LIVRE VIII
INTEGRATION (ETAT 3 BIS)

Rédaction n° 110

Nombre de pages : 117

Nombre de feuilles : 117

LIVRE VIII

I N T E G R A T I O N (Etat 3 bis)

Commentaires .

La rédaction "état 3" de l'Intégration actuellement distribuée, ne comprend que les chapitres I et II . En poursuivant la rédaction, il est apparu de plus en plus nettement qu'il y a avantage à alléger ces deux premiers chapitres de toutes les considérations relatives aux espaces L^p , qui se trouvent actuellement partagés en 3 morceaux (un dans chacun des chap.I et II, plus la théorie classique, qui devait primitivement figurer dans le chap.III). L'état "3 bis" de la rédaction consiste donc, d'une part, en modifications des chap.I et II de l'état 3, qui vont être énumérées ci-dessous, d'autre part en la suite de la rédaction, comprenant :

Chap.III : Intégrale et mesure.

Chap.IV : Les espaces L^p .

Chap. V : Mesures de Radon ; mesures de Haar ; mesures de Lebesgue.

Chap.VI : Eléments de Calcul des probabilités.

Modifications au Chap. I .

P. 12, dans la définition des fonctions additives d'ensemble, ajouter qu'on doit avoir $\lambda(\phi)=0$.

P. 13, remarquer que le raisonnement pour démontrer $L(f+g)=L(f)+L(g)$ s'étend sans modification au cas où $\lambda(X)$ prend ses valeurs dans un groupe additif quelconque G , f et g dans un autre groupe additif H , $L(f)$ dans un troisième groupe K , tels qu'il y ait une application bilinéaire de $G\times H$ dans K , servant à définir $L(f)$.

Supprimer tout le § 3.

P. 41, la démonstration de la relation (1) est inexacte. Il faut raisonner comme suit : pour tout $\delta > 0$, on considère la fonction $g(x)=f(x)/f(x)$ pour $|f(x)| \geqslant \delta$, $g(x)=f(x)/\delta$ pour $|f(x)| \leqslant \delta$; g appartient au clan Φ_V et prend ses valeurs dans la boule unité S de V, donc l'application de la prop. 1 donne $|L(|f|g)| \leqslant L(|f|)$. Reste à voir que lorsque δ tend vers 0, $L(|f|g)$ tend vers $L(f)$, ou encore que $L(f-|f|g)$ tend vers 0 ; on peut écrire $f-|f|\,g = \mu f$, où $\mu(x)=1-|f(x)|/\delta$ pour $|f(x)| \leqslant \delta$ et $\mu(x)=0$ pour $|f(x)| \geqslant \delta$. Si on prend une base dans V, et si f_i sont les composantes de f, il suffit de montrer que $L(\mu f_i)$ tend vers 0 pour chaque i. Or, toutes les normes sur V étant équivalentes, il existe un nombre $k > 0$ indépendant de δ et tel que la relation $|f_i(x)| \geqslant k\delta$ entraîne $|f(x)| \geqslant \delta$; on a donc $\mu(x)=0$ pour $|f_i(x)| \geqslant k\delta$ ce qui entraîne $|\mu(x)f_i(x)| \leqslant \sqrt{k\delta|f_i(x)|}$; on termine comme p.18.

P. 42, supprimer ce qui a trait aux inégalités de Hölder et Minkowski pour les fonctions de Φ_C.

Modifications au chap. II.

P. 84, démontrer la formule $\sup(x,y)\inf(x,y)=xy$: on a $\sup(x,y)=x+(y-x)^+$, $\inf(x,y)=y-(y-x)^+$, donc $\sup(x,y)\inf(x,y)= = xy+(y-x)(y-x)^+-((y-x)^+)^2$; comme $zz^+=(z^+)^2$ pour tout z, on a bien la relation énoncée.

P. 88, démontrer la prop. 2 même quand A_U n'est pas séparé. Pour cela, avec les mêmes notations, il suffit de prouver que $\lim U(y^+(x-x_n))=0$, ou que $\lim U_{x+y}(t_n)=0$; or, dans l'anneau quotient $A_U/\mathfrak{N}$ associé à A_U, on a $\lim \bar{t}_n=0$, donc $\lim U_{\bar{x}+\bar{y}}(\bar{t}_n)=0$, ce qui équivaut à $\lim U_{x+y}(t_n)=0$.

P. 91, modifier la condition (N) de la façon suivante :

(N) En désignant par S l'ensemble des $y \in A_+$ tels que, pour tout $x \in A_+$, on ait $U(yx) \leqslant U(x)$, on a la relation

(7) $$U(x) = \sup_{y \in S} U(yx)$$

pour tout $x \in A_+$.

L'ensemble S est filtrant dans A_U, et d'après sa définition et la prop.2 du § 3, il admet une borne supérieure e dans A_U ; en outre, on a, d'après (N), pour tout $x \in A_+$, $U(x) = \sup_{y \in S} U_x(y) = U_x(e) = U_e(x)$, donc $U = U_e$. Quels que soient x, y dans A, on a donc $U_x(y) = U(xy) = U_e(xy) = U_{ex}(y)$, ce qui entraîne $x = ex$. D'autre part, la relation $U_x(e) \geqslant U_x(y)$ pour tout $y \in S$ s'écrit $U_x(e-y) \geqslant 0$ pour tout $x \in A_+$, et entraîne par suite $y \leqslant e$ pour tout $y \in S$, d'où $xy \leqslant ex = x$ pour tout $x \in A_+$ et tout $y \in S$. Cela étant, comme $\lim U(x-xy) = 0$ quand y parcourt l'ensemble filtrant S, pour toute forme linéaire X sur A telle que $0 \leqslant X \leqslant \lambda U$, on a aussi $\lim X(x-xy) = 0$ suivant S.

P. 94, ajouter au § 4 le n° suivant :

4. L'espace $L^1(A)$.

Supposons toujours que, dans A, la forme linéaire U satisfasse à la condition (N). Pour tout x appartenant à A_U, nous poserons

(9) $$\|x\|_1 = \sup_{y \in S} U_y(|x|)$$

et nous désignerons par $L^1(A)$ l'ensemble des $x \in A_U$ pour lesquels $\|x\|_1 < +\infty$. On a évidemment $A \subset L^1(A)$, et sur A on a $\|x\|_1 = U(|x|)$. Si x et y appartiennent à $L^1(A)$, pour tout $z \in S$, on a $U_z(|x+y|) \leqslant U_z(|x|) + U_z(|y|) \leqslant \|x\|_1 + \|y\|_1$, ce qui montre que $x+y \in L^1(A)$ et donne, en prenant la borne supérieure du premier membre

$$\|x+y\|_1 \leqslant \|x\|_1 + \|y\|_1$$

En outre, il est immédiat que pour tout scalaire λ, on a $\|\lambda x\|_1 = |\lambda| . \|x\|_1$; donc $L^1(A)$ est un <u>sous-espace vectoriel</u> de A_U, et $\|x\|_1$ une <u>semi-norme</u> sur $L^1(A)$. Montrons que la topologie définie sur $L^1(A)$ par cette semi-norme est <u>plus fine</u> que la topologie induite par celle de A_U ; cette dernière étant séparée, il en résultera que $\|x\|_1$ est une <u>norme</u>. Or, pour tout $z \in A_+$, il existe un scalaire $\lambda > 0$ tel que $\lambda z \in S$, en vertu de la relation (5) ; on a donc

$$(10) \qquad U_z(|x|) = \frac{1}{\lambda} U_{\lambda z}(|x|) \leqslant \frac{1}{\lambda} \|x\|_1$$

ce qui démontre notre assertion.

Enfin, notons que $L^1(A)$ est un <u>espace de Riesz</u> pour la relation d'ordre induite par celle de A_U. En effet, les relations $x \in L^1(A)$, $0 \leqslant y \leqslant x$ entraînent $\|y\|_1 \leqslant \|x\|_1$, donc $y \in L^1(A)$; on en déduit aussitôt que si $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$ sont deux éléments de $L^1(A)$, $\sup(x,y) \leqslant x+y$ appartient à $L^1(A)$, donc $L^1(A)$ est réticulé.

<u>Théorème 3. L'espace normé $L^1(A)$ est complet, et A est partout dense dans cet espace.</u>

Soit $\mathfrak{F}$ un filtre de Cauchy sur $L^1(A)$; d'après (10), $\mathfrak{F}$ est aussi un filtre de Cauchy dans l'espace A_U, donc converge vers $x_0 \in A_U$. En outre, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble $M \in \mathfrak{F}$ tel que, quels que soient x, y dans M et $z \in S$, on ait $U_z(|x-y|) \leqslant . \|x-y\|_1 \leqslant \varepsilon$; laissant fixes z et x et faisant tendre y vers x_0 suivant $\mathfrak{F}$, on voit, en vertu de la continuité de U_z dans A_U, que $U_z(|x_0-x|) \leqslant \varepsilon$ pour tout $x \in M$ et tout $z \in S$; d'après (9), cela montre que $x_0 - x \in L^1(A)$, donc $x_0 \in L^1(A)$, et $\|x_0 - x\|_1 \leqslant \varepsilon$ pour tout $x \in M$, ce qui prouve que x_0 est limite du filtre $\mathfrak{F}$ dans l'espace normé $L^1(A)$, qui est donc <u>complet</u>.

Pour tout $x \in A_+$, désignons par J_x l'ensemble des $y \in A_U$ tels que $|y| \leqslant x$, et soit A' la partie de A_U réunion des J_x, lorsque x parcourt A_+. Pour voir que A est partout dense dans $L^1(A)$, nous allons prouver que A est dense par rapport à A' et A' dense par rapport à $L^1(A)$ (pour la topologie de $L^1(A)$).

En premier lieu, montrons que sur chaque ensemble J_x, la topologie définie par la norme $\|z\|_1$ est <u>identique</u> à celle induite par la topologie de A_U ; pour cela, il suffit de montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $t \in A_+$ et $\eta > 0$ tels que les relations $U_t(|z|) \leq \eta$ et $-x \leq z \leq x$ entraînent $\|z\|_1 \leq \varepsilon$. En effet, il existe $t \in A_+$ tel que $|U-U_t|(x) \leq \frac{\varepsilon}{2}$, et a fortiori $|U(y|z|)-U_t(y|z|)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ pour $|z| \leq x$ et $y \in S$; d'après (9), on a donc en passant à la limite suivant l'ensemble filtrant S, $\left|\|z\|_1 - U_t(|z|)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout $z \in J_x$; si donc $U_t(|z|) \leq \frac{\varepsilon}{2}$, on a aussi $\|z\|_1 \leq \varepsilon$.

Cela étant, pour prouver que A est dense dans A' pour la topologie de $L^1(A)$, il suffit de montrer que tout $z \in J_x$ est adhérent (pour la topologie de A_U), à la trace de J_x sur A. Or z est adhérent à A ; si y tend vers z en restant dans A, l'élément $y' = \sup(\inf(y,x),-x)$ tend vers $\sup(\inf(z,x),-x)=z$, et appartient à $J_x \cap A$.

Montrons enfin que A' est dense par rapport à $L^1(A)$; il suffit de montrer que tout élément $x \geq 0$ de $L^1(A)$ est limite, pour la topologie de $L^1(A)$, de l'ensemble filtrant F_x des $y \in A'$ tels que $0 \leq y \leq x$. Notons d'abord que x est borne supérieure (et limite pour la topologie de A_U) de F_x, car si $z \geq 0$ tend vers x en restant dans A, $\inf(x,z)$ tend vers $\inf(x,x)=x$ en restant dans F_x.

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe d'après (9) un $t \in S$ tel que $\|x\|_1 \leq U_t(x)+\varepsilon$; d'après la continuité de U_t dans A_U, il existe $y \in F_x$ tel que $U_t(x) \leq U_t(y)+\varepsilon \leq \|y\|_1+\varepsilon$, donc $\|x\|_1 \leq \|y\|_1 + 2\varepsilon$; autrement dit, quand y parcourt l'ensemble filtrant F_x, $\|y\|_1$ tend en croissant vers $\|x\|_1$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe donc $y_0 \in F_x$ tel que pour tout $y \in F_x$ tel que $y \geq y_0$, on ait $\|y\|_1 - \|y_0\|_1 \leq \varepsilon$;

or, comme $y \geqslant y_0$, la formule (9) montre que $\| y-y_0 \|_1 = \| y \|_1 - \| y_0 \|_1$. D'après ce qui précède, $\| x-y_0 \|_1$ est la limite de $\| y-y_0 \|_1$ lorsque y tend vers x ; on a donc $\| x-y_0 \|_1 \leqslant \varepsilon$, ce qui achève la démonstration.

Le th.3 montre que $L^1(A)$ peut être identifié à l'espace de Riesz obtenu en *complétant* A pour la norme $\| x \|_1 = U(|x|)$, d'après le procédé général décrit au §3 ; on peut donc prolonger U par continuité à $L^1(A)$, et on a encore $\| x \|_1 = U(|x|)$ dans cet espace.

Proposition 5. *Pour tout* $x \in A_U$ *et tout* $z \in A$, zx *appartient à* $L^1(A)$, *et on a* $U(zx) = U_z(x)$.

On peut se borner au cas où $z \geqslant 0$ et $x \geqslant 0$. Soit F_x l'ensemble filtrant des $y \in A'$ tels que $0 \leqslant y \leqslant x$. D'après la démonstration du th.3, U est continue dans tout ensemble J_t, où $t \in A_+$; lorsque u parcourt J_t, zu parcourt J_{zt}, donc, comme la trace d'un ensemble J_t sur A est dense dans J_t et qu'on a $U(zu) = U_z(u)$ pour $u \in A$, on a aussi par continuité $U(zu) = U_z(u)$ pour $u \in A'$; en particulier, $U(zy) = U_z(y)$ pour tout $y \in F_x$, d'où $U(zy) \leqslant U_z(x)$ pour tout $y \in F_x$. On en conclut (§ 3, prop.2) que zy a une limite dans $L^1(A)$ suivant F_x ; cette limite est aussi limite de zy (suivant F_x) dans A_U ; comme l'ensemble des zy est filtrant à droite, sa limite dans A_U est nécessairement sa borne supérieure zx, ce qui prouve que $zx \in L^1(A)$. Passant à la limite suivant F_x, on a alors $U(zx) = \lim_{y \in F_x} U(zy)$ d'après la continuité de U dans $L^1(A)$, et $U_z(x) = \lim_{y \in F_x} U_z(y)$, d'après la continuité de U_z dans A_U ; d'où la proposition.

Supprimer tout le § 5.

CHAPITRE III

INTEGRALE ET MESURE (Etat 3 bis)

Sommaire.

Commentaires

D'après le plan général de cette rédaction, ce chapitre a pour premier but de "réaliser" les éléments des espaces abstraits définis au chap. II par des fonctions ou classes de fonctions, lorsque la forme linéaire U que l'on considère est une "intégrale" sur un clan de fonctions. On peut imaginer diverses méthodes pour arriver au résultat classique ; après plusieurs essais effectifs de rédaction (qu'il tient à la disposition des curieux éventuels), le rédacteur est arrivé à la conclusion que la méthode la plus rapide est celle proposée par Cartan en 1938 ; elle s'applique non seulement à la définition des fonctions sommables, mais encore à la "réalisation" de l'espace $\tilde{\Phi}_U$ lui-même par l'ensemble de fonctions désigné par Ω (tout au moins lorsque E est un ensemble mesurable).

Le reste du chapitre comporte les propriétés essentielles de l'intégrale "abstraite", correspondant à peu près aux 3/4 de l'ancien "diplodocus", et qu'on a cherché à exposer de la manière la plus rapide possible.

CHAPITRE III .

INTEGRALE ET MESURE (Etat 3 bis)

1 . Intégrales.

1. Le problème de prolongement.

Soit ϕ un clan de fonctions définies sur un ensemble E , U une forme linéaire croissante définie dans ϕ (chap.I). On a vu (chap.II, § 4) que ϕ , ordonné par la relation notée $x \leqslant y$ (qui signifie "pour tout $t \in E$, $x(t) \leqslant y(t)$") est un annoau de Riesz ; dans cet anneau, l'ensemble des fonctions x telles que $U(x^2)=0$ est un idéal $\mathcal{N}$; comme la racine carrée d'une fonction $x \geqslant 0$ de ϕ appartient à ϕ , $\mathcal{N}$ est encore l'ensemble des fonctions $x \in \phi$ telles que $U(|x|)=0$. Grâce à cette particularité, la fonction U est ici compatible avec la relation $x \equiv y$ (mod. $\mathcal{N}$) et on peut donc, par passage au quotient, définir à partir de U une forme linéaire croissante $\tilde{U}$ sur l'anneau de Riesz $\tilde{\phi} = \phi/\mathcal{N}$ $\tilde{U}(\tilde{x})$ étant donc égale à la valeur commune des U(x) pour tous les x appartenant à une même classe $\tilde{x}$ modulo $\mathcal{N}$ (chap.II, § 3) . Sur l'anneau de Riesz $\tilde{\phi}$, la forme linéaire croissante $\tilde{U}$ est telle que $\tilde{U}(|\tilde{x}|)=0$ entraîne $\tilde{x}=0$; on peut donc complèter cet anneau pour la topologie définie par les semi-normes $\tilde{U}_{\tilde{y}}$, comme nous l'avons vu au chap.II, § 4 ; en outre, comme $\tilde{U}$ vérifie dans $\tilde{\phi}$ les conditions (5) et (N) du chap.II, § 4 (la seconde en raison de la prop.4 du chap.I, § 2), l'espace de Riesz $\tilde{\phi}_U$, complété de $\tilde{\phi}$, contient un sous-espace de Riesz $L^1(\tilde{\phi})$, sur lequel $\tilde{U}$ peut se prolonger par continuité, et définit une norme $\|\tilde{x}\|_1 = \tilde{U}(|\tilde{x}|)$ pour laquelle $L^1(\tilde{\phi})$ est complet, et $\tilde{\phi}$ partout dense dans $L^1(\tilde{\phi})$ (chap.II, § 4) .

Cela étant, ϕ est un sous-espace de Riesz de l'espace de Riesz $\overline{R}^E$ de toutes les fonctions numériques finies définies dans E , lui-même contenu dans l'ensemble réticulé $\overline{R}^E$ de toutes les fonctions numériques (finies ou non) définies dans E (ensemble qui n'est plus un espace de Riesz, puisque la somme de deux fonctions appartenant à $\overline{R}^E$ n'est pas définie en général). Nous nous proposons d'étudier la possibilité du prolongement de l'application $x \to \tilde{x}$ de Φ sur $\tilde{\Phi}$ en une application (que nous noterons encore $x \to \tilde{x}$) d'une partie Ω de $\overline{R}^E$ dans l'anneau de Riesz $\tilde{\Phi}_U$, de sorte que les propriétés de cette application, relatives à la structure algébrique et à la structure d'ordre des ensembles Φ et $\tilde{\Phi}$, soient conservées dans la mesure du possible. De façon précise, le prolongement cherché devrait satisfaire aux conditions suivantes :

a) lorsque $z=x+y$, et $t=\lambda x$ (pour $x\in\Omega$ et $y\in\Omega$) sont définis, ils appartiennent à Ω, et on a $\tilde{z}=\tilde{x}+\tilde{y}$ et $\tilde{t}=\lambda\tilde{x}$;

b) lorsque $z=xy$ est défini et que $x\in\Phi$, z appartient à Ω et $\tilde{z}=\tilde{x}.\tilde{y}$.

c) si $u=\sup(x,y)$, $v=\inf(x,y)$ dans l'ensemble $\overline{R}^E$ (pour deux éléments x,y de Ω), u et v appartiennent à Ω, et on a $\tilde{u}=\sup(\tilde{x},\tilde{y})$, $\tilde{v}=\inf(\tilde{x},\tilde{y})$ dans $\tilde{\Phi}_U$;

d) plus généralement, si M est une partie de Ω, majorée (resp. minorée) dans Ω, la borne supérieure $u=\sup M$ (resp. la borne inférieure $v=\inf M$) de M dans l'ensemble $\overline{R}^E$ (c'est-à-dire l'enveloppe supérieure (resp. l'enveloppe inférieure) des fonctions $x\in M$ (Top.gén., chap.IV, § 5)), appartient à Ω, et on a, en désignant par $\tilde{M}$ l'image de M par l'application $x\to\tilde{x}$, $\tilde{u}=\sup\tilde{M}$, $\tilde{v}=\inf\tilde{M}$ dans $\tilde{\Phi}_U$.

Comme nous allons le voir, <u>il n'est pas possible</u>, en général, de prolonger l'application $x \to \tilde{x}$ à un ensemble $\Omega \supset \phi$, de manière que toutes ces conditions soient remplies, et que l'image de Ω soit l'ensemble $\tilde{\phi}_U$ tout entier (ou même l'ensemble $L^1(\tilde{\phi})$ tout entier). En effet, considérons une <u>suite décroissante</u> (x_n) d'éléments $\geqslant 0$ de ϕ, telle que l'enveloppe inférieure de cette suite soit la fonction 0 dans E (autrement dit, que $\lim_{n \to \infty} x_n(t)=0$ pour tout $t \in E$). Dans $L^1(\tilde{\phi})$, la suite $(\tilde{x}_n)$ a une limite $\tilde{y} \geqslant 0$, qui est aussi sa borne inférieure, et est telle que $\tilde{U}(\tilde{y}) = \lim_{n \to \infty} \tilde{U}(\tilde{x}_n) = \lim_{n \to \infty} U(x_n)$. On doit nécessairement avoir $\tilde{y}=0$ si la condition d) est remplie ; par suite, la forme linéaire U doit satisfaire à la condition suivante :

(D) <u>Pour toute suite décroissante</u> (x_n) <u>de fonctions</u> $\geqslant 0$ <u>de</u> ϕ, <u>telle que</u> $\lim_{n \to \infty} x_n(t)=0$ <u>pour tout</u> $t \in E$, <u>on a</u> $\lim_{n \to \infty} U(x_n)=0$.

Il est facile de donner des exemples de formes linéaires croissantes U sur un clan ϕ, ne satisfaisant pas à la condition (D). Prenons par exemple pour ϕ l'ensemble des suites $(u_n)_{n \in N}$ de nombres réels, telles que $\lim_{n \to \infty} u_n$ existe ; pour toute suite $x=(u_n) \in \phi$, posons $U(x) = \lim_{n \to \infty} u_n$; il est immédiat que U est une forme linéaire croissante sur ϕ. Mais la condition (D) n'est pas vérifiée, car si $x_n = (u_{nm})_{m \in N}$ est la suite telle que $u_{nm}=0$ pour $m \leqslant n$, $u_{nm}=1$ pour $m > n$, les x_n forment une suite décroissante d'éléments de ϕ, dont l'enveloppe inférieure est 0, et telle que $\lim_{n \to \infty} U(x_n)=1$.

DÉFINITION 1.- <u>On dit qu'une forme linéaire croissante</u> U <u>sur un clan</u> ϕ <u>est une intégrale si elle satisfait à la condition</u> (D).

Nous allons donc nous limiter à l'étude du problème de prolongement pour les <u>intégrales</u>. Même dans ce cas, <u>il n'est pas possible</u>, en général, comme nous le verrons, d'obtenir un prolongement de $x \to \tilde{x}$ respectant toutes les conditions énumérées ci-dessus, et défini dans un ensemble de fonctions dont l'image soit $\tilde{\Phi}_U$ ou même $L^1(\tilde{\phi})$.

Nous ne parviendrons à réaliser un prolongement qu'en <u>affaiblissant</u> la condition d) : de façon précise, cette condition ne sera réalisée que pour les parties <u>dénombrables</u> de Ω , en général.

Avant de montrer comment peut se faire alors le prolongement, remarquons que la condition (D) équivaut à la suivante :

(D') <u>Pour toute suite croissante</u> (x_n) <u>de fonctions de</u> ϕ , <u>et toute fonction</u> $x \in \phi$ <u>telle que</u> $x \leqslant \sup_n x_n$ (enveloppe supérieure des x_n) <u>on a</u> $U(x) \leqslant \sup_n U(x_n) = \lim_{n \to \infty} U(x_n)$.

En effet, (D') entraîne (D), car si (x_n) est une suite décroissante de fonctions $\geqslant 0$ de ϕ , telle que $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, la suite $(-x_n)$ est croissante et $0 \leqslant \sup_n (-x_n)$, donc $0 \leqslant -\lim_{n\to\infty} U(x_n)$ ou $\lim_{n\to\infty} U(x_n) \leqslant 0$ et comme $U(x_n) \geqslant 0$ pour tout n , $\lim_{n\to\infty} U(x_n) = 0$. Réciproquement, (D) entraîne (D') ; soit en effet (x_n) une suite croissante de fonctions de ϕ et x une fonction de ϕ telle $x \leqslant \sup_n x_n$; posons $y_n = \inf(x, x_n)$; la suite (y_n) formée de fonctions de ϕ , est croissante et on a $\lim_{n\to\infty} y_n(t) = x(t)$ pour tout $t \in E$; en appliquant (D) à la suite décroissante $(x - y_n)$, on a donc $U(x) = \lim_{n\to\infty} U(y_n)$; mais comme $y_n \leqslant x_n$, $U(y_n) \leqslant U(x_n)$, donc $U(x) \leqslant \lim_{n\to\infty} U(x_n) = \sup_n U(x_n)$.

La condition (D') équivaut aussi à la condition analogue pour les suites décroissantes dans ϕ : si (x_n) est une telle suite, et si $x \in \phi$ est telle que $x \geqslant \inf_n x_n$, on a $U(x) \geqslant \inf_n U(x_n) = \lim_{n\to\infty} U(x_n)$; on passe en effet de l'une à l'autre de ces conditions en changeant les signes de x et des x_n .

La condition (D) (resp. (D')) entraîne la condition analogue, où on remplace la suite (x_n) par une famille $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$, où I est un ensemble dénombrable, ordonné par une relation $\alpha \leqslant \beta$ et filtrant à droite pour cette relation, et où on suppose que $\alpha \leqslant \beta$ entraîne $x_\alpha \geqslant x_\beta$ (resp. $x_\alpha \leqslant x_\beta$). Il existe en effet une suite croissante (α_n) d'indices telle que, pour tout $\alpha \in I$, il existe un indice n tel que $\alpha \leqslant \alpha_n$; il suffit donc d'appliquer (D) (resp. (D')) à la suite (x_{α_n}) et de remarquer que $\lim_{n \to \infty} U(x_{\alpha_n}) = \lim_{\alpha \in I} U(x_\alpha)$. Nous procéderons en deux étapes, en prolongeant d'abord l'application $x \to \tilde{x}$ en une application sur $L^1(\tilde{\Phi})$, puis en une application sur une partie de $\tilde{\Phi}_U$ contenant $L^1(\tilde{\Phi})$.

Partout où, dans ce paragraphe, il ne sera pas question du produit de deux fonctions, nous utiliserons seulement l'hypothèse que Φ est un espace de Riesz quelconque, formé de fonctions numériques finies (non nécessairement bornées).

2. Intégrale supérieure et intégrale inférieure.

Dans l'espace de Riesz (normé) complet $L^1(\tilde{\Phi})$, désignons par $\tilde{I}$ l'ensemble des éléments limites de suites croissantes d'éléments de $\tilde{\Phi}$, par $\tilde{S}$ l'ensemble des éléments limites de suites décroissantes d'éléments de $\tilde{\Phi}$; la prop.3 du chap.II ; §3, montre que tout élément de $L^1(\tilde{\Phi})$ est limite d'une suite décroissante (resp. croissante) d'éléments de $\tilde{I}$ (resp. $\tilde{S}$). En raison de cette propriété, nous allons porter notre attention, dans $\overline{R}^E$, sur les fonctions qui sont enveloppes supérieures (resp. inférieures) de suites croissantes (resp. décroissantes) de fonctions de Φ.

DEFINITION 2.- Pour toute fonction numérique x définie dans E (finie ou non), on pose $U^*(x) = \inf(\sup_n U(x_n))$, la borne inférieure étant prise dans l'ensemble des suites croissantes (x_n) de fonctions de Φ

telles que $x \leqslant \sup_n x_n$ ($U^*(x)=+\infty$ s'il n'existe aucune suite croissante (x_n) ayant cette propriété). On pose $U_*(x)=\sup(\inf_n U(x_n))$, la borne supérieure étant prise dans l'ensemble des suites décroissantes (x_n) de fonctions de ϕ telles que $x \geqslant \inf_n x_n$ ($U_*(x)=-\infty$ s'il n'existe aucune suite décroissante (x_n) ayant cette propriété). La fonction U^* (resp. U_*) ainsi définie dans $\overline{R}^E$, est appelée l'intégrale supérieure (resp. l'intégrale inférieure) attachée à U.

Pour toute fonction numérique x, on a $U_*(x) \leqslant U^*(x)$. En effet, cette inégalité est évidente si $U^*(x)=+\infty$ ou si $U_*(x)=-\infty$. Dans tout autre cas, il suffit de voir que si (y_n) est une suite croissante de fonctions de ϕ, (z_n) une suite décroissante de fonctions de ϕ, telles que $\inf_n z_n \leqslant x \leqslant \sup_n y_n$, on a $\lim_{n\to\infty} U(z_n) \leqslant \lim_{n\to\infty} U(y_n)$. Or, la relation $\sup_n y_n \geqslant \inf_n z_n$ montre que l'enveloppe supérieure de la suite croissante $(y_n - z_n)$ de fonctions de ϕ est $\geqslant 0$; d'après la condition (D'), on a $\lim_{n\to\infty} U(y_n - z_n) \geqslant 0$, ce qui s'écrit $\lim_{n\to\infty}(U(y_n)-U(z_n)) \geqslant 0$, et comme on a toujours $\lim_{n\to\infty} U(y_n) > -\infty$ et $\lim_{n\to\infty} U(z_n) < +\infty$, on peut écrire $\lim_{n\to\infty} U(y_n) - \lim_{n\to\infty} U(z_n) \geqslant 0$.

On a évidemment en outre $U^*(-x) = -U_*(x)$; on peut donc se borner à étudier l'intégrale supérieure.

PROPOSITION 1.- Soient (x_n), (y_n) deux suites croissantes de fonctions de ϕ, telles que $\sup_n x_n \leqslant \sup_n y_n$; on a alors $\sup_n U(x_n) \leqslant \sup_n U(y_n)$.

En effet, on a par hypothèse $x_m \leqslant \sup_n y_n$ pour tout entier m, donc d'après l'axiome (D'), on a $U(x_m) \leqslant \sup_n U(y_n)$; faisant croître m indéfiniment, on obtient la proposition.

COROLLAIRE 1.- La fonction U^* est croissante dans $\overline{R}^E$.

Soient en effet x,y deux fonctions telles que $x \leqslant y$; on a évidemment $U^*(x) \leqslant U^*(y)$ si $U^*(y) = +\infty$. Dans le cas contraire, il existe au moins une suite croissante (u_n) de fonctions de Φ telle que $x \leqslant y \leqslant \sup_n u_n$. Pour <u>toute</u> suite croissante (y_n) de fonctions de Φ telle que $y \leqslant \sup_n y_n$, et toute suite croissante (x_n) de fonctions de Φ telle que $x \leqslant \sup_n x_n$, on a aussi, en posant $z_n = \inf(x_n, y_n)$, $x \leqslant \sup z_n$, donc $U^*(x) \leqslant \sup_n U(z_n) \leqslant \sup_n U(y_n)$; il en résulte bien que $U^*(x) \leqslant U^*(y)$.

COROLLAIRE 2.- <u>Si x est l'enveloppe supérieure d'une suite croissante (x_n) de fonctions de Φ, on a</u> $U^*(x) = \sup_n U(x_n)$.

En particulier, pour toute fonction $x \in \Phi$, on a $U^*(x) = U(x)$.

PROPOSITION 2.- <u>Soient x,y deux fonctions numériques telles que la somme $x+y$ et la somme $U^*(x)+U^*(y)$ soient définies ; on a alors</u>

$$U^*(x+y) \leqslant U^*(x)+U^*(y) \tag{1}$$

L'inégalité est évidente si un des deux nombres $U^*(x)$, $U^*(y)$ est égal à $+\infty$; dans le cas contraire, soient a,b deux nombres tels que $U^*(x) < a$, $U^*(y) < b$; il existe deux suites croissantes (x_n), (y_n) de fonctions de Φ telles que $x \leqslant \sup_n x_n$, $y \leqslant \sup_n y_n$, et $U^*(x) \leqslant \sup_n U(x_n) \leqslant a$, $U^*(y) \leqslant \sup_n U(y_n) \leqslant b$. La suite (x_n+y_n) est croissante et on a $x+y \leqslant \sup_n(x_n+y_n)$ et $\sup_n U(x_n+y_n) = \sup_n(U(x_n)+U(y_n)) \leqslant \sup_n U(x_n) + \sup_n U(y_n) \leqslant a+b$, d'où $U^*(x+y) \leqslant a+b$; comme a et b sont arbitrairement voisins de $U^*(x)$ et $U^*(y)$ respectivement, on obtient bien l'inégalité (1).

PROPOSITION 3.- <u>Soit x une fonction numérique, λ un scalaire fini et > 0 ; on a</u>

$$U^*(\lambda x) = \lambda U^*(x). \tag{2}$$

En effet, pour toute suite croissante (x_n) de fonctions de Φ telle que $x \leqslant \sup_n x_n$, (λx_n) est une suite croissante de fonctions de Φ telle que $\lambda x \leqslant \sup_n(\lambda x_n)$, et on a $\sup_n U(\lambda x_n) = \lambda \sup_n U(x_n)$.

COROLLAIRE.- <u>Soit x une fonction numérique</u> $\geqslant 0$, <u>z une fonction de Φ_+</u>, x_z <u>la fonction égale à</u> $x(t)z(t)$ <u>lorsque</u> $z(t)\neq 0$, <u>à 0 lorsque</u> $z(t)=0$. <u>On a</u>

(2 bis) $$U^*(x_z) \leqslant \|z\| U^*(x)$$

(en convenant de remplacer le second membre par 0 lorsque $\|z\| = 0$).

En effet, si $z=0$, l'inégalité est évidente ; dans le cas contraire, on a $x_z \leqslant \|z\| x$, donc le corollaire résulte de la prop.3 et du cor.1 de la prop.1 .

PROPOSITION 4.- <u>Pour toute suite</u> (x_n) <u>de fonctions numériques</u> $\geqslant 0$ <u>on a</u>

(3) $$U^*\Big(\sum_{n=1}^{\infty} x_n\Big) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} U^*(x_n) .$$

L'inégalité est évidente si le second membre est égal à $+\infty$. Dans le cas contraire, on a $U^*(x_n) < +\infty$ pour tout n ; quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe donc, pour tout n, une suite croissante $(z_{nm})_{m\geqslant 0}$ de fonctions de Φ_+ telle que, si on pose $y_n = \sup_m z_{nm}$, on ait $x_n \leqslant y_n$ et $U^*(x_n) \leqslant U^*(y_n) = \sup_m U(z_{nm}) \leqslant U^*(x_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$. Posons $y = \sum_{n=1}^{\infty} y_n$; nous allons voir que, si on pose $u_n = z_{1n}+z_{2n}+\dots+z_{nn}$, y est l'enveloppe supérieure de la suite croissante (u_n) de fonctions de Φ_+ ; en effet, on a évidemment $u_n \leqslant y$ pour tout n, et d'autre part, pour tout $n \geqslant p$, $u_n \geqslant z_{1n}+z_{2n}+\dots+z_{pn}$, d'où $\sup_n u_n \quad y_1+y_2+\dots+y_p$ pour tout p, ce qui entraîne $y = \sup_n u_n$. Cela étant, on a $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \leqslant y$, d'où $U^*\big(\sum_{n=1}^{\infty} x_n\big) \leqslant U^*(y) = \sup_n U(u_n)$; mais

mais $U(u_n)=\sum_{m=1}^{n} U(z_{mn}) \leqslant \sum_{m=1}^{n} U^*(y_m) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} U^*(x_n)+\varepsilon$; comme ε est arbitraire, on a bien la relation (3).

3. La méthode de prolongement.

Dans l'espace de Riesz R^E formé des fonctions numériques finies définies dans E, considérons le sous-ensemble $\mathcal{F}$ formé des fonctions x telles que $U^*(|x|) < +\infty$. Il résulte aussitôt des prop.2 et 3 que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de R^E ; en outre, si x appartient à $\mathcal{F}$, il en est de même de $|x|$ par définition, donc de $x^+ = \frac{1}{2}(|x|+x)$ et $x^- = \frac{1}{2}(|x|-x)$ (plus généralement, d'ailleurs, toute fonction numérique y telle que $|y| \leqslant |x|$ appartient à $\mathcal{F}$) ; donc $\mathcal{F}$ est un sous-espace de Riesz de R^E. Les prop.2 et 3 montrent d'autre part que $N(x)=U^*(|x|)$ est une semi-norme sur l'espace vectoriel $\mathcal{F}$; elle définit sur cet espace une topologie non séparée en général et est continue pour cette topologie. En outre, l'application $x \to |x|$ est uniformément continue, car on a $\big||x|-|y|\big| \leqslant |x-y|$, donc $N(|x|-|y|) \leqslant N(x-y)$; les applications $x \to x^+$, $x \to x^-$ sont donc aussi uniformément continues dans $\mathcal{F}$, les applications $(x,y) \to \sup(x,y)$, $(x,y) \to \inf(x,y)$ uniformément continues dans $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$.

