § , prop.)- en dehors d'un compact $A \times B$, où $A \subset F$ et $B \subset G$ sont compacts, il est clair qu'on aura

$$h_y = 0 \qquad \text{pour} \qquad y \notin B \quad ;$$

par suite, la fonction g est nulle en dehors de B. Tout revient donc à prouver qu'elle est continue. Comme h_y appartient, quel que soit y, au sous-espace $\mathcal{L}(F\,;A)$ de $\mathcal{L}(F)$, et que λ est continue dans ce sous-espace, on est ramené à montrer que l'application $y \to h_y$ de G dans $\mathcal{L}(F\,;A)$ est continue pour la topologie de la convergence uniforme sur A ; or c'est une conséquence directe du fait que $h(x,y)$ est uniformément continue sur tout compact : d'où la Proposition 1 .

Ceci étant, on peut former le nombre μ (g), que nous écrirons

(3) $\quad \nu(h) = \int d\mu(y) \int h(x,y)\, d\lambda(x)$;

considéré comme fonction de h , c'est visiblement une forme linéaire sur $\mathcal{L}(H)$; celle-ci est en outre continue sur tout sous-espace $\mathcal{L}(H\,;\,K)$ où $K \subset H$ est compact ; en effet, soient A et B deux compacts, contenus dans F et G , tels que

$$K \subset A \times B \quad ;$$

il existe (§ 2, N° 2) des constantes M_1, M_2 telles que l'on ait

$$|\lambda(f)| \leqslant M_1 \cdot \|f\| \qquad \text{pour } f \in \mathcal{L}(F\,;\,A)$$

$$|\mu(g)| \leqslant M_2 \cdot \|g\| \qquad \text{pour } g \in \mathcal{L}(G\,;\,B)\,.$$

Ceci étant, si $h \in \mathcal{L}(H\,;\,K)$ on a, comme on l'a vu, $h_y \in \mathcal{L}(F\,;\,A)$ et donc

$$|g(y)| = |\lambda(h_y)| \leqslant M_1 \cdot \|h_y\| \leqslant M_1 \cdot \|h\| \quad ;$$

il suit de là que

$$\|g\| \leqslant M_1 \cdot \|h\|$$

et, comme $g \in \mathcal{L}(G\,;\,B)$, que

$$|\nu(h)| = |\mu(g)| \leqslant M_2 \cdot \|g\| \leqslant M_1 \cdot M_2 \cdot \|h\|,$$

ce qui prouve notre assertion.

On conclut de là que la forme (3) est une intégrale de Radon sur H , et on peut poser la définition suivante :

<u>Définition 1</u> - <u>Etant données deux intégrales de Radon λ et μ définies sur des espaces localement compacts F et G , on appelle produit de λ par μ l'intégrale de Radon ν , définie sur l'espace produit $F \times G$, et donnée par la formule</u>

(3) $\quad \nu(h) = \int d\mu(y) \int h(x,y)\, d\lambda(x)$

<u>pour</u> $h \in \mathcal{L}(F \times G)$.

2 - <u>Théorème de Lebesgue - Fubini élémentaire</u>.

Il est clair que, parmi les fonctions appartenant à $\mathcal{L}(\mathbb{F}\times\mathbb{G})$, se trouvent celles qu'on obtient par

(4) $\qquad h(x,y) = f(x).g(y) \qquad$ où $\quad f \in \mathcal{L}(\mathbb{F})\ , \quad g \in \mathcal{L}(\mathbb{G})\ ,$

ainsi que leurs combinaisons linéaires. Nous écrirons symboliquement

$$h = f \otimes g$$

au lieu de (4). Si l'on applique la formule (3) ici, il vient

(5) $$\nu(f \otimes g) = \lambda(f).\mu(g)$$

puisque

$$\int h(x,y)d\,\lambda(x) = g(y)\int f(x)d\,\lambda(x) = \lambda(f).\ g(y)\ .$$

Plus généralement on aura

(6) $$\nu\Big(\sum_{1\leq i\leq n} f_i \otimes g_i\Big) = \sum_{1\leq i\leq n} \lambda(f_i).\ \mu(g_i)\ .$$

On voit - en identifiant comme toujours les espaces $\mathbb{F}\times\mathbb{G}$ et $\mathbb{G}\times\mathbb{F}$ - que, dans la formule (6), λ et μ entrent de façon symétrique ; ce qui s'exprime encore par l'équation

