RÉDACTION N° 114

COTE : NBR 022

TITRE : LIVRE VI. E.V.T. CHAP. II (ÉTAT 3)
ENSEMBLES CONVEXES DANS LES E.V. RÉELS

ASSOCIATION DES COLLABORATEURS DE NICOLAS BOURBAKI

NOMBRE DE PAGES : 28

NOMBRE DE FEUILLES : 28

LIVRE VI

ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES

CHAPITRE II (Etat 3)

ENSEMBLES CONVEXES DANS LES ESPACES VECTORIELS RÉELS

Sommaire

§ 1. Définition et propriétés des ensembles convexes : 1. Définition d'un ensemble convexe. 2. Produit d'ensembles convexes. 3. Intersection d'ensembles convexes. Enveloppe convexe d'un ensemble. 4. Secteurs coniques convexes. 5. Points internes d'un ensemble convexe. 6. Ensembles convexes dans les espaces vectoriels topologiques.

§ 2. Fonctions convexes : 1. Définition d'une fonction convexe. 2. Fonctions convexes positivement homogènes. 3. Fonctions convexes dans un espace de dimension finie.

§ 3. Variétés d'appui d'un ensemble convexe : 1. Le théorème de Minkowski. 2. Variétés d'appui d'un ensemble convexe. 3. Prolongement des formes linéaires.

CHAPITRE II (Etat 3)

ENSEMBLES CONVEXES DANS LES ESPACES VECTORIELS RÉELS.

§ 1. Définition et propriétés des ensembles convexes.

1. Définition d'un ensemble convexe.

Nous considèrerons dans ce chapitre des espaces vectoriels sur le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels (appelés aussi, pour abréger, espaces vectoriels réels) ; le plus souvent, ils ne seront pas munis d'une topologie.

Rappelons (Alg.,chap.IX) que si a et b sont deux points d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$, tels que $b \neq 0$, l'ensemble des points $a+\lambda b$, où $\lambda \geqslant 0$ (resp. $\lambda > 0$) est appelé demi-droite fermée (resp. ouverte) d'origine a et de vecteur directeur b. Si x et y sont deux points quelconques de E, l'ensemble des points $\lambda x+\mu y$, où $\lambda \geqslant 0$, $\mu \geqslant 0$ et $\lambda+\mu=1$ (resp. $\lambda > 0$, $\mu > 0$, $\lambda+\mu=1$ lorsque $x \neq y$) est appelé segment fermé (resp. segment ouvert) d'extrémités x et y ; il est réduit à un point lorsque $x=y$. Enfin, si $x \neq y$, le segment ouvert en x, fermé en y est l'ensemble des points $\lambda x+\mu y$, où $\lambda+\mu=1$, $\lambda > 0$, $\mu \geqslant 0$.

DÉFINITION 1.- Dans un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$, on dit qu'un ensemble A est convexe si, quels que soient les points x,y de A, le segment fermé d'extrémités x et y est contenu dans A.

Cette définition équivaut donc à la suivante : quels que soient les points x,y de A et le nombre réel λ tel que $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, le point $z=\lambda x+(1-\lambda)y$ appartient à A.

Exemples.- 1) L'ensemble vide est convexe ; il en est de même de l'ensemble réduit à un point quelconque de E.

2) Toute variété linéaire affine de E est convexe.

3) Les seules parties convexes non vides de $\mathbf{R}$ sont les *intervalles* (*Top. gén.*, chap. IV, § 2, prop. 1).

4) Soit $\|x\|$ une *norme* sur E (Top. gén., chap. IX, § 3) ; la boule fermée B formée des points tels que $\|x\| \leqslant 1$ est convexe, car les relations $\|x\| \leqslant 1$, $\|y\| \leqslant 1$ entraînent pour $0 \leqslant \mu \leqslant 1$, $\|\lambda x+(1-\lambda)y\| \leqslant \lambda\|x\|+(1-\lambda)\|y\| \leqslant \lambda+(1-\lambda)=1$ (cf. chap. III et IV)

PROPOSITION 1.- *Soit* $(x_\iota)_{\iota\in I}$ *une famille de points d'un ensemble convexe* A ; *toute combinaison linéaire* $\sum_{\iota\in I} \lambda_\iota x_\iota$, *où les coefficients* λ_ι (nuls sauf un nombre fini d'entre eux) *sont tels que* $\lambda_\iota \geqslant 0$ *pour tout* $\iota \in I$ *et* $\sum_{\iota\in I} \lambda_\iota = 1$, *appartient à* A.

On peut évidemment se borner au cas où I est l'ensemble fini $[1,p]$ et où $\lambda_i > 0$ pour tout $i \in I$; la proposition est triviale pour $p=1$; démontrons-la par récurrence sur p. Posons $\mu = \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i > 0$, et $y = \frac{1}{\mu}\sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i x_i$; l'hypothèse de récurrence entraîne que $y \in A$. Comme $\lambda_p = 1-\mu$ et $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i = \mu y+(1-\mu)x_p$, z appartient à A d'après la déf. 1.

Utilisant un langage emprunté à la théorie de la mesure (cf. Livre VII), on dit souvent que le point $\sum_\iota \lambda_\iota x_\iota$ est le *centre de gravité* de la famille des points x_ι, lorsque chaque point x_ι est *affecté du poids* (ou de la *masse*) λ_ι.

PROPOSITION 2.- *Soient* E *et* F *deux espaces vectoriels sur* $\mathbf{R}$, f *une application linéaire affine de* E *dans* F ; *l'image par* f *de toute partie convexe de* E *est une partie convexe de* F ; *l'image réciproque par* f *de toute partie convexe de* F *est une partie convexe de* E.

La première partie résulte de ce que l'image par f du segment fermé d'extrémités x, y est le segment fermé d'extrémités f(x), f(y). On déduit de là que l'image réciproque par f d'un segment fermé de F contient le segment fermé ayant pour extrémités deux quelconques de ses points, d'où la seconde partie de la prop.2 .

COROLLAIRE 1.- <u>Tout demi-espace ouvert</u> (resp. <u>fermé</u>) <u>est convexe</u>.

En effet, si $g(x)=0$ est l'équation d'un hyperplan H , g est une application linéaire affine de E dans $\mathbf{R}$, et les demi-espaces déterminés par H sont les images réciproques par g des demi-droites d'origine 0 dans $\mathbf{R}$.

COROLLAIRE 2.- <u>Les parties convexes non vides d'une droite D contenue dans E sont la droite D elle-même, et les demi-droites et segments contenus dans D</u> .

En effet, il existe une application linéaire affine biunivoque de $\mathbf{R}$ sur D .

2. Produit d'ensembles convexes.

PROPOSITION 3.- <u>Soit</u> $(E_\iota)_{\iota \in I}$ <u>une famille d'espaces vectoriels sur</u> $\mathbf{R}$, <u>et pour chaque</u> $\iota \in I$, <u>soit</u> A_ι <u>une partie convexe de</u> E_ι . <u>Alors l'ensemble</u> $A = \prod_{\iota \in I} A_\iota$ <u>est convexe dans</u> $E = \prod_{\iota \in I} E_\iota$.

En effet, la projection sur $E_\varkappa$ du segment fermé d'extrémités $x=(x_\iota)$ $y=(y_\iota)$ dans E est le segment fermé d'extrémités $x_\varkappa$ et $y_\varkappa$.