Cela étant, le clan Φ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}$; son adhérence Λ_f dans $\mathcal{F}$ est aussi un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}$. Comme l'application $x \to |x|$ est continue dans $\mathcal{F}$ et applique Φ dans lui-même, elle applique Λ_f dans lui-même ; autrement dit, Λ_f est un sous-espace de Riesz de R^E. Les fonctions $x \in \Lambda_f$ seront appelées fonctions sommables finies (pour U et Φ).

Considérons alors l'espace localement convexe séparé $\dot{\mathcal{F}}$ associé à l'espace non séparé $\mathcal{F}$; c'est l'espace quotient de $\mathcal{F}$ par le sous-espace $\mathcal{N}$ formé des x telles que $N(x)=0$; soit $x \to \dot{x}$

l'application canonique de Ξ sur $\dot{\Xi}$. Comme $\Theta \subset \Lambda_f$, l'image $\dot{\Lambda}_f = \Lambda_f / \Theta$ de Λ_f dans $\dot{\Xi}$ par l'application canonique n'est autre que l'espace vectoriel séparé associé à Λ_f. D'autre part, on a, pour tout $x \in \Phi$, $N(x)=U(|x|)$; donc l'intersection $\Phi \cap \Theta$ n'est autre que l'idéal $\mathfrak{U}$ de l'anneau Φ, formé des x tels que $U(|x|)=0$ ($n^o 1$) ; et l'application $\dot{x} \to \tilde{x}$ est un <u>isomorphisme</u> de l'espace vectoriel topologique $\dot{\Phi} \subset \dot{\Lambda}_f$ <u>sur</u> le sous-espace vectoriel $\tilde{\Phi}$ de l'espace normé $L^1(\tilde{\Phi})$.

Cela étant, comme $\dot{\Phi}$ est partout dense dans $\dot{\Lambda}_f$, et a fortiori dans le complété de $\dot{\Lambda}_f$, on peut prolonger l'isomorphisme $\dot{x} \to \tilde{x}$ en un <u>isomorphisme</u> de $\dot{\Lambda}_f$ <u>sur un sous-espace</u> $\tilde{\Lambda}$ du complété $L^1(\tilde{\Phi})$ de $\tilde{\Phi}$ (Livre V, ...), isomorphisme que nous désignerons par la même notation. Si on compose cet isomorphisme avec l'application canonique $x \to \dot{x}$, on obtient une application linéaire continue $x \to \tilde{x}$ de Λ_f sur $\tilde{\Lambda}$, qui prolonge l'application de Φ sur $\tilde{\Phi}$ désignée par la même notation. On peut évidemment <u>identifier</u> au moyen de l'isomorphisme $\dot{x} \to \tilde{x}$ l'espace $\dot{\Lambda}_f$ et l'espace $\tilde{\Lambda}$; c'est ce que nous ferons désormais, considérant donc $\tilde{\Lambda}$ comme l'espace séparé <u>associé</u> à Λ_f.

Il est clair que l'application $x \to \tilde{x}$ ainsi définie satisfait à la condition a) du $n^o 1$ dans Λ_f. Montrons qu'elle satisfait aussi à b) et c). D'après le cor. de la prop. 3, pour tout $z \in \Phi$ et tout $x \in \Xi$, zx appartient à Ξ et l'application $x \to zx$ est continue dans Ξ ; comme elle applique Φ dans lui-même, elle applique Λ_f dans lui-même ; en outre, les applications $x \to \tilde{z}.\tilde{x}$ et $x \to \widetilde{zx}$ sont continues dans Λ_f et coïncident dans Φ ; elles sont donc identiques dans Λ_f, ce qui établit b). On démontre de même c) en remarquant que les fonctions $x \rightarrow |\tilde{x}|$ et $x \rightarrow |\tilde{x}|$ sont continues dans Λ_f et identiques dans ϕ.

On prolonge d'autre part l'intégrale U à Λ_f en posant $U(x)=\tilde{U}(\tilde{x})$ pour toute fonction sommable finie ; il est immédiat que c'est une forme linéaire croissante sur Λ_f, continue pour la topologie de cet espace. Par continuité, on a $U(x)=U^*(x)$ pour toute fonction $x \geqslant 0$ de Λ_f puisque cette relation est vraie dans ϕ_+ (cf. th.4).

Nous allons voir enfin, aux n^{os} suivants, que la condition d) du n°1 est satisfaite dans Λ_f pour les ensembles dénombrables et que $x \rightarrow \tilde{x}$ applique Λ_f sur $L^1(\tilde{\phi})$.

4. Fonctions négligeables et ensembles négligeables.

DÉFINITION 3.- On dit qu'une fonction numérique x (finie ou non) définie dans E est négligeable (pour U et ϕ) si $U^*(|x|)=0$.

Avec cette définition, on voit que le sous-espace Θ de Λ_f est formé des fonctions négligeables finies.

PROPOSITION 5.- Si x est négligeable, toute fonction y telle que $|y| \leqslant |x|$ est négligeable.

C'est une conséquence immédiate du cor.1 de la prop.1 .

PROPOSITION 6.- La somme d'une série de fonctions négligeables $\geqslant 0$ est négligeable.

C'est une conséquence immédiate de la prop.4 .

COROLLAIRE.- L'enveloppe supérieure d'une suite dénombrable de fonctions négligeables $\geqslant 0$ est négligeable.

En effet, si (x_n) est une suite de fonctions négligeables $\geqslant 0$, on a $\sup_n x_n \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} x_n$, et $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ est négligeable.

DÉFINITION 4.- On dit qu'une partie N de E est négligeable si sa fonction caractéristique φ_N est négligeable.

PROPOSITION 7.- <u>Toute partie d'un ensemble négligeable est négligeable. Toute réunion dénombrable d'ensembles négligeables est négligeable.</u>

En effet, si N est négligeable et $P \subset N$, on a $\varphi_P \leqslant \varphi_N$, donc la première partie résulte de la prop.5. Si (M_n) est une suite d'ensembles négligeables et M leur réunion, φ_M est l'enveloppe supérieure des fonctions φ_{M_n}, donc la seconde partie résulte du cor. de la prop.6.

On notera qu'en général une réunion non <u>dénombrable</u> d'ensembles négligeables n'est pas négligeable.

PROPOSITION 8.- <u>Pour qu'une fonction x soit négligeable, il faut et il suffit que l'ensemble des</u> $t \in E$ <u>tels que</u> $x(t) \neq 0$ <u>soit négligeable.</u>

1° La condition est <u>nécessaire</u>. En effet, soit N l'ensemble des points tels que $x(t) \neq 0$. On a $\varphi_N \leqslant \sup_n(n|x|)$, donc, d'après les prop.3 et 5 et le cor. de la prop.6, φ_N est négligeable.

2° La condition est <u>suffisante</u>. D'après la prop.5, il suffit de faire la démonstration pour une fonction y égale à $+\infty$ aux points d'un ensemble négligeable N, à 0 aux points de $\complement N$. Or, on a $y = \sup(n\varphi_N)$, donc la proposition résulte des prop.6 et 3.

DÉFINITION 5.- <u>Etant donnée une relation R contenant un argument</u> $t \in E$, <u>la relation</u> "R <u>presque partout</u>" <u>relativement à t et à l'intégrale U</u>, <u>est par définition équivalente à la relation "il existe un ensemble négligeable N tel que</u> $t \in N$ <u>ou</u> R".

En particulier, une propriété $P\{t\}$ est <u>vraie presque partout</u> si l'ensemble des $t \in E$ tels que $P\{t\}$ soit fausse est négligeable.

La prop.8 peut encore s'énoncer en disant que, pour qu'une fonction soit négligeable, il faut et il suffit qu'elle soit <u>nulle presque partout</u>.

COROLLAIRE.- Si x et y sont deux fonctions sommables finies telles que $\tilde{x}=\tilde{y}$, x et y sont égales presque partout. Inversement, si x est une fonction sommable finie, toute fonction finie y égale presque partout à x est sommable et $\tilde{x}=\tilde{y}$.

En effet, si x et y sont sommables et $\tilde{x}=\tilde{y}$, x-y appartient à Θ, donc est négligeable, et par suite $x(t)=y(t)$ presque partout. Réciproquement, si x est finie et sommable, et $x(t)=y(t)$ presque partout, $x-y \in \Theta$, donc y est sommable et $\tilde{x}=\tilde{y}$.

PROPOSITION 9.- Toute fonction x telle que $U^*(|x|) < +\infty$ est finie presque partout.

En effet, soit N l'ensemble des points $t \in E$ où $x(t)$ est infini ; pour tout entier n, on a $n.\varphi_N \leqslant |x|$, donc (prop.3 et cor.1 de la prop.1), $nU^*(\varphi_N) \leqslant N^*(|x|)$; comme n est arbitraire, $U^*(\varphi_N)=0$.

PROPOSITION 10.- Soit (x_n) une suite de fonctions de $\boxed{\Theta}$ telle que $\sum_{n=1}^{\infty} U^*(|x_n|) < +\infty$. Dans ces conditions, la série de terme général $x_n(t)$ est presque partout absolument convergente ; si x est une fonction finie telle que $x(t)=\sum_{n=1}^{\infty} x_n(t)$ aux points où la série est absolument convergente, x appartient à $\boxed{\Theta}$ et est somme de la série de terme général x_n dans l'espace vectoriel topologique $\boxed{\Theta}$. Si en outre les x_n sont des fonctions sommables finies, x est une fonction sommable finie, on a $\tilde{x}=\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{x}_n$ dans $L^1(\Phi)$ et $U(x)=\sum_{n=1}^{\infty} U(x_n)$.

En effet, soit $y=\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|$; d'après la prop.4, $U^*(y) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} U^*(|x_n|) < +\infty$, donc (prop.9) y est finie presque partout, ce qui signifie que la série de terme général $x_n(t)$ est presque partout absolument convergente ; soit N l'ensemble négligeable des points où elle n'est pas absolument convergente ; on peut toujours se limiter au cas où $x(t)=0$ pour $t \in N$. Soit alors y_n la fonction égale à

à $\sum_{p=1}^{n} x_p(t)$ aux points de $\complement N$, à 0 dans N ; on a en tout point $t \notin N$
$|x(t)-y_n(t)| = \lim_{q\to\infty} \left|\sum_{h=1}^{q} x_{n+h}(t)\right| \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} |x_{n+m}(t)|$, d'où $|x-y_n| \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} |x_{n+m}|$)
et par suite (prop.4) $U^*(|x-y_n|) \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} U^*(|x_{n+m}|)$.

Comme $\sum_{m=1}^{\infty} U^*(|x_{n+m}|)$ tend vers 0 lorsque n croît indéfiniment, on déduit d'abord de cette inégalité que $x-y_n$ appartient à Ξ, donc aussi x, puisque y_n tend vers x dans l'espace vectoriel topologique Ξ. Comme Λ_f est fermé dans Ξ, x appartient à Λ_f si les x_n sont des fonctions de Λ_f, et par passage à l'espace séparé associé, on a $\tilde{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{x}_n$ dans $L^1(\tilde{\Phi})$; en outre, d'après la continuité de U dans Λ_f, $U(x) = \sum_{n=1}^{\infty} U(x_n)$.

THÉORÈME 1.- <u>L'espace Ξ et l'espace Λ_f sont complets, et l'image de Λ_f par l'application $x \to \tilde{x}$ est l'espace $L^1(\tilde{\Phi})$. En outre, de toute suite (x_n) de fonctions de Ξ qui converge vers $x \in \Xi$</u> (pour la topologie de Ξ), <u>on peut extraire une suite (x_{n_k}) telle que la suite $(x_{n_k}(t))$ tende presque partout vers $x(t)$</u>.

En effet, soit (x_n) une suite de Cauchy dans l'espace vectoriel topologique Ξ ; on peut définir par récurrence une suite (n_k) strictement croissante d'entiers > 0 par la condition que $U^*(|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}|) \leqslant 1/2^k$; on a donc $\sum_{k=1}^{\infty} U^*(|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}|) < +\infty$. D'après la prop. 10, la série de terme général $x_{n_{k+1}} - x_{n_k}$ est presque partout absolument convergente, et si z est une fonction égale presque partout à sa somme, z appartient à Ξ et est limite de la suite (x_{n_k}) dans Ξ, et par suite valeur d'adhérence de la suite de Cauchy (x_n) ; on en conclut que cette suite converge vers z, donc que Ξ est complet. Comme Λ_f est fermé dans Ξ, il est complet, et il en est de même de l'espace séparé associé $\tilde{\Lambda}$; mais $\tilde{\Lambda}$ est partout dense dans l'espace complet $L^1(\tilde{\Phi})$, donc est identique à ce dernier.

COROLLAIRE 1.- Si une suite (x_n) de fonctions de $\overline{\Phi}$ est une suite de Cauchy dans $\overline{\Phi}$ et si elle converge simplement vers une fonction x dans E, x appartient à $\overline{\Phi}$ et est limite de la suite (x_n) dans $\overline{\Phi}$.

En effet, on peut extraire de (x_n) une suite (x_{n_k}) telle que $(x_{n_k}(t))$ converge presque partout, et que toute fonction finie égale presque partout à la limite de cette suite, soit limite de (x_{n_k}) et a fortiori de (x_n) dans $\overline{\Phi}$; mais d'après l'hypothèse, $x(t)$ est précisément égale à la limite de $(x_{n_k}(t))$ partout.

COROLLAIRE 2.- Pour toute fonction sommable finie x, il existe une suite (x_n) de fonctions de Φ, qui tend vers x dans l'espace Λ_f, et est telle que $x_n(t)$ tende presque partout vers $x(t)$.

En effet, $\tilde{\Phi}$ étant partout dense dans $L^1(\tilde{\Phi})$, il existe une suite (y_n) de fonctions de Φ telle que $\lim_{n\to\infty} \tilde{y}_n = \tilde{x}$ dans $L^1(\tilde{\Phi})$; en appliquant le th.1 à cette suite, on obtient le corollaire.

Remarques.- 1) Une suite (x_n) de fonctions de Φ peut avoir une limite dans l'espace Λ_f sans que la suite $(x_n(t))$ soit convergente en aucun point de E (cf. § 2, exerc.   ).

2) Si x est une fonction sommable finie, il n'est pas toujours possible de trouver une suite (x_n) de fonctions de Φ, telle que $(x_n(t))$ converge partout dans E vers une fonction égale presque partout à x (cf. chap.V, § , exerc.   )

5. Fonctions sommables.

Nous désignerons maintenant par Λ l'ensemble des fonctions numériques x finies ou non, définies dans E, et égales presque partout à une fonction sommable finie ; les fonctions $x \in \Lambda$ seront appelées fonctions sommables ; d'après le cor. de la prop.8, Λ_f est bien identique à l'ensemble des fonctions finies appartenant à Λ, et toute fonction sommable est <u>finie presque partout</u> d'après sa définition. Dans l'ensemble Λ, la relation "x est égale presque partout à y" est une relation d'équivalence T d'après la prop.7, et chaque class modulo T contient au moins une fonction finie ; en outre, toutes ces fonctions finies ont même image par l'application $x \rightarrow \tilde{x}$. Cela permet donc de <u>prolonger</u> à Λ l'application $x \rightarrow \tilde{x}$, en désignant par $\tilde{x}$ la valeur commune des $\tilde{y}$ pour toutes les fonctions sommables finies égales presque partout à x. La relation $\tilde{x}=\tilde{y}$ signifie donc pour deux fonctions sommables x,y, qu'elles sont égales presque partout. De même, la relation $\tilde{x} \leqslant \tilde{y}$ signifie que $x(t) \leqslant y(t)$ presque partout ; en effet, on peut se borner au cas où x et y sont finies. On a alors, en posant $z=(y-x)^-$, $\tilde{z}=(\tilde{y}-\tilde{x})^-=0$, donc z est nulle presque partout.

On prolongera encore U à Λ en posant $U(x)=\tilde{U}(\tilde{x})$. Si x et y sont sommables et égales presque partout, on a donc $U(x)=U(y)$; d'après le th.1, l'espace complet $L^1(\tilde{\phi})$ peut être identifié à l'espace formé des classes de fonctions sommables égales presque partout. Si x et y sont deux fonctions sommables quelconques, la somme $x(t)+y(t)$ est définie presque partout ; toute fonction z telle que $z(t)$ soit presque partout égale à $x(t)+y(t)$ est sommable, et on a $\tilde{z}=\tilde{x}+\tilde{y}$ et $U(z)=U(x)+U(y)$. De même $u=\inf(x,y)$, $v=\sup(x,y)$, $x=\lambda x$ (pour $\lambda \neq 0$) sont sommables et on a $\tilde{u}=\inf(\tilde{x},\tilde{y})$, $\tilde{v}=\sup(\tilde{x},\tilde{y})$, $\tilde{w}=\lambda\tilde{x}$. Si x est sommable et $z \in \phi$, la fonction x_z égale à $x(t)z(t)$ aux points où $z(t) \neq 0$ et à 0 ailleurs, est sommable ; en effet, si y est une fonction sommable finie égale presque partout à x, x_z est presque partout égale à yz, qui est sommable ; en outre $\tilde{x}_z=\tilde{y}.\tilde{z}=\tilde{x}.\tilde{z}$. Les conditions a),b) et c) du n°1 sont donc encore satisfaites dans Λ.

Lorsque x et y sont deux fonctions numériques telle que la somme $x(t)+y(t)$ (resp. le produit $x(t)y(t)$) soit définie <u>presque partout</u>, on conviendra, (par abus de langage) dans ce qui suit, de noter par $x+y$ (resp. xy) toute fonction égale à $x(t)+y(t)$ presque partout (resp. égale à $x(t)y(t)$ presque partout), lorsqu'aucune confusion n'en pourra résulter ; en particulier si z est une fonction quelconque de ϕ, on désignera par zx toute fonction égale presque partout à la fonction x_z définie ci-dessus. Avec ces conventions, on peut donc dire que la somme de deux fonctions sommables et le produit d'une fonction sommable par une fonction de ϕ sont sommables.

THÉORÈME 2 (Lebesgue).- <u>Soit</u> (x_n) <u>une suite de fonctions sommables, telle que</u> $x_n(t) \leqslant x_{n+1}(t)$ <u>presque partout, et</u> $\sup_n U(x_n) < +\infty$. <u>Dans ces conditions, l'enveloppe supérieure</u> x <u>de la suite</u> (x_n) <u>est sommable</u>, $\tilde{x}$ <u>est la limite de la suite</u> $(\tilde{x}_n)$ <u>dans l'espace</u> $L^1(\tilde{\phi})$; <u>et on a</u> $U(x) = \lim_{n\to\infty} U(x_n)$.

L'ensemble des $t \in E$ où l'une au moins des fonctions x_n est infinie, ou bien où l'une au moins des inégalités $x_n(t) \leqslant x_{n+1}(t)$ n'est pas vérifiée, est négligeable (prop.7) ; en modifiant les valeurs des x_n dans cet ensemble, on peut donc supposer que la suite (x_n) est <u>croissante</u> et formée de fonctions <u>finies</u>. Si on pose $y_n = x_{n+1} - x_n$, on a $y_n \geqslant 0$ et $\sum_{n=1}^{\infty} U^*(y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} U(y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (U(x_{n+1}) - U(x_n)) = \lim_{n\to\infty} U(x_n) - U(x_1) < +\infty$; d'après la prop.10, la série de terme général $y_n(t)$ est presque partout convergente, et si y est une fonction égale à sa somme partout où elle est définie, y est sommable et $\tilde{y} = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{y}_n$ dans $L^1(\tilde{\phi})$. Comme $x(t) = y(t) + x_1(t)$ presque partout, x est sommable, on a $\tilde{x} = \lim_{n\to\infty} \tilde{x}_n$ dans $L^1(\tilde{\phi})$ et $U(x) = \lim_{n\to\infty} U(x_n)$.

Nous voyons donc que la condition d) du n°1 est vérifiée dans l'ensemble Λ , pour les suites dénombrables (l'enveloppe supérieure d'une d'une telle suite (x_n) étant l'enveloppe supérieure de la suite croissante des fonctions $y_n = \sup(x_1, x_2, \ldots, x_n)$).

Du théorème 2, on déduit des propriétés s'appliquant à des suites *quelconques* de fonctions sommables :

THÉORÈME 3 (Lebesgue).- *Soit (x_n) une suite de fonctions sommables ; s'il existe une fonction sommable $y \geqslant 0$ telle que $|x_n| \leqslant y$ pour tout n, les fonctions $\limsup_{n\to\infty} x_n$ et $\liminf_{n\to\infty} x_n$ sont sommables, et on a*

(4) $U(\liminf_{n\to\infty} x_n) \leqslant \liminf_{n\to\infty} U(x_n) \leqslant \limsup_{n\to\infty} U(x_n) \leqslant U(\limsup_{n\to\infty} x_n)$.

Si en outre la suite (x_n) converge simplement dans E, $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ est sommable, $\tilde{x}$ est limite de la suite $(\tilde{x}_n)$ dans l'espace $L^1(\tilde{\Phi})$, et on a

$$U(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} U(x_n) \tag{5}$$

En effet, posons $y_n = \sup_{p \geqslant 0} x_{n+p}$; y_n est l'enveloppe supérieure de la suite croissante de fonctions sommables $y_{n,m} = \sup(x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m})$, et comme $x_n \leqslant y$ pour tout n, on a $y_{n,m} \leqslant y$, donc $U(y_{n,m}) \leqslant U(y)$; par suite (th.2) y_n est sommable et on a $U(y_n) = \lim_{m\to\infty} U(y_{n,m}) \geqslant$ $\geqslant \lim_{m\to\infty}(\sup(U(x_n), U(x_{n+1}), \ldots, U(x_{n+m}))) = \sup_{p \geqslant 0} U(x_{n+p})$. Cela étant, $\limsup_{n\to\infty} x_n$ est l'enveloppe inférieure de la suite décroissante (y_n) ; comme $y_n \geqslant -y$ pour tout n, $\limsup_{n\to\infty} x_n$ est sommable d'après le th.2, et on a $U(\limsup_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} U(y_n) \geqslant \lim_{n\to\infty} (\sup_{p \geqslant 0} U(x_{n+p})) =$ $= \limsup_{n\to\infty} U(x_n)$. On obtient l'inégalité $U(\liminf_{n\to\infty} x_n) \leqslant \liminf_{n\to\infty} U(x_n)$ en appliquant le raisonnement précédent à la suite $(-x_n)$. La relation (5) est une conséquence immédiate de (1) lorsque $\limsup_{n\to\infty} x_n =$ $= \liminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_n$. En outre, dans ce cas, la suite $|x - x_n|$ tend simplement vers 0 et on a $|x - x_n| \leqslant 2y$ donc la relation (2) donne $\lim_{n\to\infty} U(|x - x_n|) = 0$, ce qui prouve que la suite $(\tilde{x}_n)$ tend vers $\tilde{x}$ dans $L^1(\tilde{\Phi})$.

COROLLAIRE 1.- *Soit* A *un ensemble d'indices filtré par un filtre* $\mathfrak{F}$ *ayant une base dénombrable. Si* $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ *est une famille de fonctions sommables, qui, suivant* $\mathfrak{F}$, *convergent simplement dans* E *vers une fonction* x, *et si en outre il existe une fonction sommable* $y \geqslant 0$ *telle que* $|x_\alpha| \leqslant y$ *pour tout* α, *la fonction* x *est sommable et on a* $U(x) = \lim_{\mathfrak{F}} U(x_\alpha)$.

En effet, soit (A_n) une base dénombrable de $\mathfrak{F}$ telle que $A_n \subset A_{n+1}$ pour tout n (*Top.gén.*, chap.I, § 5, prop.10), et soit α_n un élément quelconque de A_n ; la suite (x_{α_n}) converge simplement vers x dans E, donc x est sommable et on a $U(x) = \lim_{n\to\infty} U(x_{\alpha_n})$ d'après le th.3. Comme $\mathfrak{F}$ est le filtre intersection des filtres élémentaires associés à toutes les suites (α_n), $\lim_{\mathfrak{F}} U(x)$ existe et est égale à $\lim_{n\to\infty} U(x_{\alpha_n})$ pour une quelconque de ces suites, d'où le corollaire.

COROLLAIRE 2.- *Soit* F *un espace topologique,* f *une application de* $E \times F$ *dans* $\overline{R}$ *telle que* : a) *pour tout* $\alpha \in F$, *la fonction* $t \to f(\alpha,t)$ *est sommable pour* U ; b) *il existe une fonction sommable* $g \geqslant 0$ *telle que* $|f(\alpha,t)| \leqslant g(t)$ *pour tout* $t \in E$ *et tout* $\alpha \in F$; c) *pour tout* $t \in E$, *l'application* $\alpha \to f(\alpha,t)$ *est continue en un point* $\alpha_0 \in F$ *admettant un système fondamental dénombrable de voisinages. Dans ces conditions, la fonction* $u(\alpha) = U(f(\alpha,t))$ *est continue au point* α_0.

Remarques.- 1) Les relations (4) sont encore exactes si on suppose seulement que $|x_n(t)| \leqslant y(t)$ presque partout ; de même, si on suppose en outre que la suite $(x_n(t))$ converge seulement presque partout vers une fonction x, x est sommable et on a $U(x) = \lim_{n\to\infty} U(x_n)$.

2) La relation (3) est inexacte si on suppose seulement que la suite (x_n) soit simplement convergente dans E ; sa limite x peut

être non sommable, ou être sommable et ne pas satisfaire à (5) (cf. § 2, exerc.8).

Z 3) Le cor.1 du th.3 est inexact lorsqu'on ne suppose plus que le filtre $\mathfrak{F}$ ait une base dénombrable (cf. § 2, exerc.9).

6. Approximation des fonctions sommables.

Nous allons maintenant désigner par I (resp. S) l'ensemble des enveloppes supérieures (resp. inférieures) des suites croissantes (resp. décroissantes) (x_n) formées de fonctions de ϕ , et telles que $\sup_n U(x_n) < +\infty$ (resp. $\inf_n U(x_n) > -\infty$). Il est clair que $S=-I$. Le th.2 et le cor.2 de la prop.1 montrent que toute fonction x de I (resp. S) est sommable, qu'on a $U^*(x)=U(x)$ (resp. $U_*(x) = U(x)$) et que l'image de I (resp. S) par l'application $x \to \tilde{x}$ est l'ensemble $\tilde{I}$ (resp. $\tilde{S}$).

En outre, si x et y sont deux fonctions de I , x+y (qui est définie partout, et non seulement presque partout, puisque les fonctions de I ne prennent pas la valeur $-\infty$) appartient à I ; en effet, si $x=\sup_n x_n$, $y=\sup_n y_n$ où (x_n) et (y_n) sont deux suites croissantes de fonctions de ϕ , x+y est l'enveloppe supérieure de la suite croissante (x_n+y_n) et on a $\lim_{n\to\infty} U(x_n+y_n)= \lim_{n\to\infty} U(x_n)+ \lim_{n\to\infty} U(y_n) < +\infty$. De la même manière on voit que $\sup(x,y)$, $\inf(x,y)$ et λx (pour $\lambda > 0$) appartiennent à I .

THÉORÈME 4.- Pour qu'une fonction x soit sommable, il faut et il suffit que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $y \in I$ et une fonction $z \in S$ telles que $z \leqslant x \leqslant y$ et $U^*(y-z)=U(y-z) \leqslant \varepsilon$. Pour toute fonction sommable x , on a $U^*(x) = U_*(x) = U(x)$.

La condition est nécessaire. En effet, si x est sommable, il existe une suite décroissante $(\tilde{y}_n)$ d'éléments de $\tilde{I}$ et une suite croissante $(\tilde{z}_n)$ d'éléments de S , qui convergent vers $\tilde{x}$ dans $L^1(\phi)$(chap.II, § 3, prop.3) ;

donc il existe un indice n tel que $\tilde{z}_n \leq \tilde{x}_n \leq \tilde{y}_n$ et $\tilde{U}(\tilde{y}_n-\tilde{z}_n) \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Cela étant, si y_n (resp. z_n) est une fonction de $\tilde{I}$ (resp. $\tilde{S}$) appartenant à la classe $\tilde{y}_n$ (resp. $\tilde{z}_n$), on a presque partout $z_n(t) \leq x_n(t) \leq y_n(t)$; soit N l'ensemble négligeable des points où ces inégalités n'ont pas lieu toutes deux, et soit v la fonction égale à $+\infty$ aux points de N, à 0 ailleurs ; comme v est négligeable, il existe par définition une fonction $w \in I$ telle que $v \leq w$ et $U^*(x) \leq \frac{\varepsilon}{3}$; considérons alors les fonctions $y=y_n+w$, $z=z_n-w$; il est clair qu'on a $z \leq x \leq y$, $y \in I$, $z \in S$, et comme $y-z=y_n-z_n+2w$, on a $U(y-z)=U(y_n-z_n)+2U(w)=U(y_n-z_n)+$ $+2U^*(w) \leq \varepsilon$. On a en outre $U(z)=U_*(z) \leq U_*(x) \leq U^*(x) \leq U^*(y)=U(y)$, et $U(z) \leq U(x) \leq U(y)$; comme $U(y-z)=U(y)-U(z) \leq \varepsilon$ et que ε est arbitraire, on a $U(x)=U^*(x)=U_*(x)$.

La condition est <u>suffisante</u>. Soit N l'ensemble négligeable des points où l'une des deux fonctions y,z est infinie ; comme $z \leq x \leq y$, x ne peut être infinie qu'aux points de N. Soit x_0 (resp. y_0) une fonction finie égale à $x(t)$ (resp. $y(t)$) aux points de $\complement N$, et soit u une fonction (négligeable) égale à $+\infty$ aux points de N, à 0 ailleurs. On a $|y_0-x_0| \leq (y-z)+u$, donc $U^*(|y_0-x_0|) \leq U(y-z)+U^*(u) =$ $= U(y-z) \leq \varepsilon$; on tire de là d'abord que y_0-x_0, et a fortiori x_0, appartient à Ξ, puisque x_0 est adhérent à Λ_f, donc appartient à Λ_f, ce qui prouve que x est sommable.

COROLLAIRE 1.- <u>Si une fonction x est telle que $-\infty < U^*(x)=U_*(x) < +\infty$, x est sommable</u>.

En effet, par définition il existe alors, pour tout $\varepsilon > 0$, une fonction $y \in I$ et une fonction $z \in S$ telles que $z \leq x \leq y$ et $U(y)-U^*(x) \leq \varepsilon$, $U_*(x)-U(z) \leq \varepsilon$.

COROLLAIRE 2.- <u>Si, pour tout</u> $\varepsilon > 0$, <u>il existe deux fonctions sommables y,z telles que</u> $z \leq x \leq y$ <u>et</u> $U(y-z) \leq \varepsilon$, <u>x est sommable</u>.

En effet, il existe alors une fonction $y_1 \in I$ et une fonction $z_1 \in S$ telles que $y \leqslant y_1$, $z_1 \leqslant z$ et $U(y_1-y) \leqslant \varepsilon$, $U(z-z_1) \leqslant \varepsilon$; on a par suite $z_1 \leqslant x \leqslant y_1$ et $U(y_1-z_1) \leqslant 3\varepsilon$.

On déduit du th.4 que, pour toute fonction numérique x, $U^*(x)$ (resp. $U_*(x)$) est la borne inférieure des $U(y)$ (resp. la borne supérieure des $U(z)$) pour toutes les fonctions sommables y (resp. z) telles que $x \leqslant y$ (resp. $z \leqslant x$).

Si une fonction numérique x est telle que $U^*(x) < +\infty$, on a presque partout $x(t) < +\infty$; en effet, il existe une fonction $y \in I$ telle que $x \leqslant y$ et $y(t) < +\infty$ presque partout. En outre :

PROPOSITION 11.- <u>Pour toute fonction numérique x telle que</u> $U^*(x)$ <u>soit finie, il existe une suite décroissante</u> (y_n) <u>de fonctions de</u> I <u>telle que, l'enveloppe inférieure</u> y <u>des</u> y_n <u>soit sommable, et que l'on ait</u> $x \leqslant y$ <u>et</u> $U^*(x)=U(y)$.

En effet, d'après la déf. 2, pour tout $n > 0$ il existe par hypothèse une fonction $u_n \in I$ telle que $x \leqslant u_n$ et $U(u_n)-U^*(x) \leqslant \frac{1}{n}$; si on pose $y_n=\inf(u_1,u_2,\ldots,u_n)$, on a $y_n \in I$ et a fortiori $x \leqslant y_n$ et $U(y_n)-U^*(x) \leqslant \frac{1}{n}$. La suite (y_n) est décroissante, et $U(y_n) \geqslant U^*(x) > -\infty$; d'après le th.2, l'enveloppe inférieure y de cette suite est sommable, et $U(y)=\lim_{n \to \infty} U(y_n)=U^*(x)$.

COROLLAIRE - <u>Pour toute fonction sommable</u> x, <u>il existe une suite décroissante</u> (y_n) <u>de fonctions de I et une suite croissante</u> (z_n) <u>de fonctions de</u> S, <u>telles que</u> $z_n \leqslant x \leqslant y_n$ <u>pour tout</u> n, <u>et que</u> x <u>soit presque partout égale à l'enveloppe inférieure des</u> y_n <u>et à l'enveloppe supérieure des</u> z_n.

En effet, d'après la prop.11, on peut prendre la suite (y_n) telle que son enveloppe inférieure y soit $\geqslant x$ et que l'on ait $U(y)=U(x)$;

cela entraîne $\tilde{x}=\tilde{y}$, donc x et y sont égales presque partout. Raisonnement analogue pour les fonctions z_n .

PROPOSITION 12.- Si x et y sont deux fonctions numériques telles que $x(t)\leq y(t)$ presque partout (resp. $x(t)=y(t)$ presque partout), on a $U^*(x)\leq U^*(y)$ (resp. $U^*(x)=U^*(y)$).

Il suffit de considérer le cas où $x(t)\leq y(t)$ presque partout ; la proposition est évidente si $U^*(y)=+\infty$. Si $U^*(y)<+\infty$, pour tout nombre $a>U^*(y)$, il existe une fonction $z\in I$ telle que $y\leq z$ et $U(z)\leq a$; soit N l'ensemble négligeable des points $t\in E$ où $x(t)\leq y(t)$, et soit z' la fonction égale à z(t) sauf aux points t N , où $z'(t)=+\infty$; z' est sommable et $U(z')=U(z)$, et comme $x\leq z'$, on a $U^*(x)\leq U^*(z')=U(z')=U(z)\leq a$; comme $a>U^*(y)$ est arbitraire, on a bien $U^*(x)\leq U^*(y)$.

Cette proposition permet de compléter l'énoncé de la prop.2 : si le second membre de (1) est défini et $<+\infty$, $x(t)+y(t)$ est définie presque partout et on a encore la relation (1) ; en effet, comme $U^*(x)<+\infty$ et $U^*(y)<+\infty$, on a presque partout $x(t)<+\infty$ et $y(t)<+\infty$, et en modifiant x et y dans un ensemble négligeable, ce qui ne change ni $U^*(x)$, ni $U^*(y)$, ni $U^*(x+y)$ d'après la prop.12, on se ramène au cas où $x(t)+y(t)$ est partout défini.

PROPOSITION 13.- Pour toute suite croissante (x_n) de fonctions numériques telle que $\sup_n U^*(x_n)>-\infty$, on a

$$U^*(\sup_n x_n)\leq \sup_n U^*(x_n) \tag{6}$$

L'inégalité est évidente si le second membre est $+\infty$. Dans le cas contraire, on a $U^*(x_n)<+\infty$ pour tout n , et il existe par hypothèse un n tel que $U^*(x_n)>-\infty$; on peut donc supposer que $U^*(x_n)$ est fini pour tout n . Alors, pour tout n , il existe une fonction sommable y_n telle que $x_n\leq y_n$ et $U^*(x_n)=U(y_n)$ (prop.11) ; la relation

$x_n \leqslant x_{n+1}$ entraîne que $y_n(t) \leqslant y_{n+1}(t)$ presque partout, car on a $x_n \leqslant \inf(y_n, y_{n+1}) \leqslant y_n$, et comme $\inf(y_n, y_{n+1})$ est sommable $U^*(x_n) \leqslant U(\inf(y_n, y_{n+1})) \leqslant U(y_n)$, ou $U(\inf(y_n, y_{n+1})) = U(y_n)$; donc $\inf(y_n, y_{n+1})$ est égale presque partout à y_n . Cela étant, comme $\sup_n U(y_n) < +\infty$, l'enveloppe supérieure y des y_n est sommable et on a $U(y) = \sup_n U(y_n) = \sup_n U^*(x_n)$ (th.2) ; comme $\sup_n x_n \leqslant y$, la proposition est démontrée.