(7) $$\int d\,\lambda(x)\int h(x,y)d\,\mu(y) = \int d\,\mu(y)\int h(x,y)d\,\lambda(x)$$

valable pour toute fonction h de la forme (4), ou plus généralement de la forme

(8) $$h = \sum_{1\leq i\leq n} f_i \otimes g_i \qquad (f_i \in \mathcal{L}(\mathbb{F})\ ;\ g_i \in \mathcal{L}(\mathbb{G})\ ).$$

Nous allons montrer que (7) est valable sans restriction sur h . Pour cela, observons que, d'après la Prop.1, les formules

$$\nu(h) = \int d\,\mu(y)\int h(x,y)\ d\,\lambda\ (x)$$

$$\nu'(h) = \int d\,\lambda(x)\ \int h(x,y)\ d\,\mu\ (y)$$

définissent sur $\mathbb{F}\times\mathbb{G}$ deux intégrales de Radon qui, d'après (7), coïncident sur l'ensemble des fonctions de la forme (8). Dans ces conditions, l'identité de ces deux intégrales sera une conséquence directe du résultat suivant :

<u>Théorème 1 - Toute fonction</u> $h \in \mathcal{L}(F \times G)$ <u>est limite uniforme de fonctions de la forme</u>

(9) $$\sum_{1 \leq i \leq n} f_i(x) g_i(y) \qquad (f_i \in \mathcal{L}(F) \; ; \; g_i \in \mathcal{L}(G))$$

<u>qui restent nulles en dehors d'un sous-ensemble compact fixe de</u> $F \times G$.

Pour démontrer le Théorème 1 , considérons d'abord le cas où les espaces F et G sont <u>compacts</u> : il en est alors de même de

$$H = F \times G \quad .$$

Dans $\mathcal{L}(H) = \mathcal{C}(H)$, les fonctions (9) forment visiblement une <u>sous-algèbre</u> $\mathcal{A}$, qui est stable par l'application $h \longrightarrow \bar{h}$, et qui permet en outre de "séparer" deux points distincts quelconques de . D'après le Théorème de Weierstrass (Top.Gén. chap.X, § , Th.) , $\mathcal{A}$ est partout dense dans $\mathcal{L}(H)$, ce qui prouve le Théorème 1 dans ce cas.

Considérons maintenant le cas général, et soit une fonction $h \in \mathcal{L}(H)$, nulle en dehors de $A \times B$ où $A \subset F$ et $B \subset G$ sont <u>compacts</u>. D'après ce qu'on vient de démontrer on pourra trouver, pour tout nombre $\varepsilon > 0$, des fonctions f_i^o et g_i^o $(1 \leq i \leq n)$, définies et continues sur A et B respectivement, telles que l'on ait

$$\left| h(x,y) - \sum_{1 \leq i \leq n} f_i^o(x) g_i^o(y) \right| < \varepsilon \quad \text{pour} \quad x \in A \ , \ y \in B \ .$$

Mais f_i^o (resp. g_i^o) est, pour $1 \leq i \leq n$, la restriction à A (resp. B) d'une fonction $f_i \in \mathcal{L}(F)$ (resp. $g_i \in \mathcal{L}(G)$), nulle en dehors d'un voisinage compact donné à l'avance de A (resp. B). h est donc limite uniforme sur $A \times B$ de fonctions (9) nulles en dehors d'un compact fixe.

Il reste à montrer comment l'on peut obtenir une approximation uniforme sur $F \times G$.

Or, si l'on a choisi convenablement A et B , on peut supposer ceci : h est nulle en dehors de $A_1 \times B_1$, A étant un <u>voisinage</u> de A_1 , B un voisinage de B_1 . Il existe alors des fonctions $u \in \mathcal{L}(F)$, $v \in \mathcal{L}(G)$ qui vérifient les conditions suivantes : on a $0 \leq u \leq 1$, u prend la valeur 1 sur A_1 , est nulle en dehors de A ; on a $0 \leqslant v \leqslant 1$, v prend la valeur 1 sur B_1 , est nulle en dehors de B . Si une fonction $\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} f_i \otimes g_i$ vérifie

$$(10) \qquad \left| h(x,y) - \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} f_i(x)\, g_i(y) \right| < \varepsilon \quad \text{pour } x \in A \,,\ y \in B \,,$$

la propriété (10) sera encore vraie si l'on remplace $\sum f_i \otimes g_i$ par $\sum uf_i \otimes vg_i$; comme les fonctions h et $\sum uf_i \otimes vg_i$ sont identiquement nulles en dehors de $A \times B$, on voit que l'on aura

$$\left| h(x,y) - \sum u(x) f_i(x)\, v(y) g_i(y) \right| < \varepsilon$$

quels que soient $x \in F$, $y \in G$: ce qui achève la démonstration du Théorème 1 .

