RÉDACTION N° 112

COTE : NBR 021

TITRE : INTÉGRATION DES FORMES DIFFÉRENTIELLES (NOTES DE H. CARTAN...)

ASSOCIATION DES COLLABORATEURS DE NICOLAS BOURBAKI

NOMBRE DE PAGES : 7

NOMBRE DE FEUILLES : 7

INTÉGRATION des FORMES DIFFÉRENTIELLES

(Notes de H. CARTAN - Novembre 1948)

Intégration des formes différentielles de degré n de R^n sur les cubes de R^n .-

On considère uniquement des cubes dont les arêtes sont parallèles aux axes (produits d'intervalles de R , de même longueur). Pour de tels cubes C , on va définir $\int_C [g_1,\dots,g_n]$, les g_i étant continûment différentiables, de manière que les conditions suivantes soient satisfaites :

(1) si un cube C est subdivisé en petits cubes C_k , on a

$$\int_C [g_1,\dots,g_n] = \sum_k \int_{C_k} [g_1,\dots, g_n] .$$

(2) Si les g_i satisfont à une condition de Lipschitz de coeff. K, on a $\left| \int_C [g_1,\dots,g_n] \right| \leqslant 2^{n-1} n! \, (Kl)^n$, l désignant la longueur du côté de C .

(3) $\int_C [g_1,\dots,g_n]$ est <u>multilinéaire</u> en $g_1,\dots,g_n$.

(pour $n \geqslant 2$) (4) $\int_C [g_1,\dots,g_n]$ est <u>alterné</u> (est multiplié par -1 par échange de deux des fonctions g_i).

Avant de formuler la dernière condition (5), remarquons qu'il existe dans R^n une mesure de Radon μ et une seule telle que $\mu(C) = \int_C [g_1,\dots,g_n]$; on désignera par $\int_C f [g_1,\dots,g_n]$ l'intégrale (sur C) d'une fonction <u>continue</u> f par rapport à cette mesure. On peut obtenir cette intégrale en subdivisant le cube C en petits cubes et effectuant des "sommes de Riemann" relativement à f . Cela dit, voici la dernière condition :

(5) Si on a des fonctions cont. différ. h_i et des fonctions continues a_i , en nombre fini, telles que $\sum_i a_i dh_i = 0$, alors

$$\sum_i \int_C a_i [h_i, g_2,\dots,g_n] = 0 .$$

Si les conditions précédentes sont satisfaites, la quantité $\int_C f [g_1,\dots,g_n]$ ne dépend que de la forme différentielle $f \, dg_1 \wedge \dots \wedge dg_n$.

Si une somme d'expressions telles que $f\, dg_1 \wedge \ldots \wedge dg_n$ est <u>nulle</u> (en tant que forme différentielle), la somme des intégrales correspondantes sera nulle. Ceci justifiera la notation $\int_C f\, dg_1 \wedge \ldots \wedge dg_n$.

Cela dit, l'intégrale $\int_C [g_1, \ldots, g_n]$ va se définir, par récurrence sur n, par les conditions suivantes :

(a) pour $n=0$ (auquel cas l'ensemble des g_i est vide, et le "cube" est réduit à un point), c'est égal à 1 ; de sorte que l'intégrale d'une fonction f est égale à la <u>valeur</u> de cette fonction au point unique de l'espace.

(b) pour $n \geqslant 1$, désignons par ∂C le <u>bord</u> du cube C (somme formelle, à coeff. ± 1, des cubes de dim. n-1 de sa frontière) ; on pose la condition

$$(\mathrm{I}) \qquad \int_C [g_1, \ldots, g_n] = \int_{\partial C} g_1 [g_2, \ldots, g_n].$$

Il est évident que le problème a au plus une solution satisfaisant à ces 2 conditions, puisque, par récurrence sur n, $\int_C [g_1, \ldots, g_n]$ se trouve défini sans ambigüité. Reste à montrer que l'"intégrale" ainsi définie satisfait bien aux conditions (1) à (5). Nous commencerons par le vérifier pour $n=1$.

D'après la définition (I), l'intégrale $\int_C [g]$ pour un segment C d'origine a et d'extrémité b est égale à $g(b)-g(a)$. Les propriétés (1), (2), (3) sont immédiates ; (4) est triviale. Quant à l'intégrale $\int_C f[g]$, on sait qu'elle est égale à l'intégrale ordinaire $\int_a^b fg'dx$. (Cela résultera aussi de la démonstration générale donnée ci-dessous). La propriété (5) découle alors aussitôt de là.