COROLLAIRE 1.- <u>Tout pavé dans</u> $\mathbf{R}^n$ (<u>Top.gén.</u>, chap.VI, § 1,n°1) <u>est un ensemble convexe</u>.

COROLLAIRE 2.- <u>Tout parallélotope dans</u> $\mathbf{R}^n$ (<u>Top.gén.</u>,chap.VI, § 1,n°3) <u>est un ensemble convexe</u>.

En effet, c'est l'image d'un pavé par une application linéaire affine.

COROLLAIRE 3.- <u>Si A et B sont deux parties convexes de E</u> , <u>l'ensemble</u> $\lambda A+\mu B$ (ensemble des $\lambda x+\mu y$, où $x\in A$ et $y\in B$) <u>est convexe, quels que soient les nombres réels</u> λ <u>et</u> μ .

En effet, $\lambda A+\mu B$ est l'image de $A\times B$ par l'application linéaire $(x,y) \longrightarrow \lambda x+\mu y$ de $E\times E$ dans E .

3. Intersection d'ensembles convexes. Enveloppe convexe d'un ensemble.

PROPOSITION 4.- L'intersection d'une famille quelconque d'ensembles convexes est un ensemble convexe.

La proposition est évidente à partir de la déf.1 .

COROLLAIRE.- L'intersection d'un ensemble convexe et d'une variété linéaire affine est un ensemble convexe.

Remarques.- 1) Ce corollaire, joint à la déf.1, montre que pour qu'un ensemble A soit convexe, il faut et il suffit que l'intersection de A et d'une droite quelconque D soit, ou vide, ou la droite D entière, ou une demi-droite, ou enfin un segment (cf.cor.2 de la prop.2).

2) Soit (E_ι) une famille d'espaces vectoriels, E leur produit, F la somme directe des E_ι (sous-espace vectoriel de E) ; si pour chaque ι , A_ι est convexe dans E_ι , $A = \prod_\iota A_\iota$ est convexe dans $E = \prod_\iota E_\iota$, et par suite $A \cap F$ est convexe dans F : c'est l'ensemble des (x_ι) tels que pour tout ι , $x_\iota \in A_\iota$, et $x_\iota = 0$ sauf pour un nombre fini d'indices.

DÉFINITION 2.- Etant donnée une partie quelconque A d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$, on appelle enveloppe convexe de A l'intersection des ensembles convexes contenant A (autrement dit, le plus petit ensemble convexe contenant A , d'après la prop.4).

PROPOSITION 5.- L'enveloppe convexe d'une partie A de E est identique à l'ensemble des combinaisons linéaires $\sum_\iota \lambda_\iota x_\iota$, où (x_ι) est une famille quelconque de points de A , $\lambda_\iota \geqslant 0$ pour tout ι et $\sum_\iota \lambda_\iota = 1$.

En effet, il résulte de la prop.1 que l'enveloppe convexe de A contient l'ensemble de ces combinaisons ; ce dernier étant convexe comme on le vérifie aussitôt, et contenant A , est par définition l'enveloppe convexe de A .

La *dimension* de la variété linéaire affine engendrée par un ensemble convexe A lorsqu'elle est finie, (autrement dit (*Alg.*, chap.IX), le *rang affine* de A) est encore appelée la *dimension* de l'ensemble convexe A . Si B est une partie quelconque de E , le rang affine de B (lorsqu'il est défini) est égal à la dimension de l'enveloppe convexe de B , d'après la prop.5 .

4. Secteurs coniques convexes.

On dit qu'un ensemble C dans un espace vectoriel E sur $\mathbf{R}$ est un *secteur conique de sommet* x_0 si toute demi-droite fermée d'origine x_0 qui contient un point de C distinct de x_0 est tout entière contenue dans C . Pour toute partie A de E , la réunion des demi-droites fermées d'origine x_0 passant par les points de A distincts de x_0 est un secteur conique de sommet x_0 , qu'on dit *engendré* par A .

PROPOSITION 6.- *Le secteur conique* C *de sommet* x_0 *engendré par un ensemble convexe* A *est convexe*.

Par une translation, on peut se ramener au cas où $x_0=0$; C est alors l'ensemble des éléments λx , où x parcourt A , et λ l'ensemble des nombres $\geqslant 0$. Or, si $x\in A$, $y\in A$, $\alpha>0$, $\beta>0$ et $0\leqslant\rho\leqslant 1$, on peut écrire $\rho\alpha x+(1-\rho)\beta y=\lambda(\sigma x+(1-\sigma)y)$, en prenant $\lambda=\rho\alpha+(1-\rho)\beta$, et $\frac{\sigma}{1-\sigma}=\frac{\rho\alpha}{(1-\rho)\beta}$, et cette dernière relation donne $\frac{1}{\sigma}-1=(\frac{1}{\rho}-1)\frac{\beta}{\alpha}>0$, donc on a bien $0<\sigma<1$, ce qui prouve que $\rho\alpha x+(1-\rho)\beta y$ est de la forme λz avec $\lambda>0$ et $z\in A$; on raisonne plus simplement encore lorsque l'un des nombres α,β est nul.

COROLLAIRE 1.- *Si* $x_0\notin A$, *le complémentaire de* x_0 *par rapport à* C *est convexe*.

C'est ce qui résulte de la démonstration précédente, puisque le complémentaire de x_0 par rapport à C est alors (en supposant $x_0=0$) l'ensemble des points λx , où $x\in A$ et $\lambda>0$.

COROLLAIRE 2.- Soit A un ensemble convexe, V le sous-espace vectoriel engendré par A . Si C est le secteur conique convexe de sommet 0 engendré par A , V est l'ensemble des points $x-y$, où $x \in C$ et $y \in C$.

En effet, tout point de V s'écrit $\sum_i \lambda_i x_i - \sum_j \mu_j y_j$, où les x_i et les y_j sont dans A , et $\lambda_i > 0$, $\mu_j > 0$; si $\lambda = \sum_i \lambda_i$, $\mu = \sum_j \mu_j$, les points $\sum_i \lambda_i x_i = \lambda \sum_i \frac{\lambda_i}{\lambda} x_i$ et $\sum_j \mu_j y_j = \mu \sum_j \frac{\mu_j}{\mu} y_j$ appartiennent à C par définition, d'où le corollaire.

Soit A un ensemble convexe quelconque dans E , et considérons, dans l'espace $F = E \times \mathbb{R}$, l'ensemble convexe $A_1 = A \times \{1\}$, et le secteur conique de sommet 0 engendré par A_1 , c'est-à-dire l'ensemble des points $(\lambda x, \lambda)$ de F , où x parcourt A et λ l'ensemble des nombres $\geqslant 0$; il est clair que A_1 est l'intersection de C et de l'hyperplan $E \times \{1\}$ dans F . Tout ensemble convexe dans E peut donc être considéré comme la projection sur E de l'intersection d'un secteur conique convexe de sommet 0 dans F et de l'hyperplan $E \times \{1\}$.

Si A est une partie quelconque de E , x_0 un point de E , C l'ensemble convexe engendré par A , S le secteur conique convexe de sommet x_0 engendré par A , S est évidemment l'intersection de tous les secteurs coniques convexes de sommet x_0 contenant A ; si $x_0 = 0$, S est l'ensemble des combinaisons linéaires $\sum_\iota \lambda_\iota x_\iota$, où (x_ι) est une famille quelconque de points de A et $\lambda_\iota \geqslant 0$ pour tout ι .