La proposition est inexacte lorsque $U^*(x_n) = -\infty$ pour tout n . Par exemple, prenons pour Φ l'ensemble des suites $x = (\xi_m)_{m \geqslant 0}$ de nombres réels, dont tous les termes sont nuls sauf pour un nombre fini d'entre eux, avec $U(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \xi_m$. Si $x_n = (\xi_{nm})_{m \geqslant 0}$, avec $\xi_{nm} = -\infty$ pour $m \geqslant n$, $\xi_{nm} = 0$ pour $m < n$, l'enveloppe supérieure de la suite (x_n) est la suite 0 , alors que $U^*(x_n) = -\infty$ pour tout n .

PROPOSITION 14.- <u>Soit x une fonction numérique telle que</u> $U^*(x) < +\infty$ <u>et</u> $U^*(x) > -\infty$; <u>soit</u> y (resp. z) <u>une fonction sommable telle que</u> $x \leqslant y$ <u>et</u> $U(y) = U^*(x)$ (resp. $z \leqslant x$ <u>et</u> $U(z) = U_*(x)$; cf. prop.11). <u>On a</u> $U_*(y-x) = U_*(z-x) = 0$ <u>et</u> $U^*(y-x) = U^*(x-z) = U^*(x) - U_*(x)$.

On notera d'abord que les relations $z \leqslant x \leqslant y$ entraînent que $x-z$ et $y-x$ sont définies et finies presque partout. On a $U_*(x) = U_*(z+(x-z)) \geqslant U_*(z) + U_*(x-z) = U_*(x) + U_*(x-z)$ (prop.2) , donc $U_*(x-z) \leqslant 0$; comme $x-z \geqslant 0$ presque partout, on a aussi $U_*(x-z) \geqslant 0$ (prop. 12), donc $U_*(x-z) = 0$. On voit de même que $U_*(y-x) = 0$.

D'autre part, on a (prop.2 et 12) $U^*(x-z) \leqslant U^*(x) + U^*(-z) = U^*(x) - U_*(x)$, et comme $x = z+(x-z)$ presque partout, $U^*(x) \leqslant U^*(z) + U^*(x-z) = U^*(x) + U^*(x-z)$ autrement dit, $U^*(x) - U_*(x) \leqslant U^*(x-z)$; la comparaison de ces deux inégalités donne $U^*(x-z) = U^*(x) - U_*(x)$; on en déduit $U^*(y-x) = U^*(x) - U_*(x)$ en changeant x en $-x$.

7. L'ensemble Ω.

Pour prolonger l'application $x \to \tilde{x}$ à un ensemble contenant Λ, considérons maintenant, dans l'espace de Riesz R^E des fonctions numériques finies, le sous-ensemble Ξ_0 formé des fonctions x telles que, pour toute fonction $z \in \Phi_+$, on ait $U^*(z|x|) < +\infty$. Il résulte aussitôt des prop.2 et 3 que Ξ_0 est un sous-espace vectoriel de R^E, qui contient Ξ d'après le cor. de la prop.3 ; en outre, on voit comme au n°3 que Ξ_0 est un sous-espace de Riesz de R^E. Les prop.2 et 3 montrent d'autre part que, lorsque z parcourt Φ_+, les fonctions $N_z(x)=U^*(z|x|)$ sont des semi-normes sur Ξ_0, définissant sur cet espace une topologie non séparée en général, pour laquelle on voit, comme au n°3, que $|x|$ est uniformément continue dans Ξ_0, ce qui entraîne qu'il en est de même de x^+ et x^-, et que $\sup(x,y)$ et $\inf(x,y)$ sont uniformément continues dans $\Xi_0 \times \Xi_0$. Comme $\sup(z_1,z_2)$ appartient à Φ_+ pour deux éléments quelconques de Φ_+, la famille des semi-normes N_z est saturée (Livre IV, ...). Enfin, d'après le cor. de la prop.3, la topologie induite sur Ξ par celle de Ξ_0 est moins fine que la topologie définie sur Ξ par la semi-norme $N(x)=U^*(|x|)$.

Cela étant, Φ est contenu dans Ξ_0 ; en outre, pour tout $z \in \Phi$ et tout $x \in \Xi_0$, $zx \in \Xi_0$ car, pour tout $u \in \Phi_+$, on a $N_u(zx) = U^*(u|z|.|x|) = N_{u|z|}(x) < +\infty$; ce calcul prouve en outre que, dans Ξ_0, l'application linéaire $x \to zx$ est uniformément continue. Considérons alors l'adhérence Ω_f de Φ dans Ξ_0 ; on voit comme au n°3 que c'est un sous-espace de Riesz de R^E, qui contient l'ensemble Λ_f des fonctions sommables finies ; en outre, pour tout $z \in \Phi$, $x \to zx$ applique Ω_f dans lui-même, puisqu'elle est continue et applique Φ dans lui-même.

L'espace localement convexe séparé $\dot{\Xi}_0$ associé à Ξ_0 est l'espace quotient de Ξ_0 par le sous-espace Θ_0 formé des fonctions finies x telles que $N_z(x)=U^*(z|x|)=0$ pour tout $z \in \phi_+$; soit encore $x \to \dot{x}$ l'application canonique de Ξ_0 sur $\dot{\Xi}_0$; comme $\Theta_0 \subset \Omega_f$, l'image $\dot{\Omega}_f = \Omega_f / \Theta_0$ de Ω_f par cette application canonique n'est autre que le sous-espace séparé associé à Ω_f. Il résulte aussitôt du n°1 qu'on a encore $\phi \cap \Theta_0 = \mathfrak{u}$, d'où résulte encore que $\dot{x} \to \tilde{x}$ est un isomorphisme de $\dot{\phi} \subset \dot{\Omega}_f$ sur le sous-espace vectoriel $\tilde{\phi}$ de l'espace vectoriel topologique $\tilde{\phi}_U$.

On peut alors prolonger cet isomorphisme en un isomorphisme de $\dot{\Omega}_f$ sur un sous-espace $\tilde{\Omega}$ de $\tilde{\phi}_U$, et en composant cet isomorphisme avec $x \to \dot{x}$, obtenir une application linéaire de Ω_f sur $\tilde{\Omega}$ que nous désignerons provisoirement par ω. Montrons que sur Λ_f, cette application coïncide avec l'application $x \to \tilde{x}$ définie au n°3, ce qui permettra de la désigner (dans tout Ω_f) par la même notation. Il suffit pour cela de remarquer que l'application $x \to \tilde{x}$ définie au n°3 dans Λ_f, est continue pour la topologie induite sur Λ_f par celle de Ξ_0, et la topologie induite sur $L^1(\tilde{\phi})$ par celle de $\tilde{\phi}_U$ en vertu de la relation $U^*(z|x|)=\tilde{U}(\tilde{z}.|\tilde{x}|)=\tilde{U}_{\tilde{z}}(|\tilde{x}|)$, pour tout $z \in \phi_+$; comme elle coïncide avec ω sur ϕ, et que ϕ est partout dense dans Λ_f (pour la topologie de Ξ_0), ω est bien identique à $x \to \tilde{x}$ dans Λ_f. On voit alors comme au n°3 que l'application $x \to \tilde{x}$ ainsi définie dans Ω_f satisfait bien aux conditions a), b) et c) du n°1 .

Pour achever de prolonger cette application à un ensemble contenant Λ (donc contenant des fonctions non finies) nous poserons la définition suivante :

DEFINITION 6.- <u>On dit qu'une fonction numérique</u> x (finie ou non) <u>définie dans</u> E <u>est quasi-négligeable</u> (<u>pour</u> U <u>et</u> ϕ) <u>si, pour toute fonction</u> $z \in \phi_+$, <u>la fonction zx est négligeable</u>. <u>On dit qu'un ensemble</u> $N \subset E$ <u>est quasi-négligeable si sa fonction caractéristique</u> φ_N <u>est quasi-négligeable</u>.

Il résulte aussitôt de cette définition et des prop.5,6,7,8 que ces propositions subsistent sans modification si on y remplace partout "négligeable" par "quasi-négligeable". On étend la déf.5 en y remplaçant "négligeable" par "quasi-négligeable", et "presque partout" par "quasi-presque partout". La prop.9 montre alors que toute fonction x telle que $U^*(z|x|) < +\infty$ pour <u>tout</u> $z \in \phi_+$, est <u>finie quasi-presque partout</u>. Si x et y sont deux fonctions de Ω_f telles que $\tilde{x}=\tilde{y}$, elles sont égales quasi-presque partout (d'après la définition de $\mathcal{O}_o$) ; inversement, si $x \in \Omega_f$, toute fonction finie y égale quasi-presque partout à x appartient à Ω_f et on a $\tilde{x}=\tilde{y}$ dans $\tilde{\Omega}$.

Cela étant, nous désignerons par Ω l'ensemble des fonctions numériques x définies dans E , <u>finies ou non</u>, qui sont <u>égales quasi-presque partout</u> à une fonction de l'ensemble Ω_f . On voit comme au n°5 que Ω_f est l'ensemble des fonctions finies appartenant à Ω , et qu'on peut prolonger l'application $x \to \tilde{x}$ à Ω , en désignant par $\tilde{x}$ la valeur commune de $\tilde{y}$ pour toutes les fonctions finies égales quasi-presque partout à x ; la relation $\tilde{x}=\tilde{y}$ entre deux fonctions de Ω signifie qu'elles sont égales quasi-presque partout, la relation $\tilde{x} \leq \tilde{y}$ qu'on a $x(t) \leq y(t)$ quasi-presque partout, et on voit comme au n°5 que les conditions a),b),c) du n°1 sont remplies par l'application $x \to \tilde{x}$ dans l'ensemble Ω .

Nous allons maintenant donner une autre <u>caractérisation</u> des fonctions de Ω ; en premier lieu, on a la proposition suivante :

PROPOSITION 15.- <u>Si une fonction quasi-négligeable x est telle que $U^*(|x|) < +\infty$, x est négligeable.</u>

On peut se borner au cas où $x \geqslant 0$. Comme $U^*(x) < +\infty$, il existe une fonction $y \geqslant 0$, enveloppe supérieure d'une suite croissante (y_n) de fonctions de Φ_+, telle que $x \leqslant y$ et $U^*(y) < +\infty$. Soit z_n la fonction égale à $x(t)y_n(t)$ pour $y_n(t) \neq 0$, à 0 pour $y_n(t)=0$; il est immédiat que $x^2 \leqslant \sup_n z_n$; or, comme x est quasi-négligeable, z_n est négligeable pour tout n, donc aussi $\sup_n z_n$, et a fortiori x^2, donc x (prop.8).

<u>Remarque</u>.- Ce raisonnement est encore valable quand on suppose $U^*(|x|) = +\infty$, mais qu'il existe une suite croissante (y_n) de fonctions de Φ_+, telle que $x \leqslant \sup_n y_n$. On en conclut que, pour une fonction x quasi-négligeable, mais non négligeable, il n'existe aucune suite croissante (y_n) ayant les propriétés précédentes.

PROPOSITION 16.- <u>Pour qu'une fonction numérique x appartienne à Ω, il faut et il suffit que zx soit sommable pour tout</u> $z \in \Phi_+$.

1° La condition est <u>nécessaire</u>. Remarquons d'abord que si x et y sont deux fonctions égales quasi-presque partout, zx et zy sont égales presque partout, d'après la déf.6, pour tout $z \in \Phi_+$. On peut donc se borner à démontrer la proposition pour une fonction x <u>finie</u>.

Alors $\tilde{z}.\tilde{x}$ appartient à $L^1(\tilde{\Phi})$ d'après la prop.5 du chap.II, § 4 ; par suite, zx est égale quasi-presque partout à une fonction sommable finie y ; mais on a par hypothèse $U^*(z|x|) < +\infty$, donc aussi $U^*(|zx-y|) < +\infty$; il résulte de la prop.15 que zx-y est négligeable, donc zx est égale presque partout à y, et par suite sommable.

2° La condition est suffisante. En premier lieu, comme $U^*(z|x|) = U(z|x|) < +\infty$ pour tout $z \in \phi_+$, est finie quasi-presque partout ; on peut donc encore supposer x finie ; alors $x \in \Xi_0$. Nous allons voir que, dans Ξ_0, x est adhérent à Λ_f, ce qui prouvera que $x \in \Omega_f$. Par hypothèse, pour un $z \in \phi_+$ quelconque, $zx = y$ est sommable. Pour tout n, la fonction ψ_n, définie pour $t \geqslant 0$ égale à $1/t$ pour $t \geqslant 1/n$, à $n^2 t$ pour $0 \leqslant t \leqslant 1/n$, est continue et $\psi_n(0)=0$. Par suite $u_n = \psi_n(z)$ appartient à ϕ_+, et on a $z(t)u_n(t) = 1$ pour $z(t) \geqslant 1/n$, $z(t)u_n(t) = n^2 z^2(t) \leqslant 1$ pour $z(t) \leqslant 1/n$, d'où résulte que $|z(x-u_n y)| \leqslant 2|y|$ pour tout n. Cela étant, si $z(t) > 0$, on a $z(t)u_n(t)=1$ à partir d'une certaine valeur de n, donc $z(x-u_n y)$ tend vers 0 en ce point ; il en est évidemment de même aux points où $z(t)=0$; le th.3 montre par suite que $U(z|x-u_n y|)$ tend vers 0 lorsque n croît indéfiniment ; comme $u_n y$ est sommable pour tout n et z arbitraire, il est bien démontré que tout voisinage de x dans Ξ_0 contient un point de Λ_f (parce que la famille des semi-normes N_z est saturée).

COROLLAIRE.- Soit (x_n) une suite de fonctions de Ω, telle que $x_n(t) \leqslant x_{n+1}(t)$ quasi-presque partout, et que, pour tout $z \in \phi_+$ la suite croissante des $U(zx_n)$ soit majorée. Dans ces conditions, l'enveloppe supérieure x de la suite (x_n) appartient à Ω, et on a $\tilde{x} = \lim_{n\to\infty} \tilde{x}_n = \sup_n \tilde{x}_n$ dans $\tilde{\Omega}$.

En effet, il résulte du th.2 que zx est sommable pour tout $z \in \phi_+$ donc $x \in \Omega$. En outre $U(z(x-x_n))$ tend vers 0 lorsque n croît indéfiniment, donc x est limite de la suite $(\tilde{x}_n)$ dans $\tilde{\Omega}$.

On voit donc que la condition d) du n°1 est aussi vérifiée dans l'ensemble Ω par l'application $x \to \tilde{x}$ (pour les ensembles dénombrables).

PROPOSITION 17.- Pour qu'une fonction $x \in \Omega$ soit sommable, il faut et il suffit que $U^*(|x|) < +\infty$.

La condition est évidemment nécessaire. Inversement, si elle est vérifiée il résulte du cor. de la prop.3 que $U^*(z|x|) \leq U^*(|x|)$ pour tout $z \in \Phi_+$ tel que $\|z\| \leq 1$. Cela signifie que, dans $\tilde{\Phi}_U$, on a $\sup\limits_{\|z\| \leq 1} \tilde{U}_{\tilde{z}}(|\tilde{x}|) < +\infty$, donc que $\tilde{x} \in L^1(\tilde{\Phi})$ (chap.II, § 4, n°4) ; autrement dit, x est quasi-presque partout égale à une fonction sommable y ; si u est la fonction (quasi-négligeable) égale à $x(t)-y(t)$ aux points où $x(t) \neq y(t)$, à 0 ailleurs, on a $|u| \leq |x|+|y|$, donc $U^*(|u|) < +\infty$; par suite (prop.15), u est négligeable, et x est sommable.

On est naturellement amené à se demander si l'image $\tilde{\Omega}$ de Ω par l'application $x \to \tilde{x}$ est l'espace $\tilde{\Phi}_U$ tout entier ou non (autrement dit, si l'espace Ω_f est complet ou non). Il n'est pas certain qu'il en soit toujours ainsi ; au § 2, nous donnerons une condition <u>suffisante</u> pour que $\tilde{\Omega} = \tilde{\Phi}_U$.

Nous pouvons dès à présent donner un cas où cette relation est trivialement vérifiée ; c'est celui où Φ est un clan <u>unitaire</u> (chap.I, 1), puisqu'alors on a $\tilde{\Phi}_U = L^1(\tilde{\Phi})$; dans ce cas, l'ensemble Ω est donc identique à Λ.

8. <u>Prolongement régulier d'une intégrale.</u>

Le prolongement de U à l'ensemble Λ des fonctions sommables (pour U et Φ) défini ci-dessus (n°5) est appelé <u>prolongement régulier</u> de l'intégrale U définie sur le clan Φ. Soit maintenant Φ' un clan quelconque contenu dans l'espace de Riesz Λ_f des fonctions sommables finies ; la <u>restriction de</u> U à Φ' satisfait à l'axiome (D), en vertu du th.2. D'autre part, il résulte du th.2 et du cor.2 du th.4 que, si on effectue le prolongement régulier de U <u>à partir du clan</u> Φ', on définit U sur un <u>sous-ensemble</u> Λ de Λ (la nouvelle valeur de U pour chaque fonction de cet ensemble coïncidant naturellement avec celle obtenue par prolongement régulier à partir de Φ).

PROPOSITION 18.- <u>Pour que l'ensemble Λ' soit identique à l'ensemble Λ, il faut et il suffit que</u> : 1° <u>$\tilde{\Phi}'$ soit partout dense dans</u> $L^1(\tilde{\Phi})$; 2° <u>toute fonction négligeable pour</u> U <u>et</u> Φ <u>soit négligeable pour</u> U <u>et</u> Φ'.

Les conditions sont évidemment nécessaires. Réciproquement, si la première est vérifiée, comme $L^1(\tilde{\Phi}')$ est le complété de $\tilde{\Phi}'$, on a $L^1(\tilde{\Phi}')=L^1(\tilde{\Phi})$. Cela prouve que toute fonction x appartenant à Λ est égale à une fonction appartenant à Λ', sauf aux points d'un ensemble négligeable <u>pour</u> U <u>et</u> Φ ; mais comme un tel ensemble est, par hypothèse, négligeable <u>pour</u> U <u>et</u> Φ', on voit que x appartient à Λ', d'où $\Lambda' = \Lambda$.

<u>Remarques</u>.- 1) Il se peut que $\tilde{\Phi}'$ soit partout dense dans $L^1(\tilde{\Phi})$ sans que toute fonction négligeable pour U et Φ soit négligeable pour U et Φ'. Par exemple, soit N un ensemble négligeable pour U et Φ ; à toute fonction $x \in \Phi$, faisons correspondre la fonction x' égale à x(t) aux points de $\complement N$, à 0 dans N ; l'ensemble Φ' de ces fonctions est un clan contenu dans Λ_f et on a évidemment $\tilde{\Phi}' = \tilde{\Phi}$, donc $\tilde{\Phi}'$ est partout dense dans $L^1(\tilde{\Phi})$. Mais la fonction caractéristique φ_N qui est négligeable pour U et Φ, ne l'est pas pour U et Φ', car il n'existe aucune fonction y, enveloppe supérieure d'une suite croissante de fonctions de Φ', telle que $\varphi_N \leq y$.

2) On peut avoir $\Lambda' = \Lambda$ sans que l'ensemble Ω', obtenu à partir du clan Φ' par la méthode de prolongement exposée au n°7, soit identique à l'ensemble Ω (cf. § 2, exerc.).

9. Prolongement large d'une intégrale.

Soit ϕ un clan de fonctions définies dans E , U une forme linéaire croissante définie dans ϕ. Il se peut que U satisfasse à la condition suivante :

(D_a) Pour tout ensemble filtrant à gauche A de fonctions $\geqslant 0$ de tel que l'enveloppe inférieure des fonctions de A soit 0 , on a $\lim_{x \in A} U(x) = \inf_{x \in A} U(x) = 0$.

Il est clair que cette condition entraîne la condition (D), en prenant pour A une suite décroissante ; mais elle ne lui est pas équivalente en général (cf. § 2, exerc. 10). Comme au n°1, on montre que (D_a) équivaut à la condition :

(D'_a) Pour tout ensemble filtrant à droite B de fonctions de ϕ , et toute fonction $y \in \phi$ telle que $y \leqslant \sup B$ (enveloppe supérieure des fonctions $x \in B$) , on a $U(y) \leqslant \sup_{x \in B} U(x) = \lim_{x \in B} U(x)$.

Cela étant, pour toute fonction numérique x définie dans E (finie ou non), posons $U^{**}(x) = \inf (\sup_{y \in B} U(y))$, la borne inférieure étant prise dans l'ensemble de tous les ensembles B filtrants à droite, formés de fonctions de ϕ , et tels que $x \leqslant \sup B$ ($U^{**}(x) = +\infty$ s'il n'existe aucun ensemble B ayant ces propriétés). On définit de même $U_{**}(x)$, de sorte que $U^{**}(-x) = -U_{**}(x)$. On démontre comme au n°2 que $U_{**}(x) \leqslant U^{**}(x)$: il suffit de voir que, si A est un ensemble filtrant à gauche , B un ensemble filtrant à droite, de fonctions de ϕ , tels que $\inf A \leqslant \sup B$ on a $\sup_{y \in B} U(y) \geqslant \inf_{z \in A} U(z)$; pour cela, on remarque que l'ensemble B-A est un ensemble filtrant à droite de fonctions de ϕ , et qu'on a $\sup_{y \in B, z \in A} (y-z) = \sup_{y \in B} y - \inf_{z \in A} z \geqslant 0$, d'où en vertu de la condition (D'_a) $\lim_{y \in B, z \in A} U(y-z) \geqslant 0$; la fin du raisonnement est la même qu'au n°2 .

On voit de même que la prop.1 et ses corollaires sont valables quand on remplace les <u>suites croissantes</u> par des <u>ensembles filtrants à droite</u>, et U^* par U^{**} ; les prop.2,3,4 sont valables lorsqu'on y remplace U^* par U^{**}. Nous nous bornerons à indiquer le raisonnement qui généralise celui de la prop.4 . En se bornant au cas où $U^{**}(x_n) < +\infty$ pour tout n , il existe un ensemble filtrant à droite B_n de fonctions de Φ_+ tel que si $y_n = \sup B_n$, on ait $x_n \leqslant y_n$ et $U^{**}(y_n) = \sup_{z \in B_n} U(z) \leqslant \leqslant U^{**}(x_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$. Pour toute partie finie H de N , soit C_H l'ensemble des sommes $\sum_{i \in H, z_i \in B_i} z_i$, et soit C la réunion des C_H lorsque H parcourt l'ensemble des parties finies de N ; on voit immédiatement que C est filtrant à droite ; en outre, y est enveloppe supérieure de C , car pour un $t \in E$ quelconque et un nombre quelconque $a < y(t)$, il existe pour chaque n , une fonction $z_n \in B_n$ telle que $a < \sum_{n=0}^{\infty} z_n(t)$, et par suite une partie finie H de N telle que $a < \sum_{n \in H} z_n(t)$.
Cela étant, $U^{**}(y)$ est la borne supérieure des sommes $\sum_{i \in H, z_i \in B_i} U(z_i) \leqslant \sum_{i \in H} U^{**}(y_i) \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} U^{**}(y_n) \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} U^{**}(x_n) + \varepsilon$; comme $x_n \leqslant y$, et que ε est arbitraire, on obtient bien l'inégalité (3).

Cela étant, tous les raisonnements des n^{os} 3,4,5 et 7 sont valables sans modification quand on y remplace partout U^* par U^{**}; la méthode qui conduit à la définition de Λ , donnera à partir de U^{**} un ensemble Λ_a qui contient Λ puisque $U^{**} \leqslant U^*$; les fonctions de Λ_a seront dites <u>largement sommables</u> ; les fonctions telles que $U^{**}(|x|)=0$ seront de même dites <u>largement négligeables</u>. L'application $x \to \tilde{x}$ définie dans Λ_a , prolonge évidemment l'application $x \to \tilde{x}$ de Λ sur $L^1(\tilde{\Phi})$ définie au n°5 ; comme elle applique Λ_a sur $L^1(\tilde{\Phi})$, on voit que toute fonction largement sommable est égale à une fonction sommable, sauf sur un ensemble largement négligeable.

On définit de même un ensemble Ω_a par la méthode du n°7 appliquée à U^{**} : c'est l'ensemble des fonctions x telles que zx soit largement sommable pour tout $z \in \phi_+$; on dira de même qu'une fonction x est largement quasi-négligeable si zx est largement négligeable pour tout $z \in \phi_+$; on a évidemment $\Omega \subset \Omega_a$, et toute fonction quasi-négligeable est largement quasi-négligeable.

On peut donner des exemples où il existe des ensembles largement négligeables qui ne sont pas négligeables, ni même quasi-négligeables (§ 2, exerc. 19).

Pour généraliser le n° 6, il faut remplacer I (resp. S) par l'ensemble I_a (resp. S_a) des enveloppes supérieures (resp. inférieures) des ensembles filtrants à droite B (resp. filtrants à gauche A) de fonctions de ϕ tels que $\sup_{y \in B} U(y) < +\infty$ (resp. $\inf_{z \in A} U(z) > -\infty$) ; pour étendre le th.4 et ses conséquences (en remplaçant partout U^* par U^{**}, "sommable" par "largement sommable", et "négligeable" par "largement négligeable"), il suffit de montrer que les fonctions de I_a sont largement sommables ; cela ne résulte plus du th.2, mais de la propriété suivante :

PROPOSITION 19.- Soit B un ensemble filtrant à droite formé de fonctions de I_a , et tel que $\sup_{x \in B} U(x) < +\infty$. L'enveloppe supérieure x_0 de B appartient à I_a , et on a $U(x_0) = \sup_{x \in B} U(x) = \lim_{x \in B} U(x)$ et $\tilde{x}_0 = \lim_{x \in B} \tilde{x} = \sup_{x \in B} \tilde{x}$.

En effet, chaque fonction $x \in B$ est l'enveloppe supérieure d'un ensemble filtrant à droite $C_x \subset \phi$; x_0 est donc l'enveloppe supérieure de la réunion C des C_x , et aussi de l'ensemble filtrant à droite D formé des enveloppes supérieures des parties finies de C . Comme B est filtrant à droite, pour toute fonction $y \in D$, il existe $x \in B$ telle que $x \geqslant y$; donc $\sup_{y \in D} U(y) < +\infty$, ce qui montre que $x_0 \in I_a$, et que $U(x_0) = \sup_{y \in D} U(y) \leqslant \sup_{x \in B} U(x)$; mais comme $x_0 \geqslant x$ pour tout $x \in B$, on a aussi $U(x_0) \geqslant \sup_{x \in B} U(x)$ enfin, comme $\tilde{x}_0 \geqslant \tilde{x}$ pour tout $x \in B$, et $\tilde{U}(\tilde{x}_0) = \sup_{x \in B} \tilde{U}(\tilde{x})$, on a $\tilde{x}_0 = \sup_{x \in B} \tilde{x}$.

Il ne faudrait pas croire que la prop. 19 puisse s'étendre à des ensemble filtrants à droite quelconques formés de fonctions largement sommables n'appartenant pas toutes à I_a (cf. § 2, exerc. 10).

<u>Exercices</u>.- 1) Soit Φ un espace de Riesz formé de fonctions définies dans E ; soit Ω l'espace de Riesz des formes linéaires relativement bornées sur Φ (chap.II). Montrer que, dans Ω, les intégrales sur Φ forment une <u>demi-bande</u> (chap.II, § 1) (montrer d'abord que toute borne supérieure d'un nombre fini d'intégrales est une intégrale ; si U_0 est borne supérieure d'un ensemble d'intégrales A filtrant à droite, pour voir que $\inf_n U_0(x_n) = 0$ pour toute suite <u>décroissante</u> (x_n) de fonctions de Φ, d'enveloppe inférieure 0, remarquer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $U \in A$ telle que $U_0(x_n) - U(x_n) \leqslant \varepsilon$ pour <u>tout</u> n).

2) Soient x,y deux fonctions numériques telles que $U^*(x)$, $U_*(x)$, $U^*(y)$ et $U_*(y)$ soient finis ; montrer que

$$U_*(x+y) \leqslant U_*(x) + U^*(y) \leqslant U^*(x+y)$$

(si y' est une fonction sommable telle que $y \leqslant y'$ et $U^*(y) = U(y')$, remarquer que, pour toute fonction sommable z telle que $z \leqslant x+y$, on a $z - y' \leqslant x$).

3) Soit x une fonction sommable,. Pour qu'une fonction y telle que $U^*(y)$ est finie, soit sommable, il faut et il suffit que $U(x) = U^*(y) + U^*(x-y)$ (si y' sommable est telle que $y \leqslant y'$ et $U^*(y) = U(y')$, remarquer que $x - y' \leqslant x - y$).

4) Soit U une intégrale sur un espace de Riesz Φ de fonctions définies dans E , satisfaisant à l'axiome (D_a) . Soit A un

un ensemble filtrant à droite de fonctions largement sommables, tel que $\sup_{x \in A} U(x) < +\infty$. Pour que l'enveloppe supérieure x_0 de A soit sommable et qu'on ait $U(x_0) = \sup_{x \in A} U(x)$, il faut et il suffit que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $x_1 \in A$, un ensemble filtrant à droite B de fonctions de I_a et une application $x \to y_x$ de l'ensemble des $x \in A$ qui sont $\geqslant x_1$, dans B, telle que l'on ait $x \leqslant y_x$ et $U(y_x) - U(x) \leqslant \varepsilon$ pour tous ces x.

5) Soit $I =]a,b[$ un intervalle ouvert de $\overline{R}$, f une application de $I \times E$ dans $\overline{R}$, telle que : a) pour tout $\alpha \in I$, l'application $t \to f(\alpha,t)$ est sommable pour une intégrale U sur E ; b) pour tout $t \in E$, l'application $\alpha \to f(\alpha,t)$ admet en tout point de I une dérivée $\frac{\partial f(\alpha,t)}{\partial \alpha}$; c) il existe une fonction sommable $g \geqslant 0$ telle que $\left|\frac{\partial f(\alpha,t)}{\partial \alpha}\right| \leqslant g(t)$ pour tout $\alpha \in I$ et tout $t \in E$. Montrer que, dans ces conditions, la fonction $u(\alpha) = U(f(\alpha,t))$ est dérivable dans I, et qu'on a $u'(\alpha) = U\left(\frac{\partial f(\alpha,t)}{\partial \alpha}\right)$.

6) Si $U^*(x)$ et $U^*(y)$ sont toutes deux $< +\infty$, montrer que $U^*(\sup(x,y))$ et $U^*(\inf(x,y))$ sont $< +\infty$, et que l'on a

$$U^*(\sup(x,y)) + U^*(\inf(x,y)) \leqslant U^*(x) + U^*(y) .$$

7) Soit Φ un clan de fonctions sur un ensemble E, M une fonction numérique positive et croissante définie dans Φ_+, telle que
$M(\lambda x) = \lambda M(x)$ pour $\lambda > 0$ et $M\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} M(x_n)$ pour toute suite (x_n) de fonctions de Φ_+ telle que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \in \Phi$. Pour toute fonction numérique x définie dans E, finie ou non, on désigne par $N(x)$ la borne inférieure des nombres $\sum_{n=1}^{\infty} M(y_n)$ pour toutes les suites (y_n) de fonctions de Φ_+ telles que $x \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} y_n$ (et $+\infty$ s'il n'existe aucune suite de cette espèce). Montrer que pour toute suite (x_n) de fonctions numériques $\geqslant 0$, on a $N\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} N(x_n)$, que $N(x)$ est croissante sur l'ensemble des fonctions $\geqslant 0$ et

$N(\lambda x)=|\lambda|.N(x)$. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions numériques <u>finies</u> x telles que $N(x) < +\infty$; montrer que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel, sur lequel N est une semi-norme, et que pour cette semi-norme, $\mathcal{E}$ est un espace complet.

§ 2. Mesures et fonctions mesurables.

1. Tribus d'ensembles.

DEFINITION 1.- <u>On dit qu'une phratrie $\mathfrak{T}$ de parties d'un ensemble E (chap.I, § 1) est une tribu si toute réunion dénombrable d'ensembles de $\mathfrak{T}$ appartient à $\mathfrak{T}$</u>.

<u>Exemples</u>.- L'ensemble $\mathfrak{P}(E)$ de toutes les parties de E est une tribu ; il en est de même de l'ensemble $\mathfrak{D}(E)$ de toutes les parties <u>dénombrables</u> de E.

Pour montrer qu'une phratrie $\mathfrak{T}$ est une tribu, il suffit de prouver que la réunion d'une suite <u>croissante</u> (A_n) d'ensembles de $\mathfrak{T}$ appartient à $\mathfrak{T}$; en effet, si $\mathfrak{T}$ possède cette propriété, et si (B_n) est une suite quelconque d'ensembles de $\mathfrak{T}$ on a $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$, où $C_n = \bigcup_{p=1}^{n} B_p$; comme les C_n appartiennent à $\mathfrak{T}$ et forment une suite croissante, $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ appartient à $\mathfrak{T}$.

PROPOSITION 1.- <u>Toute intersection dénombrable d'ensembles d'une tribu $\mathfrak{T}$ appartient à $\mathfrak{T}$</u>.

En effet, soit (A_n) une suite d'ensembles de $\mathfrak{T}$ $(n \geqslant 0)$; posons $B_n = A_0 \cap \complement A_n$ pour $n > 0$; on a $A_0 \cap A_n = A_0 \cap \complement B_n$, donc
$$\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n = A_0 \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} (A_0 \cap A_n) = A_0 \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} (A_0 \cap \complement B_n) = A_0 \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} (\complement B_n) = A_0 \cap \complement\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\Big) ;$$
or les B_n appartiennent à $\mathfrak{T}$, donc il en est de même de leur réunion, et par suite $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ appartient à $\mathfrak{T}$.

Toute <u>intersection</u> de tribus sur un même ensemble E est évidemment une tribu sur E ; si $\mathfrak{F}$ est un ensemble quelconque de parties de E , l'intersection de toutes les tribus contenant $\mathfrak{F}$ (il en existe, par exemple $\mathfrak{P}(E)$) est donc la plus petite tribu contenant $\mathfrak{F}$; on dit que c'est la tribu <u>engendrée</u> par $\mathfrak{F}$. Cette tribu contient en particulier l'ensemble $\mathfrak{F}_\sigma$ des réunions dénombrables d'ensembles de $\mathfrak{F}$, l'ensemble $\mathfrak{F}_\delta$ des intersections dénombrables d'ensembles de $\mathfrak{F}$, ainsi que les ensembles $(\mathfrak{F}_\sigma)_\delta$ (qu'on note $\mathfrak{F}_{\sigma\delta}$), $(\mathfrak{F}_\delta)_\sigma$ (qu'on note $\mathfrak{F}_{\delta\sigma}$), $\mathfrak{F}_{\sigma\delta\sigma}$, $\mathfrak{F}_{\delta\sigma\delta}$, etc.

On remarquera qu'on a $(\mathfrak{F}_\sigma)_\sigma = \mathfrak{F}_\sigma$, $(\mathfrak{F}_\delta)_\delta = \mathfrak{F}_\delta$; on peut donner des exemples où tous les ensembles $\mathfrak{F}_\sigma$, $\mathfrak{F}_\delta$, $\mathfrak{F}_{\sigma\delta}$, $\mathfrak{F}_{\delta\sigma}$, $\mathfrak{F}_{\sigma\delta\sigma}$, $\mathfrak{F}_{\delta\sigma\delta}$, etc.. sont distincts.