Supposons les propriétés (1) à (5) vérifiées pour n-1, et montrons qu'elles sont vérifiées pour n. La définition (I) rend (1) évidente, parce que si C est subdivisé en C_i, ∂C est égal à $\sum_i \partial C_i$

Si maintenant g_1 est une fonction constante, la définition (I) montre que $\int_C [g_1, \ldots, g_n] = 0$; en effet, on a $\int_{\partial C} [g_2, \ldots, g_n] = 0$, car c'est égal, d'après (I) pour la dimension n-1, à $\int_{\partial\partial C} g_2 [g_3, \ldots, g_n]$, et $\partial\partial C$ est nul.

De là résulte que $\int_C [g_1, \ldots, g_n] = \int_{\partial C} (g_1 - a) [g_2, \ldots, g_n]$, a étant une constante égale à la valeur de g_1 au centre du cube C . Or $|g_1 - a| \leqslant K\, l$, l désignant la longueur du côté de C , et K le coeff. de Lipschitz de g_1 . De là on déduit aussitôt la propriété (2), puisque le cube a 2n faces.

(3) est évidente d'après la définition (I). Pour (4), il est évident, d'après (I), que $\int_C [g_1, \ldots, g_n]$ est multiplié par -1 si on échange 2 des fonctions $g_2, \ldots, g_n$. Reste à montrer que c'est aussi multiplié par -1 si on échange g_1 et g_2 . Or on a

$$d(g_1 g_2) = g_1 dg_2 + g_2 dg_1 ,$$

ce qui, en vertu de (5) appliqué à n-1, donne

$$\int_{\partial C} [g_1 g_2, \ldots, g_n] = \int_{\partial C} g_1 [g_2, \ldots, g_n] + \int_{\partial C} g_2 [g_1, g_3, \ldots, g_n] .$$

Comme le premier membre est nul d'après une remarque antérieure, on obtient le résultat annoncé.

Reste à prouver la condition (5) pour n . On doit montrer : si $\sum_i a_i dh_i = 0$ (h_i cont. différ. et a_i continues), on a

$$\mathcal{J} = \sum_i \int_C a_i [h_i, g_2, \ldots, g_n] = 0 ,$$

or, en remontant à la définition de l'intégrale de Riemann,

$$\mathcal{J} = \lim \sum_{i,k} \int_{\partial C_k} a_i (P_k) h_i [g_2, \ldots, g_n] ,$$

le point P_k étant le centre du cube C_k d'une subdivision de C , la limite s'entendant pour des subdivisions de plus en plus fines. Mais, pour P dans ∂C_k , on a $\sum_i a_i(P_k) h_i(P) - \sum_i a_i(P_k) h_i(P_k) = \varepsilon l_k$, en désignant par l_k l'arête du cube C_k , et ε tendant vers 0 avec l_k

(cela résulte de l'hypothèse $\sum_i a_i dh_i = 0$). Donc $\mathcal{J}$ est égal à $\lim \sum_{i,k} a_i(P_k)h_i(P_k) \int_{\mathcal{X}_k} [g_2,\dots,g_n]$ qui est nul puisque $\int_{\mathcal{I}_k} [g_2,\dots,g_n] = 0$. C.Q.F.D.

<u>Formule de Stokes</u>.- Soit, dans R^n, une forme différ. ω de degré n-1, à coeff. cont. différ. dans tout l'espace. Alors, pour tout cube C , on a

$$\int_C d\omega = \int_{\partial C} \omega$$

comme cela résulte de la formule (I) .