Si l'on revient au produit de deux intégrales, on voit que l'on a démontré le résultat que voici :

Théorème 2 (Lebesgue-Fubini) - Soient λ et μ deux intégrales de Radon définies sur des espaces localement compacts F et G ; on a

$$(7) \qquad \int d\lambda(x) \int h(x,y)\, d\mu(y) = \int d\mu(y) \int h(x,y)\, d\lambda(x)$$

pour toute fonction $h \in \mathcal{L}(F \times G)$.

La formule (7) - qu'on appelle souvent : formule d'interversion des signes $\int$ - permet de parler du produit de deux intégrales λ et μ sans préciser l'ordre des facteurs. Quand on veut écrire explicitement l'intégrale produit ν , on emploie souvent les notations

$$d\lambda(x).\, d\mu(y) \quad , \qquad d\mu(y).\, d\lambda(x) \ ,$$

et on écrit (7) sous la forme

$$\nu(h) = \iint h(x,y)\, d\lambda(x)\, d\mu(y) = \int d\lambda(x) \int h(x,y)\, d\mu(y) =$$
$$= \int d\mu(y) \int h(x,y)\, d\lambda(x) \ ;$$

par abus de langage, on dit que $\iint h\, d\lambda\, d\mu$ est une intégrale double. Il nous arrivera parfois d'employer aussi la notation du produit tensoriel :

$$\nu = \lambda \otimes \mu \quad ;$$

celle-ci est justifiée par la formule (6), qui s'écrit aussi, dans un cas particulier :

$$\iint f(x)g(y)\, d\lambda(x)\, d\mu(y) = \int f(x)\, d\lambda(x) \,.\int g(y) d\mu(y) \,.$$

3 - Propriétés élémentaires et exemples.

Proposition 2 - Le produit de deux intégrales positives est une intégrale positive.

C'est une propriété tout à fait évidente d'après la Déf. 1.

Proposition 3 - Le produit de deux intégrales bornées λ et μ est une intégrale bornée, et on a

$$\|\lambda \otimes \mu\| = \|\lambda\| \cdot \|\mu\| \,.$$

En effet, on a

$$\left|\int h(x,y)\, d\mu(y)\right| \leqslant \|h\| \cdot \|\mu\|$$

d'où

$$|\lambda \otimes \mu(h)| \leqslant \|\lambda\| \cdot \|\mu\| \cdot \|h\|$$

ce qui prouve que $\lambda \otimes \mu$ est bornée, et que

$$\|\lambda \otimes \mu\| \leqslant \|\lambda\| \cdot \|\mu\| \,.$$

Mais si l'on remarque que

$$\|f \otimes g\| = \|f\| \cdot \|g\| \,,$$

on voit que

$$\|\lambda \otimes \mu\| \geqslant \sup_{\substack{f \in \mathcal{L}(F) \\ g \in \mathcal{L}(G)}} \frac{|\lambda \otimes \mu\,(f \otimes g)|}{\|f \otimes g\|} = \sup \frac{|\lambda(f)|}{\|f\|} \cdot \frac{|\mu(g)|}{\|g\|} = \|\lambda\| \cdot \|\mu\| \,,$$

ce qui prouve la Proposition.

Proposition 4 - Le produit de deux intégrales discrètes est une intégrale discrète.