PROPOSITION 2.- <u>Soit $\mathfrak{T}$ une tribu sur un ensemble F , et f une application d'un ensemble E dans F . L'ensemble $\overset{-1}{f}(\mathfrak{T})$ des ensembles $\overset{-1}{f}(A)$, où A parcourt $\mathfrak{T}$, est une tribu sur E . Si $\mathfrak{T}$ est engendrée par un ensemble $\mathfrak{F}$ de parties de F , $\overset{-1}{f}(\mathfrak{T})$ est engendrée par l'ensemble $\overset{-1}{f}(\mathfrak{F})$ des $\overset{-1}{f}(A)$, où A parcourt $\mathfrak{F}$.</u>

Il est immédiat que $\mathfrak{T}_1 = \overset{-1}{f}(\mathfrak{T})$ est une tribu, en vertu des formules (13), (14),(15) et (34) de <u>Ens</u>.R (§2 et § 4). Les mêmes formules montrent que, si $\mathfrak{T}'_1$ est une tribu contenue dans $\mathfrak{T}_1$, l'ensemble $\mathfrak{T}'$ des ensembles $A \in \mathfrak{T}$ tels que $\overset{-1}{f}(A) \in \mathfrak{T}'_1$; est une tribu contenue dans $\mathfrak{T}$. Cela étant, si $\overset{-1}{f}(\mathfrak{F})$ engendrait une tribu $\mathfrak{T}'_1$ contenue dans $\mathfrak{T}_1$ et distincte de cette dernière, la tribu $\mathfrak{T}'$ des $A \in \mathfrak{T}$ tels que $\overset{-1}{f}(A) \in \mathfrak{T}'_1$ serait une tribu contenue dans $\mathfrak{T}$, distincte de $\mathfrak{T}$ et contenant $\mathfrak{F}$, contrairement au fait que $\mathfrak{F}$ engendre $\mathfrak{T}$.

Comme cas particulier de la prop.2, remarquons que, si F est une partie non vide d'un ensemble E , et $\mathfrak{T}$ une tribu sur E , l'ensemble $\mathfrak{T}_F$ des ensembles $F \cap A$, où A parcourt $\mathfrak{T}$, est une tribu sur F , car on a $F \cap A = \overset{-1}{\varphi}(A)$, où φ est l'application canonique de F dans E ;

en outre, si l'ensemble de parties $\mathfrak{F}$ engendre $\mathfrak{T}$, l'ensemble des traces $F \cap A$, où A parcourt $\mathfrak{F}$, engendre $\mathfrak{T}_F$. On dit que $\mathfrak{T}_F$ est la tribu <u>induite</u> par $\mathfrak{T}$ sur F.

<u>2. Fonctions mesurables-</u> $\mathfrak{T}$

Dans tout ce paragraphe, pour toute fonction numérique x (finie ou non) définie dans un ensemble E, et tout nombre réel fini α, nous désignerons par $P_{x,\alpha}$ l'ensemble des $t \in E$ tels que $x(t) \geqslant \alpha$, par $Q_{x,\alpha}$ l'ensemble des $t \in E$ tels que $x(t) > \alpha$ (images réciproques, par x, des intervalles $[\alpha, +\infty]$ et $]\alpha, +\infty]$ respectivement) ; on notera qu'on a, pour tout α,

(1) $$Q_{x,\alpha} = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_{x,\alpha+\frac{1}{n}}$$

(2) $$P_{x,\alpha} = \bigcap_{n=1}^{\infty} Q_{x,\alpha-\frac{1}{n}}$$

Nous désignerons par Q_x l'ensemble $Q_{x,0}$.

DÉFINITION 2.- <u>Etant donnée une tribu $\mathfrak{T}$ de parties d'un ensemble E, on dit qu'une fonction numérique $x \geqslant 0$, définie dans E, est mesurable-</u> $\mathfrak{T}$ (ou plus simplement <u>mesurable</u>, lorsqu'aucune confusion n'en résulte) <u>si, pour tout $\alpha > 0$, l'ensemble $P_{x,\alpha}$ appartient à $\mathfrak{T}$. Si x est une fonction numérique quelconque définie dans E, on dit que x est mesurable-$\mathfrak{T}$ si x^+ et x^- sont mesurables-$\mathfrak{T}$</u>.

D'après les relations (1) et (2), pour qu'une fonction $x \geqslant 0$ soit mesurable-$\mathfrak{T}$, il faut et il suffit que tout ensemble $Q_{x,\alpha}$ appartienne à $\mathfrak{T}$ (pour tout $\alpha > 0$ et fini). En particulier, dire que A appartient à $\mathfrak{T}$ équivaut à dire que sa fonction caractéristique φ_A est mesurable-$\mathfrak{T}$.

Nous allons transformer la définition des fonctions mesurables-$\mathfrak{T}$.

DÉFINITION 3.- <u>Sur un espace topologique F, on appelle tribu de Borel la tribu $\mathfrak{B}(F)$ engendrée par l'ensemble $\mathfrak{U}$ des ensembles ouverts de F. On appelle ensemble borélien dans F tout ensemble appartenant à</u> $\mathfrak{B}(F)$.

Comme F est ouvert, il est borélien, donc il en est de même du <u>complémentaire</u> de tout ensemble borélien ; en particulier, tout ensemble <u>fermé</u> est borélien, et la tribu de Borel est aussi engendrée par l'ensemble des ensembles fermés de F : en effet, elle contient la tribu engendrée par cet ensemble, et réciproquement, comme F est fermé, cette tribu contient tout ensemble ouvert, donc est identique à $\mathcal{B}(F)$.

D'après la prop.2, si A est un sous-espace quelconque de F , la tribu de Borel sur A est identique à la tribu <u>induite</u> sur A par la tribu de Borel sur F .

Nous allons particulièrement considérer dans ce qui suit les tribus de Borel de la droite numérique R , de la droite achevée $\overline{R}$ et du complémentaire $\overline{R}^*$ de 0 dans $\overline{R}$. Comme tout ensemble ouvert dans R (resp. $\overline{R}$) est réunion dénombrable d'<u>intervalles ouverts</u>, $\mathcal{B}(R)$ (resp. $\mathcal{B}(\overline{R})$) est engendrée par l'ensemble des intervalles ouverts dans R (resp. $\overline{R}$). Elle est aussi engendrée par l'ensemble des intervalles fermés dans R (resp. $\overline{R}$), tout intervalle ouvert étant réunion dénombrable d'intervalles fermés. De même, $\mathcal{B}(\overline{R}^*)$ est engendrée par les intervalles ouverts de $\overline{R}$ ne contenant pas 0 , et aussi par les intervalles fermés de ne contenant pas 0 .

PROPOSITION 3.- <u>Pour qu'une fonction numérique x définie dans E soit mesurable-$\mathcal{T}$, il faut et il suffit que l'image réciproque par x de tout ensemble de la tribu $\mathcal{B}(\overline{R}^*)$ appartienne à $\mathcal{T}$.</u>

En effet, supposons que x soit mesurable-$\mathcal{T}$. Alors l'image réciproque par x de tout intervalle fermé $[\alpha,+\infty]$ $(\alpha>0)$ appartient à $\mathcal{T}$, et il en est de même de l'image réciproque par x de tout intervalle ouvert $]\beta,+\infty]$; donc l'image réciproque par x de $[\alpha,\beta]$ $(0<\alpha\leqslant\beta)$ appartient à $\mathcal{T}$; on voit de même que l'image réciproque par x de tout intervalle $[\alpha,\beta]$ où $\alpha\leqslant\beta<0$, et de tout intervalle

$[-\infty, \alpha]$ $(\alpha < 0)$ appartient à $\mathcal{T}$. Autrement dit, si $\mathcal{F}$ désigne la famille des intervalles fermés de $\overline{\mathbb{R}}$ ne contenant pas 0, $\overset{-1}{x}(\mathcal{F})$ est contenue dans $\mathcal{T}$; mais comme $\mathcal{F}$ engendre la tribu $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^*)$, $\overset{-1}{x}(\mathcal{F})$ engendre la tribu des $\overset{-1}{x}(A)$, où A parcourt $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^*)$(prop.2) ; cette tribu est donc contenue dans $\mathcal{T}$, ce qui établit la première partie de la proposition.

La seconde est immédiate, car si l'image réciproque par x de tout ensemble de $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^*)$ appartient à $\mathcal{T}$, il en est ainsi en particulier des images réciproques des intervalles $[-\infty, \alpha]$ $(\alpha < 0)$ et $[\beta, +\infty]$ $(\beta > 0)$, donc x est mesurable en vertu de la déf.2.

<u>Remarque</u>.- Si l'ensemble E appartient à la tribu $\mathcal{T}$, pour que x soit mesurable-$\mathcal{T}$, il faut et il suffit que l'image réciproque par x de tout ensemble de la tribu $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ appartienne à $\mathcal{T}$. En effet, la condition est évidemment suffisante ; pour voir qu'elle est nécessaire, il suffit de montrer que l'ensemble $\overset{-1}{x}(0)$ appartient à $\mathcal{T}$. Or, cet ensemble est complémentaire, par rapport à E, de l'ensemble $\overset{-1}{x}(\overline{\mathbb{R}}^*)$, et ce dernier appartient à $\mathcal{T}$, comme réunion des images réciproques par x des intervalles $\left[-\infty, -\frac{1}{n}\right]$ et $\left[\frac{1}{n}, +\infty\right]$ (pour $n \in \mathbb{N}$) ; d'où la proposition, puisque E appartient à $\mathcal{T}$ par hypothèse.

DEFINITION 4.- <u>Soient E et F deux espaces topologiques. On dit qu'une application f de E dans F est borélienne si, pour tout ensemble borélien $A \subset F$, $\overset{-1}{f}(A)$ est un ensemble borélien dans E</u>.

En particulier, toute application <u>continue</u> x de E dans F est borélienne, car pour tout ensemble ouvert $A \subset F$, $\overset{-1}{x}(A)$ est ouvert dans E, donc borélien ; comme la tribu de Borel sur F est engendrée par l'ensemble des ensembles ouverts, l'image réciproque par x de cette tribu est engendrée par les $\overset{-1}{x}(A)$, où A parcourt l'ensemble des ensembles ouverts de F (prop.2) ; elle est donc contenue dans $\mathcal{B}(E)$, d'où la proposition.

PROPOSITION 4.- <u>Soit</u> φ <u>une application borélienne de</u> $\overline{R}^n$ (resp. R^n) <u>dans</u> $\overline{R}$, <u>telle que</u> $\varphi(0,0,\ldots,0)=0$. <u>Si</u> $f_1,f_2,\ldots,f_n$ <u>sont n fonctions mesurables</u>-$\mathcal{T}$ (resp. <u>mesurables</u>-$\mathcal{T}$ <u>et finies</u>) <u>définies dans</u> E , <u>la fonction composée</u> $g(t)=\varphi(f_1(t),f_2(t),\ldots,f_n(t))$ <u>est mesurable</u>-$\mathcal{T}$.

En effet, on peut écrire $g=\varphi\circ f$, où $f=(f_1,f_2,\ldots,f_n)$ est une application de E dans $\overline{R}^n$. Montrons d'abord que pour tout ensemble ouvert A de $\overline{R}^n$, ne contenant pas le point $(0,0,\ldots,0)$, $\overset{-1}{f}(A)$ appartient à $\mathcal{T}$. En effet, A est réunion dénombrable de pavés ouverts $\prod_{k=1}^{n} I_k$, produits de n intervalles ouverts I_k de $\overline{R}$ dont un au moins ne contient pas 0 ; il suffit donc de faire la démonstration lorsque A est un tel pavé ; on a alors $\overset{-1}{f}(A)=\bigcap_{k=1}^{n}\overset{-1}{f_k}(I_k)$, et il existe un indice k tel que $0\notin I_k$; $\overset{-1}{f_k}(I_k)$ appartient donc à $\mathcal{T}$; pour voir que, pour tout autre indice j , $\overset{-1}{f_j}(I_j)\cap\overset{-1}{f_k}(I_k)$ appartient à $\mathcal{T}$, il suffit de montrer que $\overset{-1}{f_j}(0)\cap\overset{-1}{f_k}(I_k)\in\mathcal{T}$; comme cet ensemble est égal à $\overset{-1}{f_k}(I_k)\cap\complement(\overset{-1}{f_j}(\overline{R}^*))$, et que $\overset{-1}{f_j}(\overline{R}^*)\in\mathcal{T}$, on a bien $\overset{-1}{f}(A)\in\mathcal{T}$. Cela étant, les ensembles ouverts de $\overline{R}^n$, ne contenant pas le point $(0,0,\ldots,0)$ engendrent la tribu de Borel de l'espace $\overline{R}^n_*$ complémentaire de ce point par rapport à $\overline{R}^n$; on en conclut (prop.2) que pour tout ensemble A de la tribu $\mathcal{B}(\overline{R}^n_*)$, $\overset{-1}{f}(A)$ appartient à $\mathcal{T}$. Soit alors B un ensemble quelconque de la tribu $\mathcal{B}(\overline{R}^*)$; comme par hypothèse $\varphi(0,0,\ldots,0)=0$, $A=\overset{-1}{\varphi}(B)$ est contenu dans $\overline{R}^n$ et appartient à $\mathcal{B}(\overline{R}^n)$, donc appartient à $\mathcal{B}(\overline{R}^n_*)$; il en résulte que $\overset{-1}{f}(A)=\overset{-1}{f}(\overset{-1}{\varphi}(B))=\overset{-1}{g}(B)$ appartient à $\mathcal{T}$, ce qui démontre la proposition, d'après la prop.3 .

<u>Remarque</u>.- Si l'ensemble E appartient à $\mathcal{T}$, la prop.4 est encore vraie lorsque $\varphi(0,0,\ldots,0)$ a une valeur quelconque ; on effet, dans la démonstration précédente, on peut supposer que les I_k sont des

intervalles ouverts quelconques dans $\overline{R}$; les $\overset{-1}{f_k}(I_k)$ appartiennent alors tous à $\mathfrak{T}$, et il en est donc de même de $\overset{-1}{f}(A)$ si A est un ensemble ouvert quelconque dans $\overline{R}^n$; on en conclut comme ci-dessus que $\overset{-1}{f}(A) \in \mathfrak{T}$ pour tout ensemble borélien A dans $\overline{R}^n$, puis que $\overset{-1}{g}(B) \in \mathfrak{T}$ pour tout ensemble borélien B dans $\overline{R}$.

COROLLAIRE.- *Si f et g sont deux fonctions mesurables-*$\mathfrak{T}$ *et finies, f+g et fg sont mesurables-*$\mathfrak{T}$.

PROPOSITION 8.- *Si* (f_n) *est une suite de fonctions mesurables-*$\mathfrak{T}$ *les fonctions* $\sup_n f_n$, $\inf_n f_n$, $\limsup_{n\to\infty} f_n$, $\liminf_{n\to\infty} f_n$ *sont mesurables-*$\mathfrak{T}$.

Si on pose $f = \sup_n f_n$, on a $f^+ = \sup_n f_n^+$, $f^- = \inf_n f_n^-$, donc on peut se borner à considérer le cas où toutes les fonctions f_n sont $\geqslant 0$.
Or, si $f = \sup_n f_n$ et $f_n \geqslant 0$; pour tout $\alpha > 0$, l'ensemble $Q_{f,\alpha}$ est la réunion des ensembles $Q_{f_n,\alpha}$, donc appartient à $\mathfrak{T}$, et f est mesurable. De même, si $f = \inf_n f_n$ et $f_n \geqslant 0$, pour tout $\alpha > 0$, l'ensemble $P_{f,\alpha}$ est l'intersection des ensembles $P_{f_n,\alpha}$, donc appartient à $\mathfrak{T}$, et f est mesurable-$\mathfrak{T}$. Enfin, comme $\limsup_{n\to\infty} f_n = \inf_n(\sup_{m\geqslant n} f_m)$ et $\liminf_{n\to\infty} f_n = \sup_n(\inf_{m\geqslant n} f_m)$, on voit d'après ce qui précède que $\limsup_{n\to\infty} f_n$ et $\liminf_{n\to\infty} f_n$ sont mesurables-$\mathfrak{T}$.

COROLLAIRE.- *Si la suite* (f_n) *de fonctions mesurables-*$\mathfrak{T}$ *converge simplement dans E, sa limite f est mesurable-*$\mathfrak{T}$.

Les fonctions *étagées* attachées à la tribu $\mathfrak{T}$ sont mesurables-$\mathfrak{T}$ car l'ensemble des points où une telle fonction $f \geqslant 0$ est $\geqslant \alpha > 0$, est réunion d'un nombre fini d'ensembles de $\mathfrak{T}$. Réciproquement, toute fonction f mesurable-$\mathfrak{T}$ et ne prenant qu'un nombre *fini* de valeurs *finies* est une fonction étagée attachée à $\mathfrak{T}$. On peut en effet se borner au cas où $f \geqslant 0$; si $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n$ sont les valeurs distinctes et > 0 prises par f, l'ensemble des éléments $t \in E$ tels que $f(t) = \alpha_i$ est l'ensemble $P_{f,\alpha_i} \cap \complement P_{f,\alpha_{i+1}}$ donc appartient à $\mathfrak{T}$.

PROPOSITION 6.- Toute fonction $f \geqslant 0$ mesurable-$\mathfrak{T}$, est limite d'une suite croissante de fonctions étagées $\geqslant 0$, attachées à la tribu $\mathfrak{T}$.

Il suffit de montrer que la fonction continue $\varphi(t)=t$ définie dans $[0,+\infty]$, est limite d'une suite croissante de fonctions boréliennes étagées $\varphi_n \geqslant 0$, telles que $\varphi_n(0)=0$; f sera alors limite de la suite croissante des fonctions $f_n=\varphi_n \circ f$, qui sont mesurables-$\mathfrak{T}$ (prop.4) et ne prennent qu'un nombre fini de valeurs, donc sont des fonctions étagées attachées à $\mathfrak{T}$.

Or, si on pose $\varphi_n(t)=\frac{k}{2^n}$ pour $\frac{k}{2^n} \leqslant t < \frac{k+1}{2^n}$ et $0 \leqslant k < 4^n$

$\varphi_n(t) = 2^n$ pour $t \geqslant 2^n$

φ_n est une fonction borélienne étagée $\geqslant 0$, telle que $\varphi_n(0)=0$; on a $\varphi_n(t) \leqslant \varphi_{n+1}(t) \leqslant t$; si t est fini, $t-\varphi_n(t) \leqslant \frac{1}{2^n}$ dès que $t < 2^n$, et pour $t=+\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(+\infty) = \lim\limits_{n\to\infty} 2^n = +\infty$, ce qui établit la proposition.

COROLLAIRE.- Si f est mesurable-$\mathfrak{T}$, positive et majorée, il existe une suite croissante de fonctions étagées $\geqslant 0$, attachées à la tribu $\mathfrak{T}$, qui converge uniformément vers f dans E.

En effet, les φ_n convergent uniformément vers $\varphi(t)=t$ dans tout intervalle borné.

3. Tribu attachée à une intégrale.

PROPOSITION 7.- Soit Φ un clan de fonctions sur un ensemble E, U une intégrale sur le clan Φ. Lorsque x parcourt l'ensemble des fonctions sommables $\geqslant 0$ (pour U et Φ), l'ensemble $\mathfrak{T}$ des ensembles Q_x est une tribu.

Il nous suffira de prouver que : 1° la réunion d'une suite (Q_{x_n}) d'ensembles de $\mathfrak{T}$ appartient à $\mathfrak{T}$; 2° si x et y sont deux fonctions sommables $\geqslant 0$, $Q_x \cap \complement Q_y$ appartient à $\mathfrak{T}$.

1° Posons $y_n = x_n$ si $U(x_n)=0$, $y_n = \frac{1}{2^n U(x_n)} x_n$ dans le cas contraire ; il en résulte que $\sum_{n=1}^{\infty} U(y_n) < +\infty$. Donc (§ 1, cor. 1 du th. 1), $y = \sum_{n=1}^{\infty} y_n$ est sommable, et il est immédiat que $Q_y = \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_{x_n}$.

2° On peut se limiter au cas où x et y sont des fonctions *finies* car on ne change pas Q_x et Q_y en remplaçant x et y par des fonctions égales respectivement à $x(t)$ et $y(t)$ aux points où x et y sont finies, à 1 aux points où elles sont infinies. Considérons alors la suite des fonctions sommables $x_n = (x-ny)^+ \geqslant 0$; la suite (x_n) est décroissante, donc sa limite z est sommable et $\geqslant 0$ (§ 1, th. 1) ; mais, d'après la définition de x_n , on a $Q_z = Q_x \cap \complement Q_y$.

Nous dirons que la tribu $\mathfrak{T}$ formée des ensembles Q_x , où x parcourt l'ensemble des fonctions sommables (pour U et Φ) et $\geqslant 0$, est la *tribu attachée à l'intégrale* U (et au clan Φ).

PROPOSITION 8.- *Soit* U *une intégrale sur un clan de fonctions* Φ , *et soit* $\mathfrak{T}$ *la tribu attachée à* U . *Toute fonction sommable* (pour U et Φ) *est mesurable-* $\mathfrak{T}$.

La proposition résultera du lemme suivant :

Lemme.- Pour toute fonction sommable $x \geqslant 0$ *et tout* $\alpha > 0$, *la fonction caractéristique* $\varphi_{P_{x,\alpha}}$ *est sommable*.

Pour tout entier $n > \frac{1}{\alpha}$, soit $g_n(u)$ la fonction continue définie pour $u \geqslant 0$, égale à 0 pour $0 \leqslant u \leqslant \alpha - \frac{1}{n}$, à 1 pour $\alpha \leqslant u$, et linéaire pour $\alpha - \frac{1}{n} \leqslant u \leqslant \alpha$; $\varphi_{P_{x,\alpha}}$ est l'enveloppe inférieure de la suite décroissante des fonctions $g_n x$; il suffit donc de montrer que ces dernières sont sommables pour tout $n > \frac{1}{\alpha}$.

Si $x \in \Phi_+$, on a $g_n \circ x \in \Phi_+$ d'après la définition d'un clan (chap. I, § 1). Si $x \in I$ (§ 1), x est enveloppe supérieure d'une ~~pxxkk~~ suite croissante (x_m) de fonctions de Φ_+ , donc $g_n \circ x$ est enveloppe supérieure de la suite $(g_n \circ x_m)_{m \geqslant 0}$ de fonctions de Φ_+ ;

en outre, on a $g_n(u) \leqslant \frac{1}{a} u$ pour tout $u \geqslant 0$, donc $g_n(x_m(t)) \leqslant \frac{1}{a} x_m(t)$, ce qui prouve que $U(g_n \circ x_m) \leqslant \frac{1}{a} U(x_m) \leqslant \frac{1}{a} U(x)$; par suite (§ 1), $g_n \circ x$ appartient à I par définition.

Enfin, si $x \geqslant 0$ est une fonction sommable quelconque, x est presque partout égale à l'enveloppe inférieure d'une suite décroissante (y_m) de fonctions de I (§ 1, cor. de la prop. 11) ; il en résulte que $g_n \circ x$ est presque partout égale à l'enveloppe inférieure de la suite décroissante $(g_n \circ y_m)_{m \geqslant 0}$ de fonctions de I, ce qui achève la démonstration.

4. Mesure attachée à une intégrale.

Nous étendrons légèrement la définition de fonction additive d'ensemble sur une phratrie $\mathfrak{F}$, donnée au chap. I, § 2, en conservant l'énoncé de cette définition, mais en supposant que la fonction prend ses valeurs dans $\left]-\infty, +\infty\right]$, ou dans $\left[-\infty, +\infty\right[$.

Avec cette convention, posons la définition suivante :

DEFINITION 5.- Etant donnée une tribu $\mathfrak{T}$, on dit qu'une fonction additive d'ensemble μA sur $\mathfrak{T}$ est une mesure positive (ou simplement une mesure, lorsqu'aucune confusion n'en résulte) sur $\mathfrak{T}$, si elle prend ses valeurs dans $\left[0, +\infty\right]$, et satisfait aux trois conditions suivantes :

(M_I) Pour toute suite croissante (A_n) d'ensembles de $\mathfrak{T}$, on a

(3) $$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \to \infty} \mu A_n .$$

(M_{II}) Tout ensemble de $\mathfrak{T}$ est réunion dénombrable d'ensembles de mesure finie.

(M_{III}) Toute partie d'un ensemble de mesure nulle appartient à $\mathfrak{T}$ (et a donc une mesure nulle).

Une mesure (positive) prend encore parfois le nom de distribution de masses.

Exemples.- On dit qu'une mesure sur un ensemble E est discrète (ou une distribution de masses ponctuelles) si elle est définie sur la tribu $\mathcal{D}(E)$ des parties dénombrables de E . Une telle mesure est entièrement déterminée par ses valeurs $\mu(\{x\})=m(x)$ pour chaque ensemble réduit à un élément de E ; en effet, pour une partie dénombrable A de E , dont on range les éléments en une suite (x_n) , A est réunion de la suite croissante des A_n , où A_n est l'ensemble des x_p d'indice $p \leqslant n$, et on a $\mu A_n = \sum_{p=1}^{n} \mu(\{x_p\})$ donc $\mu A = \lim_{n\to\infty} \mu A_n = \sum_{n=1}^{\infty} m(x_n) = \sum_{x \in A} m(x)$. On notera en outre que, d'après (M_{II}), on a $m(x) < +\infty$ pour tout $x \in E$. Réciproquement, si on se donne une application quelconque $x \to m(x)$ de E dans $[0,+\infty[$ on définit une mesure μ sur la tribu $\mathcal{D}(E)$, en posant, pour tout ensemble $A \in \mathcal{D}(E)$, $\mu A = \sum_{x \in A} m(x)$; pour vérifier l'axiome (M_I) , il suffit de remarquer que l'on peut écrire $\mu A = \sup \mu F$, où F parcourt l'ensemble des parties finies de A .

En particulier, lorsqu'on prend $m(x)=1$ pour tout $x \in E$, on dit que la mesure μ correspondante est la mesure discrète canonique sur E .

Si (A_n) est une suite décroissante d'ensembles de $\mathfrak{T}$, et si μA_n est finie à partir d'une certaine valeur de n , on a

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu A_n \quad . \tag{4}$$

En effet, on peut se borner au cas où tous les A_n sont de mesure finie ; posons $B_n = A_1 \cap \complement A_n$; la suite (B_n) est une suite croissante d'ensembles de $\mathfrak{T}$, et si $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, on a $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = A_1 \cap \complement A$; donc $\mu A_n = \mu A_1 - \mu B_n$, $\mu A = \mu A_1 - \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right)$, et la formule (3) entraîne (4).

Cette proposition est inexacte si tous les A_n sont de mesure infinie. Par exemple, si est la mesure discrète canonique sur $\mathbb{Z}$, et A_n l'ensemble des entiers $\geqslant n$, l'intersection des A_n , est vide, mais chacun d'eux a une mesure infinie.

PROPOSITION 9.- Pour toute suite (A_n) d'ensembles d'une tribu et toute mesure positive μ sur $\mathfrak{T}$, on a

(5) $$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu A_n .$$

Si, quels que soient les indices distincts m,n , $A_m \cap A_n = \emptyset$, les deux membres de (5) sont égaux.

Tout d'abord, si A et B sont deux ensembles quelconques de $\mathfrak{T}$, on a $\mu(A\cup B) = \mu(A \cup (B \cap \complement A)) = \mu A + \mu(B \cap \complement A) \leq \mu A + \mu B$, puisque A et $B \cap \complement A$ n'ont aucun élément commun. Par récurrence, on en déduit que $\mu(\bigcup_{p=1}^{n} A_p) \leq \sum_{p=1}^{n} \mu A_p$; comme la suite des ensembles $B_n = \bigcup_{p=1}^{n} A_p$ est croissante, en passant à la limite dans l'inégalité précédente, on obtient l'inégalité (5). Le raisonnement est le même, mais plus simple, lorsque $A_m \cap A_n = \emptyset$ pour tout couple d'indices distincts m,n .

De façon générale, une fonction d'ensemble λ (à valeurs dans $]-\infty, +\infty]$ ou dans $[-\infty, +\infty[$) définie sur une tribu $\mathfrak{T}$ est dite complètement additive sur $\mathfrak{T}$ si, pour toute suite (A_n) d'ensembles de $\mathfrak{T}$ deux à deux sans point commun, on a (5 bis) $\lambda(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda A_n$. On voit donc qu'une mesure sur une tribu $\mathfrak{T}$ est complètement additive. Réciproquement, si μ est une fonction d'ensemble définie sur une tribu $\mathfrak{T}$ à valeurs dans $[0, +\infty]$, complètement additive, et satisfaisant à (M_{II}) et (M_{III}), c'est une mesure sur $\mathfrak{T}$. En effet, il existe des ensembles de $\mathfrak{T}$ pour lesquels μ prend une valeur finie d'après (M_{II}) ; si A est un tel ensemble, en appliquant la relation (5 bis) au cas où $A_1 = A$, $A_n = \emptyset$ pour $n > 1$, on voit que $\mu \emptyset = 0$; appliquant la même relation en remplaçant A_n par 0 pour $n \geq 3$, on voit que μ est additive sur $\mathfrak{T}$; enfin, (M_I) est vérifié car si (A_n) est une suite croissante d'ensembles de $\mathfrak{T}$, et $B_1 = A_1$, $B_n = A_n \cap \complement A_{n-1}$ pour $n \geq 1$, les B_n appartiennent à $\mathfrak{T}$, on a $\bigcup_n A_n = \bigcup_n B_n$, les B_n sont deux à deux sans point commun, d'où $\mu(\bigcup_n A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu B_n$, et $\sum_{p=1}^{n} \mu B_p = \mu A_n$.

Il est clair que, si une mesure μ est définie sur une tribu $\mathfrak{T}$, les ensembles de mesure-μ nulle forment une tribu $\mathfrak{N}$ contenant dans $\mathfrak{T}$.

PROPOSITION 10.- Soit U une intégrale sur un clan ϕ , $\mathfrak{T}$ la tribu attachée à U . Si, pour tout ensemble $A \in \mathfrak{T}$, on pose $\mu A = U^*(\varphi_A)$, μ est une mesure sur la tribu $\mathfrak{T}$.

Notons d'abord que si $\mu A < +\infty$, φ_A est sommable ; en effet, on a par hypothèse $A = Q_x$, où $x \geqslant 0$ est sommable, donc φ_A est l'enveloppe supérieure des fonctions sommables $\varphi P_{x,\frac{1}{n}}$ (lemme de la prop.8) ; comme par hypothèse $\sup_n U(\varphi_{P_{x,\frac{1}{n}}}) \leqslant U^*(\varphi_A) < +\infty$, φ_A est sommable en vertu du th.2 du §1 .

Cela étant, il est clair que μ est une fonction croissante dans $\mathfrak{T}$, Si A et B sont deux ensembles de $\mathfrak{T}$ sans élément commun, on a $\mu(A \cup B) = \mu A + \mu B$; c'est évident d'après la remarque préliminaire si μA et μB sont finis ; dans le cas contraire, les deux membres de la formule sont égaux à $+\infty$, puisque μ est croissante.

Soit maintenant (A_n) une suite croissante d'ensembles de $\mathfrak{T}$, A leur réunion ; si $\lim_{n \to \infty} \mu A_n = +\infty$, la formule (3) est évidente, puisque $\mu A \geqslant \mu A_n$ pour tout n . Si au contraire $\lim_{n\to\infty} \mu A_n < +\infty$, il résulte du th.2 du §1 que φ_A , enveloppe supérieure des φ_{A_n} , est sommable et que $\mu A = U(\varphi_A) = \lim_{n\to\infty} U(\varphi_{A_n}) = \lim_{n \to \infty} \mu A_n$. La condition (M_I) est donc bien vérifiée.

La condition (M_{II}) est vérifiée, puisque si $A = Q_x$ est un ensemble quelconque de $\mathfrak{T}$, A est réunion dénombrable des ensembles $P_{x,\frac{1}{n}}$ qui sont de mesure finie. Enfin, les ensembles $A \in \mathfrak{T}$ tels que $\mu A = 0$

ne sont autres que les ensembles **négligeables** pour U et Φ définis au §1 (§1,déf.4), donc (M_{III}) résulte de la prop.7 du §1.

Nous dirons que la mesure μ ainsi définie sur la tribu $\mathfrak{T}$ est la mesure attachée à l'intégrale U (et au clan Φ). Grâce à cette définition, nous pouvons désormais appeler ensemble de mesure nulle les ensembles négligeables pour U et Φ (s'il n'y a pas d'ambiguité sur la mesure considérée).

Exemple. Mesure de Lebesgue sur R .- Prenons pour Φ le clan des fonctions continues dans R , nulles en dehors d'un intervalle compact, pour U la forme linéaire croissante $x \to \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)dt$ sur Φ . Nous allons voir que U est une intégrale sur Φ . En effet, soit (f_n) une suite décroissante de fonctions de Φ_+ ; si f_1 est nulle hors d'un intervalle compact I , il en est de même de f_n pour tout n . Montrons que, si la suite (f_n) converge simplement vers 0 , elle converge uniformément vers 0 dans I . En effet, dans le cas contraire, il existerait $a > 0$ tel que, pour tout n , il existe un $t_n \in I$ et un indice $m \geqslant n$ tels que $f_m(t_n) \geqslant a$. Soit t une valeur d'adhérence de la suite (t_n) dans l'ensemble compact I ; par hypothèse la suite $(f_n(t))$ tend vers 0, donc il existe n_0 tel que $f_{n_0}(t) \leqslant \frac{a}{2}$; comme f_{n_0} est continue au point t , il existe un intervalle ouvert H contenant t tel que $f_{n_0}(t) < a$ dans H , et comme la suite (f_n) est décroissante, on a aussi $f_n(t) < a$ dans H pour tout $n \geqslant n_0$; mais par définition, il existe $n \geqslant n_0$ tel que $t_n \in H$, donc il existerait $m \geqslant n \geqslant n_0$ tel que $f_m(t_n) \geqslant a$, ce qui est absurde (cf.chap.V, §1). Si $I = [a,b]$, on déduit de l'inégalité $U(f_n) \leqslant (b-a) \| f_n \|$ que $U(f_n)$ tend vers 0 , ce qui prouve que U est une intégrale (cf. chap.V, §1) .

L'intégrale U est appelée <u>intégrale de Lebesgue</u> sur R , la tribu $\mathfrak{T}$ et la mesure μ qui lui sont attachées sont appelées respectivement la <u>tribu</u> et la <u>mesure de Lebesgue</u> ; pour toute fonction sommable f , on écrit $U(f)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ (cf. chap. V, §).

Tout <u>intervalle</u> ouvert borné $I=\left]a,b\right[$ (resp. tout intervalle fermé borné $J=\left[a,b\right]$) est mesurable- $\mathfrak{T}$ et $\mu I=\mu J=b-a$; en effet, φ_I est l'enveloppe supérieure de la suite de fonctions continues f_n telles que $f_n(t)=1$ pour $a+\frac{1}{n}\leqslant t\leqslant b-\frac{1}{n}$, $f_n(t)=0$ pour $t\leqslant a$ et $t\geqslant b$, et f_n linéaire dans chacun des intervalles $\left[a,a+\frac{1}{n}\right]$, $\left[b-\frac{1}{n},b\right]$; de même φ_J est l'enveloppe inférieure de la suite de fonctions continues g_n telles que $g_n(t)=1$ pour $a\leqslant t\leqslant b$, $g_n(t)=0$ pour $t\leqslant a-\frac{1}{n}$ et $t\geqslant b+\frac{1}{n}$, et g_n linéaire dans chacun des intervalles $\left[a-\frac{1}{n},a\right]$ et $\left[b,b+\frac{1}{n}\right]$. On voit donc que $\mathfrak{T}$ contient la tribu de Borel $\mathfrak{B}(R)$ (cf.chap.V, § 1), et que la mesure de tout point est nulle ; on en conclut aussitôt que pour toute fonction continue par morceaux et nulle hors d'un intervalle compact, U est identique à l'intégrale définie au Livre IV ; il en est donc de même pour toute fonction règlée.

Soient $\mathfrak{T}$ et μ la tribu et la mesure attachées à une intégrale U sur un clan Φ . Désignons par $\mathfrak{F}$ la famille des ensembles Q_x <u>lorsque x parcourt</u> Φ_+ .

THÉORÈME 1.- <u>Pour tout ensemble A de</u> $\mathfrak{T}$, <u>il existe</u> :

1° <u>un ensemble B de</u> $\mathfrak{F}_{\sigma\delta}$ <u>tel que B soit réunion de A et d'un ensemble de mesure nulle</u> ;

2° <u>un ensemble C de</u> $\mathfrak{F}_{\delta\sigma}$ <u>tel que A soit réunion de C et d'un ensemble de mesure nulle</u>.

En outre, lorsque A est de mesure finie, on peut supposer que B est intersection dénombrable d'ensembles de $\mathfrak{F}_\sigma$ de mesure finie, et que C est réunion dénombrable d'ensembles dont chacun est intersection dénombrable d'ensembles de $\mathfrak{F}$ de mesure finie.