Mais on peut étendre la définition de l'intégrale d'une forme différentielle de degré n (dans R^n) du cas du cube à celui d'un <u>simplexe</u> (orienté). En effet, la mesure $\int [g_1,\dots,g_n]$, définie pour les cubes, se prolonge notamment à tous les simplexes. Ceci étant fait, je dis que l'on a $\int_S d\omega = \int_{\partial S} \omega$ pour tout simplexe S de dimension n de R^n (il s'agit de simplexe euclidien orienté). En effet, soit une partition continue différ. de l'unité (f_i), dont l'ensemble d'indices soit l'ensemble des sommets de S , telle que : pour chaque i, f_i est identiquement nulle dans un voisinage ouvert du demi-espace fermé déterminé par la face opposée au sommet d'indice i et ne contenant pas ce sommet. Soit C_i le pavé défini par les n vecteurs ayant leur origine au sommet d'indice i et leurs extrémités aux autres sommets contigus de S . Il est clair que $\int_{C_i} d(f_i\omega) = \int_S d(f_i\omega)$, $\int_{\partial C_i} f_i\omega = \int_{\partial S} f_i\omega$, et par suite

$$\int_{\partial S} f_i\omega = \int_S f_i d\omega + \int_S (df_i)\wedge\omega \quad .$$

En sommant par rapport à i , on trouve bien $\int_{\partial S} \omega = \int_S d\omega$.

<u>Intégration sur les simplexes singuliers différentiables d'une variété différentiable</u> .-

On est ramené à intégrer une forme différ. (à coeff. continus) sur un simplexe euclidien, lorsque cette forme est définie dans un voisinage du simplexe euclidien. On peut alors la supposer définie dans tout R^n , car, en la multipliant par une fonction cont. différ. qui s'annule hors d'un voisinage convenable de S et est égale à un dans un voisinage de S, on obtient une forme qui coïncide avec la forme donnée dans un voisinage de S et est définie dans tout l'espace.

La formule de Stokes est évidemment valable pour les simplexes différentiables d'une variété différentiable.

<u>Théorie générale de la différentiation extérieure</u>.-

En réalité, ce qu'on a dit plus haut sur la formule de Stokes ne présuppose pas connue une définition générale et une théorie de la différentielle d'une forme différentielle. Elle montre simplement que si des g_i sont cont. différ. sur une variété différentiable, on a

$$\int_{\partial S} g_1 dg_2 \,..\, dg_n = \int_S dg_1 \,...\, dg_n$$

pour tout simplexe différentiable S , de dimension n .

Cela posé, nous dirons qu'une forme différentielle ω à coeff. continus possède une différentielle extérieure s'il existe une forme différ. $\overline{\omega}$ à coeff. continus telle que, pour tout simplexe (on pourrait, avec avantage, se borner aux images continûment différentiables des <u>cubes</u>) diff. S , on ait

$$\int_{\partial S} \omega = \int_S \overline{\omega}$$

Une telle forme, si elle existe, est <u>unique</u> (prendre des coordonnées locales, et user de petits cubes dans l'espace euclidien correspondant). On l'appelle la différentielle extérieure de ω ; elle se note $d\omega$.

Linéarité. Si ω peut s'écrire $f\, dg_1 \wedge \ldots \wedge dg_n$, où f et les g_i sont cont. différ., alors $d\omega$ existe et est égale à $df \wedge dg_1 \wedge \ldots \wedge dg_n$.

<u>Remarque</u> : dire que ω de degré 0 (c'est-à-dire une fonction continue f) a une diff. extérieure, c'est dire que f est continûment différentiable.

Si $d\omega$ existe, la forme $d\omega$ a une différentielle ext., qui est nulle (évident par le th. de Stokes (ceci fournit une dém. de $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ pour f 2 fois cont. différentiable)).

La notion de différentielle ext. a un caractère local. Pour reconnaître si une forme possède une différ. ext., il suffira d'utiliser des coordonnées locales. Prenons un système particulier de coordonnés locales ; je dis : pour que ω ait une différentielle ext., il faut et il suffit que ω soit limite de formes ω_k à coeff. cont. différ. ("limite" s'entendant au sens de la convergence compacte des coeff.), telles que les $d\omega_k$ aient une "limite" ; cette limite est alors la différentielle extérieure de ω . (Démonstration : régulariser).

Comme conséquence du critère précédent : le produit ext. de 2 formes ayant une différentielle extérieure a une diff. ext., et on a la formule connue donnant le d d'un produit. En effet : cette formule se vérifie pour des formes à coeff. cont. différ., et ensuite on passe à la limite.

Si on fait une application cont. différentiable d'une variété dans une autre, l'application qu'on en déduit de l'anneau des formes diff. de la seconde dans l'anneau des formes diff. de la première transforme toute forme ayant une diff. ext. en une forme ayant une différ. ext., et cette application est permutable avec l'opérateur de diff. extérieure : conséquence immédiate de la formule de Stokes.