5. Points internes d'un ensemble convexe.

DÉFINITION 3.- Etant donné un ensemble convexe $A \subset E$, on dit qu'un point $x_0 \in A$ est point interne de A si , pour tout point $x \neq x_0$ l'intersection de A et de la droite passant par x_0 et x contient un segment ouvert auquel appartient x_0

Exemples.- Si A est réduit au point x_0 , x_0 est point interne de A. Dans un segment, tout point distinct des extrémités est point interne. Tout point d'une variété linéaire affine est point interne de cette variété. Si l'espace E est de dimension infinie, il existe dans E des ensembles convexes n'ayant aucun point interne (exerc.4)

Remarque.- Soit C un secteur conique convexe de sommet 0 . Si 0 est point interne de C , on a nécessairement $-C=C$, et il résulte du corollaire 2 de la prop.6 que C est un sous-espace vectoriel. Considérons alors un ensemble convexe quelconque A et un point interne x_0 de A ; soit V la variété linéaire engendrée par A . Par translation, on peut se ramener au cas $x_0=0$; alors 0, étant point interne de A , est aussi par définition point interne du secteur conique convexe C de sommet 0 engendré par A , d'où $C=V$ d'après ce qui précède. En d'autres termes, pour toute droite D passant par un point interne x_0 de A et contenue dans la variété linéaire V engendrée par A , $D \cap A$ contient un segment ouvert auquel appartient x_0 .

PROPOSITION 7.- Soient A un ensemble convexe, x_0 un point interne de A , $x \neq x_0$ un point quelconque de A . Tout point du segment ouvert d'extrémités x_0 et x est point interne de A .

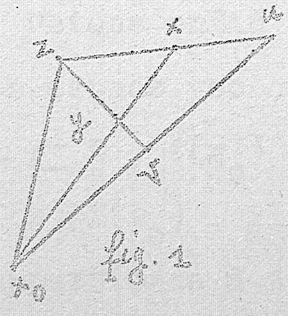

fig. 1

En effet, (fig.1) soit y un point quelconque du segment ouvert d'extrémités x_0 et x , et z un point quelconque de A . Par hypothèse, il existe $\lambda > 0$ tel que le point $u=x-\lambda(z-x)$ appartienne à A . Soit $y=\alpha x_0+(1-\alpha)x$, avec $0<\alpha<1$; on vérifie aisément qu'il existe deux nombres ρ , μ tels que $\mu>0$ et $0<\rho<1$ tels que $v=\rho x_0+(1-\rho)u=y-\mu(z-y)$; il suffit de prendre $\mu = \dfrac{\lambda(1-\alpha)}{1+\alpha\lambda}$ et $\rho = \dfrac{\alpha(1+\lambda)}{1+\alpha\lambda}$; cela montre que v appartient à A , et par suite que y est point interne de A .

Remarque.- Un calcul tout à fait analogue montre que si x est point interne de A , x_0 quelconque dans E , tout point de la demi-droite ouverte d'origine x_0 passant par x est interne dans le secteur conique convexe de sommet x_0 engendré par A .

COROLLAIRE.- L'ensemble B des points internes d'un ensemble convexe A est un ensemble convexe, et tout point de B est interne.

COROLLAIRE 2.- Soit x_0 un point interne d'un ensemble convexe A, x un point non interne de A ; l'intersection de A et de la droite passant par x_0 et x est un segment ou une demi-droite dont x est une extrémité.

En effet, s'il n'en était pas ainsi, x serait point interne de A d'après la prop.7 .

COROLLAIRE 3.- Si un ensemble convexe A contient au moins un point interne, la variété linéaire affine engendrée par A est identique à la variété linéaire affine engendrée par l'ensemble des points internes de A .

On peut se borner au cas où l'origine 0 de E est point interne de A . Il résulte alors de la déf.3 et de la définition du secteur conique de sommet 0 engendré par A que ce secteur est identique au sous-espace vectoriel V engendré par A ; donc V est l'ensemble des points λx , où $\lambda \geqslant 0$ et $x \in A$; or un tel point peut s'écrire $2\lambda(\frac{1}{2}x)$ et $\frac{1}{2}x$ est point interne de A d'après la prop.7 .

Notons enfin que si f est une application linéaire affine de E dans un espace vectoriel F , et si x_0 est point interne de l'ensemble convexe $A \subset E$, $f(x_0)$ est point interne de $f(A)$: en effet, si $z \in A$ est tel que $f(z) \neq f(x_0)$, il existe $\alpha > 0$ tel que, pour $|\lambda| \leqslant \alpha$, $x_0 + \lambda(z - x_0)$ appartienne à A , donc $f(x_0) + \lambda(f(z) - f(x_0))$ appartient à $f(A)$ pour $|\lambda| \leqslant \alpha$.

6. Ensembles convexes dans les espaces vectoriels topologiques.

PROPOSITION 8.- Dans un espace vectoriel topologique E sur $\mathbb{R}$, l'adhérence d'un ensemble convexe est un ensemble convexe.

En effet, soit A un ensemble convexe ; pour tout λ tel que $0<\lambda<1$, l'application $(x,y) \to \lambda x+(1-\lambda)y$ est continue dans $E\times E$ et applique $A\times A$ dans A, donc (Top.gén., chap.I, §4, prop.1) elle applique $\bar{A}\times\bar{A}$ dans $\bar{A}$, ce qui démontre la proposition.

Le même raisonnement montre que l'adhérence d'un secteur conique convexe est un secteur conique convexe.

PROPOSITION 9.- Dans un espace vectoriel topologique E, soit A un ensemble convexe ayant au moins un point intérieur x_0. Pour tout point $x\in\bar{A}$, tout point du segment ouvert d'extrémités x_0 et x est point intérieur de A.

En effet, soit y un point de ce segment, et soit f l'homothétie de centre y qui transforme x_0 en x ; si V est un voisinage ouvert de x_0 contenu dans A, $f(V)$ est un voisinage de x, donc contient un point $f(z)\in A$ par hypothèse ; l'homothétie g de centre $f(z)$ qui transforme z en y transforme alors V en un voisinage de y contenu dans A, d'où la proposition.

COROLLAIRE 1.- Si l'ensemble convexe A contient au moins un point intérieur, l'ensemble de ses points internes est identique à l'ensemble de ses points intérieurs.

En effet, il est clair que tout point intérieur à A est point interne de A. Réciproquement, si x_0 est point intérieur à A et x point interne de A, il existe $t>0$ tel que $y=x+t(x-x_0)$ appartienne à A ; comme x est alors un point du segment ouvert d'extrémités x_0 et y, il est point intérieur de A d'après la prop.9.

COROLLAIRE 2.- Si A est un ensemble convexe contenant des points intérieurs, l'intérieur de A est identique à l'intérieur de $\bar{A}$, l'adhérence de A est identique à l'adhérence de $\mathring{A}$.

En effet, tout point frontière x de A est adhérent à $\mathring{A}$ d'après la prop.9 ; d'autre part, il ne peut être intérieur à $\bar{A}$, car il serait alors point interne de $\bar{A}$, donc point d'un segment ouvert dont une extrémité serait point intérieur de A ; et l'autre appartiendrait à $\bar{A}$; x serait donc point intérieur de A d'après la prop.9, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Dans un espace vectoriel topologique sur $\mathbb{R}$, on appelle <u>corps convexe</u> un ensemble convexe fermé et ayant au moins un point intérieur.