1° Considérons d'abord le cas où A est de mesure finie. Alors φ_A est sommable, donc (§ 1, cor. de la prop.11), il existe une suite décroissante (x_n) de fonctions de I, telle que $\varphi_A \leqslant x_n$ pour tout n, et que l'enveloppe inférieure x de cette suite soit égale presque partout à φ_A. Soit B l'intersection des ensembles $Q_{x_n, 1-\frac{1}{n}}$, dont chacun est de mesure finie (~~xxx~~ lemme de la prop.8) ; montrons que B est réunion de A et d'un ensemble de mesure nulle. En effet, si $t \in B$, on a $x_n(t) > 1-\frac{1}{n}$, et par suite $x(t) > 0$; autrement dit, $B \subset Q_x$, et Q_x est réunion de A et d'un ensemble de mesure nulle ; par ailleurs il est clair que $B \supset A$. Il reste à montrer que les ensembles $Q_{x_n, 1-\frac{1}{n}}$ appartiennent à $\mathfrak{F}_\sigma$. Or, si $g_n(u)$ est la fonction définie pour $u \geqslant 0$, égale à 0 pour $0 \leqslant u \leqslant 1-\frac{1}{n}$, à 1 pour $u \geqslant 1$, et linéaire pour $1-\frac{1}{n} \leqslant u \leqslant 1$, la fonction $y_n = g_n(x_n)$ appartient à I (lemme de la prop.8), et on a $Q_{x_n, 1-\frac{1}{n}} = Q_{y_n}$. Tout revient donc à voir que, pour $y \in I_+$, Q_y appartient à $\mathfrak{F}_\sigma$. Mais y est enveloppe supérieure d'une suite croissante (z_n) de fonctions de Φ_+, donc Q_y est réunion des Q_{z_n}.

Supposons maintenant que $\mu A = +\infty$. Alors A est réunion d'une suite (A_n) d'ensembles de mesure finie. D'après ce qui vient d'être démontré, et la formule (4), pour tout entier $m > 0$ et tout entier $n > 0$, il existe un ensemble $B_{mn} \in \mathfrak{F}_\sigma$ tel que $A_n \subset B_{mn}$ et que $\mu(B_{mn} \cap \complement A_n) \leqslant \frac{1}{m.2^{n+1}}$. Soit $B_m = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_{mn}$; c'est une réunion dénombrable d'ensembles de $\mathfrak{F}_\sigma$, donc il appartient encore à $\mathfrak{F}_\sigma$; on a $A \subset B_m$ et $B_m \cap \complement A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (B_{mn} \cap \complement A_n)$; il en résulte que

$\mu(B_m \cap \complement A) \leqslant \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{m}$ d'après (5). Si B est l'intersection des B_m, on a $B \supset A$, $B \in \mathcal{F}_{\sigma\delta}$, et $B \cap \complement A \subset B_m \cap \complement A$ pour tout m, donc $\mu(B \cap \complement A) \leqslant \frac{1}{m}$ pour tout m, c'est-à-dire que $\mu(B \cap \complement A) = 0$.

2° Supposons encore tout d'abord que A soit de mesure finie ; alors (§ 1, cor. de la prop. 11), il existe une suite croissante (x_n) de fonctions de S telle que $x_n \;\; \varphi_A$ pour tout n, et que l'enveloppe supérieure x de cette suite soit égale presque partout à φ_A ; en remplaçant au besoin x_n par x_n^+, qui appartient aussi à S, on peut toujours supposer que $x_n \geqslant 0$. Soit C la réunion de la suite croissante des ensembles $P_{x_n, \frac{1}{2}}$; A est réunion de C et d'un ensemble de mesure nulle, car en un point $t \in A$ n'appartenant pas à C, on a $x_n(t) < \frac{1}{2}$ pour tout n, donc $x(t) \leqslant \frac{1}{2} < \varphi_A(t)$.

Tout revient donc à prouver que, pour $y \in S_+$, l'ensemble $P_{y, \frac{1}{2}}$ est intersection dénombrable d'ensembles de $\mathcal{F}$ de mesure finie. Par hypothèse, y est enveloppe inférieure d'une suite décroissante (y_n) de fonctions de Φ_+ ; montrons que $P_{y,\frac{1}{2}}$ est intersection des ensembles $Q_{y_n, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}}$ $(n \geqslant 2)$; en effet, il est clair qu'il est contenu dans cette intersection ; réciproquement, si $y_n(t) > \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$ pour tout n, on a à la limite $y(t) \geqslant \frac{1}{2}$, donc $t \in P_{y, \frac{1}{2}}$. Reste à voir que $Q_{y_n, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}}$ appartient à $\mathcal{F}$; or, si $h_n(u)$ est la fonction définie pour $u \geqslant 0$, égale à 0 pour $0 \leqslant u \leqslant \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$, à u pour $u \geqslant \frac{1}{2}$ et linéaire pour $\frac{1}{2} - \frac{1}{n} \leqslant u \leqslant \frac{1}{2}$, la fonction $z_n = h_n(y_n)$ appartient à Φ_+ et on a $Q_{y_n, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}} = Q_{z_n}$.

Si maintenant $\mu A = +\infty$, A est réunion d'une suite dénombrable (A_n) d'ensembles de mesure finie. Pour chaque n, il existe un ensemble $C_n \in \mathcal{F}_{\delta\sigma}$ tel que A_n soit réunion de C_n et d'un ensemble H_n de mesure nulle ; A est donc réunion de $C = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$, qui appartient encore à $\mathcal{F}_{\delta\sigma}$, et de $H = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$, qui est de mesure nulle.

COROLLAIRE.- La tribu $\mathfrak{T}$ attachée à l'intégrale U est engendrée par la réunion de l'ensemble $\mathfrak{F}$ et de la tribu $\mathfrak{N}$ des ensembles de mesure nulle.

En effet, $\mathfrak{T}$ contient $\mathfrak{F} \cup \mathfrak{N}$, donc aussi la tribu engendrée par cette réunion ; et d'autre part, le th.1 prouve que tout ensemble de $\mathfrak{T}$ appartient à la tribu engendrée par $\mathfrak{F} \cup \mathfrak{N}$.

Le th.1 montre en outre que tout ensemble de mesure nulle est une partie d'un ensemble de mesure nulle appartenant à $\mathfrak{F}_{\sigma\delta}$.

5. Intégrale attachée à une mesure.

Nous avons vu ci-dessus qu'à toute intégrale sur un clan de fonctions correspondait une tribu et une mesure bien déterminées. Nous allons maintenant montrer que, réciproquement, lorsqu'on se donne une tribu et une mesure sur cette tribu, il existe une intégrale et une seule telle que la tribu et la mesure attachées à cette intégrale soient précisément la tribu et la mesure données. Cela va résulter du théorème plus général suivant, qui donne la condition pour qu'une fonction additive d'ensemble puisse être prolongée en une mesure :

THÉORÈME 2.- Soit λ une fonction additive d'ensemble à valeurs finies et $\geqslant 0$ sur une phratrie $\mathfrak{F}$ de parties d'un ensemble E. Pour qu'il existe une tribu $\mathfrak{T}$ sur E et une mesure μ sur $\mathfrak{T}$, telles que $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{T}$ et que μ soit un prolongement de λ à $\mathfrak{T}$, il faut et il suffit que λ satisfasse à la condition suivante :

(D^*) Pour toute suite décroissante (A_n) d'ensembles de $\mathfrak{F}$ telle que $\bigcap_n A_n = \emptyset$, on a $\lim_{n\to\infty} \mu A_n = 0$.

Si cette condition est remplie et si U désigne la forme linéaire croissante correspondant à la fonction d'ensemble λ, et définie sur le clan des fonctions étagées sur $\mathfrak{F}$ (chap.I, § 2), U est une intégrale ; toute tribu sur laquelle λ se prolonge en une mesure contient la tribu $\mathfrak{T}_0$ attachée à U , et le prolongement de λ à $\mathfrak{T}_0$ est identique à la mesure attachée à U .

En particulier, si λ est une mesure sur une tribu $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{F}$ la phratrie des ensembles de mesure finie dans $\mathfrak{T}$, on a $\mathfrak{T}_0 = \mathfrak{T}$.

Il est évident que la condition (D^*) est nécessaire pour que puisse être prolongé en une mesure, d'après la formule (4). Supposons inversement que cette condition soit remplie, et soit U la forme linéaire croissante définie sur le clan ϕ des fonctions étagées sur $\mathfrak{F}$ par la condition $U(\varphi_A) = \lambda A$ pour tout $A \in \mathfrak{F}$. Nous allons voir que U est une intégrale, c'est-à-dire satisfait à la condition (D) du § 1. Soit donc (x_n) une suite décroissante de fonctions $\geqslant 0$ de ϕ , telle que $\lim_{n\to\infty} x_n(t)=0$ pour tout $t \in E$. Etant donné arbitrairement $\varepsilon > 0$, soit A_n l'ensemble des $t \in E$ tels que $x_n(t) \geqslant \varepsilon$; A_n appartient à $\mathfrak{F}$, puisque c'est la réunion des ensembles de $\mathfrak{F}$ (en nombre fini) où x_n prend celles de ses valeurs qui sont $\geqslant \varepsilon$. Soit d'autre part B l'ensemble Q_{x_1} des points t où $x_1(t) > 0$, et posons $B_n = B \cap \complement A_n$, ensemble qui appartient à $\mathfrak{F}$. Il est immédiat que, si a est la plus grande des valeurs de x_1 , on a , pour tout n , $x_n \leqslant \varepsilon\varphi_{B_n} + a\varphi_{A_n}$, d'où $U(x_n) \leqslant \varepsilon . \lambda B_n + a\lambda A_n \leqslant \varepsilon . \lambda B + a . \lambda A_n$. Or, l'intersection des A_n est l'ensemble des t où $\lim_{n\to\infty} x_n(t) \geqslant \varepsilon$, donc est vide, ce qui, d'après (D^*) entraîne $\lim_{n\to\infty} \lambda A_n = 0$; pour n assez grand, on a donc $\lambda A_n \leqslant \varepsilon$, et par suite $U(x_n) \leqslant \varepsilon(a + \lambda B)$; comme ε est arbitraire, on a bien $\lim_{n\to\infty} U(x_n) = 0$.

Ceci démontre donc que λ se prolonge en une mesure, savoir la mesure μ_0 attachée à l'intégrale U , définie sur la tribu $\mathfrak{T}_0$ attachée à U . En outre, d'après le th. 1, pour tout ensemble A de $\mathfrak{T}_0$, il existe un ensemble B de $\mathfrak{F}_{\sigma\delta}$, qui est réunion de A et d'un ensemble de mesure- μ_0 nulle .

Soit maintenant μ une mesure prolongeant λ sur une tribu $\mathfrak{T}$ contenant $\mathfrak{F}$. Pour voir que $\mathfrak{T}$ contient $\mathfrak{T}_0$ et que μ coïncide avec μ_0 sur $\mathfrak{T}_0$, il suffit de prouver (d'après (M_{II})) que pour tout ensemble $A \in \mathfrak{T}_0$, tel que $\mu_0 A$ soit finie, on a $A \in \mathfrak{T}$ et $\mu A = \mu_0 A$. Si tout d'abord $\mu_0 A = 0$, il existe, d'après le th.1, une suite décroissante (A_n) d'ensembles de $\mathfrak{F}_\sigma$ telle que $A \subset A_n$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_0 A_n = 0$. Or, il est immédiat, d'après l'axiome (M_I), que $\mu_0 A_n = \mu A_n$, puisque A_n est réunion d'une suite croissante d'ensembles de $\mathfrak{F}$. D'après la formule (4), on a donc $\mu(\bigcap\limits_n A_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu A_n = 0$, donc $\bigcap\limits_n A_n$ est de mesure-μ nulle, et par suite A, contenu dans cet ensemble, appartient à $\mathfrak{T}$ et est de mesure-μ nulle.

Si maintenant $\mu_0 A > 0$, il existe, d'après le th.1, une suite décroissante (A_n) d'ensembles de $\mathfrak{F}_\sigma$, de mesure-μ_0 finie, telle que $A \subset A_n$, et que l'intersection B des A_n soit réunion de A et d'un ensemble de mesure-μ_0 nulle (donc aussi de mesure-μ nulle) ; comme les A_n appartiennent à $\mathfrak{T}$, il en est de même de B, donc de A d'après ce qui précède ; en outre, on a $\mu A = \mu B = \lim\limits_{n\to\infty} \mu A_n = \lim\limits_{n\to\infty} \mu_0 A_n = \mu_0 B = \mu_0 A$.

Dans le cas particulier où λ est une mesure sur une tribu $\mathfrak{T}$, et $\mathfrak{F}$ la phratrie des ensembles de mesure-λ finie dans $\mathfrak{T}$, on a donc $\mathfrak{T}_0 \subset \mathfrak{T}$ d'après ce qui précède ; d'autre part, d'après (M_{II}), $\mathfrak{T}$ est identique à la tribu <u>engendrée</u> par $\mathfrak{F}$, donc $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{T}_0$, ce qui montre que $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_0$, et achève la démonstration du th.2.

Lorsque μ est une mesure sur une tribu $\mathfrak{T}$ et que $\mathfrak{F}$ est la phratrie des ensembles de mesure finie dans $\mathfrak{T}$, l'intégrale U correspondant à $\mathfrak{T}$ et μ est dite <u>attachée</u> à la mesure μ et à la tribu $\mathfrak{T}$; le th.2 montre que, réciproquement, $\mathfrak{T}$ et μ sont la tribu et la mesure attachées à cette intégrale ; on écrit $U(x) = \int x \, d\mu$, ou encore $\int x(t) d\mu(t)$.

66

Une fonction f mesurable- $\mathfrak{T}$ n'est pas nécessairement sommable pour l'intégrale attachée à $\mathfrak{T}$ et μ ; pour qu'elle soit sommable, il faut et il suffit évidemment que f^+ et f^- le soient, ce qui permet de se restreindre au cas où $f \geqslant 0$. Il existe alors une suite (f_n) de fonctions étagées $\geqslant 0$ mesurables- $\mathfrak{T}$, qui converge simplement vers f (prop.6) ; si f est sommable, il en est de même de chaque f_n , car si une fonction caractéristique φ_A d'un ensemble de $\mathfrak{T}$ est inférieure à une fonction sommable $g \geqslant 0$, elle est sommable (prop.10) ; donc f_n est une fonction étagée attachée à la phratrie $\mathfrak{F}$. Réciproquement, si chaque f_n est sommable, et si $\lim\limits_{n\to\infty} U(f_n)$ est finie, f est sommable. On peut donc dire que, pour qu'une fonction f mesurable- $\mathfrak{T}$ et $\geqslant 0$ soit sommable, il faut et il suffit que la borne supérieure des $U(g)$, pour l'ensemble des fonctions étagées g attachées à $\mathfrak{F}$ et telles que $0 \leqslant g \leqslant f$, soit finie ; $U(f)$ est alors égale à cette borne supérieure.

Enfin, soit U une intégrale définie sur un clan Φ , et considérons son prolongement régulier (§1,n°8) sur l'ensemble Λ des fonctions sommables correspondantes ; soit $\mathfrak{T}$ et μ la tribu et la mesure attachées à cette intégrale. Alors, Λ est aussi l'ensemble des fonctions sommables qu'on obtient en faisant le prolongement régulier de U à partir du clan $\Psi \subset \Lambda$ des fonctions étagées attachées à la phratrie $\mathfrak{F}$ des ensembles de $\mathfrak{T}$ de mesure- μ finie. En effet, il résulte de la prop.10 que toute fonction $x \geqslant 0$ de Λ est limite d'une suite croissante de fonctions de Ψ , d'où (en vertu du th.2 du §1) suit aussitôt que $\tilde{\Psi}$ est partout dense dans $L^1(\tilde{\Phi})$; comme d'autre part, tout ensemble de mesure- μ nulle appartient à $\mathfrak{F}$ par définition, la prop.18 du §1 est applicable et donne le résultat annoncé.

6. Fonctions quasi-sommables.

DÉFINITION 6.- <u>Soit</u> U <u>l'intégrale attachée à une mesure</u> μ <u>sur une tribu</u> $\mathfrak{T}$. <u>On dit qu'une fonction numérique f est quasi-sommable</u> (pour U) <u>si f est mesurable-</u> $\mathfrak{T}$ <u>et si</u> $U^*(f)=U_*(f)$.

Si $U^*(f)=U_*(f)$ est fini, f est sommable ; une fonction f quasi-sommable et non sommable est donc telle que $U^*(f)=U_*(f)= +\infty$, ou $U^*(f)=U_*(f)=-\infty$. Dans ces deux cas, on désigne encore par U(f) ou $\int f\, d\mu$ la valeur commune de $U^*(f)$ et $U_*(f)$.

Si f est quasi-sommable et $U(f)=+\infty$ (resp. $U(f)=-\infty$), l'ensemble des points t où $f(t)=-\infty$ (resp. $f(t)=+\infty$) est de mesure nulle, car il existe une fonction sommable g telle que $g \leqslant f$ (resp. $g \geqslant f$).

Si f est quasi-sommable, λf est quasi-sommable pour tout scalaire fini $\lambda \neq 0$, et on a $U(\lambda f)= \lambda U(f)$.

Si f et g sont quasi-sommables, et si $U(f)+U(g)$ est défini, la somme f+g est définie presque partout, et c'est une fonction quasi-sommable telle que $U(f+g)=U(f)+U(g)$. En effet, U(f) et U(g) ne peuvent être infinis de signes contraires par hypothèse ; on peut donc supposer par exemple qu'ils sont tous deux différents de $-\infty$; la proposition étant vraie lorsque f et g sont sommables, on peut se borner à considérer le cas où l'on a , par exemple, $U(f)= +\infty$. Les fonctions f et g ne peuvent être alors égales à $-\infty$ que dans un ensemble de mesure nulle ; en les remplaçant par $+\infty$ dans cet ensemble, on obtient deux fonctions f_1, g_1 mesurables- $\mathfrak{T}$, dont la somme est encore mesurable- $\mathfrak{T}$, car la fonction u+v est continue dans $]-\infty ,+\infty] \times]-\infty ,+\infty]$ (prop.7) ; et f_1+g_1 est presque partout égale à f+g donc mesurable- $\mathfrak{T}$ d'après (M_{III}). Si x et y sont deux fonctions sommables telles que $x \leqslant f_1$, $y \leqslant g_1$, x+y est définie presque partout et $\leqslant f_1+g_1$; d'autre part, $U(x+y)=U(x)+U(y)$, et $U(x)$ peut être pris arbitrairement grand ; donc $U_*(f_1+g_1) = +\infty = U(f)+U(g)$, ce qui prouve que f_1+g_1 est quasi-sommable, d'où la proposition.

PROPOSITION 11.- <u>Si</u> (f_n) <u>est une suite croissante de fonctions quasi-sommables telle que</u> $U(f_n) > -\infty$ <u>pour une valeur de n au moins, l'enveloppe supérieure f de cette suite est quasi-sommable, et on a</u> $U(f) = \lim_{n\to\infty} U(f_n)$.

En effet, f est mesurable-$\mathfrak{T}$ (prop.5) ; la proposition se réduisant au th. de Lebesgue (§ 1,th.2) si $\lim_{n\to\infty} U(f_n) < +\infty$, on peut se borner au cas où $\lim_{n\to\infty} U(f_n) = +\infty$; mais comme $U_*(x)$ est croissante, on a $U_*(f) \geqslant U_*(f_n)=U(f_n)$ pour tout n , donc $U_*(f)= +\infty$, ce qui démontre la proposition.

Toute fonction $f \geqslant 0$, mesurable-$\mathfrak{T}$, est quasi-sommable. C'est immédiat pour toute fonction caractéristique φ_A d'un ensemble A de mesure infinie, car A est réunion d'une suite croissante (A_n) d'ensembles de mesure finie, donc φ_A est enveloppe supérieure de φ_{A_n} . On en déduit que toute fonction étagée sur $\mathfrak{T}$ et $\geqslant 0$ est quasi-sommable, puisque toute fonction mesurable-$\mathfrak{T}$ et $\geqslant 0$ est quasi-sommable, étant l'enveloppe supérieure d'une suite croissante de fonctions étagées $\geqslant 0$ (prop. 6) .

Ce raisonnement prouve que toute fonction quasi-sommable $f \geqslant 0$ est enveloppe supérieure d'une suite (f_n) de fonctions <u>sommables</u> $\geqslant 0$; en remplaçant f_n par $g_n=\sup(f_1,\dots,f_n)$ on voit que f est enveloppe supérieure d'une suite <u>croissante</u> de fonctions sommables.

PROPOSITION 12 (lemme de Fatou).- <u>Si</u> (f_n) <u>est une suite quelconque de fonctions quasi-sommables et</u> $\geqslant 0$, $\liminf_{n\to\infty} f_n$ <u>est quasi-sommable, et on a</u>

$$U(\liminf_{n\to\infty} f_n) \leqslant \liminf_{n\to\infty} U(f_n) \tag{6}$$

En effet, soit $g_n = \inf_{p \geqslant 0} f_{n+p}$; g_n est mesurable-$\mathfrak{T}$ (prop.5) et positive, donc quasi-sommable ; en outre on a $U(g_n) \leqslant U(f_{n+p})$ pour tout $p \geqslant 0$, donc $U(g_n) \leqslant \inf_{p \geqslant 0} U(f_{n+p})$; cela étant, $\lim.\inf_{n \to \infty} f_n$ est enveloppe supérieure de la suite croissante (g_n), donc (prop.11) est quasi-sommable et on a $U(\lim.\inf_{n \to \infty} f_n) = \lim_{n \to \infty} U(g_n) \leqslant \lim_{n \to \infty} (\inf_{p \geqslant 0} U(f_{n+p})) =$
$= \lim.\inf_{n \to \infty} U(f_n)$.

PROPOSITION 13.- <u>Pour qu'une fonction</u> f , <u>mesurable</u>-$\mathfrak{T}$, <u>soit quasi-sommable, il faut et il suffit que</u> $U(f^+)$ <u>et</u> $U(f^-)$ <u>ne soient pas tous deux infinis ; on a alors</u> $U(f)=U(f^+)-U(f^-)$.

Comme $f=f^+-f^-$, la condition est suffisante. Elle est aussi nécessaire ; en effet, si f est sommable, f^+ et f^- le sont aussi ; si $U(f)= +\infty$, il existe une fonction sommable g telle que $g \leqslant f$, donc $f^- \leqslant g^-$, ce qui prouve que f^- est sommable, donc $U(f^-) < +\infty$ Raisonnement analogue lorsque $U(f) = -\infty$.

En particulier, si μ est la mesure discrète canonique sur un ensemble I , les fonctions quasi-sommables pour U ne sont autres que les familles $(x_\iota)_{\iota \in I}$ telles que l'une des deux sommes $\sum_{\iota \in I} x_\iota^+$, $\sum_{\iota \in I} x_\iota^-$ soient finies ; une telle famille est alors <u>sommable dans</u> $\overline{R}$ (<u>Top.gén.</u>, chap.IV, § 6, n°5 et exerc.1) et la valeur de l'intégrale U n'est autre que la <u>somme</u> $\sum_{\iota \in I} x_\iota$ de la famille, telle qu'elle a été définie en Topologie générale.

COROLLAIRE.- <u>Si</u> E <u>appartient à</u> $\mathfrak{T}$ <u>et est de mesure finie, toute fonction mesurable</u>-$\mathfrak{T}$ <u>et bornée dans</u> E <u>est sommable</u>.

7. Mesure extérieure et mesure intérieure.

Soit U l'intégrale attachée à une mesure μ sur une tribu $\mathfrak{T}$ de parties de E .

DÉFINITION 7.- <u>Pour toute partie A de E , on appelle mesure extérieure</u> (resp. <u>mesure intérieure</u>) <u>de A et on note</u> $\mu^* A$ (resp. $\mu_* A$) <u>le nombre</u> $U^*(\varphi_A)$ (resp. $U_*(\varphi_A)$) .

On a évidemment $\mu_* A \leqslant \mu^* A$. Si $\mu_* A = \mu^* A < +\infty$, φ_A est sommable donc A est un ensemble de $\mathfrak{T}$ et $\mu_* A = \mu^* A = \mu A$; la réciproque est évidente.

La relation $A \subset B$ entraîne $\mu^* A \leqslant \mu^* B$ et $\mu_* A \leqslant \mu_* B$. La prop.2 du §1 appliquée aux fonctions caractéristiques de deux parties quelconques A,B de E montre que $\mu^*(A \cup B) \leqslant \mu^* A + \mu^* B$. De même, la prop.13 du §1 prouve que, si (A_n) est une suite croissante de parties de E et $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, on a $\mu^* A \leqslant \lim_{n \to \infty} \mu^* A_n$. Il en résulte que, si (A_n) est une suite quelconque de parties de E et $A = \bigcup_n A_n$, on a

$$(7) \qquad \mu^* A \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu^* A_n .$$

A la prop.11 du §1 correspond pour la mesure extérieure la proposition plus précise suivante : pour tout ensemble A tel que $\mu^* A$ soit <u>finie</u>, il existe un ensemble $A^* \in \mathfrak{T}$ tel que $A \subset A^*$ et $\mu^* A = \mu A^*$. En effet, pour tout entier $n \geqslant 0$, il existe un ensemble $B_n \in \mathfrak{T}$ tel que $A \subset B_n$ et $\mu^* A \leqslant \mu B_n \leqslant \mu^* A + \frac{1}{2^n}$ (il suffit de prendre une fonction sommable $x_n \geqslant 0$ telle que $\varphi_A \leqslant x_n$ et $U(x_n) \leqslant \mu^* A + \frac{1}{2^n}$, puis de prendre pour B_n l'ensemble $P_{x_n,1}$). Cela étant, l'ensemble $A^* = \bigcap_n B_n$ répond visiblement à la question.

De même, pour toute partie A de E , il existe un ensemble A_* de $\mathfrak{T}$ tel que $A_* \subset A$ et $\mu_* A = \mu A_*$. En effet, montrons d'abord que pour tout nombre $\alpha < \mu_* A$, il existe un ensemble B de $\mathfrak{T}$ tel que $B \subset A$ et $\mu B > \alpha$. Pour cela, remarquons qu'il existe une fonction sommable $x \geqslant 0$ telle que $x \leqslant \varphi_A$ et $U(x) > \alpha$ (§1,prop.11) ; pour tout $n \geqslant 0$, on a donc $x_n = \inf(nx,1) \leqslant \varphi_A$ et $U(x_n) \geqslant U(x) > \alpha$, et l'enveloppe supérieure de la suite (x_n) est la fonction caractéristique de l'ensemble Q_x ; Q_x appartient à $\mathfrak{T}$, et on a $Q_x \subset A$ et $\mu Q_x > \alpha$. Cela étant, soit (α_n) une suite croissante de nombres tendant vers $\mu_* A$, et pour tout n, soit A_n un ensemble de $\mathfrak{T}$ tel que $A_n \subset A$ et $\mu A_n > \alpha_n$; on peut supposer la suite (A_n) croissante, en remplaçant au besoin A_n par la réunion des A_p d'indice $p \leqslant n$; si on pose $A_* = \bigcup_n A_n$, A_* appartient à $\mathfrak{T}$ et on a $A_* \subset A$ et $\mu A_* = \mu_* A$.

Avec ces notations, la prop. 14 du § 1 prouve que, si $\mu^* A < +\infty$ on a $\mu_*(A^* \cap \complement A) = \mu_*(A \cap \complement A_*) = 0$, $\mu^*(A^* \cap \complement A) = \mu^*(A \cap \complement A_*) = \mu^* A - \mu_* A$.

8. Tribu de Carathéodory d'une tribu.

On a vu (n°1) que si $\mathfrak{T}$ est une tribu sur E, F une partie quelconque de E, les traces $F \cap A$ des ensembles $A \in \mathfrak{T}$ sur F forment une tribu sur l'ensemble F ; en général, ces ensembles n'appartiendront pas à $\mathfrak{T}$; il en sera toujours ainsi, toutefois, lorsque F lui-même est un ensemble de $\mathfrak{T}$. Plus généralement, les parties F de E telles que, pour tout $A \in \mathfrak{T}$, $A \cap F$ appartienne à $\mathfrak{T}$, forment une tribu $\mathfrak{T}^*$, qu'on appelle la tribu de Carathéodory de la tribu $\mathfrak{T}$; cela résulte de la formule (37) de Ens. R, §4, et de la formule $(F \cap \complement G) \cap A = (F \cap A) \cap \complement (G \cap A)$. On a toujours $E \in \mathfrak{T}^*$; pour que $\mathfrak{T}^* = \mathfrak{T}$, il faut et il suffit que E appartienne à $\mathfrak{T}$, puisqu'alors pour tout ensemble $F \in \mathfrak{T}^*$, $F \cap E = F$ appartient à $\mathfrak{T}$.

Exemple.- Si E est un ensemble infini non dénombrable, et $\mathfrak{T}$ la tribu $\mathcal{D}(E)$ des parties dénombrables de E, la tribu de Carathéodory $\mathfrak{T}^*$ est la tribu de toutes les parties de E.

Soit U une intégrale sur un clan Φ, et soit $\mathfrak{T}$ et μ la tribu et la mesure attachées à cette intégrale. Considérons l'ensemble Ω défini au §1, n°7, formé des fonctions x telles que zx soit sommable (pour U et Φ) quel que soit $z \in \Phi_+$.

PROPOSITION 14.- <u>L'ensemble $\mathfrak{T}^*$ des parties</u> F <u>de</u> E <u>telles que la fonction caractéristique</u> φ_F <u>appartienne à</u> Ω , <u>est la tribu de Carathéodory de</u> $\mathfrak{T}$.

<u>1°</u> Supposons que φ_F appartienne à Ω . Nous allons voir que, pour toute fonction sommable $x \geqslant 0$, $y = x\varphi_F$ est encore sommable ; comme $Q_y = Q_x \cap F$, cela prouvera que F appartient à la tribu de Carathéodory de $\mathfrak{T}$. Or, $z\varphi_F$ est sommable par définition pour toute fonction $z \in \phi_+$; si $x \in I$, et $x \geqslant 0$, x est enveloppe supérieure d'une suite croissante (z_n) de fonctions de ϕ_+ , telle que $\sup_n U(z_n) < +\infty$; comme $z_n\varphi_F \leqslant z_n$, on a aussi $\sup_n U(z_n\varphi_F) < +\infty$, et $x\varphi_F$ est enveloppe supérieure de la suite croissante $(z_n\varphi_F)$ de fonctions sommables ; donc (§1,th.2) $x\varphi_F$ est sommable. Un raisonnement analogue montre que pour toute fonction sommable $x \geqslant 0$, enveloppe inférieure d'une suite décroissante (y_n) de fonctions de I , $x\varphi_F$ est sommable ; enfin, si $x \geqslant 0$ est une fonction sommable quelconque, x est presque partout égale à une fonction u enveloppe inférieure d'une suite décroissante de fonctions de I ; donc $x\varphi_F$ est presque partout égale à $u\varphi_F$, et par suite sommable.

<u>2°</u> Inversement, supposons que F appartienne à la tribu de Carathéodory de $\mathfrak{T}$. Pour toute fonction sommable $x \geqslant 0$, montrons que $y = x\varphi_F$ est sommable, ce qui prouvera que φ_F appartient à Ω . Or, pour tout $\alpha > 0$, on a $Q_{y,\alpha} = Q_{x,\alpha} \cap F$; par définition, $Q_{y,\alpha}$ appartient à $\mathfrak{T}$, donc y est mesurable-$\mathfrak{T}$; par ailleurs, on a $y \leqslant x$ presque partout, donc y est sommable.

On remarquera que lorsque ϕ est le clan des fonctions étagées sur la phratrie $\mathfrak{F}$ des ensembles de $\mathfrak{T}$ de mesure finie l'ensemble Ω correspondant est formé des fonctions f telles que $f\varphi_A$ soit sommable pour tout ensemble A de mesure finie.

COROLLAIRE 1.- <u>Pour qu'un ensemble</u> H <u>soit quasi-négligeable, il faut et il suffit que pour tout ensemble</u> $A \in \mathfrak{T}$, $H \cap A$ <u>soit de mesure nulle</u>.

En effet, si H est quasi-négligeable et A un ensemble de $\mathfrak{T}$ de mesure finie, $H \cap A$ appartient à $\mathfrak{T}$; étant contenu dans A , il est de mesure finie, autrement dit, $\varphi_{H \cap A}$ est sommable ; mais comme cette fonction est quasi-négligeable, elle est négligeable (§ 1,prop.15), donc $H \cap A$ est de mesure nulle. Si maintenant B est un ensemble quelconque de $\mathfrak{T}$, B est réunion d'une suite d'ensembles A_n de mesure finie, donc $H \cap B$ est réunion des $H \cap A_n$, qui sont de mesure nulle, et a fortiori est de mesure nulle lui-même.

Inversement, si, pour tout ensemble $A \in \mathfrak{T}$, $H \cap A$ est de mesure nulle, pour toute fonction $z \in \Phi_+$, $z\varphi_H$ est négligeable, puisque cette fonction est nulle hors de l'ensemble $Q_z \cap H$, qui est négligeable ; il en résulte que H est quasi-négligeable par définition.

COROLLAIRE 2.- <u>Toute fonction de</u> Ω <u>est mesurable</u>-$\mathfrak{T}^*$.

En effet, soit $x \geqslant 0$ une fonction de Ω , et α un nombre > 0 quelconque ; on a $\varphi_{Q_{x,\alpha}} = \sup_n(\inf(1,n(x-\alpha)^+))$, et comme $\inf(1,n(x-\alpha)^+)$ appartient à Ω et est $\leqslant 1$, il résulte du cor. de la prop.16 du §1 que $\varphi_{Q_{x,\alpha}}$ appartient à Ω , donc que x est mesurable-$\mathfrak{T}^*$.

COROLLAIRE 3.- <u>Pour tout ensemble</u> A <u>de la tribu de Carathéodory de la tribu</u> $\mathfrak{T}$, $\tilde{\varphi}_A$ <u>est la borne supérieure, dans</u> $\tilde{\Omega}$, <u>de l'ensemble</u> (filtrant à droite) <u>des</u> $\tilde{\varphi}_B$, <u>où</u> B <u>parcourt l'ensemble des ensembles de</u> $\mathfrak{T}$ <u>contenus dans</u> A .

En effet, il suffit de voir que pour tout $z \in \Phi_+$, il existe un ensemble $B \in \mathfrak{T}$ contenu dans A , et tel que la différence $U(z\varphi_A)-U(z\varphi_B)$ soit arbitrairement petite ; or, si on prend pour B l'ensemble $Q_z \cap A$, qui appartient à $\mathfrak{T}$, la différence précédente est nulle.

Nous avons déjà dit qu'en général, l'image de Ω par l'application $x \to \tilde{x}$ n'est pas nécessairement l'espace $\tilde{\Phi}_U$ tout entier (*). Il en est toutefois ainsi dans des cas très fréquents, comme il résulte du critère suivant :

PROPOSITION 15.- <u>Si la tribu de Carathéodory de</u> $\mathfrak{T}$ <u>est identique à</u> $\mathfrak{T}$ <u>(c'est-à-dire si E est réunion dénombrable d'ensembles de mesure finie) à l'image de</u> Ω <u>par l'application</u> $x \to \tilde{x}$ <u>est l'espace</u> $\tilde{\Phi}_U$.

En effet, si E est un ensemble de $\mathfrak{T}$, il résulte du th.1 que E appartient à $\mathfrak{F}_\sigma$, autrement dit, il existe une suite (z_n) de fonctions de Φ_+ telle que E soit réunion des Q_{z_n} ; si on pose $y_n = n.\sup(z_1, z_2, \dots, z_n)$, on a donc $1 = \varphi_E \leq \sup_n y_n$, d'où, en posant $x_n = \inf(1, y_n)$, $1 = \sup_n x_n$. Or l'image de φ_E dans $\tilde{\Phi}_U$ n'est autre que l'élément e tel que $eu = u$ pour tout $u \in \tilde{\Phi}$ (chap.II, § 4), et par suite aussi pour tout $u \in \tilde{\Phi}_U$; d'après ce qui précède, on a $e = \sup_n \tilde{x}_n = \lim_{n \to \infty} \tilde{x}_n$, donc $u = eu = \lim \tilde{x}_n . u$; comme $\tilde{x}_n \leq \tilde{y}_n$, on a $\tilde{x}_n u \leq \tilde{y}_n u$, et comme $y_n \in \Phi_+$ on a $\tilde{y}_n u \in L^1(\tilde{\Phi})$, d'où $\tilde{x}_n u \in L^1(\tilde{\Phi})$; il existe par suite une suite (u_n) de fonctions sommables telle que $\tilde{u}_n = \tilde{x}_n u$ pour tout n ; de la relation $\tilde{u}_n \leq \tilde{u}_{n+1}$ résulte que $u_n(t) \leq u_{n+1}(t)$ presque partout. D'autre part, on a, pour tout $z \in \Phi_+$, $U(zu_n) = \tilde{U}(\tilde{z}\tilde{u}_n) \leq \tilde{U}(\tilde{z}.\tilde{u})$ d'où il résulte, en vertu du cor. de la prop.16 du § 1, que l'enveloppe supérieure v de la suite (u_n) appartient à Ω et qu'on a $\tilde{v} = u$.