En effet, si l'on a

$$\lambda(f) = \sum_{x \in F} \varphi(x)\, f(x)$$

$$\mu(g) = \sum_{y \in G} \psi(y)\, g(y)$$

on aura, pour $h \in \mathcal{L}(F \times G)$:

$$\iint h(x,y)\, d\lambda(x)\, d\mu(y) = \sum_{x \in F} \varphi(x) \sum_{y \in G} h(x,y)\, \psi(y) \;;$$

comme les séries considérées sont absolument convergentes, ceci s'écrit

$$\iint h . d\lambda\, d\mu = \sum_{\substack{x \in F \\ y \in G}} h(x,y)\, \varphi(x)\, \psi(y)$$

où le second membre converge absolument : donc $\lambda \otimes \mu$ est l'intégrale discrète formée par la répartition de masses $\varphi(x)\psi(y)$ sur $F \times G$.

Par exemple, on a

$$\varepsilon_x \otimes \varepsilon_y = \varepsilon_{(x,y)}$$

et plus généralement

$$\left(\sum_{1 \leq i \leq n} \alpha_i . \varepsilon_{x_i}\right) \otimes \left(\sum_{1 \leq j \leq p} \beta_j . \varepsilon_{y_j}\right) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \alpha_i \beta_j . \varepsilon_{(x_i, y_j)} .$$

<u>Proposition</u> 5 - <u>Soient</u> λ <u>et</u> μ <u>deux intégrales de Radon sur des espaces</u> F <u>et</u> G , φ <u>et</u> ψ <u>deux fonctions continues sur</u> F <u>et</u> G ; <u>on a</u>

$$\lambda^{\varphi} \otimes \mu^{\psi} = (\lambda \otimes \mu)^{\varphi \otimes \psi}$$

En effet, on a pour $h \in \mathcal{L}(F \times G)$:

$$\iint h\, d\lambda^{\varphi}\, d\mu^{\psi} = \int d\lambda^{\varphi}(x) \int h(x,y)\, d\mu^{\psi}(y) =$$

$$= \int d\lambda(x) \int h(x,y)\, \varphi(x)\psi(y)\, d\mu(y) = \iint h(x,y)\varphi(x)\psi(y)\, d\lambda(x) d\mu(y)$$

ce qui montre, comme annoncé, que $\lambda^{\varphi} \otimes \mu^{\psi}$ est définie par la densité $\varphi \otimes \psi$ par rapport à $\lambda \otimes \mu$.

4 - <u>Produit fini d'intégrales</u>.

Soient $F_1, \dots, F_n$ des espaces localement compacts en nombre fini, et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des intégrales de Radon définies sur $F_1, \dots, F_n$ respectivement. On appelle <u>produit</u> de ces intégrales l'intégrale de Radon λ définie, sur l'espace

$$F = F_1 \times \dots \times F_n \;,$$

par la formule

$$\lambda = \Big(\dots\big((\lambda_1 \otimes \lambda_2) \otimes \lambda_3\big)\dots\Big) \otimes \lambda_n \ ;$$

on aura donc, pour toute fonction $f \in \mathcal{L}(F)$:

(11) $$\lambda(f) = \int d\lambda_1(x_1) \int d\lambda_2(x_2) \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_n)\, d\lambda_n(x_n) \ ,$$

cette formule ayant un sens, comme on le voit en appliquant successivement la Prop.1 aux espaces $(F_1 \times \dots \times F_{n-1}) \times F_n$, $(F_1 \times \dots \times F_{n-2}) \times F_{n-1}$ etc..

Si l'on identifie entre eux les divers espaces obtenus en effectuant dans un ordre arbitraire le produit direct des F_i $(1 \leq i \leq n)$, on obtiendra, en "permutant les signes $\int$ " dans la formule précédente, un certain nombre - égal, de façon précise, à n! - d'intégrales sur F : nous allons voir que toutes ces intégrales sont égales entre elles, ce qui constituera une généralisation du Théorème de Lebesgue-Fubini.

Nous allons d'abord démontrer que la loi de composition $\otimes$ définie sur les intégrales de Radon est <u>associative</u> ; de façon précise :

<u>Proposition</u> 6 - <u>Soient</u> $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ <u>des intégrales de Radon définies sur trois espaces localement compacts</u> F_1 , F_2 , F_3 ; <u>on a</u>

$$(\lambda_1 \otimes \lambda_2) \otimes \lambda_3 = \lambda_1 \otimes (\lambda_2 \otimes \lambda_3)$$

Posons en effet

$$\mu = (\lambda_1 \otimes \lambda_2) \otimes \lambda_3 \ ; \qquad \nu = \lambda_1 \otimes (\lambda_2 \otimes \lambda_3) \ .$$