PROPOSITION 10.- <u>Soient</u> E <u>un espace de dimension finie,</u> A <u>un ensemble convexe non vide dans</u> E , V <u>la variété linéaire affine engendrée par</u> A . <u>Pour qu'un point de</u> A <u>soit interne, il faut et il suffit qu'il soit intérieur à</u> A <u>par rapport à</u> V ; <u>l'ensemble de ces points est dense par rapport à</u> A (et par suite <u>non vide</u>).

On peut évidemment se borner au cas ou' V=E , autrement dit, au cas où A est de dimension n . Il existe alors n+1 points de A formant un système affinement libre ; par une transformation linéaire affine de E , on peut supposer que ces points sont l'origine et les n vecteurs e_i $(1 \leq i \leq n)$ d'une base de E ; A contient alors tous les points $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$, où $\lambda_k \geq 0$ et $0 \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \leq 1$ (puisqu'un tel point s'écrit $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k + (1 - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k)0)$; par suite, il contient aussi le parallélotope ouvert formé des points tels que $0 \leq \lambda_k \leq 1/n$ $(1 \leq k \leq n)$; ceci montre que l'intérieur de A <u>n'est pas vide</u> ; la proposition résulte alors des cor.1 et 2 de la prop.9 .

Dans un espace vectoriel topologique E de dimension <u>infinie</u> sur $\mathbb{R}$, un ensemble convexe engendrant E peut avoir tous ses points internes, mais aucun point intérieur ; par exemple, si $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble $A = U^{\mathbb{N}}$, où $U =]-1,+1[$ possède cette propriété .

§ 2. Fonctions convexes.

1. Définition d'une fonction convexe.

Soit A une partie d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$, f une fonction numérique finie définie dans A , G le graphe ou ensemble représentatif de la fonction f dans l'ensemble produit $E \times \mathbb{R}$, formé des points $M_x=(x,f(x))$, où x parcourt A . Généralisant les définitions données pour les fonctions d'une variable réelle (Fonct.var.réelle, chap.I, § 4), nous dirons qu'un point (a,b) de $E \times \mathbb{R}$ tel que $a \in A$ est au-dessus (resp. strictement au-dessus, au-dessous, strictement au-dessous) de G si on a $b \geqslant f(a)$ (resp. $b > f(a)$, $b \leqslant f(a)$, $b < f(a)$). Si P et Q sont deux points de $E \times \mathbb{R}$, nous désignerons par PQ le segment fermé d'extrémités P et Q .

DÉFINITION 1. Etant donnée une partie convexe H de l'espace vectoriel E , on dit qu'une fonction numérique finie f , définie dans H , est convexe (resp. strictement convexe) dans H si, quels que soient les points x,x' de H , tout point du segment $M_xM_{x'}$ distinct des extrémités est au-dessus (resp. strictement au-dessus) du graphe G de f .

Autrement dit, la condition pour que f soit convexe (resp. strictement convexe) dans H est que l'on ait l'inégalité

$$f(\lambda x+(1-\lambda)x') \leqslant \lambda f(x)+(1-\lambda)f(x')$$

resp. $$f(\lambda x+(1-\lambda)x') < \lambda f(x)+(1-\lambda)f(x')$$

pour tout couple de points distincts x,x' de H et tout λ tel que $0<\lambda<1$.

La déf.1 montre que, pour que f soit convexe (resp. strictement convexe) dans H , il faut et il suffit que, pour toute droite $D \subset E$ rencontrant H en plus d'un point, la restriction de f à $H \cap D$ (identique à un segment, une demi-droite, ou D tout entière) soit convexe (resp. strictement convexe) dans cet ensemble. Si $t \to a+bt$ est une représentation paramètrique de D , il revient au même de dire que $t \to f(a+bt)$ est une fonction convexe (resp. strictement convexe) de la variable réelle t dans l'intervalle I de $\mathbb{R}$ qui correspond à $D \cap H$ dans la représentation paramètrique considérée. La plupart des propriétés des fonctions convexes dans une partie convexe A d'un espace vectoriel quelconque sur $\mathbb{R}$ sont ainsi ramenées aux propriétés des fonctions convexes d'une variable réelle, étudiées dans Fonct. var. réelle, chap.I, § 4 .

En particulier, pour que f soit convexe dans A , il faut et il suffit que l'ensemble des points de $E \times \mathbb{R}$ situés au-dessus (resp. strictement au-dessus) du graphe G de f , soit convexe. Compte-tenu de la prop.1 du § 1 , on démontre comme pour les fonctions d'une variable réelle, la proposition suivante :

PROPOSITION 1.- *Soit f une fonction convexe* (resp. *strictement convexe*) *dans une partie convexe* $H \subset E$. *Pour* ~~ma~~*toute famille finie* $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ *de* $p \geqslant 2$ *points distincts de H et toute famille* $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ *de* p *nombres réels tels que* $0 < \lambda_i < 1$ *et* $\lambda_i = 1$, *on a*

$$f\Big(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i\Big) \leqslant \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(x_i)$$

resp.

$$f\Big(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i\Big) < \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(x_i) .$$

De même, les prop.2,3,4 de Fonct.var.réelle, chap.I § 4 , sont encore valables pour des fonctions convexes définies dans $H \subset E$.

2. Fonctions convexes positivement homogènes.

DÉFINITION 2.- *On dit qu'une fonction numérique finie* p *définie dans un espace vectoriel* E *sur* $\mathbb{R}$ *est positivement homogène si, pour tout* $x \in E$ *et tout* $\lambda \geqslant 0$, *on a* $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ (ce qui entraîne $p(0)=0$) .

Soit p une fonction convexe et positivement homogène définie dans E ; l'ensemble C des points de $F = E \times \mathbb{R}$ qui sont strictement au-dessus du graphe de p est un secteur conique convexe de sommet 0 (§ 1, n°4) privé du point $(0,0)$, car il est convexe, et si $y > p(x)$, on a, pour tout $\lambda > 0$, $\lambda y > \lambda p(x) = p(\lambda x)$. C contient le point $(0,1)$ et tout point de C est <u>interne</u>, car si $y > p(x)$ et si $t \in \mathbb{R}$, $a \in E$ sont quelconques, on a $y + \mu t > p(x + \lambda a)$ pour λ et μ assez petits, d'après la continuité des fonctions convexes d'une variable réelle. De même, la réunion de C et du graphe G de p, c'est-à-dire l'ensemble des points de F situés au-dessus de G, est un secteur conique convexe.

Considérons maintenant, inversement, un secteur conique convexe C_o de sommet 0, engendrant F contenant $(0,1)$ et tel que tous les points de C_o à l'exception de 0 soient <u>internes</u>. Nous allons voir que pour tout $x \in E$ autre que 0, l'ensemble $S(x)$ des $y \in \mathbb{R}$ tels que $(x,y) \in C_o$ est un intervalle $]y_o, +\infty[$. En effet, il existe par hypothèse $\lambda > 0$ tel que $(\lambda x, 1) \in C_o$, donc $(x, 1/\lambda) \in C_o$, $S(x)$ n'est pas vide ; d'autre part, si y $S(x)$, C_o contient tous les points $\lambda(0,1)+(x,y)=(x,y+\lambda)$ où $\lambda > 0$, donc $S(x)$ est un intervalle d'extrémité $+\infty$. Enfin, supposons que $S(x)=\mathbb{R}$; par hypothèse, il existe $\mu > 0$ tel que $(-\mu x, 1) \in C_o$, donc comme on a aussi $(x, -\frac{1}{\mu}) \in C_o$ par hypothèse, le point $(0,0)$ serait point interne de C_o (§ 1, prop.7) contrairement à l'hypothèse ; $S(x)$ est donc borné inférieurement, et comme tout point de C_o autre que le sommet est interne, $S(x)$ est nécessairement un intervalle ouvert $]y_o, +\infty[$. Posons $y_o = p(x)$; C_o privé du sommet est l'ensemble des points situés strictement au-dessus du graphe de p, donc p est <u>convexe</u> ; en outre comme C_o est un secteur conique, la relation $y > p(x)$ est équivalente à $\lambda y > p(\lambda x)$ pour tout $\lambda > 0$, donc $p(\lambda x) = \lambda p(x)$, p est <u>positivement homogène</u>.