En particulier, si E est de mesure <u>finie</u>, l'image de Ω est l'espace $\tilde{\Phi}_U$; mais Ω peut contenir des fonctions non sommables pour U (exerc.10 bis).

<u>9. Mesure et intégrale induites.</u>

Soit F un ensemble appartenant à la tribu de Carathéodory de $\mathfrak{T}$, et $\mathfrak{T}_F$ la tribu induite par $\mathfrak{T}$ sur F, tribu qui est donc contenue dans $\mathfrak{T}$. Si μ est une mesure définie sur $\mathfrak{T}$, la restriction de μ à $\mathfrak{T}_F$ est encore une mesure sur la tribu $\mathfrak{T}_F$; on dit que cette mesure μ_F est la mesure <u>induite</u> par μ sur l'ensemble F .

Pour toute fonction f définie dans E , désignons par f_F la restriction de f à l'ensemble F , par $\bar{f}_F$ la fonction définie dans E égale à f dans F , à 0 dans $\complement F$; on notera que lorsque f est finie dans $\complement F$, on a $\bar{f}_F = f.\varphi_F$. Il est clair que, si f_F est mesurable-$\mathfrak{T}_F$, $\bar{f}_F$ est mesurable-$\mathfrak{T}$; en outre, si $f \geqslant 0$, on a $\int \bar{f}_F d\mu = \int f_F d\mu_F$, car cette relation est évidente si f_F est une fonction étagée, et comme toute fonction mesurable $\geqslant 0$ est limite d'une suite croissante de fonctions étagées (prop.9), la proposition est vraie pour toute fonction $f \geqslant 0$ telle que f_F soit mesurable-$\mathfrak{T}_F$, d'après le th. de Lebesgue (§1,th.1). On en déduit plus généralement que, si f_F est quasi-sommable pour μ_F , $\bar{f}_F$ est quasi-sommable pour μ et que $\int \bar{f}_F d\mu = \int f_F d\mu_F$ (en considérant séparément f^+ et f^-) ; la valeur commune de ces deux intégrales se note plus souvent $\int_F f\, d\mu$ ou $\int_F f(t) d\mu(t)$, et on dit que la fonction f est <u>quasi-sommable dans</u> F .

Si $f \geqslant 0$ est mesurable-$\mathfrak{T}$, f_F est mesurable-$\mathfrak{T}_F$, car l'ensemble des points où $f_F(t) \geqslant \alpha > 0$ est l'intersection de F et de l'ensemble $P_{f,\alpha}$, qui appartient à $\mathfrak{T}$ par hypothèse ; en outre, on a $\bar{f}_F \leqslant f$, donc $\int_F f\, d\mu \leqslant \int f\, d\mu$. On en déduit que, si f est quasi-sommable (resp. sommable) pour μ_η elle est aussi quasi-sommable (resp. sommable) dans tout ensemble $F \in \mathfrak{T}^*$, car on a $\int_F f^+ d\mu \leqslant \int f^+ d\mu$, et $\int_F f^- d\mu \leqslant \int f^- d\mu$.

Si A et B sont deux ensembles de $\mathfrak{T}^*$ tels que $A \subset B$, on a, pour toute fonction $f \geqslant 0$, mesurable-$\mathfrak{T}$, $\int_A f\, d\mu \leqslant \int_B f\, d\mu$. Si A et B appartiennent à $\mathfrak{T}$ et ne se rencontrent pas, on a, pour toute fonction f quasi-sommable

(8) $$\int_{A\cup B} f\, d\mu = \int_A f\, d\mu + \int_B f\, d\mu$$

car on a $\bar{f}_{A\cup B} = \bar{f}_A + \bar{f}_B$, et le second membre de (7) est défini.

Notons encore que, si (A_n) est une suite croissante d'ensembles de $\mathfrak{T}$, et $A = \bigcup_n A_n$, on a

(9) $$\int_A f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{A_n} f\, d\mu$$

car cette relation est vraie quand $f \geqslant 0$, puisqu'alors $\bar{f}_A$ est limite de la suite croissante $(\bar{f}_{A_n})$; en l'appliquant à f^+ et f^- , on en tire (9) .

On déduit de là que, pour toute fonction $f \geqslant 0$ mesurable-$\mathfrak{T}$ et pour tout ensemble A de $\mathfrak{T}^*$, on a

(10) $$\int_A f\, d\mu = \sup \int_B f\, d\mu$$

où B parcourt l'ensemble des parties de A appartenant à $\mathfrak{T}$ et de mesure finie. C'est immédiat si A appartient à $\mathfrak{T}$, d'après (9), tout ensemble de $\mathfrak{T}$ étant réunion d'une suite croissante d'ensembles de $\mathfrak{T}$ de mesure finie. Si A n'appartient pas à $\mathfrak{T}$, l'ensemble Q_f appartient à $\mathfrak{T}$, donc aussi $A \cap Q_f$, et on a $\int_A f\, d\mu = \int_{A\cap Q_f} f\, d\mu$ on est donc ramené au cas précédent.

Enfin, si N est un ensemble quasi-négligeable, on a $\int_N f\, d\mu = 0$ pour toute fonction f quasi-sommable, puisque $\bar{f}_N$ est nulle presque partout.

10. Fonctions largement mesurables.

Supposons que l'intégrale U , définie sur un clan Φ , satisfasse à la condition (D_a) (§ 1,n°9), de sorte qu'on puisse définir le prolongement large de U à l'ensemble Λ_a des fonctions largement sommables. Le raisonnement de la prop.7 montre encore que lorsque x parcourt l'ensemble des fonctions $\geqslant 0$ largement sommables, les ensembles Q_x forment une tribu $\mathfrak{T}_a$ contenant $\mathfrak{T}$; nous dirons que $\mathfrak{T}_a$ est la tribu largement attachée à l'intégrale U , et que les fonctions mesurables- $\mathfrak{T}_a$ sont largement mesurables.

Le raisonnement de la prop.8 s'étend aisément en remplaçant I par I_a, et la suite croissante (x_n) de fonctions de ϕ_+ par un ensemble filtrant à droite de fonctions de ϕ_+, ayant x comme enveloppe supérieure ; en s'appuyant sur la prop.19 du § 1, on en conclut que toute fonction largement sommable est largement mesurable. Comme au n°4, on définit sur $\mathfrak{T}_a$ une mesure μ_a, qui prolonge la mesure μ définie sur $\mathfrak{T}$, et qu'on appelle la mesure <u>largement attachée</u> à U ; de façon précise, pour tout ensemble largement mesurable A, il existe un ensemble mesurable B, tel que l'ensemble $(A \cap \complement B) \cup (B \cap \complement A)$ soit largement négligeable (ou, ce qui revient au même, de mesure-μ_a nulle), et que $\mu_a A = \mu B$.

Au th.1 du n°4 correspond la proposition suivante :

PROPOSITION 16.- <u>Soit $\mathfrak{J}$ l'ensemble des Q_x, où x parcourt l'ensemble des fonctions $\geqslant 0$ de I_a, $\mathfrak{G}$ l'ensemble des Q_x, où x parcourt l'ensemble des fonctions $\geqslant 0$ de S_a. Pour tout ensemble A de $\mathfrak{T}_a$, il existe :</u>

1° <u>un ensemble B de $\mathfrak{J}_\delta$ tel que B soit réunion de A et d'un ensemble largement négligeable.</u>

<u>En outre, lorsque A est de mesure finie, on peut supposer que B est intersection dénombrable d'ensembles de $\mathfrak{J}$ de mesure finie.</u>

La démonstration est essentiellement celle du th.1. Le seul point qui demande un examen particulier est la démonstration du fait qu'une réunion <u>dénombrable</u> d'ensembles A_n de $\mathfrak{J}$ appartient encore à $\mathfrak{J}$. On a par hypothèse $A_n = Q_{x_n}$, où $x_n \in I_a$; posons $y_n = x_n$ si $U(x_n)=0$, $y_n = \frac{1}{2^n U(x_n)} x_n$ si $U(x_n) > 0$; on a $\sum_{n=1}^{\infty} U(y_n) < +\infty$, et comme la somme d'un nombre fini de fonctions de I_a appartient à I_a, $y = \sum_{n=1}^{\infty} y_n$ appartient à I_a en raison de la prop.19 du § 1 ; or il est immédiat que $Q_y = \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_{x_n}$.

COROLLAIRE.- <u>Si</u> A <u>est un ensemble largement mesurable de mesure</u>- μ_a <u>finie, pour tout</u> $\varepsilon > 0$, <u>il existe un ensemble</u> G <u>de</u> $\mathcal{J}$ <u>et un ensemble</u> H <u>de</u> $\mathcal{G}$ <u>tels que</u> $H \subset A \subset G$ <u>et</u> $\mu_a(G \cap \complement A) \leqslant \varepsilon$, $\mu_a(A \cap \complement H) \leqslant \varepsilon$,.

D'après la prop.16, l'axiome ($\mathcal{M}_I$) et la prop.9, il suffit de remarquer que l'intersection d'un nombre <u>fini</u> d'ensembles de $\mathcal{J}$ appartient à $\mathcal{J}$ (parce que l'enveloppe inférieure d'un nombre fini de fonctions de I_a appartient à I_a) et que la réunion d'un nombre <u>fini</u> d'ensembles de $\mathcal{G}$ appartient à $\mathcal{G}$ (parce que l'enveloppe supérieure d'un nombre fini de fonctions de S_a appartient à S_a) .

Si on fait le prolongement régulier de U à partir du clan des fonctions étagées attachées à la phratrie $\mathcal{T}_a$ des ensembles de $\mathcal{T}_a$ de mesure- μ_a finie, on retrouve Λ_a comme ensemble de fonctions sommables (même raisonnement qu'au n°5).

On définit les fonctions <u>largement quasi-sommables</u> comme les fonctions quasi-sommables, en remplaçant U^* par U^{**}, μ par μ_a et $\mathcal{T}$ par $\mathcal{T}_a$; les propriétés démontrées au n°6 subsistent sans modification. De même, on définit la mesure extérieure et la mesure intérieure <u>larges</u> en remplaçant U^* par U^{**} au n°7 . Enfin, la prop.14 est encore vraie quand on y remplace $\mathcal{T}^*$ par la tribu de Carathéodory de $\mathcal{T}_a$, et μ par μ_a ; dans sa démonstration, il faut seulement remplacer I par I_a , et une suite croissante de fonctions de Φ_+ ayant comme enveloppe supérieure une fonction de I, par un ensemble filtrant à droite de fonctions de Φ_+ ayant comme enveloppe une fonction de I_a .

<u>Exercices</u>.- 1) Donner un exemple de phratrie $\mathcal{F}$ telle que toute intersection dénombrable d'ensembles de $\mathcal{F}$ appartienne à $\mathcal{F}$, mais que $\mathcal{F}$ ne soit pas une tribu. Si $\mathcal{T}$ est une phratrie sur E telle que toute intersection dénombrable d'ensembles de $\mathcal{T}$

appartienne à $\mathfrak{T}$, et si $E \in \mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}$ est une tribu.

1 bis) Soit $\mathfrak{T}$ une tribu, $\mathfrak{F}$ une partie de $\mathfrak{T}$ engendrant $\mathfrak{T}$. Pour toute partie <u>dénombrable</u> $\mathfrak{X}$ de $\mathfrak{F}$, soit $\mathfrak{U}(\mathfrak{X})$ la sous-tribu de $\mathfrak{T}$ engendrée par $\mathfrak{X}$; montrer que $\mathfrak{T}$ est la réunion des tribus $\mathfrak{U}(\mathfrak{X})$ lorsque $\mathfrak{X}$ parcourt l'ensemble des parties dénombrables de $\mathfrak{F}$.

2) Pour qu'une partie A de $\overline{R}$ soit telle que, lorsqua a parcourt A, l'ensemble des intervalles $[a,+\infty]$ engendre la tribu de Borel $\mathcal{B}(\overline{R})$, il faut et il suffit que $-\infty \in A$ et que A soit partout dense dans $\overline{R}$.

3) Soient E,F,G trois espaces topologiques, u une application borélienne de E dans F, v une application borélienne de F dans G. Montrer que v u est une application borélienne de E dans G.

4) Soient E un espace topologique, F un espace métrique. Soit (x_n) une suite d'applications boréliennes de E dans F, qui convergent simplement dans E vers une fonction x. Montrer que x est borélienne (soit A un ensemble ouvert dans F, A_n l'ensemble des points de A dont la distance à $\complement A$ est $> \frac{1}{n}$, B_{mn} l'intersection des ensembles $\overset{-1}{x_p}(A_n)$ pour $p \geqslant m$. Montrer que $\overset{-1}{x}(A)$ est la réunion des ensembles B_{mn}).

5) Montrer que, si une fonction $x \geqslant 0$ est sommable, le nombre $a.\mu P_{x,a}$ tend vers 0 lorsque a tend vers 0 ou vers $+\infty$. Donner des exemples prouvant que cette condition nécessaire <u>n'est pas suffisante</u> pour qu'une fonction $x \geqslant 0$, mesurable-$\mathfrak{T}$, soit sommable.

6) Soit μ une mesure sur une tribu $\mathfrak{T}$ de parties d'un ensemble E, A un ensemble de $\mathfrak{T}$ de mesure finie. Si (f_n) est une suite de

de fonctions mesurables-$\mathfrak{T}$ qui converge simplement dans A vers une fonction f, montrer que, pour tout couple de nombres $\delta>0$, $\varepsilon>0$, il existe un ensemble $B\in\mathfrak{T}$, contenu dans A, et un indice n_0, tels que $\mu(A\cap\complement B)\leqslant\delta$ et $|f(t)-f_n(t)|\leqslant\varepsilon$ en tout point $t\in B$ et pour tout $n\geqslant n_0$ (considérer, pour tout n, l'ensemble F_n des points $t\in E$ tels que $|f(t)-f_m(t)|\geqslant\varepsilon$ pour un indice $m\geqslant n$ au moins, et l'intersection des F_n).

En déduire que, pour tout $\delta>0$, il existe un ensemble $C\subset A$, appartenant à $\mathfrak{T}$, tel que $\mu(A\cap\complement C)\leqslant\delta$, et que dans C la suite (f_n) converge <u>uniformément</u> vers f.

7) Soit (f_n) une suite de fonctions sommables sur un ensemble E, qui converge simplement dans E vers une fonction f.

a) Montrer que, si f est sommable et si $\int f\,d\mu=\lim\limits_{n\to\infty}\int f_n\,d\mu$ pour tout $\varepsilon>0$ il existe un ensemble $A\in\mathfrak{T}^*$, une fonction $g\geqslant 0$ définie et sommable dans A, et un entier n_0 tels que, pour tout $n\geqslant n_0$ on ait $\left|\int_{\complement A}f_n\,d\mu\right|\leqslant\varepsilon$ et, pour tout $t\in A$, $|f_n(t)|\leqslant g(t)$ (considérer un ensemble B de mesure finie tel que $\left|\int_{\complement B}f\,d\mu\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$ et que f soit bornée dans B, et utiliser l'exerc.6).

b) Montrer que réciproquement, si on suppose en outre $f_n\geqslant 0$ pour tout n, les conditions énoncées dans a) sont suffisantes pour que f soit sommable dans E et $\int f\,d\mu=\lim\limits_{n\to\infty}\int f_n\,d\mu$; en outre, dans ce cas, $\tilde{f}_n$ tend vers f dans $L^1(\tilde{\phi})$.

c) Donner des exemples où les f_n ne sont pas $\geqslant 0$, et où les conditions énoncées dans a) sont vérifiées, sans que f soit sommable, ou sans que l'on ait $\int f\,d\mu=\lim\limits_{n\to\infty}\int f_n\,d\mu$.

8) Soit μ la mesure discrète canonique sur l'ensemble $\mathcal{N}$ des entiers naturels. Pour tout entier n, soit f_n la fonction définie sur $\mathcal{N}$ par les conditions $f_n(m)=0$ pour $m\neq n$, $f_n(n)=1$.

La suite (f_n) converge simplement vers 0 dans $\mathcal{N}$, mais
$\lim\limits_{n\to\infty} \int f_n d\mu \neq 0$.

8 bis) Soient $\mathfrak{T}$ et μ la tribu et la mesure de Lebesgue dans $[0,1[$. Pour tout entier $n=2^p+k$ $(0\leqslant k<2^p)$, soit f_n la fonction égale à 1 dans l'intervalle $\left[\frac{k}{2^p}, \frac{k+1}{2^p}\right[$ à 0 ailleurs. Montrer que, dans l'espace L^1, la suite $(\tilde{f}_n)$ tend vers 0, mais que la suite $(f_n(t))$ ne converge pour aucun point t de $[0,1[$.

9) Soient $\mathfrak{T}$ et μ la tribu et la mesure de Lebesgue dans l'intervalle $I=[0,1]$; soit E l'espace topologique des fonctions mesurables-$\mathfrak{T}$, prenant leurs valeurs dans I , E étant muni de la topologie de la convergence simple. Montrer que l'application $x \longrightarrow \int x(t)d\mu(t)$ de E dans $\overline{R}$ n'est pas continue.

10) Soient U , $\mathfrak{T}$ et μ l'intégrale, la tribu et la mesure de Lebesgue sur R , A une partie quelconque de R . Montrer que φ_A est enveloppe supérieure d'un ensemble filtrant à droite de fonctions négligeables. En déduire que, si ϕ' est le clan des fonctions sommables et nulles hors d'un intervalle compact, l'intégrale U ne satisfait pas à la condition (D_a) dans ϕ' .

10 bis) Soient U, $\mathfrak{T}$ et μ l'intégrale, la tribu et la mesure de Lebesgue sur $I=[0,1]$. Soit ϕ le clan des fonctions continues dans I , ϕ' le clan des fonctions continues dans I , et nulles dans un intervalle $[0,a]$ $(a>0)$ dépendant de la fonction considérée). Montrer que le prolongement régulier de U à partir de ϕ' est identique à son prolongement régulier à partir de ϕ , mais que l'ensemble Ω' relatif à ϕ' est distinct de l'ensemble Ω relatif à ϕ.

11) Soit U une intégrale sur un clan ϕ de fonctions définies dans un ensemble E ; soient $\mathfrak{T}$ et μ la tribu et la mesure attachées à l'intégrale U . Soit I_0 l'ensemble des enveloppes supérieures

de suites croissantes de fonctions appartenant à Φ. Montrer que pour toute fonction f mesurable-$\mathfrak{T}$ il existe une suite décroissante (f_n) de fonctions de I_o, telle que $f \leqslant f_n$ pour tout n, et que $\lim_{n\to\infty} f_n(t)=f(t)$ presque partout (le démontrer d'abord lorsque $f(t)=+\infty$ en tout point d'un ensemble A de $\mathfrak{T}$, et $f(t)=0$ en tout point de $\complement A$. Remarquer ensuite que toute fonction mesurable-$\mathfrak{T}$ peut être considérée comme l'enveloppe inférieure d'une suite décroissante (g_n+h_n), où g_n est une fonction du type précédent, et où h_n est sommable et bornée inférieurement ; utiliser enfin la prop. 13 du §1).

12) Les notations étant celles de l'exerc. 11, montrer que si f est une fonction mesurable-$\mathfrak{T}$ et finie presque partout il existe une suite (f_n) de fonctions de Φ qui converge presque partout vers f (remarquer que si A est l'ensemble des points $t \in E$ où $f(t)\neq 0$, il existe une partition (B_n) de A en ensembles de $\mathfrak{T}$, telle que f soit sommable dans chaque ensemble B_n ; raisonner ensuite comme dans le th. 5 du §1).

13) Soit μ une mesure sur une tribu $\mathfrak{T}$ de parties d'un ensemble E. Soient A et B deux parties de E sans élément commun telles que μ^*A et μ^*B soient finies ; si $C=A\cup B$, montrer que

$$\mu^*C - \mu_*A - \mu_*B \leqslant \mu^*A + \mu^*B - \mu^*C$$

(se ramener au cas où $\mu_*A = \mu_*B = 0$; si $A \subset A^*$, $B \subset B^*$ et $\mu^*A = \mu A^*$, $\mu^*B = \mu B^*$, montrer que $\mu_*C \leqslant \mu(A^* \cap B^*)$.)

14) Soit μ une mesure sur une tribu $\mathfrak{T}$ de parties d'un ensemble E. Si A appartient à $\mathfrak{T}^*$, pour toute partie B de E, on a $\mu^*B = \mu^*(B\cap A)+\mu^*(B\cap\complement A)$ (si $\mu^*B < +\infty$, considérer un ensemble $B^* \in \mathfrak{T}$ tel que $B \subset B^*$ et $\mu^*B = \mu B^*$).

Inversement, soit $\mathfrak{T}'$ l'ensemble des parties A de E possédant la propriété précédente. Montrer que : a) $\mathfrak{T}'$ est une phratrie unitaire ; b) $\mathfrak{T}'$ est une tribu et μ^* une fonction complètement additive d'ensemble sur $\mathfrak{T}'$; c) si $A \in \mathfrak{T}'$ et $\mu^* A < +\infty$, A appartient à $\mathfrak{T}$. En déduire que $\mathfrak{T}'$ est identique à la tribu de Carathéodory de $\mathfrak{T}$.

14 bis) Soit λ une fonction complètement additive d'ensemble, définie sur une tribu $\mathfrak{T}$ de parties d'un ensemble E , et prenant ses valeurs dans $[0,+\infty]$.

a) Nous dirons qu'une partie A de E est <u>négligeable</u> si elle est contenue dans un ensemble $B \in \mathfrak{T}$ tel que $\lambda B=0$. Dans l'ensemble $\mathfrak{P}(E)$ des parties de E , la relation suivante entre X et Y : "$X \cap \complement Y$ et $Y \cap \complement X$ sont négligeables" est une relation d'équivalence. L'ensemble $\mathfrak{T}_0$ des parties de E équivalentes à une partie appartenant à $\mathfrak{T}$ est une tribu ; si deux ensembles A,B de $\mathfrak{T}$ sont équivalentes, on a $\lambda A= \lambda B$; on prolonge λ à $\mathfrak{T}_0$ en prenant pour valeur de λA pour une partie $A \in \mathfrak{T}_0$, la valeur commune des λB pour tous les $B \in \mathfrak{T}$ qui sont équivalentes à A . La fonction λ ainsi étendue à $\mathfrak{T}_0$ est une fonction complètement additive d'ensemble sur cette tribu .

b) Soit $\mathfrak{T}_1$ la sous-tribu de $\mathfrak{T}_0$ engendrée par l'ensemble $\mathfrak{T}$ des ensembles $A \in \mathfrak{T}_0$ tels que $\lambda A < +\infty$. Montrer que tout ensemble de $\mathfrak{T}_1$ est réunion dénombrable d'ensembles de $\mathfrak{T}$, et que la restriction de λ à $\mathfrak{T}_1$ est une <u>mesure</u>. Montrer enfin que $\mathfrak{T}_0$ est contenue dans la tribu de Carathéodory de $\mathfrak{T}_1$ et que sur $\mathfrak{T}_0$, λ coïncide avec la mesure extérieure μ^* .

15) Soit μ une mesure sur une tribu $\mathfrak{T}$, et soit $\mathfrak{T}^*$ la tribu de Carathéodory de $\mathfrak{T}$. Pour qu'une fonction $f \geqslant 0$ soit mesurable-$\mathfrak{T}^*$, il suffit que, pour tout couple de nombres réels α,β tels que

$0 \leqslant \alpha < \beta$ et tout couple de parties A,B de E telles que $f(t) < \alpha$ dans A et $f(t) > \beta$ dans B , on ait $\mu^*(A \cup B) = \mu^*A + \mu^*B$ (utiliser la caractérisation de $\mathfrak{T}^*$ donnée dans l'exerc.14 pour se ramener à prouver que, pour tout $\alpha \geqslant 0$ et tout couple de parties A,B telles que $f(t) < \alpha$ dans A et $f(t) \geqslant \alpha$ dans B , on a $\mu^*(A \cup B) = \mu^*A + \mu^*B$. Pour démontrer cette dernière proposition, considérer pour tout $n > 0$, l'ensemble B_n des points de B où $\alpha + \frac{1}{n+1} < f(t) \leqslant \alpha + \frac{1}{n}$. Montrer, à l'aide de l'hypothèse que les séries de terme général μ^*B_{2n} et μ^*B_{2n+1} sont convergentes ; en conclure que si C_n est l'ensemble des points de B où $f(t) > \alpha + \frac{1}{n}$, μ^*C_n tend vers μ^*B lorsque n croît indéfiniment).

16) Montrer que si un ensemble A n'est pas mesurable- $\mathfrak{T}^*$, il existe une partie B de A , non mesurable- $\mathfrak{T}^*$, et de mesure extérieure <u>finie</u> (remarquer qu'il existe un ensemble C tel que $\mu^*C < \mu^*(C \cap A) + \mu^*(C \cap \complement A)$ d'après l'exerc. 14).

17) Soit (A_n) une suite de parties de E , telle que, pour chaque n, il existe un ensemble mesurable B_n contenant A_n , les B_n étant deux à deux sans élément commun. Montrer qu'on a

$$\mu^*(\bigcup_n A_n) = \sum_n \mu^* A_n \quad \text{et} \quad \mu_*(\bigcup_n A_n) = \sum_n \mu_* A_n .$$

18) Si, dans la droite numérique R , considérée comme espace vectoriel sur le corps Q , on prend une base (de Hamel) dont un des éléments est égal à 1 , on voit que le groupe additif R (non topologique) est somme directe de Q et d'un groupe H .
Comme $Z \subset Q$, le tore $T = R/Z$ est un groupe (non topologique) isomorphe à $(Q/Z) \times H$; autrement dit, il existe un sous-groupe H_o de T tel que T soit réunion des classes $H_n = r_n + H_o$ modulo H_o , où r_n parcourt l'ensemble des nombres rationnels contenus dans $[0,1[$.

Si μ est la mesure de Haar sur T (chap.V), montrer que $\mu^* H_n = \mu^* H_o$ et $\mu_* H_n = \mu_* H_o$ pour tout n ; en déduire que H_o n'est pas mesurable et qu'on a $\mu_* H_o = 0$.

19) On considère dans T, identifié à l'intervalle $[0,1[$ de R, un ensemble non mesurable H, de mesure intérieure nulle (exerc.18). On désigne par Φ le clan de fonctions sur T formé des fonctions dont chacune est égale à une fonction <u>continue</u> sur T, sauf en un nombre <u>fini</u> de points appartenant à H. Pour chacune de ces fonctions f, on désigne par U(f) son intégrale de Lebesgue sur T. Montrer que U satisfait sur Φ à l'axiome (D_a) (soit (f_α) un ensemble filtrant à gauche de fonctions $\geqslant 0$ de Φ, dont l'enveloppe inférieure est 0 ; pour chaque α, soit $\bar{f}_\alpha$ la fonction continue égale à f_α sauf éventuellement en un nombre fini de points ; l'enveloppe inférieure g des $\bar{f}_\alpha$ est semi-continue supérieurement et nulle dans $\complement H$; en déduire que $U(g_\alpha) = \inf_\alpha U(f_\alpha) = 0$; on utilisera le fait que sur T, toute fonction semi-continue supérieurement est enveloppe inférieure d'une <u>suite</u> de fonctions continues). En déduire que le prolongement régulier de U à partir du clan Φ redonne les fonctions sommables pour l'intégrale de Lebesgue sur T ; au contraire, l'ensemble H est largement mesurable pour U (à partir du clan Φ).

§ 3. L'intégrale indéfinie.

1. <u>Décomposition canonique des formes linéaires relativement bornées par rapport à une intégrale.</u>

Soit Φ un clan de fonctions définies sur un ensemble E, et soit U une intégrale sur ce clan. Désignons par $\mathcal{E}(\Phi)$ l'espace de Riesz cohérent des formes linéaires <u>relativement bornées sur</u> Φ (chap.II, § 2, n°1) par B_U la <u>bande</u> engendrée par U dans $\mathcal{E}(\phi)$ (chap.II, § 1, n°2) ; $\mathcal{E}(\phi)$ est <u>somme directe</u> de B_U et de la bande B'_U des formes linéaires Z sur ϕ <u>étrangères</u> à U , c'est-à-dire telles que $\inf(U, |Z|)=0$ dans $\mathcal{E}(\phi)$ (chap.II, § 1, th.1). Nous dirons qu'une forme linéaire relativement bornée sur ϕ est <u>absolument continue</u> par rapport à U si elle appartient à B_U , <u>singulièere</u> par rapport à U si elle appartient à B'_U.

Soit $\mathcal{U}$ l'idéal de ϕ formé des $x \in \phi$ telles que $U(|x|)=0$ (§ 1, n° 1). L'espace de Riesz $\mathcal{E}(\tilde{\phi})$ des formes linéaires relativement bornées sur $\tilde{\phi} = \phi/\mathcal{U}$ peut être identifié au sous-espace fermé de $\mathcal{E}(\phi)$ des formes linéaires relativement bornées sur ϕ , et qui s'annulent dans $\mathcal{U}$. La bande B_U est contenue dans $\mathcal{E}(\tilde{\phi})$, car c'est l'adhérence dans $\mathcal{E}(\phi)$, de l'ensemble des formes linéaires dont la valeur absolue est majorée par un multiple de U , et ces dernières s'annulent évidemment dans $\mathcal{U}$.

On en déduit l'extension du critère de continuité absolue donnée au chap.II, § 4, prop.4 :

PROPOSITION 1.- <u>Pour qu'une forme linéaire relativement bornée X sur ϕ soit absolument continue par rapport à U , il faut et il suffit que, pour tout $y \in \phi_+$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que les relations</u> $0 \leqslant x \leqslant y$ <u>et</u> $U(x) \leqslant \eta$ <u>entraînent</u> $|X(x)| \leqslant \varepsilon$.

La condition est <u>nécessaire</u>. En effet, soient $\tilde{X}$ et $\tilde{U}$ les formes linéaires X et U , considérées comme formes linéaires sur $\tilde{\phi}$; pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $\tilde{y} \in \phi_+$, il existe $\eta > 0$ tel que, dans $\tilde{\phi}$, les relations $0 \leqslant \tilde{x} \leqslant \tilde{y}$ et $\tilde{U}(\tilde{x}) \leqslant \eta$ entraînent $|\tilde{X}(\tilde{x})| \leqslant \varepsilon$; comme pour $0 \leqslant x \leqslant y$, on a $0 \leqslant \tilde{x} \leqslant \tilde{y}$ et $\tilde{U}(\tilde{x})=U(x)$, $\tilde{X}(\tilde{x})=X(x)$, la conclusion est immédiate.

La condition est <u>suffisante</u>. En effet, elle entraîne d'abord que si $y \in \Phi_+$ est tel que $U(y)=0$, on a $X(y)=0$, car $U(y) \leqslant \eta$ est vrai pour tout $\eta > 0$, donc $|X(y)| \leqslant \varepsilon$ est vrai pour tout $\varepsilon > 0$; on peut donc considérer X comme une forme linéaire $\tilde{X}$ sur $\tilde{\Phi}$. Cela étant, soit $\varepsilon > 0$ et $\tilde{y} \in \tilde{\Phi}_+$ arbitraires, et soit y un élément quelconque de Φ_+ appartenant à la classe $\tilde{y}$. Soit $\tilde{x} \in \tilde{\Phi}_+$ tel que $0 \leqslant \tilde{x} \leqslant \tilde{y}$ et $\tilde{U}(\tilde{x}) \leqslant \eta$; si x_0 est une fonction de Φ_+ appartenant à la classe $\tilde{x}$, $\inf(x_0, y)=x$ appartient aussi à $\tilde{x}$, et on a $0 \leqslant x \leqslant y$ et $U(x)=\tilde{U}(\tilde{x}) \leqslant \eta$ donc $|\tilde{X}(\tilde{x})| = |X(x)| \leqslant \varepsilon$ ce qui montre que $\tilde{X}$ appartient à la bande engendrée par U dans $\mathcal{E}(\tilde{\Phi})$, c'est-à-dire que X appartient à B_U.

D'après la définition d'une bande (chap.II, §1), si X est absolument continue par rapport à U, il en est de même de X^+, X^- et $|X|$.

Le critère de continuité absolue de la prop.1 se simplifie lorsque Φ est un clan <u>unitaire</u>. Pour que X soit alors absolument continue par rapport à U, il faut et il suffit que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que la relation $U(|x|) \leqslant \eta$ entraîne $|X(x)| \leqslant \varepsilon$; autrement dit, cela signifie que X est une <u>forme linéaire continue</u> dans l'espace Φ muni de la semi-norme $U(|x|)$.

Cela posé, le th.1 du chap.II, §4, qui est applicable à la forme linéaire $\tilde{U}$ sur $\tilde{\Phi}$ montre que toute forme linéaire X absolument continue par rapport à U, considérée comme forme linéaire sur $\tilde{\Phi}$, est de la forme $\tilde{U}_y$, où y est un élément de $\tilde{\Phi}_U$. <u>Si l'espace</u> Ω_f, défini au §1,n°7, <u>est complet</u> (et par suite tel que $x \to \tilde{x}$ l'applique <u>sur</u> $\tilde{\Phi}_U$) il existe une fonction $z \in \Omega$, telle que $\tilde{z}=y$; pour toute fonction $x \in \Phi$, on a donc $\tilde{U}_y(\tilde{x})=U(zx)$, donc $X(x)=U(zx)$. On observera que la fonction z n'est pas entièrement déterminée par la forme linéaire absolument continue X, mais seulement à une fonction <u>quasi-négligeable</u> près. On a $X^+(x)=U(z^+x)$, $X^-(x)=U(z^-x)$, $|X|(x)=U(|z|x)$ pour tout $x \in \phi$.

Bornons-nous au cas où X est une forme linéaire <u>croissante</u>. Alors, on a $\tilde{z} \geqslant 0$, donc z est positive quasi-presque partout. Il résulte aussitôt du th. de Lebesgue (§ 1,th.2) que, sur ϕ la forme linéaire absolument continue $X(x)=U(zx)$ est une <u>intégrale</u>. D'après le th.1 du § 2, la tribu $\mathfrak{T}_X$ attachée à cette intégrale ne diffère de la tribu $\mathfrak{T}$ attachée à U que par les <u>ensembles</u> <u>négligeables pour</u> X . Nous allons voir en outre que <u>tout ensemble négligeable pour</u> U <u>est aussi négligeable pour</u> X . En effet, tout ensemble négligeable N pour U est contenu dans une réunion dénombrable d'ensembles Q_{x_n} , où $x_n \in \phi_+$ (§2,th.1) ; comme $N = \bigcup_n (N \cap Q_{x_n})$, on peut se borner à montrer que tout ensemble négligeable (pour U) et contenu dans un ensemble Q_x , où $x \in \phi_+$, est négligeable pour X . Si H est un tel ensemble, il suffira de prouver que $y=x.\varphi_H$ est négligeable (pour X), puisque H est l'ensemble des points où $x.\varphi_H$ est $\neq 0$ (§ 1,prop.8). Or, on a $y \leqslant x$; il existe une suite décroissante (u_n) de fonctions de I qui tend presque partout vers 0 et est telle que $u_n \geqslant y$ pour tout y (§1,cor. de la prop.11) ; on peut supposer que $u_n \leqslant x$ en remplaçant u_n par $\inf(x,u_n)$ si nécessaire. Cela étant, u_n est enveloppe supérieure d'une suite croissante (v_{mn}) de fonctions de ϕ_+ ; pour tout m , on a $X(v_{mn})=U(zv_{mn}) \leqslant U(zx) < +\infty$, donc U_n est sommable pour X et $X(u_n)=U(zu_n) \leqslant U(zx)$. La suite (zu_n) est formée de fonctions sommables pour U , est décroissante et tend presque partout vers 0 , donc $\lim_{n \to \infty} X(u_n)= \lim_{n \to \infty} U(zu_n)=0$, ce qui prouve que y est négligeable pour X . La tribu attachée à l'intégrale X <u>contient</u> donc la tribu $\mathfrak{T}$ attachée à U .

Toute fonction mesurable-$\mathfrak{T}$ est donc aussi mesurable-$\mathfrak{T}_X$; toute fonction $f \geqslant 0$ sommable pour U est donc quasi-sommable pour X ; en outre, on a $X(f)=U(zf)$. En effet, cette relation est évidente si f appartient à Φ_+ ; si f est sommable et s'il existe une fonction $x \in \Phi_+$ telle que $f \leqslant x$, f est presque partout égale à l'enveloppe inférieure d'une suite décroissante (u_n) de fonctions de I, telle que $u_n \geqslant f$ pour tout n ; on peut supposer que $u_n \leqslant x$ en remplaçant si nécessaire u_n par $\inf(x,u_n)$; u_n est l'enveloppe supérieure d'une suite croissante (v_{mn}) de fonctions de Φ_+, donc, d'après le th. de Lebesgue, on a $X(u_n)=U(zu_n) \leqslant U(zx) < +\infty$; comme la suite décroissante (zu_n) est formée de fonctions sommables (pour U) et tend presque partout vers zf, le th. de Lebesgue donne de nouveau $X(f)=\lim_{n\to\infty} X(u_n)=\lim_{n\to\infty} U(zu_n)=U(zf)$.