On aura, pour $f \in \mathcal{L}(F_1 \times F_2 \times F_3)$:

$$\mu(f) = \iint d\lambda_1(x_1)\, d\lambda_2(x_2) \int f(x_1, x_2, x_3)\, d\lambda_3(x_3)$$

et, d'après le Théorème de Lebesgue-Fubini :

$$\mu(f) = \int d\lambda_3(x_3) \iint f(x_1, x_2, x_3)\, d\lambda_1(x_1)\, d\lambda_2(x_2) \ ;$$

en explicitant l'intégrale double, il vient donc

$$\mu(f) = \int d\lambda_3(x_3) \int d\lambda_1(x_1) \int f(x_1, x_2, x_3)\, d\lambda_2(x_2) \ ;$$

en ~~appliquant~~ appliquant à nouveau Lebesgue-Fubini, il vient

$$\begin{aligned}\mu(f) &= \int d\lambda_1(x_1)\int d\lambda_3(x_3)\int f(x_1,x_2,x_3)\, d\lambda_2(x_2)\\ &= \int d\lambda_1(x_1)\iint f(x_1,x_2,x_3)\, d\lambda_3(x_3)\, d\lambda_2(x_2)\\ &= \int d\lambda_1(x_1)\iint f(x_1,x_2,x_3)\, d\lambda_2(x_2)\, d\lambda_3(x_3)\\ &= \quad \nu(f)\quad ,\end{aligned}$$

ce qui démontre la Proposition.

Le produit $\otimes$ étant associatif et, d'après le Théorème de Lebesgue-Fubini, commutatif, on en conclut que, dans la formule (11) :

1) <u>l'ordre des intégrations est indifférent</u> ;

2) <u>on peut remplacer plusieurs signes</u> $\int$ <u>par l'intégrale produit correspondante</u>.

Par exemple, on aura, pour trois intégrales $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ les équations suivantes :

$$\begin{aligned}\int d\lambda_1\int d\lambda_2\int f.\, d\lambda_3 &= \int d\lambda_2\int d\lambda_3\int f.\, d\lambda_1 = \ldots\\ &= \iint d\lambda_1\, d\lambda_2\int f\, d\lambda_3 = \ldots\\ &= \int d\lambda_3\iint f.\, d\lambda_1\, d\lambda_2 = \ldots\quad .\end{aligned}$$

5 - <u>Intégrale de Lebesgue dans</u> $\mathbb{R}^n$.

Comme application des notions exposées ci-dessus, considérons l'espace $\mathbb{R}^n$, puissance directe n^e de l'espace localement compact $\mathbb{R}$. On a défini (§ 2, N° 2, Exemple a) l'intégrale de Lebesgue dx sur $\mathbb{R}$. <u>On appelle intégrale de Lebesgue dans</u> $\mathbb{R}^n$ <u>l'intégrale obtenue en effectuant le produit de l'intégrale de Lebesgue sur</u> $\mathbb{R}$ <u>n fois par elle-même</u>. La valeur, pour une fonction $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, de cette intégrale se note généralement

$$\underbrace{\iint\cdots\int}_{n} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n \quad ;$$

le symbole $\underbrace{\iint\overset{n}{\cdots}\int}_{n}$ est appelé, par abus de langage, une <u>intégrale n-uple</u>, et on a - par définition - l'équation

62

$$\int\int\cdots\int f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n$$
$$=\int dx_1\int dx_2\ldots\int f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\,dx_n\,.$$

On ne perdra pas de vue le fait que, dans cette notation comme dans toutes les notations analogues, les lettres $x_1, x_2,\ldots,x_n$ désignent des variables <u>muettes</u>.

La propriété fondamentale de l'intégrale de Lebesgue est la suivante:

<u>Théorème</u> 2 - <u>L'intégrale de Lebesgue dans</u> $\mathbb{R}^n$ <u>est invariante par les translations du groupe additif</u> $\mathbb{R}^n$.