L'intersection A de C_o et de l'hyperplan $y=1$ dans F est un ensemble convexe dont tous les points sont internes, et qui engendre cet hyperplan.

Si C_1 est le secteur conique convexe de sommet 0 engendré par A , C_1 privé de son sommet est l'intersection de C_0 et du demi-espace ouvert M: $y>0$; il est clair en effet que $C_1 \subset (C_0 \cap M) \cup \{0\}$ et d'autre part, si $(x,y) \in C_0 \cap M$, on peut écrire $(x,y)=y(\frac{1}{y}x,1)$ puisque $y>0$, donc $(x,y) \in C_1$. Il est immédiat que C_1, privé de son sommet, n'est autre que l'ensemble des points situés strictement au-dessus du graphe de la fonction p^+ , qui est convexe, positive et positivement homogène.

Considérons donc une fonction p positive, convexe et positivement homogène dans E . Si C est l'ensemble des points de $E \times \mathbb{R}$ tels que $y > p(x)$, A_1 son intersection avec l'hyperplan $y=1$, A la projection de A_1 sur E , A est un ensemble convexe dans E qui engendre E , dont tous les points sont internes, qui contient 0 et est défini par la relation $p(x) < 1$; nous dirons que A est l'ensemble convexe indicateur de la fonction p . On voit de même que l'ensemble des points $x \in E$ tels que $p(x) \leqslant 1$ est convexe. Réciproquement, soit A un ensemble convexe dans E, engendrant E , dont tous les points sont internes et qui contient 0 ; soit C_0 le secteur conique convexe dans $E \times \mathbb{R}$, de sommet 0 , engendré par $A_1 = A \times \{1\}$: c'est la réunion de $\{0\}$ et de l'ensemble des points tels que $y > p(x)$, où p est une fonction positive, convexe et positivement homogène, dont A est l'ensemble indicateur ; nous dirons que p est la jauge de l'ensemble A par rapport à 0 : on peut définir $p(x)$, pour tout $x \in E$, comme la borne inférieure des nombres $\lambda \geqslant 0$ tels que $\frac{1}{\lambda} x \in A$. Pour tout $\alpha > 0$, il est clair que la jauge de αA est $\frac{1}{\alpha} p$.

DÉFINITION 3.- On dit qu'une fonction numérique finie p définie dans un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ est une semi-norme si elle est positive, convexe, positivement homogène et telle que $p(-x) = p(x)$.

Il revient au même de dire que p satisfait aux trois axiomes :

a) $p(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in E$;

b) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ pour tout $x \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$;

c) $p(x + y) \leqslant p(x) + p(y)$ quels que soient $x \in E$ et $y \in E$.

Pour que p soit une <u>norme</u> sur E , il faut et il suffit donc qu'elle soit une <u>semi-norme</u> et que la relation $p(x)=0$ entraîne $x=0$.

Il résulte de l'étude faite ci-dessus qu'une semi-norme peut encore être définie comme la <u>jauge</u> d'un ensemble <u>convexe</u>, <u>symétrique</u>, <u>engendrant</u> E et dont tout point est <u>interne</u>.

<u>3. Fonctions convexes dans un espace de dimension finie</u>.

Dans ce n°, nous supposons toujours que l'espace E de dimension n sur $\mathbb{R}$ est muni de l'unique topologie compatible avec sa structure d'espace vectoriel.

PROPOSITION 2.- <u>Soit x_0 un point de E , C un secteur conique de sommet x_0 dont tout point distinct de x_0 est point interne</u> ; <u>soit V un voisinage convexe de x_0 dans E , et S le complémentaire de x_0 par rapport à</u> $C \cap V$. <u>Si f est une fonction convexe et majorée dans S , f(x) tend vers une limite finie lorsque x tend vers x_0 en restant dans S</u> .

Notons d'abord que si D est une droite quelconque passant par x_0 et contenant un point de S , f(x) a une limite finie lorsque x tend vers x_0 en restant dans $S \cap D$ (<u>Fonct.Var.réelle</u>, chap.I, § 4). Nous allons démontrer la proposition en établissant qu'il ne peut exister deux suites distinctes (a_n), (b_n) de points de S tendant toutes deux vers x_0 et telles que $f(b_n)$ tende vers $\limsup_{x \in S,\, x \to x_0} f(x)$ et que $f(b_n) - f(a_m) \geqslant a > 0$ pour tout couple m,n . Nous pouvons évidemment supposer la topologie de E définie par une norme $\|x\|$, et le voisinage V défini par la relation $\|x - x_0\| < 1$. D'autre part, nous pouvons nous borner au cas où C est de dimension n , de sorte que S est <u>ouvert</u> dans E (§ 1, prop.8) ; enfin, nous supposons pour simplifier l'écriture que $x_0 = 0$. Soit alors $r_n = \|b_n\|$; lorsque m croît indéfiniment, le point

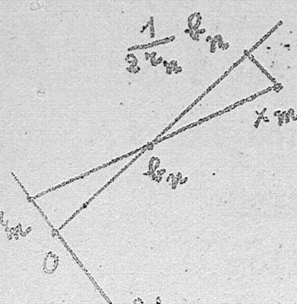

fig. 2

$x_m = a_m + \frac{1}{2r_n}(b_n - a_m)$ tend vers le point $\frac{1}{2r_n} b_n$, qui est intérieur à S par hypothèse (fig.2) ; donc $x_m \in S$ dès que m est assez grand. Par suite

$$f(x_m) - f(a_m) \geqslant \frac{1}{2r_n}(f(b_n) - f(a_m))$$

d'où

$$f(x_m) \geqslant f(b_n) + \alpha(\frac{1}{2r_n} - 1)$$

Or par hypothèse lorsque n croît indéfiniment, $f(b_n)$ tend vers une limite finie et r_n tend vers 0 ; il existerait donc dans S des points où f prend des valeurs arbitrairement grandes, contrairement à l'hypothèse.

La proposition est inexacte si on ne suppose pas f majorée dans S, ou si on remplace S par un ensemble convexe quelconque de dimension n (exerc. 3) .

PROPOSITION 3.- <u>Toute fonction convexe définie dans une partie convexe H d'un espace E de dimension finie est continue dans l'ensemble des points internes de H</u> .