Enfin, si f est une fonction sommable quelconque, il existe une suite croissante (x_n) de fonctions de Φ_+ telle que $f \leqslant \sup_n x_n$, d'où $f=\sup_n(\inf(f,x_n))$; si on pose $f_n=\inf(f,x_n)$ on a $X(f_n)=U(zf_n)$ d'après ce qui précède, d'où de nouveau, d'après le th. de Lebesgue, $X(f)=U(zf)$.

Montrons enfin que, si l'intégrale U vérifie l'axiome (D_a) sur le clan Φ, il en est de même de X. En effet, soit (x_α) un ensemble filtrant à gauche de fonctions de Φ_+, ayant 0 comme enveloppe inférieure ; on peut toujours supposer que les x_α sont toutes inférieures à l'une d'elles, soit x_0. Comme $\tilde{\Phi}$ est partout dense dans $\tilde{\Phi}_U$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $y \in \Phi_+$ telle que $U(x_0|z-y|) \leqslant \varepsilon$; a fortiori, on aura pour tout α, $x_\alpha|z-y| \leqslant |x_0|z-y$, donc $U(x_\alpha|z-y|) \leqslant \varepsilon$; or, l'ensemble (yx_α) est un ensemble filtrant à gauche de fonctions de Φ_+, dont l'enveloppe inférieure est 0 ; d'après l'hypothèse, on a $\inf_\alpha U(yx_\alpha)=0$; autrement dit, il existe un indice β tel que, pour $x_\alpha \leqslant x_\beta$, on aura $U(yx_\alpha) \leqslant \varepsilon$; on en déduit que pour les mêmes α , $U(zx_\alpha) \leqslant 2\varepsilon$, d'où la proposition.

2. Décomposition canonique des fonctions additives d'ensemble par rapport à une mesure.

Soit $\mathfrak{F}$ une phratrie de parties d'un ensemble E , μ une fonction additive d'ensemble $\geqslant 0$ et finie, définie sur $\mathfrak{F}$ et satisfaisant à l'axiome (D^*) (§ 2, n°5) ; si Φ est le clan des fonctions étagées sur $\mathfrak{F}$, U la forme linéaire croissante sur Φ correspondant à μ , il revient au même de dire que U est une intégrale, et μ la restriction à $\mathfrak{F}$ de la mesure attachée à cette intégrale ; par abus de langage, nous dirons que μ est une mesure sur $\mathfrak{F}$; nous désignerons par $\mathfrak{T}$ la tribu engendrée par $\mathfrak{F}$, par $\mathfrak{T}_\mu$ la tribu attachée à l'intégrale U (plus petite tribu sur laquelle μ se prolonge en une mesure) ; on a $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{T}_\mu$.

Soit λ une fonction additive d'ensemble finie, définie sur $\mathfrak{F}$ et telle que la forme linéaire croissante V correspondante soit relativement bornée ; on dit alors que λ est à variation bornée. Il revient au même de dire que λ est la différence de deux fonctions additives d'ensemble positives λ^+ et λ^- (correspondant respectivement à V^+ et V^-) définies sur $\mathfrak{F}$. Nous dirons que λ est absolument continue par rapport à μ si V est absolument continue par rapport à U ; il revient au même de dire que λ^+ et λ^- sont absolument continues par rapport à μ . Aussi, dans ce qui suit, nous bornerons-nous le plus souvent à étudier les fonctions additives d'ensemble λ positives sur $\mathfrak{F}$.

Nous nous bornerons en outre au cas où λ est une mesure sur $\mathfrak{F}$ au sens adopté ci-dessus (c'est-à-dire satisfait à l'axiome (D^*)) et nous désignerons par $\mathfrak{T}_\lambda$ la plus petite tribu sur laquelle λ se prolonge en une mesure ; on a encore $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{T}_\lambda$.

Une fonction additive d'ensemble sur $\mathcal{F}$, différence de deux mesures positives sur $\mathcal{F}$, est souvent appelée une <u>mesure de signe quelconque</u>.

PROPOSITION 2.- <u>Pour qu'une mesure</u> (positive) λ <u>définie sur</u> $\mathcal{F}$ <u>soit absolument continue par rapport à la mesure</u> μ, <u>il faut et il suffit que pour tout ensemble</u> $A \in \mathcal{T}$ <u>tel que</u> $\mu A=0$, <u>on ait</u> $\lambda A=0$.

Nous avons vu au n°1 que la condition est nécessaire ; pour montrer qu'elle est suffisante, nous allons prouver qu'elle entraîne le critère de la prop.1 pour l'intégrale V correspondant à λ.

Raisonnons par l'absurde, et supposons que V ne soit pas absolument continue. Alors, il existerait un $y_0 \in \phi_+$ et un nombre $\alpha > 0$ tels que pour tout entier n, il existe $x_n \in \phi_+$ tel que $0 \leqslant x_n \leqslant y_0$, $U(x_n) \leqslant \frac{1}{2^n}$ et $V(x_n) \geqslant \alpha$. Posons $z_n = \sup_{p \geqslant 0} (x_{n+p})$; on a $z_n \leqslant \sum_{p=0}^{\infty} x_{n+p}$, donc $U(z_n) \leqslant \sum_{p=0}^{\infty} U(x_{n+p}) \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$; d'autre part, $z_n \geqslant x_n$, donc $V(z_n) \geqslant V(x_n) \geqslant \alpha$. La suite (z_n) est décroissante ; soit z_0 son enveloppe inférieure ; comme $z_n \leqslant y_0$, on a $V(z_n) \leqslant V(z_0) < +\infty$ donc le th. de Lebesgue prouve que $V(z_0) = \lim_{n\to\infty} V(z_n)$ et $U(z_0) = \lim_{n\to\infty} U(z_n)=0$; l'ensemble $A=\Omega_{z_0}$ appartient à $\mathcal{T}$, et est de mesure-μ nulle ; mais on a $V(z_0) \geqslant \alpha$, donc z_0 ne serait pas négligeable pour V, et par suite λA ne serait pas nul; ce qui est contraire à l'hypothèse.

Lorsqu'une mesure positive λ sur $\mathcal{F}$ est telle que, pour tout ensemble $A \in \mathcal{T}$ de mesure-μ nulle, on ait $\lambda A=0$, on dit encore que λ est une <u>mesure de base</u> μ. On dit qu'une mesure de signe quelconque est de base μ si elle est différence de deux mesures positives de base μ.

Nous supposerions dans ce qui suit que l'ensemble E appartient à la tribu $\mathfrak{T}_\mu$ (ou, ce qui revient au même, à $\mathfrak{F}_\sigma$) ; on sait alors (§ 2, prop. 13) que l'ensemble Ω des fonctions sommables (pour U) sur tout ensemble de $\mathfrak{F}$ a pour image dans Φ_U l'espace Φ_U lui-même (par l'application canonique $x \to \tilde{x}$).

Si la mesure λ est absolument continue par rapport à μ, il existe une fonction $z \geqslant 0$ appartenant à Ω, et telle que $X(x)=U(zx)$ pour tout $x \in \Phi$; en particulier, pour tout ensemble $A \in \mathfrak{F}$, on a

(1) $$\lambda A = \int_A z \, d\mu$$

et comme λ est une mesure par hypothèse, cette relation est encore vraie pour un ensemble A quelconque de $\mathfrak{T}$ (§ 2, n°6), puisque z est quasi-sommable. On dit que la fonction d'ensemble définie par (1) (pour une fonction z quelconque de Ω) est l'intégrale indéfinie de la fonction z. On peut donc dire que :

PROPOSITION 3.- Soit μ une mesure (positive) sur une phratrie $\mathfrak{F}$ de parties de E, telle que E appartienne à $\mathfrak{F}_\sigma$; pour qu'une mesure (de signe quelconque) λ sur $\mathfrak{F}$ soit absolument continue par rapport à μ (ou, ce qui revient au même, soit une mesure de base μ), il faut et il suffit qu'elle soit l'intégrale indéfinie d'une fonction z sommable sur tout ensemble de mesure-μ finie.

Le fait que la condition est suffisante résulte en effet aussitôt de la prop.2.

La fonction z n'est déterminée qu'à une fonction négligeable près par la mesure λ ; une quelconque des fonctions équivalentes à z est appelée la pseudodérivée de la mesure λ par rapport à la mesure μ.

Ce nom, ainsi que celui d'"intégrale indéfinie", provient du cas particulier où μ est la mesure de Lebesgue sur R (§ 2, n°4) ; lorsque z est une fonction continue, et la fonction d'ensemble donnée par (1), on a

$$\lambda([a,t]) = \int_a^t z(u)du$$

et par suite z n'est autre que la *dérivée* de la fonction $\lambda([a,t])$ de la variable réelle t , et $\lambda([a,t])$ une *primitive* (ou *intégrale indéfinie*) de z .

Soit maintenant λ une mesure (positive) *quelconque* sur $\mathfrak{F}$. L'intégrale V attachée à λ se décompose d'une seule manière en une somme $V=Y+Z$, où $Y(x)=U(zx)$ pour toute fonction $x \in \Phi$ ($z \in \Omega$), et Z est *singulière* par rapport à U (chap.II, § 4, th.2). Comme $0 \leqslant Z \leqslant V$, Z est aussi une *intégrale* sur le clan Φ ; soit σ la mesure attachée à Z , définie sur la phratrie $\mathfrak{F}$; nous dirons que σ est une mesure (positive *singulière* par rapport à μ . On dira qu'une mesure de signe quelconque est singulière par rapport à μ si elle est différence de deux mesures positives singulières par rapport à μ .

La relation $0 \leqslant Z \leqslant V$ montre que σ est absolument continue par rapport à λ , donc la tribu $\mathfrak{T}_\sigma$ contient $\mathfrak{T}_\lambda$; mais en général, $\mathfrak{T}_\sigma$ *ne contient pas* $\mathfrak{T}_\mu$.

PROPOSITION 4.- *Pour qu'une mesure* (positive) σ *définie sur la phratrie* $\mathfrak{F}$, *soit singulière par rapport à* μ , *il faut et il suffit qu'il existe un ensemble* $S \in \mathfrak{T}$, *de mesure-*μ *nulle, tel que l'on ait* $\sigma A = \sigma(A \cap S)$ *pour tout ensemble* $A \in \mathfrak{F}$ (autrement dit, $\sigma B=0$ pour tout ensemble $B \in \mathfrak{F}$ *ne rencontrant pas* S).

On exprime souvent ce résultant de manière imagée en disant qu'une mesure σ singulière par rapport à μ est *concentrée sur un ensemble de mesure-*μ *nulle*.

Nous utiliserons le critère donné dans la prop.2 du chap.II, § 2, pour que deux formes linéaires croissantes soient étrangères. En premier lieu, la condition de l'énoncé est *suffisante* ; en effet, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une suite croissante (S_n) d'ensembles de $\mathfrak{F}$ telle que $S \subset \bigcup_n S_n$ et $\mu S_n \leqslant \varepsilon$ pour tout n . Soit alors $x \geqslant 0$ une fonction étagée sur $\mathfrak{F}$; on a $U(x\varphi_{S_n}) \leqslant \varepsilon \|x\|$ pour tout n ; d'autre part, $Z(x(1-\varphi_{S_n})) \leqslant \varepsilon \|x\|$; le critère précité est donc satisfait.

Montrons maintenant que la condition est <u>nécessaire</u>. Il suffira de montrer que, pour tout ensemble F de $\mathfrak{F}$, il existe un ensemble T contenu dans F , appartenant à $\mathfrak{T}$, de mesure-μ nulle, et tel que $\sigma(A \cap F) = \sigma(A \cap T)$ pour tout $A \in \mathfrak{F}$; car E étant par hypothèse réunion dénombrable d'une suite (F_k) d'ensembles de $\mathfrak{F}$, deux à deux sans élément commun, si (T_k) est la suite des ensembles de mesure-μ nulle qui correspondent aux F_k , l'ensemble $S = \bigcup_k T_k$ appartient à $\mathfrak{T}$, est de mesure-μ nulle, et on a pour tout $A \in \mathfrak{F}$, $\sigma A = \sum_k \sigma(A \cap F_k) = \sum_k \sigma(A \cap T_k) = \sigma(A \cap S)$.

Posons donc $x = \varphi_F$; pour tout entier $n > 0$, il existe, d'après le critère rappelé au début, une partition de x en deux fonctions y_n z_n de ϕ_+ telle que $U(y_n) \leqslant \frac{1}{2^n}$ et $Z(z_n) \leqslant \frac{1}{2^n}$; posons $v_n = \sup_{p \geqslant 0} z_{n+p}$; on a $v_n \leqslant x$ et $v_n \leqslant \sum_{p=0}^{\infty} z_{n+p}$, donc $Z(v_n) \leqslant \sum_{p=0}^{\infty} Z(z_{n+p}) \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$; soit $u_n = x - v_n$; on a $u_n \leqslant y_n$, donc $U(u_n) \leqslant \frac{1}{2^n}$. La suite (v_n) est décroissante ; si v est son enveloppe inférieure, on a $Z(v) = \lim_{n \to \infty} Z(v_n) = 0$. D'autre part, la suite (u_n) est croissante ; pour tout $m > n$, on a $U(u_n) \leqslant U(u_m) \leqslant \frac{1}{2^m}$, donc $U(u_n) = 0$ pour tout n ; si u est l'enveloppe supérieure de la suite (u_n), on a $U(u) = 0$ et $x = u + v$. Soit T l'ensemble Q_u , V l'ensemble Q_v ; on a $F = T \cup V$, et T et V appartiennent à $\mathfrak{T}$; T est négligeable pour U , V est négligeable pour Z , donc $W = V \cap \complement T = F \cap \complement T$ est aussi négligeable pour Z ; par suite, pour tout $A \in \mathfrak{F}$, on a $\sigma(A \cap W) = 0$, ce qui entraîne $\sigma(A \cap F) = \sigma(A \cap T)$.

Résumant les résultats précédents, on voit donc que :

THEOREME 1 (Lebesgue-Nikodym).- Soit $\mathfrak{F}$ une phratrie de parties d'un ensemble E, telle que $E \in \mathfrak{F}_\sigma$. Soit μ une mesure (positive) sur $\mathfrak{F}$; toute mesure (de signes quelconque) λ sur $\mathfrak{F}$, peut se mettre d'une manière et d'une seule sous la forme $\lambda = \omega + \sigma$, où $\omega A = \int_A f \, d\mu$ est l'intégrale indéfinie (par rapport à μ) d'une fonction sommable sur tout ensemble de mesure-μ finie, et $\sigma A = \sigma(A \cap H)$ une mesure singulière par rapport à μ, H étant un ensemble de mesure-μ nulle, appartenant à la tribu engendrée par $\mathfrak{F}$.

On observera que l'ensemble H n'est pas déterminé en général de manière unique, mais à un ensemble près négligeable à la fois pour les mesures λ et μ.

Exercices.- 1) Soit U une intégrale sur un clan ϕ de fonctions sur un ensemble E. Soit z une fonction $\geqslant 0$ appartenant à l'ensemble Ω des fonctions telles que zx soit sommable pour tout $x \in \phi$. Montrer que si z est bornée ou sommable pour U, et si U satisfait à la condition (D_a), tout ensemble largement négligeable pour U est aussi largement négligeable pour l'intégrale $X(x)=U(zx)$ sur ϕ (lorsque z est sommable, remarquer que pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $\delta > 0$ il existe un $y_0 \in \phi_+$ tel que $U(|z-y_0|) \leqslant \varepsilon$, et que, si A est un ensemble largement négligeable pour U, il existe un ensemble filtrant à droite (x_α) de fonctions de ϕ_+ telles que $x_\alpha \leqslant 1$, $\varphi_A \leqslant \sup_\alpha x_\alpha$ et $\sup_\alpha U(x_\alpha) \leqslant \delta$).

En déduire que toute fonction $f \geqslant 0$ largement sommable pour U est largement quasi-sommable pour X et qu'on a $X(f)=U(zf)$ (remarquer que f est égal à la somme d'une fonction sommable et d'une fonction largement négligeable (pour U)).

2) Soit $\mathfrak{T}$ une tribu de parties d'un ensemble E , telle que $E \in \mathfrak{T}$, et soit μ une mesure sur $\mathfrak{T}$. Montrer que si λ est une mesure sur $\mathfrak{T}$ telle que la relation $\mu A=0$ entraîne $\lambda A=0$, on a $\lambda A = \int_A z \, d\mu$, où z est une fonction sommable sur tout ensemble <u>de mesure-</u> λ <u>finie</u> (soit $\mathfrak{S}$ la phratrie des ensembles de $\mathfrak{T}$ de mesure-λ finie et de mesure-μ finie ; considérer le clan des fonctions étagées sur $\mathfrak{S}$, et remarquer que $\mathfrak{S}$ engendre la tribu $\mathfrak{T}$).

3) On dit qu'une mesure μ sur une tribu $\mathfrak{T}$ de parties de E est connexe si l'ensemble des valeurs μA lorsque A parcourt $\mathfrak{T}$ est un <u>intervalle</u> (d'origine 0) dans R . Montrer que, dans ce cas, pour qu'une fonction $z \geqslant 0$ soit sommable sur tout ensemble A de mesure-μ finie, il faut et il suffit que z soit la somme d'une fonction bornée et d'une fonction sommable (Pour voir que la condition est nécessaire, raisonner par l'absurde ; si pour tout $\alpha > 0$, l'ensemble des t E tels que $z(t) \geqslant \alpha$ est de mesure infinie ; il existe une suite (a_n) croissante et tendant vers $+\infty$ telle que, si B_n est l'ensemble des $t \in E$ tels que $a_n \leqslant z(t) < a_{n+1}$, on ait $\int_{B_n} z \, d\mu \geqslant 1$; en déduire qu'il existe une suite d'ensembles $C_n \in \mathfrak{T}$ tels que $C_n \subset B_n$, $\int_{C_n} z \, d\mu \geqslant 1$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \mu C_n < +\infty$, d'où contradiction).

Donner un exemple de mesure discrète μ sur Z , et d'une fonction $z \geqslant 0$ sommable sur tout ensemble A de mesure-μ finie, qui ne soit pas somme d'une fonction bornée et d'une fonction sommable dans Z .

4) Soit $\mathfrak{T}$ une tribu de parties d'un ensemble E , λ une fonction <u>complètement additive</u> d'ensemble définie dans $\mathfrak{T}$, et prenant ses valeurs dans $]-\infty , +\infty]$. Soit b la borne

supérieure des valeurs de λ dans $\mathfrak{T}$ (b nombre fini ou non), (A_n) une suite d'ensembles de $\mathfrak{T}$ telle que $\lim_{n\to\infty} \lambda A_n = b$.

a) On définit une suite double (A_{mn}) d'ensembles de $\mathfrak{T}$, où n prend toutes les valeurs entières, et $1 \leq m \leq n$, par le procédé de récurrence suivant : on prend $A_{1,1}=A_1$; les A_{ij} étant définis pour $j \leq n$ et tels que $A_{i,j} \subset A_{i+1,j}$ pour $1 \leq i \leq j-1$ et $1 \leq j \leq n$, soit (C_r) une suite finie d'ensembles deux à deux sans point commun, telle que chacun des n ensembles A_{mn} $(1 \leq m \leq n)$ soit réunion d'un certain nombre des C_r (théorème de décomposition). On prend pour $A_{m,n+1}$ $(1 \leq m \leq n)$ la réunion de tous les C_r contenus dans $A_{m,n}$ et tels que $\lambda C_r \geq 0$, et pour $A_{n+1,n+1}$ la réunion de A_{n+1} et de tous les C_r tels que $\lambda C_r \geq 0$. Pour tout m , soit $B_m = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{mn}$, et soit $F = \bigcup_{m=1}^{\infty} B_m$; montrer qu'on a $\lambda F=b$.

b) Déduire de a) qu'il existe une partition de E en deux ensembles F^+, F^-, dont l'un au moins appartient à $\mathfrak{T}$, telle que, pour tout ensemble A de $\mathfrak{T}$ tel que $A \subset F^+$ (resp. $A \subset F^-$), on ait $\lambda A \geq 0$ (resp. $\lambda A \leq 0$) ; en conclure que l'on peut écrire $\lambda = \mu - \nu$, où μ et ν sont deux fonctions complètement additives et positives sur $\mathfrak{T}$, dont l'une est bornée. Montrer en outre que cette dernière décomposition est unique.

§ 4. Produits de mesures.

1. Intégrales doubles.

Soient E_1, E_2 deux ensembles quelconques, Φ_1 (resp. Φ_2) un clan de fonctions définies dans E_1 (resp. E_2), Φ le clan produit des clans Φ_1 et Φ_2, formé de fonctions définies dans $E_1 \times E_2$ (chap.I, § 4). Soit U_1 une intégrale sur Φ_1 , U_2 une intégrale sur Φ_2 ; nous allons voir que la forme linéaire croissante $U=U_1U_2=U_2U_1$, produit des

des intégrales U_1 et U_2, définie sur ϕ (chap.I, § 4, n°2) est une <u>intégrale</u>. En effet, soit (f_n) une suite décroissante de fonctions de ϕ_+, dont l'enveloppe inférieure est 0 . On a $U(f_n)=U_1(g_n)$, où , pour tout $x_1 \in E_1$, $g_n(x_1)$ est égale à $U_2(f_n(x_1,x_2))$ (chap.I, §4, th.1) ; pour tout $x_1 \in E_1$, les fonctions $x_2 \to f_n(x_1,x_2)$ appartiennent à ϕ_2 et forment une suite décroissante dont l'enveloppe inférieure est 0 ; comme U_2 est une intégrale, on a $\lim_{n\to\infty} g_n(x_1)=0$, et par suite les g_n forment une suite décroissante de fonctions appartenant à ϕ_1 (chap.I, § 4,th.1) et dont l'enveloppe inférieure est 0 ; comme U_1 est une intégrale, on a $\lim_{n\to\infty} U(f_n) = \lim_{n\to\infty} U(g_n)=0$. Le même raisonnement (où on remplace une suite décroissante par un ensemble filtrant à gauche) prouve que, si U_1 et U_2 satisfont à l'axiome (D_a), il en est de même de U .

Une intégrale produit de deux intégrales U_1, U_2 est souvent appelée intégrale <u>double</u>.

Soient $\mathfrak{T}_1$ et μ_1 la tribu et la mesure attachées à U_1, $\mathfrak{T}_2$ et μ_2 la tribu et la mesure attachées à U_2 , $\mathfrak{T}$ et μ la tribu et la mesure attachées à U .

THEOREME 1 (Lebesgue-Fubini).- <u>Soit f une fonction sommable pour l'intégrale double U ; pour tout</u> $x_1 \in E_1$ (resp. $x_2 \in E_2$) <u>à l'exception des éléments d'un ensemble de mesure-</u> μ_1 <u>nulle</u> (resp. <u>de mesure-</u> μ_2 <u>nulle</u>) <u>la fonction</u> $x_2 \to f(x_1,x_2)$ (resp. $x_1 \to f(x_1,x_2)$) <u>est sommable</u> pour U_2 (resp. U_1) ; <u>la fonction</u> $x_1 \to \int f(x_1,x_2)d\mu_2$, (resp. $x_2 \to \int f(x_1,x_2)d\mu_1$) <u>définie presque partout, est sommable pour</u> U_1 (resp. U_2), <u>et on a</u>

$$\int f(x_1,x_2)d\mu = \int\left(\int f(x_1,x_2)d\mu_2\right) d\mu_1 = \int\left(\int f(x_1,x_2)d\mu_1\right)d\mu_2 \tag{1}$$

Le théorème se réduit au th.1 du chap.I, §4, lorsque f appartient à ϕ . Si f est une fonction de I , enveloppe supérieure d'une suite croissante (f_n) de fonctions de ϕ , et si on pose

$g_n(x_1) = \int f_n(x_1,x_2)d\mu_2$, on a $g_n \in \Phi_1$ et $U(f_n)=U_1(g_n)$; si g est l'enveloppe supérieure de la suite croissante (g_n) , g est sommable pour U_1 et on a $U(f)=U_1(g)$; mais on a $g(x_1)= \lim_{n\to\infty} \int f(x_1,x_2)d\mu_2 =$ $= \int f(x_1,x_2)d\mu_2$, car la fonction $x_2 \to f(x_1,x_2)$ est quasi-sommable pour U_2 ; comme $g(x_1)$ est finie presque partout, le théorème est encore démontré dans ce cas.

Si maintenant f est enveloppe inférieure d'une suite décroissante (f_n) de fonctions de I , la fonction $g_n(x_1)=\int f_n(x_1,x_2)d\mu_2$ est définie pour tout x_1 et sommable pour U_1 d'après ce qui précède ; en outre, on a $U(f_n)=U_1(g_n)<+\infty$. D'après le th. de Lebesgue (§ 1,th.2) on a donc $U(f)=U_1(g)$, où g est l'enveloppe inférieure de la suite décroissante (g_n) ; mais, pour presque tout x_1 , on a $g_n(x_1) < +\infty$, c'est-à dire que $x_2 \to f_n(x_1,x_2)$ est sommable pour U_2 ; le th. de Lebesgue montre à nouveau que pour presque tout x_1, la fonction $x_2 \to f(x_1,x_2)$ est sommable pour U_2 et qu'on a $g(x_1)=\int f(x_1,x_2)d\mu_2$. Le théorème est encore démontré dans ce cas.

En particulier, si $f \geqslant 0$ est négligeable pour U , et est enveloppe inférieure d'une suite décroissante de fonctions de I , on a $g(x_1)=0$ presque partout, autrement dit, la fonction $x_2 \to f(x_1,x_2)$ est négligeable pour U_2 pour presque tout x_1 . A fortiori il en est ainsi pour toute fonction f négligeable, puisqu'il existe alors (§ 1,prop.11) une fonction négligeable $h \geqslant 0$, enveloppe inférieure d'une suite décroissante de fonctions de I , et telle que $|f| \leqslant h$.

Enfin, si f est une fonction sommable quelconque, il existe une fonction h égale presque partout à f et qui est l'enveloppe inférieure d'une suite décroissante de fonctions de I (§ 1,cor.de la prop.11) . D'après ce qui précède, pour presque tout x_1 , les fonctions $x_2 \to f(x_1,x_2)$ et $x_2 \to h(x_1,x_2)$ sont égales presque partout (pour U_2) ;

pour presque tout x_1, $\int f(x_1,x_2)d\mu_2$ est donc définie et égale à $\int h(x_1,x_2)d\mu_2$; comme $U(f)=U(h)$, le théorème est complètement démontré.

COROLLAIRE 1.- <u>Soit f une fonction quasi-sommable pour l'intégrale</u> U ; <u>pour tout</u> $x_1 \in E_1$, <u>à l'exception des éléments d'un ensemble de mesure-</u> μ_1 <u>nulle, la fonction</u> $x_2 \to f(x_1,x_2)$ <u>est quasi-sommable pour</u> U_2 ; <u>la fonction</u> $x_1 \to \int f(x_1,x_2)d\mu_2$, <u>définie presque partout, est quasi-sommable pour</u> U_1 ; <u>les mêmes propriétés ont lieu en intervertissant les rôles de</u> E_1 <u>et</u> E_2 , <u>et on a les relations</u> (1).

Comme l'une des deux fonctions f^+, f^- est sommable, il résulte du th.1 qu'on peut se limiter à considèrer le cas où $f \geqslant 0$ et $U(f)=+\infty$. Alors, on sait (§ 2,n°6) que f est l'enveloppe supérieure d'une suite croissante (f_n) de fonctions sommables pour U . On peut appliquer à f_n le théorème de Lebesgue-Fubini ; comme $x_2 \to f_n(x_1,x_2)$ est sommable sauf pour les éléments x_1 d'un ensemble A_n de mesure-nulle, $x_2 \to f(x_1,x_2)$ est quasi-sommable sauf pour les éléments de $A=\bigcup_n A_n$, qui est de mesure- μ_1 nulle ; dans $\complement A$, on a (§ 2,n°6) $\int f(x_1,x_2)d\mu_2 = \lim_{n\to\infty}\int f_n(x_1,x_2)d\mu_2$, donc (§ 2,n°6) $\int f(x_1,x_2)d\mu_2$, définie presque partout, est quasi-sommable pour U_1 , et on a

$$\int \left(\int f(x_1,x_2)d\mu_2\right)d\mu_1 = \lim_{n\to\infty}\int\left(\int f_n(x_1,x_2)d\mu_2\right)d\mu_1 = \lim_{n\to\infty}\int f(x_1,x_2)d\mu = \int f(x_1,x_2)d\mu .$$

COROLLAIRE 2.- <u>Soit</u> A <u>un ensemble de la tribu</u> $\mathfrak{T}$; <u>pour tout</u> $x_1 \in E_1$ (resp. $x_2 \in E_2$) <u>à l'exception des éléments d'un ensemble de mesure-</u> μ_1 <u>nulle</u> (resp. <u>de mesure-</u> μ_2 <u>nulle</u>) <u>la coupe</u> $A(x_1)$ <u>de</u> A <u>suivant</u> x_1 (resp. <u>la coupe</u> $\overset{-1}{A}(x_2)$ <u>de</u> A <u>suivant</u> x_2) <u>est mesurable-</u> $\mathfrak{T}_2$ (resp. <u>mesurable-</u> $\mathfrak{T}_1$) ; <u>la fonction</u> $x_1 \to \mu_2(A(x_1))$ (resp. $x_2 \to \mu_1(\overset{-1}{A}(x_2))$) <u>est mesurable-</u> $\mathfrak{T}_1$ (resp. <u>mesurable-</u> $\mathfrak{T}_2$), <u>et on a</u>

(2) $$\mu A = \int \mu_2(A(x_1))d\mu_1 = \int \mu_1(\overset{-1}{A}(x_2))d\mu_2 .$$

C'est une conséquence immédiate du cor.1 appliqué à la fonction caractéristique φ_A .

Remarques.- 1) En raison de la formule (1), l'intégrale double U s'écrit d'ordinaire $\iint f(x_1,x_2)d\mu_1 d\mu_2$ au lieu de $\int f(x_1,x_2)d\mu$, et on élimine les parenthèses de l'écriture de la formule (1) en la notant sous la forme

(1') $$\iint f(x_1,x_2)d\mu_1 d\mu_2 = \int d\mu_1 \int f(x_1,x_2)d\mu_2 = \int d\mu_2 \int f(x_1,x_2)d\mu_1$$

2) La formule (1') montre que, lorsque f est quasi-sommable pour U , on a l'égalité

(1") $$\int d\mu_1 \int f(x_1,x_2)d\mu_2 = \int d\mu_2 \int f(x_1,x_2)d\mu_1$$

formule dite d'interversion des intégrations. Mais cette relation peut avoir lieu sans que f soit quasi-sommable (exerc.7) .

3) Lorsque μ_1 (resp. μ_2) est la mesure discrète canonique sur un ensemble L (resp. M) , la formule (1') prend l'aspect d'une conséquence de l'associativité d'une somme infinie de nombres réels (cf. Top.gén., chap.III, §4,n°3 ; chap.IV, §7, en particulier exerc. 1 et 2) .

2. Ensembles et fonctions mesurables pour la mesure produit.

La mesure μ attachée à l'intégrale double $U=U_1U_2=U_2U_1$ s'appelle la mesure produit des mesures μ_1 et μ_2 et se note parfois $\mu_1\mu_2$ ou $\mu_2\mu_1$. Le cor.2 du th.1 donne des conditions nécessaires pour qu'un ensemble $A\subset E_1\times E_2$ soit mesurable- $\mathfrak{T}$, mais en général ces conditions ne sont pas suffisantes (*). Nous allons obtenir des conditions suffisantes de mesurabilité pour les fonctions définies dans $E_1\times E_2$.

PROPOSITION 1.- Si A_1 est un ensemble de $\mathfrak{T}_1$, A_2 un ensemble de $\mathfrak{T}_2$, $A_1\times A_2$ est mesurable- $\mathfrak{T}$, et on a

(3) $$\mu(A_1\times A_2) = \mu_1 A_1 . \mu_2 A_2$$

(ce qui justifie le nom de "mesure produit").

Il suffit de démontrer que $A_1 \times A_2$ est mesurable-$\mathfrak{T}$, la formule (3) étant alors une conséquence immédiate de (2).

Commençons par le cas particulier où un des ensembles A_1, A_2 est de mesure nulle, l'autre de mesure finie, soit par exemple $\mu_1 A_1 = 0$, $\mu_2 A_2 = a < +\infty$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe alors une suite croissante (f_n) de fonctions $\geqslant 0$ de Φ_1 et une suite croissante (g_n) de fonctions $\geqslant 0$ de Φ_2 telles que $\varphi_{A_1} \leqslant \sup_n f_n$, $\varphi_{A_2} \leqslant \sup_n g_n$, avec $\sup_n U_1(f_n) \leqslant \varepsilon$, $\sup_n U_2(g_n) \leqslant 2a$. Les fonctions $f_n g_n$ appartiennent au plan Φ, et on a $\varphi_{A_1 \times A_2} = \varphi_{A_1} . \varphi_{A_2} \leqslant \sup_n f_n g_n$, même aux points (x_1, x_2), où l'une des fonctions $\sup_n f_n$, $\sup_n g_n$ est nulle et l'autre infinie ; comme $U(f_n g_n) = U_1(f_n) U_2(g_n) \leqslant 2a\varepsilon$, on voit que $\varphi_{A_1 \times A_2}$ est négligeable pour U.

Passons au cas où A_1 et A_2 sont de mesure <u>finie</u>. Alors φ_{A_1} est limite d'une suite (f_n) de fonctions de Φ_1, sauf pour les x_1 appartenant à un ensemble N_1 de mesure-μ_1 nulle ; de même φ_{A_2} est limite d'une suite (g_n) de fonctions de Φ_2 sauf pour les x_2 appartenant à un ensemble N_2 de mesure-μ_2 nulle ; il en résulte que $\varphi_{A_1 \times A_2}$ est limite de la suite $(f_n g_n)$ sauf aux points appartenant à l'un des ensembles $A_1 \times N_2$, $N_1 \times A_2$; chacun de ces derniers étant de mesure-μ nulle, $\varphi_{A_1 \times A_2}$ est bien mesurable-$\mathfrak{T}$ (§ 2, cor. de la prop.5).

Enfin, si A_1 et A_2 sont quelconques dans $\mathfrak{T}_1$ et $\mathfrak{T}_2$ respectivement A_1 est réunion d'une suite croissante (B_n) d'ensembles de mesure-μ_1 finie, et A_2 réunion d'une suite croissante (C_n) d'ensembles de mesure-μ_2 finie, donc $A_1 \times A_2$ est réunion de la suite $(B_n \times C_n)$ d'ensembles de $\mathfrak{T}$, et par suite appartient à $\mathfrak{T}$.

COROLLAIRE 1.- <u>Soit</u> $f(x_1)$, $g(x_2)$ <u>deux fonctions</u> $\geqslant 0$, <u>respectivement mesurable-</u>$\mathfrak{T}_1$ <u>et mesurable-</u>$\mathfrak{T}_2$. <u>La fonction</u> $f(x_1)g(x_2)$ (prise égale à 0 quand un des facteurs est 0, l'autre $+\infty$) <u>est mesurable-</u>$\mathfrak{T}$ <u>et on a</u>

(4) $$\iint f(x_1)g(x_2)d\mu_1 d\mu_2 = \left(\int f(x_1)d\mu_1\right)\left(\int g(x_2)d\mu_2\right).$$

En effet, le corollaire résulte aussitôt de la prop.1 lorsque f et g sont respectivement des fonctions <u>étagées</u> sur $\mathfrak{T}_1$ et $\mathfrak{T}_2$; dans le cas général, f est enveloppe supérieure d'une suite croissante (f_n) de fonctions étagées sur $\mathfrak{T}_1$, g enveloppe supérieure d'une suite croissante (g_n) de fonctions étagées sur $\mathfrak{T}_2$; avec la convention de l'énoncé, $f(x_1)g(x_2)$ est l'enveloppe supérieure de la suite $(f_n g_n)$, d'où la proposition (la formule (4) résultant aussitôt de (1)).

COROLLAIRE 2.- <u>Soit $f(x_1)$ une fonction sommable pour U_1, $g(x_2)$ une fonction sommable pour U_2 ; alors $f(x_1)g(x_2)$ est sommable pour U, et on a la relation</u> (4).