En effet, la propriété étant vraie (§ 2, Prop. 19) pour $n=1$, on aura, quels que soient les nombres $a_1,\ldots,a_n \in \mathbb{R}$:

$$\int dx_1\int\ldots\int dx_{n-1}\int f(x_1-a_1,\ldots,x_{n-1}-a_{n-1},x_n-a_n)\,dx_n$$
$$=\int dx_1\ldots\int dx_{n-1}\int f(x_1-a_1,\ldots,x_{n-1}-a_{n-1},x_n)\,dx_n$$
$$=\int dx_1\ldots\int dx_{n-2}\int dx_{n-1}\int f(x_1-a_1,\ldots,x_{n-2}-a_{n-2},x_{n-1},x_n)\,dx_n\,;$$

en poursuivant ce calcul de proche en proche, on parvient à la propriété cherchée.

On verra (Chap.V) qu'il n'existe - à un facteur constant près - pas d'autre intégrale dans $\mathbb{R}^n$ jouissant de cette propriété.

Le Théorème de Lebesgue-Fubini conduit, pour l'intégrale de Lebesgue, à des théorèmes "d'interversion des signes $\int$" particulièrement utiles. Par exemple : si $f(x,y)$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^2$, et nulle en dehors d'un compact, on a

$$\int_{-\infty}^{\infty}dx\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy=\int_{-\infty}^{\infty}dy\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,dx=\iint f(x,y)\,dx\,dy\,.$$

De même, si l'on considère deux intervalles compacts $[a,b]$ et $[c,d]$ de $\mathbb{R}$, et les intégrales de Lebesgue sur ceux-ci, on a le résultat suivant :

Proposition 7 - Soit $f(x,y)$ une fonction numérique définie et continue pour

$$a \leqslant x \leqslant b \quad , \qquad c \leqslant y \leqslant d$$

où $-\infty < a < b < +\infty \quad , \quad -\infty < c < d < +\infty$. Alors on a

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\, dy \quad .$$

On verra des résultats plus complets au Chap.III, § 5 .

Appendice au Chap.II : Décompositions spectrales des algèbres commutatives dans les Hilbert.

On se propose ici d'esquisser une théorie élémentaire (c'est-à-dire n'utilisant pas le théorème de Gelfand-Mazur) des décompositions spectrales des algèbres autoadjointes et commutatives d'opérateurs d'un espace de Hilbert ; ceci dans le but de montrer que ces questions ne seraient pas déplacées dans la première partie de Bourbaki, et de façon précise dans le livre sur l'Intégration (mais non au Chap.II, bien entendu).

1 - Algèbres autoadjointes - Notations : $\mathcal{H}$ espace de Hilbert ; $\mathcal{R}(\mathcal{H})$: algèbre des endomorphismes continus de $\mathcal{H}$, munie de la topologie uniforme - c'est-à-dire définie par la norme

$$\| A \| = \sup_{\substack{x \in \mathcal{H} \\ \|x\| \leq 1}} \| A x \| .$$

$\mathcal{R}(\mathcal{H})$ est une algèbre normée complète avec unité, sur laquelle est définie une involution $A \longrightarrow A^*$ telle que :

1) $\| A^* \| = \| A \|$ 2) $\| A^* A \| = \| A^* \| . \| A \|$

3) $A^* A + 1$ est toujours inversible

(Démonstrations élémentaires)

On désignera par $\mathcal{A}$ une sous-algèbre fermée, commutative, autoadjointe et contenant 1 de $\mathcal{R}(\mathcal{H})$.

On désigne par $\mathcal{A}_+$ l'ensemble des $A \in \mathcal{A}$ qui sont hermitiens positifs, c'est-à-dire vérifient

$$(Ax , x) \geqslant 0 \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathcal{H} .$$

Pour un $A \in \mathcal{R}(\mathcal{H})$, le spectre de A sera l'ensemble σ des $\lambda \in C$ tels que $A - \lambda 1$ ne soit pas inversible ; pour le moment, on ignore son existence ; mais comme $(A-\lambda 1)^{-1}$ existe pour $|\lambda| > \|A\|$ en vertu de

$$(A - \lambda 1)^{-1} = \lambda \left(\frac{A}{\lambda} - 1 \right)^{-1} = - \lambda \sum_{n=0}^{\infty} . \frac{A^n}{\lambda^n} ,$$

on sait que le spectre est *borné*, et donc *compact*. Si on considère $\mathcal{A}$, le *spectre de* A *dans* $\mathcal{A}$ sera l'ensemble des λ tels que $A - \lambda 1$ ne soit pas inversible *dans* $\mathcal{A}$. On verra que c'est le même que dans $\mathcal{R}(\mathcal{H})$. On va déjà le prouver pour les hermitiens.