On peut évidemment se limiter au cas où H est de dimension n ; soit f une fonction convexe dans H , et soit S l'ensemble convexe des points de $E \times \mathbb{R}$ situés au-dessus du graphe G de f ; il est clair que S est de dimension n+1 . Soit x un point interne de , z un nombre tel que $z > f(x)$; montrons que (x,z) est point <u>interne</u> de S . En effet, soit D une droite quelconque passant par x dans E , Δ une droite passant par (x,z) dans $E \times \mathbb{R}$ et ayant D pour projection sur E ; la restriction de f à D est continue ; si $t \rightarrow (x+ta, z+tb)$ est une représentation paramétrique de Δ , il existe donc un nombre $\alpha > 0$ tel que la relation $|t| \leqslant \alpha$ entraîne $(x+ta, z+tb) \in S$, ce qui établit notre assertion. On en déduit que (x,z) est <u>intérieur</u> à S (§ 1,prop.8) ; il existe donc un cube K de centre (x,z) intérieur à S ; si V est le cube de centre x dans E, projection de K sur E , V est contenu dans l'intérieur de H , et f est <u>majorée</u> dans V ; la prop. 2 (appliquée à C=E) montre donc que f est continue au point x .

<u>Remarque</u>.- Soit A un ensemble convexe et compact dans $\mathbb{R}^n$, et soit H sa projection sur $\mathbb{R}^{n-1}$ (identifié à la variété coordonnée $\xi_n=0$) ; H est un ensemble convexe compact dans $\mathbb{R}^{n-1}$. Pour tout point $u\in H$, l'ensemble des points (u,z) de projection u qui appartiennent à A est un segment fermé ; soient $f_1(u)$ et $f_2(u)$ les projections de ses extrémités sur $\mathbb{R}$ (avec $f_1(u)\leqslant f_2(u)$). La fonction f_1 est <u>convexe</u> dans H , car le segment d'extrémités $(u,f_1(u))$ et $(v,f_1(v))$ est contenu dans A par définition, quels que soient u et v dans H , et par suite est au-dessus du graphe de f_1 par définition ; on voit de même que f_2 est <u>concave</u> dans H . L'ensemble A est donc l'ensemble des points $(u,z)\in\mathbb{R}^{n-1}$ tels que $u\in H$ et $f_1(u)\leqslant z\leqslant f_2(u)$.

§ 3. Variétés d'appui d'un ensemble convexe.

<u>1. Le théorème de Minkowski</u>.

Rappelons (Alg.,chap.IX) que si H est un hyperplan dans un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$, on dit qu'un ensemble $A\subset E$ est <u>d'un même côté</u> (resp. <u>strictement d'un même coté</u>) de H si A est contenu dans l'un des demi-espaces fermés (resp. ouverts) déterminés par H . Deux parties A,B de E sont dites <u>séparées</u> (resp. strictement séparées) par H , si elles sont contenues dans deux demi-espaces fermés (resp. ouverts) distincts, déterminés par H. Si deux points x,y sont séparés par H , le segment fermé d'extrémités x,y <u>rencontre</u> H .

THÉORÈME 1 (Minkowski).- <u>Soit</u> A <u>un ensemble convexe dont tous les points sont internes, et soit</u> V <u>une variété linéaire ne rencontrant pas</u> A . <u>Il existe un hyperplan</u> H <u>contenant</u> V <u>et tel que</u> A <u>soit strictement d'un même coté de</u> H .

Il suffit de démontrer qu'il existe un hyperplan H contenant V et <u>ne rencontrant pas</u> A ; nous allons donner deux démonstrations de ce théorème.

<u>1ère démonstration</u>. Nous démontrerons d'abord le théorème dans le cas particulier où E est de dimension 2 ; il n'y a de démonstration à faire que lorsque V est réduit à un point qu'on peut supposer être l'origine. Soit C le complémentaire de O par rapport au secteur conique convexe de sommet O engendré par A ; C est réunion des λA , où $\lambda > 0$, et comme A est ouvert dans E par hypothèse (§ 1,prop.8), il en est de même de C . Il suffit de prouver qu'il existe un $x \in E$, non nul et tel que la droite passant par O et x ne rencontre pas C : pour cela, d'après la définition de C , il suffit que l'on ait $x \notin C$ et $-x \notin C$. Or, C n'est pas identique au complémentaire G de O par rapport à E , sans quoi C contiendrait deux points y et -y ($y \neq 0$), donc aussi O, contrairement à l'hypothèse. Comme G est <u>connexe</u> (<u>Top.gén</u>.,chap.VI, § 2,prop.5), il existe au moins un point frontière x de C par rapport à G ; on a donc $x \neq 0$ et $x \notin C$, puisque C est ouvert dans G ; d'autre part, si on avait $-x \in C$, O serait point interne de C (§ 1,prop.9), ce qui est absurde.

Passons maintenant au cas général où E est quelconque ; nous pouvons toujours supposer que O appartient à V . Soit $\mathfrak{M}$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels contenant V et ne rencontrant pas A ; ordonnons $\mathfrak{M}$ par inclusion. La réunion des sous-espaces vectoriels appartenant à une partie totalement ordonnée de $\mathfrak{M}$ est encore un sous-espace vectoriel ne rencontrant pas A , donc appartient à $\mathfrak{M}$; autrement dit, $\mathfrak{M}$ est <u>inductif</u> (<u>Ens</u>. R, § 6,n°9) ; d'après le th. de Zorn (<u>Ens</u>. R, § 8,n°10) $\mathfrak{M}$ possède donc un élément <u>maximal</u> H ; pour achever la démonstration, il nous reste à prouver que H est un <u>hyperplan</u>.

Supposons le contraire, et soit a un point de A , G le sous-espace vectoriel engendré par a et H ; dans cet espace, H admet pour supplémentaire la droite D joignant 0 et a . Comme par hypothèse $G \neq E$, il existe une droite D' passant par 0 et non contenue dans G ; soit G' le sous-espace vectoriel $G+D'$, et soit A' l'ensemble convexe intersection de G' et de A ; tout point de A' est interne. Dans G', le plan $P=D+D'$ est supplémentaire de H ; soit B la projection de A' sur P parallèlement à H ; B est un ensemble convexe dont tous les points sont internes (§ 1, n°5), et 0 n'appartient pas à B . Il existe donc dans P une droite D'' passant par 0 et ne rencontrant pas B ; le sous-espace vectoriel $H'=H+D''$ ne rencontre pas A' , ni a fortiori A ; H ne serait donc pas élément maximal de $\mathfrak{M}$, contrairement à l'hypothèse, ce qui achève la démonstration.

<u>2è démonstration</u>. Montrons d'abord qu'on peut se borner au cas où A <u>engendre</u> E . Dans le cas contraire, soit U la variété linéaire affine engendrée par A ; si dans U , W est un hyperplan contenant $V \cap U$ et ne rencontrant pas A , tout hyperplan H contenant $V+W$ et ne contenant pas U répondra à la question. Supposons en outre que $0 \in V$. Soit a un point de A , et soit $\mathfrak{K}$ l'ensemble des secteurs coniques convexes de sommet 0 , contenant V et A , et ne contenant pas $-a$; $\mathfrak{K}$ n'est pas vide, car si S_0 est le secteur conique convexe de sommet 0 engendré par V et A , $-a$ ne peut appartenir à S_0 , sans quoi on aurait $-a=\lambda x+y$ avec $x \in A$, $y \in V$, $\lambda \geqslant 0$, d'où $-y=a+\lambda x$ et $-\frac{1}{1+\lambda}y=\frac{1}{1+\lambda}(a+\lambda x) \in A$, contrairement à l'hypothèse que V ne rencontre pas A .

L'ensemble $\mathfrak{K}$, ordonné par inclusion, est <u>inductif</u> ; soit S un élément maximal de $\mathfrak{K}$; nous allons montrer que S est un <u>demi-espace fermé</u> défini par un hyperplan H . Nous établirons d'abord que pour tout

$x \in E$, ou bien $x \in S$, ou bien $-x \in S$ (autrement dit $E = S \cup (-S)$). En effet, supposons que $x \notin S$; alors le secteur conique convexe engendré par S et la demi-droite d'origine O passant par x ne peut appartenir à $\mathfrak{K}$, donc contient nécessairement $-a$; on a par suite $-a = \lambda x + y$, avec $y \in S$, $\lambda \geqslant 0$; si on avait $=0$, on en déduirait $-a = y \in S$, contrairement à la définition de S ; on peut donc décrire $-x = \frac{1}{\lambda}a + \frac{1}{\lambda}y$, donc $-x \in S$.

Soit alors $H = S \cap (-S)$; il est clair que H est un <u>sous-espace vectoriel</u> de E ; nous allons prouver que H est un <u>hyperplan</u> et S un demi-espace fermé défini par H . Pour cela, il nous suffira de prouver que pour tout $x \in S$, il existe un nombre $\alpha \geqslant 0$ tel que $x = \alpha a + y$, où $y \in H$. Or, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $x - \lambda a$ appartient à S ou à $-S$; si $x - \lambda a$ appartient à S (resp. $-S$), il en est de même de $x - \mu a$ pour $\mu \leqslant \lambda$ (resp. $\mu > \lambda$), puisque S est un secteur conique convexe ; l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $x - \lambda a \in S$ (resp. $-S$) est donc un intervalle I (resp. I'), et on a $\mathbb{R} = I \cup I'$. Il est clair que I n'est pas vide, puisqu'il contient O ; si nous prouvons que I' <u>n'est pas vide</u>, il en résultera que I est un intervalle illimité à gauche d'extrémité α, I'un intervalle illimité à droite d'origine α . Or, α appartient à I', car dans le cas contraire $-(x - \alpha a)$ n'appartiendrait pas à S ; le secteur conique convexe engendré par S et la demi-droite passant par $-(x - \alpha a)$ n'appartiendrait donc pas à $\mathfrak{K}$, et par suite contiendrait $-a$; mais la relation $-a = -\rho(x - \alpha a) + y$, où $\rho \geqslant 0$ et $y \in S$, ne peut être vérifiée que si $\rho > 0$, et elle donne $x - (\alpha + \frac{1}{\rho})a = \frac{1}{\rho}\, y \in S$, contrairement à la définition de α . On voit de la même manière que $\alpha \in I$, donc $x - \alpha a \in S \cap (-S) = H$.

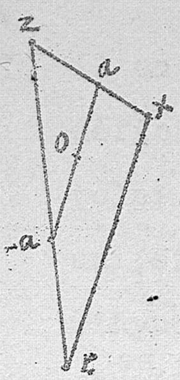

fig. 3

Tout revient donc à voir que I' n'est pas vide. Or (fig.3) il existe par hypothèse $\beta > 0$ tel que $a-\beta(x-a)=z$ appartienne à A, donc à S. Alors, le point $t=x-2(1+\frac{1}{\beta})a = -\frac{1}{\beta}z-(1+\frac{1}{\beta})a$ ne peut appartenir à S, car le point $-a = \frac{1}{1+\frac{1}{\beta}}(t + \frac{1}{\beta} z)$ appartiendrait aussi à S, contrairement à la définition de $\mathfrak{X}$; on a donc $2(1 + \frac{1}{\beta}) \in I'$.

Pour achever la démonstration, il suffit de remarquer que H n'a aucun point commun avec A ; en effet, un tel point y étant interne dans A par hypothèse, il existerait $\gamma > 0$ tel que $u=y-\gamma(a-y) \in S$ et $-a = \frac{1}{\gamma} u-(1 + \frac{1}{\gamma})y$ appartiendrait à S, puisque $-y \in H \subset S$. L'ensemble A est donc strictement d'un même côté de H.

C.Q.F.D.

Remarque.- Le th.1 est inexact si l'ensemble convexe A n'a aucun point interne (cf. exerc.3).

COROLLAIRE 1.- Tout ensemble convexe A dont tous les points sont internes est l'intersection des demi-espaces ouverts qui le contiennent.

Il suffit d'appliquer le th.1 en prenant pour V un point $x \notin A$ pour voir qu'il existe un demi-espace ouvert contenant A mais ne contenant pas x.

COROLLAIRE 2.- Soit A un ensemble convexe ayant au moins un point interne, et soit V une variété linéaire ne contenant aucun point interne de A. Il existe un hyperplan H contenant V et tel que A soit d'un même coté de H.

En effet, soit B l'ensemble (non vide par hypothèse) des points internes de A ; B est convexe et tous ses points sont internes (§ 1, cor.1 de la prop.7). Comme V ne rencontre pas B par hypothèse il existe un hyperplan H contenant V et tel que B soit tout entier d'un même côté de H.

Il en résulte que A ne peut avoir aucun point dans le demi-espace ouvert défini par H et ne contenant pas B , car si x était un tel point, y un point de B , le segment ouvert d'extrémités x et y rencontrerait H en un point z , qui serait interne dans A (§ 1,prop.7), contrairement à l'hypothèse. Il en résulte que A est tout entier d'un même coté de H .

COROLLAIRE 3.- <u>Soient</u> A <u>et</u> B <u>deux ensembles convexes sans point commun, dont l'un au moins engendre</u> E <u>et a des points internes</u> . <u>Il existe alors un hyperplan qui sépare</u> A <u>et</u> B .

En effet, l'ensemble convexe $C=A-B$ a des points internes, car si a est point interne de A , b un point quelconque de B , pour toute droite $t \rightarrow a-b+tc$ passant par $a-b$, il existe $\alpha > 0$ tel que pour $|t| < \alpha$, $a+tc \in A$, donc $a-b+tc \in A-B$. Cela étant, 0 n'appartient pas à C par hypothèse, donc (cor.2) il existe un hyperplan H' passant par 0 et tel que C soit tout entier d'un même côté de 0 . Supposons par exemple que $f(x)=0$ soit une équation de H' (f forme linéaire) et que $f(x) \geqslant 0$ dans C. Alors, pour tout $x \in A$ et tout $y \in B$, on a $f(x) \geqslant f(y)$. Posons $\alpha = \inf_{x \in A} f(x)$; α est fini, et on a $f(x) \geqslant \alpha$ pour tout $x \in A$, $f(y) \leqslant \alpha$ pour tout $y \in B$; l'hyperplan H d'équation $f(x)=$ <u>sépare</u> donc A et B .

<u>Remarque</u>.- Même si A et B n'ont aucun point commun, il n'existe pas toujours d'hyperplan qui les sépare <u>strictement</u> (exerc.6) .

<u>2. Variétés d'appui d'un ensemble convexe.</u>

Soit A un ensemble convexe, ayant des points internes et soit a un point <u>non interne</u> de A . D'après le cor.2 du th.1, il existe au moins un hyperplan H contenant a et tel que A soit d'un même coté de H ; un tel hyperplan pour un ensemble A quelconque, convexe ou non, est dit <u>hyperplan d'appui</u>.

<u>Exemple</u>.- Dans l'espace $\mathcal{R}^n$, en tout point x de la sphère euclidienne S_{n-1} , l'hyperplan passant par ce point et orthogonal au vecteur x , c'est-à-dire l'hyperplan d'équation $\langle y,x\rangle=1$ est un hyperplan d'appui de la boule unité $\mathcal{B}_n$, puisque $\langle x,x\rangle=1$ et que, pour $\|y\|\leqslant 1$, on a $\langle y,x\rangle\leqslant\|y\|\cdot\|x\| = \|y\|\leqslant 1$.