Prop. 1 - *Si* $H = H^*$, $(H - \lambda 1)^{-1}$ *existe dans* $\mathcal{R}(\mathcal{H})$ *pour tout* λ *non réel*.

Démonstration élémentaire.

Prop. 2 - *Si* H *est hermitien positif*, *le spectre de* H *dans* $\mathcal{R}(\mathcal{H})$ *est positif* (c.à.d. porté par R_+).

Démonstration élémentaire.

Prop. 3 - *Si* $H \in \mathcal{A}$ *est hermitien, son spectre dans* $\mathcal{A}$ *est identique à son spectre dans* $\mathcal{R}(\mathcal{H})$.

Soient σ et Σ les spectres de H dans $\mathcal{R}(\mathcal{H})$ et dans $\mathcal{A}$ respectivement. On a trivialement $\sigma \subset \Sigma$. Je dis que tout point *frontière* $\lambda_0 \in \Sigma$ est dans σ. En effet, il existe une suite $\lambda_n \in \complement \Sigma$ qui converge vers λ_0. Si $\lambda_0 \notin \sigma$, on a (continuité de l'inverse)

$$(A - \lambda_0 1)^{-1} = \lim_{n \infty} (A - \lambda_n 1)^{-1} ;$$

mais $(A - \lambda_n 1)^{-1} \in \mathcal{A}$; comme $\mathcal{A}$ est *fermée*, on a donc aussi $(A - \lambda_0 1)^{-1} \in \mathcal{A}$: absurde.

Ceci étant, et comme (Prop.1) $\sigma \subset R$, Σ ne peut contenir de points complexes ; donc $\Sigma \subset R$; mais alors *tout* $\lambda \in \Sigma$ est point frontière : donc $\Sigma \subset \sigma$, et finalement $\Sigma = \sigma$. C.Q.F.D.

Corollaire : *Si* $A \in \mathcal{A}_+$, *le spectre de* A *dans* $\mathcal{A}$ *est positif, et contenu dans* $[0, \|A\|]$.

2 - Formes positives - Caractères.

On dit qu'une forme linéaire f définie sur $\mathcal{A}$ est positive si

$$f(A) \geqslant 0 \qquad \text{pour tout} \quad A \in \mathcal{A}_+ .$$

Prop. 4 - Toute $f \geqslant 0$ est continue, et vérifie

$$|f(A)| \leqslant \|A\| . f(1) .$$

Vu $A^* A \in \mathcal{A}_+$, on a $f(A^* A) \geqslant 0$; donc (Cauchy-Schwartz).

$$|f(A)|^2 \leqslant f(1) . f(A^* A) ;$$

mais on a

$$0 \leqslant A^* A \leqslant \|A^* A\| . 1 = \|A\|^2 . 1 ;$$

donc

$$|f(A)|^2 \leqslant f(1)^2 . \|A\|^2 .$$

C.Q.F.D.

On voit que, pour $f \geqslant 0$, on a

$$\|f\| = f(1) .$$

Soit alors $\mathcal{A}'$ le dual (topologique) de l'espace de Banach $\mathcal{A}$, et $K \subset \mathcal{A}'$ l'ensemble des $f \geqslant 0$ telles que $f(1) \leqslant 1$. K est convexe et faiblement compact (élémentaire). Ses points extrémaux $\neq 0$ sont caractérisés par

$$f(1) = 1 \quad ; \qquad 0 \leqslant g \leqslant f \qquad \text{implique} \qquad g = \lambda f ,$$

cf. le présent Chap.II, § 2, N° 8 . En fait :

Prop.5 - Les points extrémaux de K sont les formes linéaires f telles que

(1) $$f(AB) = f(A)\, f(B) .$$

1) Soit f extremal $\neq 0$, et soit

$$f_B(A) = f(B^* AB)$$

pour $B \in \mathcal{A}$; si $\|B\| \leqslant 1$, on a

$$0 \leqslant B^* A^* AB = B^* B . A^* A = A^* B^* BA \leqslant A^* A$$

car $(B^* BA^* Ax, x) = (B^* BAx, Ax) \leqslant (A^* Ax, x)$

donc

$$0 \leqslant f_B \leqslant f \quad ;$$

par suite $f_B = \lambda_B . f$ où $B\lambda_B$ est un scalaire, égal à $f(B^* B)$ (faire $A = 1$) ; donc

$$f(B^* BA) = f(B^* B) f(A) \qquad \text{etc..}$$

2) Réciproquement, (1) implique tout d'abord $f \geqslant 0$; car si $A \in \mathcal{A}_+$, et si $f(A) = \lambda$, $A - \lambda 1$ ne peut être inversible : donc (Prop.3, Coroll.) $\lambda \geqslant 0$, et donc $f \geqslant 0$. Comme $f(1) = 1$ ou 0, on a $f \in K$.

f est <u>extrémale</u> ; car si $0 \leqslant g \leqslant f$, on voit que

$$f(A) = 0 \Rightarrow f(A^* A) = 0 \Longrightarrow g(A^* A) = 0 \Rightarrow g(A) = 0 \,,$$

donc $g = \lambda f$. C.Q.F.D.

3) <u>Le théorème fondamental</u>.

Soit Ω l'ensemble des points extrémaux non nuls de $\mathcal{A}$; ils sont <u>caractérisés</u> par

$$f(1) = 1 \,, \qquad f(AB) = f(A) f(B) \;;$$

donc, Ω est <u>faiblement compact</u>. L'espace compact Ω est le <u>spectre de</u> $\mathcal{A}$. On désignera ses points par $\hat{x}, \hat{y}, \ldots,$ et par $\langle A , \hat{x} \rangle$ la <u>valeur en A</u> de la forme linéaire A. Comme

$$\langle A^*, \hat{x} \rangle = \overline{\langle A , \hat{x} \rangle} \;;\; \langle AB , \hat{x} \rangle = \langle A , \hat{x} \rangle . \langle B , \hat{x} \rangle$$

et comme on peut séparer deux points $\hat{x}$, $\hat{y}$ par une fonction $\langle A , \hat{x} \rangle$, les fonctions

$$\varphi_A(\hat{x}) = \langle A , \hat{x} \rangle$$

sont <u>partout denses dans</u> $\mathcal{C}(\Omega)$ (Stone-Weierstrass).

<u>Prop. 6 - Pour tout</u> $A \in \Omega$ <u>on a</u>

$$\| A \| = \operatorname*{Sup}_{\hat{x}} | \langle A , \hat{x} \rangle | .$$

Soit M le second membre. D'après la Prop.4, on a

$$M \leqslant \|A\| .$$

D'autre part, d'après Krein-Milman, toute $f \in K$ vérifiant $f(1) = 1$ appartient à l'enveloppe convexe faiblement fermée de Ω, d'où l'on déduit, pour une telle f :

$$f(A^* A) \leqslant \sup_{\hat{x}} \langle A^* A , \hat{x} \rangle = M^2 .$$

En particulier, pour tout $x \in \mathcal{H}$ tel que $(x,x) = 1$ on aura

$$(A^* Ax , x) = \|Ax\|^2 \leqslant M^2 \quad ;$$

donc $$\|A\| \leqslant M .$$ C.Q.F.D.

En conséquence, on a le :

Théorème fondamental : $\mathcal{A}$ est isomorphe, pour toutes les structures qu'on peut y définir, à $\mathcal{C}(\Omega)$.

Ce théorème entraîne les résultats suivants, de toute évidence :

Prop. 7 : $\mathcal{A}_+$ est l'ensemble des $A^* A$

Corollaire : racine carrée d'un hermitien positif.

Prop.8 : Pour qu'une forme linéaire f sur $\mathcal{A}$ soit positive, il faut et il suffit qu'elle vérifie l'une des conditions équivalentes que voici :

1) $f(A^* A) \geqslant 0$ pour tout $A \in \mathcal{A}$;

2) $f(A) = \int_{\Omega} \langle A , \hat{x} \rangle \, d\mu(\hat{x})$

où μ est une mesure de Radon positive sur Ω (laquelle est parfaitement déterminée par f).

- Ces résultats étant obtenus, la décomposition spectrale de $\mathcal{A}$ ne présente aucune espèce de difficulté.

Remarque - Si l'on utilisait Gelfand-Mazur, on pourrait démontrer les Prop. 1, 2, 3 sans s'occuper de $\mathcal{H}$ - uniquement en vertu des propriétés internes de $\mathcal{A}$ (cf. Rapport sur les algèbres normées).