On notera que s'il existe une droite D passant par a et telle que $D\cap A$ contienne un segment <u>ouvert</u> auquel appartient a , D est nécessairement dans H , sans quoi il y aurait des points de A dans chacun des demi-espaces ouverts définis par H .

Nous allons préciser ces propriétés.

PROPOSITION 1.- <u>Soit A un ensemble convexe, x un point de A . La réunion F_x de toutes les parties convexes M de A telles que x soit point interne de M , est un ensemble convexe dont x est point interne</u>.

En effet, si M est une partie convexe de A telle que x soit point interne de M , pour tout $y\in M$, ou bien $y=x$, ou bien la droite D passant par x et y est telle que $D\cap A$ contienne un segment ouvert auquel appartient x . Il suffit de prouver que l'ensemble F_x des points $y\in A$ définis par cette propriété est convexe ; or, si $y\in F_x$ et $y\neq x$, tout point du segment d'extrémités x et y appartient à F_x ; d'autre part, si $y\in F_x$, $z\in F_x$, y et z étant distincts de x , il existe $\alpha>0$ tel que pour $|t|<\alpha$ les points $x+t(y-x)$ et $x+t(z-x)$ appartiennent à A . Il en est donc de même des points $x+t(\lambda y+(1-\lambda)z-x)=\lambda(x+t(y-x)) + (1-\lambda)(x+t(z-x))$ pour $0\leqslant\lambda\leqslant 1$. L'ensemble F_x est donc convexe, et il est clair que x est point interne de F_x par définition.

Nous dirons que l'ensemble F_x est la <u>facette</u> de A au point x ; si x est point interne de A , on a évidemment $F_x = A$; la notion de facette n'a donc d'intérêt que si x n'est pas point interne de A .

Si A est un secteur conique convexe de sommet x_0 , la facette de tout point $x \neq x_0$ de A contient x_0 par définition.

PROPOSITION 2.- <u>Si V est la variété linéaire affine engendrée par la facette</u> F_x <u>d'un point</u> $x \in A$, <u>on a</u> $F_x = V \cap A$.

En effet, comme x est point interne de F_x , V est l'ensemble des droites passant par x et par tous les points de F_x distincts de x (ou l'ensemble $\{x\}$ si $F_x = \{x\}$) ; la proposition résulte donc de la définition de F_x .

Lorsque la <u>dimension</u> de F_x est définie, on dit encore que c'est la <u>dimension de</u> A <u>au point</u> x . Les points x pour lesquels $F_x = \{x\}$ (autrement dit, tels que A soit de dimension 0 en ces points) sont encore appelés les <u>sommets</u> ou <u>points extrémaux</u> de A : ils sont caractérisés par le fait qu'<u>aucune</u> droite passant par x ne contient de segment ouvert contenu dans A et auquel appartienne x .

D'après la définition de F_x , on voit que si x n'est pas point interne de A , et si A possède des points internes, tout hyperplan d'appui de A qui contient x contient la facette F_x . Généralisant, nous dirons qu'une variété linéaire affine V est une <u>variété d'appui</u> de A si elle rencontre A , et si, pour tout point $x \in V \cap A$, la facette F_x est <u>contenue dans</u> V . L'espace E est évidemment une variété d'appui. Si A contient des points internes, une variété d'appui distincte de E ne peut contenir aucun point interne ; d'après le cor. 2 du th.1, elle est donc <u>contenue dans un hyperplan d'appui</u> de A .

Toute intersection de variétés d'appui de A est encore une variété d'appui.

PROPOSITION 3.- Pour tout point x d'un ensemble convexe A , l'intersection des variétés d'appui de A contenant x est la variété linéaire V engendrée par F_x .

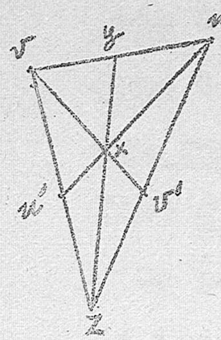

fig. 4

En effet, il est clair que V est contenue dans toute variété d'appui contenant x ; tout revient à prouver que V est une variété d'appui de A , ou encore que, pour tout point $y \in F_x$, $F_y \subset F_x$. Or (fig.4) soient u et v deux points de A tels que y appartienne au segment ouvert d'extrémités u et v . Par hypothèse, il existe $\beta > 0$ tel que $z=x-\beta(y-x)$ appartienne à A ; on en déduit que le point u' où la droite passant par u et x rencontre la droite passant par v et z , appartient au segment d'extrémités v,z , donc à A : car on a , en supposant pour simplifier $x=0$, $z=-\beta y$, $v=y-\alpha(u-y)$ $(\alpha>0)$, d'où aisément $u'=-\frac{\alpha\beta}{1+\alpha+\beta}$ $u = \frac{\beta}{1+\alpha+\beta} v+(1-\frac{\beta}{1+\alpha+\beta})z$. Le point u appartient donc à F_x , ce qui établit la proposition.

On notera que la facette F_x d'un point non interne x A est contenue dans l'intersection de A et de tous les hyperplans d'appui de A contenant x , mais peut être distincte de cette intersection (exerc. 11).

On dit qu'un ensemble convexe A ayant des points internes est strictement convexe si tout hyperplan d'appui de A ne rencontre A qu'en un seul point ; d'après ce qui précède, tout point non interne d'un ensemble strictement convexe A est un sommet de A ; réciproquement, s'il en est ainsi, A est strictement convexe, car si un hyperplan d'appui de A contient deux points distincts x,y de A , il contient tous les points du segment ouvert d'extrémités x,y et un tel point n'est pas un sommet.

3. Prolongement des formes linéaires.

THÉORÈME 2 (Hahn-Banach).- Soit p une fonction convexe, positive et positivement homogène, définie dans un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$. Soit G un sous-espace vectoriel de E, et f une forme linéaire définie dans G et telle que $f(x) \leq p(x)$ en tout point de G. Il existe alors une forme linéaire $\overline{f}$ définie dans E, prolongeant f, et telle que $\overline{f}(x) \leq p(x)$ en tout point de E.

On peut supposer que f n'est pas identiquement nulle, sans quoi le théorème est trivial. Soit V la variété linéaire définie dans G par la relation $f(x)=1$ (hyperplan dans G) ; on a $p(x) \geq 1$ en tout point de V ; autrement dit, V ne rencontre pas l'ensemble convexe A indicateur de p (§ 2,n°2). Comme tout point de A est interne, le th.1 montre qu'il existe un hyperplan H dans E contenant V et tel que A soit strictement d'un même coté de H. Soit $\overline{f}$ la forme linéaire définie dans E et telle que $\overline{f}(x)=1$ dans H ; comme dans G, V est un hyperplan sur lequel les restrictions de $\overline{f}$ et de f sont égales, on a $\overline{f}(x)=f(x)$ dans G ; enfin, comme 0 appartient au demi-espace ouvert $f(x) < 1$, ce demi-espace contient A, et par suite la relation $\overline{f}(x)=1$ entraîne $p(x) \geq 1$. En vertu de l'homogénéité de $\overline{f}$ et de p, on a donc $\overline{f}(x) \leq p(x)$ en tout point où $\overline{f}(x) > 0$; et comme aux autres points de E on a $\overline{f}(x) \leq 0 \leq p(x)$, le théorème est démontré.