En effet, $fg = (f^+ - f^-)(g^+ - g^-) = f^+g^+ + f^-g^- - f^+g^- - f^-g^+$; il suffit d'appliquer (4) à chacun des termes de la somme du dernier membre.

Nous allons maintenant voir comment on peut définir les ensembles de $\mathfrak{T}$ à partir des ensembles de la forme $A_1 \times A_2$, où $A_1 \in \mathfrak{T}_1$ et $A_2 \in \mathfrak{T}_2$; nous établirons d'abord la proposition plus générale suivante :

PROPOSITION 2.- <u>Soit Ψ_1 un clan de fonctions sommables pour U_1, Ψ_2 un clan de fonctions sommables pour U_2. Si les prolongements réguliers</u> (§ 1, n°8) <u>de U_1</u> (resp. U_2) <u>à partir de Φ_1 et de Ψ_1</u> (resp. <u>à partir de Φ_2 et de Ψ_2</u>) <u>sont identiques, les prolongements réguliers de $U = U_1 U_2$ à partir du clan Φ produit de Φ_1 et Φ_2, et à partir du clan Ψ produit de Ψ_1 et Ψ_2 sont identiques.</u>

Appliquons le critère de la prop.18 du § 1, en montrant d'abord que $\tilde{\Psi}$ est partout dense dans $L^1(\tilde{\Phi})$, ou, ce qui revient au même, que $\tilde{\Psi}$ est dense par rapport à $\tilde{\Phi}$. Or, il résulte de la démonstration du th.1 et de la prop.1 du chap.I, § 4 que, pour toute fonction $f \in \Phi$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe deux suites finies $(u_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, $(v_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de fonctions appartenant respectivement à Φ_1 et à Φ_2, telles que $U(|f - \sum_{i=1}^{n} u_i v_i|) \leqslant \varepsilon$. Pour tout $\delta > 0$ et tout indice i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, il existe par hypothèse une fonction $u'_i \in \Psi_1$ et une fonction $v'_i \in \Psi_2$ telles que $U_1(|u_i-u'_i|) \leqslant \delta$, $U_2(|v_i-v'_i|) \leqslant \delta$; a d'autre part $U(|\sum_i u_iv_i - \sum_i u'_iv'_i|) \leqslant U(\sum_i |u_i(v_i-v'_i)|) + U(\sum_i |v'_i(u_i-u'_i)|)$. Or (cor.2 de la prop.1) $U(|u_i(v_i-v'_i)|) = U_1(|u_i|)U_2(|v_i-v'_i|) \leqslant \delta U_1(|u_i|)$ et de même $U(|v'_i(u_i-u'_i)|) \leqslant \delta U_2(|v'_i|) \leqslant \delta (U_2(|v_i|) + \delta)$; si a est le plus grand des nombres $U_1(|u_i|)$, $U_2(|v_i|)$, on a donc

$$U(|f - \sum_i u'_iv'_i|) \leqslant \varepsilon + n\delta(2a+\delta) ;$$

si on prend δ tel que $n\delta(2a+\delta) \leqslant \varepsilon$, on a $U(|f - \sum u'_iv'_i|) \leqslant 2\varepsilon$, ce qui montre que $\widetilde{\Psi}$ est partout dense dans $L^1(\widetilde{\Phi})$.

Montrons maintenant que toute fonction négligeable pour U et Φ est aussi négligeable pour U et Ψ . Il suffira de montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$ et toute fonction $f \in \Phi_+$, il existe une suite croissante (g_n) de fonctions de Ψ_+ , telle que $f \leqslant \sup_n g_n$ et $\sup_n U(g_n) \leqslant U(f)+\varepsilon$. Supposons en effet ce point établi, et soit h une fonction $\geqslant 0$ négligeable pour U et Φ ; par hypothèse, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une suite (f_n) de fonctions de Φ_+ telle que $h \leqslant \sum_n f_n$ et $\sum_n U(f_n) \leqslant \varepsilon$; pour tout n , il existe une suite $(g_{nm})_{m \geqslant 1}$ de fonctions de Ψ_+ telle que $f_n \leqslant \sum_m g_{nm}$ et $\sum_m U(g_{nm}) \leqslant U(f_n)+\varepsilon.2^{-n}$; on aura donc $h \leqslant \sum_{m,n} g_{nm}$ et $\sum_n U(g_{nm}) \leqslant \sum_n (U(f_n)+\varepsilon.2^{-n}) \leqslant 2\varepsilon$, ce qui prouve que h est négligeable pour U et Ψ .

Soit donc $f = \varphi(f_1,f_2,\ldots,f_p; g_1,g_2,\ldots,g_q)$ une fonction de Φ_+ ; les f_i appartenant à Φ_1 , les g_j à Φ_2 , et φ étant une fonction numérique positive continue dans $R^p \times R^q$, telle que $\varphi(0,0,\ldots,0,v_1,\ldots,v_q)=0$ et $\varphi(u_1,\ldots,u_p;0,0,\ldots,0)=0$ identiquement ; soit A l'adhérence, dans R^p , de l'image de E_1 par l'application $x_1 \to (f_1(x_1),\ldots,f_p(x_1))$, B l'adhérence, dans R^q , de l'image de E_2

par l'application $x_2 \to (g_1(x_2)),\dots,g_q(x_2))$. Donnons-nous arbitrairement un nombre $\varepsilon > 0$ et soit C l'ensemble fermé des $(x,y) \in A\times B$ tels que $\varphi(x,y) \geqslant \varepsilon$; il existe une suite finie de r fonctions $u_i \geqslant 0$, définies et continues dans A et nulles à l'origine de R^p, et une suite de r fonctions $v_i \geqslant 0$, définies et continues dans B et nulles à l'origine de R^q, telles que si on pose $\theta = \sum_{i=1}^{r} u_i v_i$, on ait, dans $A\times B$, $|(1+\varepsilon)\varphi(x,y)-\theta(x,y)| \leqslant \varepsilon^2$. On en tire que, dans l'ensemble C, on a $\theta(x,y) \geqslant (1+\varepsilon)\varphi(x,y)-\varepsilon^2 \geqslant \varphi(x,y)$; d'autre part, dans $A\times B$, on a $|\varphi(x,y)-\theta(x,y)| \leqslant 2a\varepsilon$, en désignant par a la plus grande valeur de $|\varphi(x,y)|$; si on pose $g = \sum_{i=1}^{r} u_i(f_1,\dots,f_p)v_i$ $(g_1,g_2,\dots,g_q)$, on a donc $f \leqslant g$ sur l'ensemble D des points de $E_1\times E_2$ où $f(x_1,x_2) \geqslant \varepsilon$, et $U(|f-g|) \leqslant 2ab\varepsilon$, où b ne dépend que de f, mais non de g ni de ε (chap. I, § 4, prop. 1). Or, par hypothèse, la fonction $u_i(f_1,f_2,\dots,f_p)$, qui appartient à Φ_1, est sommable pour U et Ψ_1, donc il existe une fonction u_i' enveloppe supérieure d'une suite croissante de fonctions de Ψ_1, telle que $u_i(f_1,\dots,f_p) \leqslant u_i'$ et que $U_1(u_i'-u_i)$ soit arbitrairement petit. On en déduit aussitôt qu'il existe une fonction h enveloppe supérieure d'une suite croissante de fonctions de Ψ, telle que $f \leqslant h$ dans D, et que $U(|f-h|) \leqslant (2ab+1)\varepsilon$.

On déduit de là, en remplaçant ε par $\varepsilon.2^{-n}$ pour chaque entier $n \geqslant 0$, l'existence d'une suite (h_n) d'enveloppes supérieures de suites croissantes de fonctions de Ψ_+, telle que $f \leqslant h_n$ dans l'ensemble des points de $E_1\times E_2$ où $f(x_1,x_2) \geqslant \varepsilon.2^{-n}$ et $U(|f-h_n|) \leqslant (2ab+1)\varepsilon.2^{-n}$. Si $h = \sup_n h_n$, h est enveloppe supérieure d'une suite croissante de fonctions de Ψ_+, on a $f \leqslant h$ dans $E_1\times E_2$ et on a $U(|f-h|) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} U(|f-h_n|) \leqslant 2(2a+b)\varepsilon$, ce qui achève la démonstration de la prop. 2.

Appliquons en particulier la prop.2 au cas où on prend pour Ψ_1 (resp. Ψ_2) le clan des fonctions étagées sur la phratrie $\mathfrak{F}_1$ (resp. $\mathfrak{F}_2$) des ensembles de $\mathfrak{T}_1$ (resp. $\mathfrak{T}_2$) de mesure-μ_1 (resp. de mesure-μ_2) finie. On voit que la tribu $\mathfrak{T}$ est la plus petite tribu sur laquelle la fonction additive d'ensemble μ , produit de μ_1 et μ_2 , définie dans la phratrie $\mathfrak{F}$ <u>produit</u> de $\mathfrak{F}_1$ et $\mathfrak{F}_2$ (c'est-à-dire formée des réunions finies d'ensembles $A_1 \times A_2$ où $A_1 \in \mathfrak{F}_1$ et $A_2 \in \mathfrak{F}_2$, cf.chap.I, § 4,n°2), se prolonge en une mesure (§ 2,th.2). On notera que $\mathfrak{T}$ est en général <u>distincte</u> de la tribu $\mathfrak{T}_0$ <u>engendrée</u> par la phratrie $\mathfrak{F}$ (exerc.5) ; d'après le th.1 du § 2, tout ensemble de $\mathfrak{T}$ s'obtient en faisant la réunion d'un ensemble de $\mathfrak{T}_0$ et d'une partie d'un ensemble de $\mathfrak{F}_{\sigma\delta}$ de mesure-μ nulle (ou en retranchant d'un ensemble de $\mathfrak{T}_0$ une partie d'un ensemble de $\mathfrak{F}_{\sigma\delta}$ de mesure-μ nulle) .

<u>3. Produit d'un nombre fini de mesures</u>.

Soient E_i $(1 \leqslant i \leqslant p)$ p ensembles quelconques, Φ_i $(1 \leqslant i \leqslant p)$ un clan de fonctions définies dans E_i , Φ le clan produit des clans Φ_i , formé de fonctions définies dans $E = \prod_{i=1}^{p} E_i$ (chap.I, § 4,n°3). Soit U_i $(1 \leqslant i \leqslant p)$ une intégrale définie sur Φ_i ; par récurrence sur p , on voit aussitôt que la forme linéaire croissante $U=U_1U_2\ldots U_p$, définie sur Φ , est une <u>intégrale</u>, dite intégrale p-<u>uple</u> (pour rappeler son origine).

Pour toute partie non vide H de l'intervalle $[1,p]$ de N , nous désignerons par U_H l'intégrale produit des intégrales U_i telles que $i \in H$, par Φ_H le clan produit des clans Φ_i tels que $i \in H$.

PROPOSITION 3.- <u>Soit</u> (H,K) <u>une partition quelconque de</u> $[1,n]$ <u>en deux ensembles</u>. <u>Le prolongement régulier de</u> U <u>à partir du clan</u> Φ <u>est identique au prolongement régulier de</u> U_HU_K <u>à partir du clan produit de</u> Φ_H <u>et de</u> Φ_K .

Tout d'abord, le clan Φ', produit de Φ_H et Φ_K, est contenu dans Φ, et $U_H U_K$ coïncide avec U sur (chap.I, §4, prop.3) Φ', donc le prolongement régulier de U est un prolongement du prolongement régulier de $U_H U_K$. Montrons inversement que toute fonction f sommable pour U est sommable pour $U_H U_K$ et telle que $U(f)=U_H U_K(f)$; il suffira évidemment de le démontrer lorsque f appartient au clan Φ. Pour simplifier l'écriture, nous nous bornerons au cas où $p=3$, $H=\{1,2\}$ et $K=\{3\}$. On a alors $f=\varphi((f_i),(g_j),(h_k))$, où $(f_i)_{1\leq i\leq r}$, $(g_j)_{1\leq j\leq s}$, $(h_k)_{1\leq k\leq t}$ sont trois familles finies de fonctions de Φ_1, Φ_2, Φ_3 respectivement, φ une fonction continue définie dans $R^r\times R^s\times R^t$, et telle que $\varphi(0,v,w)=\varphi(u,0,w)=\varphi(u,v,0)=0$ identiquement. Le même raisonnement que dans le th.1 du chap.I, §4 prouve que, pour tout $\varepsilon>0$, il existe trois suites finies (u_α), (v_α), (w_α) de m fonctions définies dans R^r, R^s, R^t respectivement, nulles à l'origine, telles que, si on pose $\theta=\sum_\alpha u_\alpha v_\alpha w_\alpha$ et $g=\theta((f_i),(g_j),(h_k))$, on ait $|f(x_1,x_2,x_3)-g(x_1,x_2,x_3)|\leq\varepsilon$, et $U(|f-g|)\leq a\varepsilon$, où a ne dépend pas de g ni de ε. Or g appartient au clan Φ' ; donc il existe une suite (g_n) de fonctions de Φ' qui convergent uniformément vers f dans E, et telles que $U(|f-g_n|)$ tende vers 0 lorsque n croît indéfiniment ; il en résulte que la suite $(\tilde{g}_n)$ est une suite de Cauchy dans l'espace $L^1(\tilde{\Phi}')$ (pour l'intégrale $U_H U_K$), donc (§1, cor.1 du th.1), f est sommable pour $U_H U_K$, et comme $U_H U_K(f)$ est limite de $U_H U_K(g_n)=U(g_n)$, on a bien $U(f)=U_H U_K(f)$, d'où la proposition.

On notera que la proposition est triviale lorsque les clans Φ_i sont <u>unitaires</u>, puisqu'alors les clans Φ et Φ' sont identiques.

On généralise aussitôt la prop.3 à une partition $(H_j)_{1\leqslant j\leqslant q}$ quelconque de $[1,n]$.

Les prop.1 et 2 et leurs conséquences s'étendent immédiatement à un produit d'un nombre fini de mesures ; nous laissons au lecteur le soin d'énoncer ces généralisations.

4. Produit d'une infinité de mesures.

Soit $(E_\iota)_{\iota\in I}$ une famille d'ensembles, $E=\prod_{\iota\in I}E_\iota$ leur produit, Φ_ι un clan unitaire défini sur E_ι (pour chaque $\iota\in I$), Φ le clan (unitaire) produit des Φ_ι défini sur E (chap.I, §4,n°4). Pour toute partie J de I, nous désignerons par J' le complémentaire de J dans I, par E_J l'ensemble produit $\prod_{\iota\in J}E_\iota$; pour tout $x\in E$, nous poserons $x_J=pr_J(x)$. Si f est une fonction numérique définie dans E, nous dirons que J est un ensemble d'invariabilité pour f si la relation $x_{J'}=y_{J'}$ entraîne $f(x)=f(y)$ (autrement dit, si f ne dépend que des coordonnées x_ι de x telles que $\iota\in J'$) ; il est immédiat que la réunion d'un nombre fini d'ensembles d'invariabilité de f est encore un ensemble d'invariabilité de f (mais cela est inexact pour la réunion d'une infinité de tels ensembles). Les fonctions du clan Φ ont la propriété d'avoir un ensemble d'invariabilité qui est complémentaire d'une partie finie de I (autrement dit, elles ne dépendent que d'un nombre fini de coordonnées de $x\in E$).

Soit alors, pour tout $\iota\in I$, U_ι une intégrale sur le clan Φ_ι telle que $U_\iota(1)=1$; soit U la moyenne sur le clan Φ produit des moyennes U_ι (chap.I, §4,n°4) ; de même, pour toute partie J de I, soit Φ_J le produit des clans Φ_ι pour $\iota\in J$, U_J la moyenne sur Φ_J, produit des U_ι tels que $\iota\in J$; on sait que Φ est identique au clan produit de Φ_J et $\Phi_{J'}$, et U identique au produit des moyennes U_J et $U_{J'}$; en particulier, pour tout $f\in\Phi$,

$U_{J'}(f)$ appartient à ϕ_J.

PROPOSITION 4.- <u>Le produit</u> U <u>des intégrales</u> U_ι $(\iota \in I)$ <u>est une intégrale sur</u> ϕ.

Soit (f_n) une suite décroissante de fonctions de ϕ_+, tendant vers 0 en tout point de E. Soit J_n une partie finie de I telle que J'_n soit ensemble d'invariabilité pour f_n ; si $J = \bigcup_n J_n$, J est dénombrable, et J' est ensemble d'invariabilité pour <u>tous</u> les f_n ; soient ι_p $(p \geqslant 1)$ les indices appartenant à J, et soit U'_p le produit des U_ι d'indice distinct de $\iota_1, \iota_2, \dots, \iota_p$. Soit $g_{np} = U'_p(f_n)$; $(g_{np})_{n \geqslant 1}$ est une suite décroissante de fonctions appartenant au produit des p clans ϕ_{ι_j} $(1 \leqslant j \leqslant p)$.

Cela étant, supposons que $U(f_n) > a > 0$ pour tout n ; on a $U(f_n) = U_{\iota_1}(g_{n1})$; comme g_{n1} appartient à ϕ_{ι_1} et que U_{ι_1} est une intégrale et une moyenne sur ϕ_{ι_1}, il existe $x_{\iota_1} \in E_{\iota_1}$ tel que pour tout n, $g_{n1}(x_{\iota_1}) > a$; on a $U_{\iota_2}(g_{n2})(x_{\iota_1}, y_{\iota_2})) = g_{n1}(x_{\iota_1})$; comme $y_{\iota_2} \longrightarrow g_{n2}(x_{\iota_1}, y_{\iota_2})$ appartient à ϕ_{ι_2}, et que U_{ι_2} est une intégrale et une moyenne sur ce clan, il existe $x_{\iota_2} \in E_{\iota_2}$ tel que $g_{n2}(x_{\iota_1}, x_{\iota_2}) > a$ pour tout n. Par récurrence, on définit pour tout $p \geqslant 1$ un élément $x_{\iota_p} \in E_{\iota_p}$, de sorte que, pour tout p et tout n, on ait

$$g_{np}(x_{\iota_1}, x_{\iota_2}, \dots, x_{\iota_p}) > a$$

Soit alors x un élément de E dont la coordonnée d'indice ι_p est x_{ι_p} pour tout p ; d'après la définition de J, pour tout n, il existe un p tel que le complémentaire de $\{\iota_1, \iota_2, \dots, \iota_p\}$ soit ensemble d'invariabilité pour f_n, et par suite $f_n(x) = g_{np}(x_{\iota_1}, \dots, x_{\iota_p}) > a$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Nous désignerons par $\mathfrak{T}_\iota$ et μ_ι la tribu et la mesureattachées à l'intégrale U_ι , par $\mathfrak{T}$ et μ la tribu et la mesure attachées à U , par $\mathfrak{T}_J$ et μ_J la tribu et la mesure attachées à U_J . Il est facile de voir que la prop.2 se généralise aux produits infinis : en effet, le fait que $\tilde{\Psi}$ est dense par rapport à $\tilde{\Phi}$ résulte de la même proposition pour les produits finis, toute fonction de Ψ ne dépendant que d'un nombre fini de coordonnées ; pour la même raison, pour tout $\varepsilon > 0$ et toute fonction $f \in \Phi_+$ il existe une suite croissante (g_n) de fonctions de Ψ_+ telle que $f \leqslant \sup_n g_n$ et $\sup_n U(g_n) \leqslant U(f)+\varepsilon$; comme la fin de la démonstration de la prop.2 repose uniquement sur cette dernière propriété, elle est encore valable pour le cas que nous considérons ici.

Prenons en particulier pour Ψ_ι le clan des fonctions étagées sur la tribu $\mathfrak{T}_\iota$; alors il est immédiat que Ψ est le clan des fonctions étagées sur la phratrie $\mathfrak{F}$ définie de la façon suivante : nous dirons qu'unepartie A de E est un ensemble <u>cylindrique</u> ayant une <u>base</u> dans E_J si on a $A=E_{J'} \times pr_J A$ ($pr_J A$ étant la base de A dans E_J) ; il revient au même de dire que J' est un ensemble d'invariabilité pour la fonction caractéristique φ_A ; cela étant, $\mathfrak{F}$ n'est autre que l'ensemble des ensembles cylindriques ayant une base dans un E_J correspondant à une partie <u>finie</u> J de I , cette base appartenant à la phratrie $\mathfrak{F}_J$ produit des $\mathfrak{F}_\iota$ d'indice $\iota \in J$. La tribu $\mathfrak{T}$ est alors la plus petite tribu sur laquelle la fonction additive d'ensemble μ , définie dans $\mathfrak{F}$, se prolonge en une mesure. On notera, d'après la définition de $\mathfrak{F}$, que tout ensemble de $\mathfrak{F}_{\sigma\delta}$, ou de $\mathfrak{F}_{\delta\sigma}$, est un ensemble cylindrique ayant une base dans un E_J où J est une partie <u>dénombrable</u> de I . Cette remarque va nous permettre de donner la généralisation précise de la prop.1 au cas d'un produit infini :

PROPOSITION 5.- <u>Pour tout</u> $\iota \in I$, <u>soit</u> A_ι <u>un ensemble de la tribu</u> $\mathcal{T}_\iota$; <u>pour que l'ensemble</u> $A = \prod_{\iota \in I} A_\iota$ <u>soit mesurable</u>- $\mathcal{T}$, <u>il faut et il suffit que l'on soit dans l'un des deux cas suivants</u> :

1) $\prod_{\iota \in I} \mu_\iota A_\iota = 0$;

2) $A_\iota = E_\iota$ <u>sauf pour une infinité dénombrable d'indices</u>.

<u>Dans chacun de ces deux cas, on a</u> $\mu A = \prod_{\iota \in I} \mu_\iota A_\iota$.

Supposons d'abord que $\prod_{\iota \in I} \mu_\iota A_\iota = 0$. S'il y a une infinité non dénombrable d'indices ι tels que $\mu_\iota A_\iota < 1$, il existe un $\alpha < 1$ et une infinité d'indices ι tels que $\mu_\iota A_\iota < \alpha$; soit J un ensemble dénombrable d'indices ayant cette propriété, indices que nous désignerons par ι_p ; l'ensemble A est contenu dans $B = \prod_{\iota \in J} A_\iota \times E_{J'}$; nous allons voir que B est mesurable et $\mu B = 0$, d'où résultera dans ce cas la proposition. Or, si on pose $J_p = \{\iota_1, \iota_2, \dots, \iota_p\}$, et $B_p = \prod_{\iota \in J_p} A_\iota \times E_{J_p'}$, B_p appartient à la phratrie $\mathcal{F}$, et on a $B = \bigcap_{p=1}^{\infty} B_p$, donc B est mesurable et $\mu B = \lim_{p \to \infty} \mu B_p = \lim_{p \to \infty} \prod_{k=1}^{p} \mu A_{\iota_k} \leqslant \lim_{p \to \infty} \alpha^p = 0$.

En second lieu, supposons que $\mu_\iota A_\iota = 1$ sauf pour les indices ι appartenant à une partie dénombrable J de I , et que $\prod_{\iota \in J} \mu_\iota A_\iota = 0$; on a encore $A \subset B = \prod_{\iota \in J} A_\iota \times E_{J'}$, et on voit comme ci-dessus que B est mesurable et $\mu B = \prod_{\iota \in J} \mu_\iota A_\iota = 0$.

De même, si $A_\iota = E_\iota$ sauf pour les indices ι d'une partie dénombrable J de I , on a $A = \prod_{\iota \in J} A_\iota \times E_{J'}$, et on voit encore que A est intersection dénombrable d'ensembles de $\mathcal{F}$, donc appartient à $\mathcal{T}$, et que $\mu A = \prod_{\iota \in J} \mu_\iota A_\iota = \prod_{\iota \in I} \mu_\iota A_\iota$.

Reste le cas où l'ensemble H des $\iota \in I$ tels que $A_\iota \neq E_\iota$ est non dénombrable, l'ensemble J des $\iota \in I$ tels que $\mu_\iota A_\iota < 1$ étant dénombrable et tel que $\prod_{\iota \in J} \mu_\iota A_\iota > 0$; montrons alors que A <u>n'est pas mesurable</u>. En effet, dans le cas contraire, il contiendrait un ensemble B de $\mathfrak{F}_{\delta\sigma}$ et serait contenu dans un ensemble C de $\mathfrak{F}_{\sigma\delta}$, tels que B et C aient même mesure (§ 2,th.1). Mais comme un ensemble non vide de $\mathfrak{F}_{\delta\sigma}$ a toutes ses projections égales à E_ι sauf une infinité <u>dénombrable</u> d'entre elles, B est nécessairement vide ; d'autre part, C est un ensemble cylindrique $D \times E_{L'}$, où $D \subset E_L$ et L est une partie dénombrable de I ; on a donc $D \supset pr_L A = \prod_{\iota \in L} A_\iota$, d'où $\mu C = \mu_L D \geqslant \prod_{\iota \in L} \mu_\iota A_\iota$ d'après ce qui précède ; mais on a $\prod_{\iota \in L} \mu_\iota A_\iota \geqslant \prod_{\iota \in I} \mu_\iota A_\iota > 0$, ce qui contredit l'hypothèse $\mu B = \mu C$.

Si f est une fonction sommable (pour μ), on sait (§ 1,cor.2 du th.1) qu'il existe une suite (f_n) de fonctions du clan ϕ , telle que la suite $(\tilde{f}_n)$ tende vers $\tilde{f}$ dans $L^1(\tilde{\phi})$; on notera que chacune des fonctions f_n ne dépend que d'un nombre <u>fini</u> de variables. Nous allons indiquer une autre méthode d'approcher f par des fonctions ne dépendant que d'un nombre fini de variables, et formées à partir de f par des opérations de "<u>moyenne partielle</u>".

De façon précise, pour toute partie J de I , nous poserons

$$(5) \qquad f_J(x_J) = \int_{E_{J'}} f(x_J, x_{J'}) d\mu_{J'}$$

de sorte que la fonction f_J , qu'on peut considérer comme définie dans E , ne dépend que des variables x_ι d'indice $\iota \in J$; le prolongement régulier de U à partir de ϕ étant identique à celui de $U_J U_{J'}$ à partir du clan produit de ϕ_J et $\phi_{J'}$, il résulte du théorème de Lebesgue-Fubini, que f_J est sommable pour μ_J , et par suite aussi pour μ , et que l'on a

$$(6) \qquad \int_{E_J} f_J(x_J)\,d\mu_J = \int_E f_J\,d\mu = \int_E f\,d\mu \;.$$

Cela étant :

PROPOSITION 6.- Suivant l'ensemble filtrant $\mathfrak{F}(I)$ des parties finies J de I, $\tilde{f}_J$ tend vers $\tilde{f}$ dans $L^1(\tilde{\Phi})$ et $\tilde{f}_{J'}$ tend vers la constante $\int f\,d\mu$ dans $L^1(\tilde{\Phi})$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $g \in \Phi$ telle que $\int |f-g|\,d\mu \leqslant \varepsilon$; or, g ne dépend que d'un nombre fini de variables x_ι ; si J_0 est l'ensemble des indices de ces variables, on a $g_J = g$ et $g_{J'} = \int g\,d\mu = \beta$ pour toute partie finie $J \supset J_0$ de I. D'autre part, d'après (5), on a $|f_J - g_J| \leqslant |f-g|_J$ et $|f_{J'} - g_{J'}| \leqslant |f-g|_{J'}$, donc, d'après (6), $\int |f_J - g_J|\,d\mu \leqslant \int |f-g|_J\,d\mu = \int |f-g|\,d\mu \leqslant \varepsilon$, et de même $\int |f_{J'} - g_{J'}|\,d\mu \leqslant \varepsilon$. Pour $J \supset J_0$, on a donc $\int |f - f_J|\,d\mu \leqslant 2\varepsilon$, ce qui établit la première partie de la proposition ; d'autre part, si on pose $\alpha = \int f\,d\mu$, on a $|\alpha - \beta| \leqslant \varepsilon$, donc $\int |\alpha - \beta|\,d\mu \leqslant \varepsilon$, d'où $\int |f_{J'} - \alpha|\,d\mu \leqslant 2\varepsilon$, ce qui achève la démonstration.

COROLLAIRE 1.- Si une fonction f sommable dans E est telle que toute partie finie de I est un ensemble d'invariabilité pour f, f est égale presque partout à une constante.

En effet, on a alors pour toute partie finie J de I $f_{J'}(x_{J'}) = f(x_J, x_{J'})$ pour tout $x_J \in E_J$, puisque par hypothèse $f(x_J, x_{J'}) = f(y_J, x_{J'})$ quels que soient x_J et y_J dans E_J ; d'après la prop. 6, $\tilde{f}$ est donc égale à la constante $\int f\,d\mu$ dans $L^1(\tilde{\Phi})$, ce qui signifie que f est constante presque partout.

COROLLAIRE 2.- Si un ensemble A de $\mathcal{T}$ est tel que, pour tout $x \in A$, tout point y de E dont les coordonnées sont égales à celles de x sauf pour un nombre fini d'indices, appartienne aussi à A, on a $\mu A = 0$ ou $\mu A = 1$.

En effet, l'hypothèse signifie que toute partie finie de I est un ensemble d'invariabilité pour la fonction caractéristique φ_A de A ; d'après le cor.1, φ_A est presque partout égale à une constante, donc presque partout égale à 0 ou presque partout égale à 1.

<u>Exercices</u>.- 1) Soient $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$ deux tribus de parties des ensembles E_1, E_2 respectivement ; on désigne par $\mathfrak{T}_1 \times \mathfrak{T}_2$ la tribu de parties de $E = E_1 \times E_2$ engendrée par les ensembles $A_1 \times A_2$, où A_1 parcourt $\mathfrak{T}_1$ et A_2 parcourt $\mathfrak{T}_2$ et cette tribu est appelée la <u>tribu produit</u> de $\mathfrak{T}_1$ et $\mathfrak{T}_2$.

a) Pour tout ensemble $A \in \mathfrak{T}_1 \times \mathfrak{T}_2$, montrer que pour tout $x_1 \in E_1$ (resp. tout $x_2 \in E_2$), l'ensemble $A(x_1)$(resp. $\overset{-1}{A}(x_2)$) appartient à $\mathfrak{T}_2$ (resp. à $\mathfrak{T}_1$) (montrer que l'ensemble des parties A de E ayant cette propriété est une tribu).

b) Soit $\mathfrak{F}_1$ un ensemble de parties de E_1 engendrant $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{F}_2$ un ensemble de parties de E_2 engendrant $\mathfrak{T}_2$; montrer que l'ensemble des ensembles $A_1 \times A_2$, où A_1 parcourt $\mathfrak{F}_1$ et A_2 parcourt $\mathfrak{F}_2$, engendre la tribu $\mathfrak{T}_1 \times \mathfrak{T}_2$.

c) Généraliser ces propriétés à un nombre fini quelconque de tribus, et déduire de b) que le produit de tribus est associatif.

2) Soit $(E_\iota)_{\iota \in I}$ une famille d'ensembles, $E = \prod_{\iota \in I} E_\iota$ leur produit ; sur chaque ensemble E_ι, soit $\mathfrak{T}_\iota$ une tribu de parties telle que $E_\iota \in \mathfrak{T}_\iota$. On désigne par $\prod_{\iota \in I} \mathfrak{T}_\iota$ la tribu $\mathfrak{T}$ de parties de E engendrée par les ensembles de la forme $A_\varkappa \times \prod_{\iota \neq \varkappa} E_\iota$, où $\varkappa$ est un indice quelconque, et $A_\varkappa$ un ensemble quelconque de $\mathfrak{T}_\varkappa$.

a) Montrer que tout ensemble de $\mathfrak{T}$ est un ensemble cylindrique ayant une base dans un ensemble E_J, où J est une partie <u>dénombrable</u> de I.

b) Si $(J_\lambda)_{\lambda \in L}$ est une partition de I, montrer que $\mathfrak{T}$ est identique à la tribu produit $\prod_{\lambda \in L} \left(\prod_{\iota \in J_\lambda} \mathfrak{T}_\iota \right)$.

c) Pour chaque $\iota \in I$, soit $\mathfrak{F}_\iota$ un ensemble de parties de E_ι engendrant $\mathfrak{T}_\iota$; montrer que l'ensemble des ensembles $A_\varkappa \times \prod_{\iota \neq \varkappa} E_\iota$, où $\varkappa$ parcourt I, et $A_\varkappa$ parcourt $\mathfrak{T}_\varkappa$, engendre la tribu $\mathfrak{T}$.

3) Soit E un ensemble dont la puissance est strictement supérieure à celle de $\mathfrak{P}(N)$; soit $\mathfrak{T}$ la tribu sur $E \times E$, produit de la tribu $\mathfrak{P}(E)$ par elle-même ; montrer que la diagonale Δ de $E \times E$ n'appartient pas à $\mathfrak{T}$, bien que $\Delta(x)$ appartienne à $\mathfrak{P}(E)$ pour tout $x \in E$. (Raisonner par l'absurde ; en utilisant l'exerc. 1 bis du §2, Δ appartiendrait à une tribu engendrée par un ensemble dénombrable de parties C_n de la forme $A \times B$; montrer que Δ est nécessairement contenue dans la réunion des C_n ; en utilisant l'hypothèse sur la puissance de E, prouver qu'il existe une partie M de E, de puissance strictement supérieure à $\mathfrak{P}(N)$, telle que pour tout ensemble P de la tribu engendrée par les C_n, on ait $M \times M \subset P$ ou $(M \times M) \cap P = \emptyset$; pour cela, soit $C_n = A_n \times B_n$; pour tout $x \in E$, soit $U_x = (\bigcap_n V_n(x)) \cap (\bigcap_n W_n(x))$, où $V_n(x) = A_n$ si $x \in A_n$, $V_n(x) = \complement A_n$ si $x \notin A_n$, $W_n(x) = B_n$ si $x \in B_n$, $W_n(x) = \complement B_n$ si $x \notin B_n$; montrer qu'on peut prendre pour ensemble M l'un des U_x).

4) Soit $\mathfrak{T}_1$ (resp. $\mathfrak{T}_2$) une tribu de parties d'un ensemble E_1 (resp. E_2), μ_1 (resp. μ_2) une mesure sur $\mathfrak{T}_1$ (resp. $\mathfrak{T}_2$), $\mathfrak{T}$ la tribu sur laquelle est définie la mesure produit $\mu_1 \mu_2$ (et qui contient la tribu produit $\mathfrak{T}_1 \times \mathfrak{T}_2$).

a) Soit $\mathfrak{T}_1^*$ la tribu de Carathéodory de $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2^*$ la tribu de Carathéodory de $\mathfrak{T}_2$. Montrer que la tribu de Carathéodory $\mathfrak{T}^*$ de $\mathfrak{T}$ contient la tribu produit $\mathfrak{T}_1^* \times \mathfrak{T}_2^*$ et qu'elle peut en être distincte (cf. exerc. 3).

b) Soit $\mathfrak{N}$ la sous-tribu de $\mathfrak{T}^*$ formée des ensembles dont l'intersection avec tout ensemble de $\mathfrak{T}$ est de mesure-μ nulle. On prend pour E_1 et E_2 l'intervalle $[0,1]$ de R, pour $\mathfrak{T}_1$ et μ_1 la tribu et la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$, pour $\mathfrak{T}_2$ la tribu des parties dénombrables de E_2 et pour μ_2 la mesure discrète canonique (§2, n°4). Montrer que la diagonale Δ de $E_1 \times E_2$ appartient à $\mathfrak{N}$, bien que pour tout $x_1 \in E_1$, $\Delta(x_1)$ soit de mesure-μ_2 non nulle.

c) Soit μ la mesure produit sur l'ensemble $E = E_1 \times E_2$ définie dans b). On considère sur l'ensemble $E \times E$ la mesure ν produit de μ par elle-même. Montrer qu'il existe un ensemble A de la tribu $\mathfrak{N}$ correspondante tel que, pour tout $x \in E$, $A(x)$ et $\overset{-1}{A}(x)$ soient mesurables pour μ et de mesure 1.

5) Soient $\mathfrak{T}$ et μ la tribu et la mesure de Lebesgue sur R ; soit H un ensemble non mesurable-$\mathfrak{T}$, de mesure extérieure finie. Si N est un ensemble de mesure-μ nulle, montrer que $N \times H$ est mesurable pour la mesure produit de μ par elle-même, mais n'appartient pas à la tribu produit de $\mathfrak{T}$ par elle-même (exerc. 1a)).

6) Soient Φ_1, Φ_2 deux clans de fonctions définies respectivement sur E_1 et E_2, U_1 une intégrale sur Φ_1, U_2 une intégrale sur Φ_2, U l'intégrale produit U_1U_2. On suppose que U_1 et U_2 satisfassent à l'axiome (D_a), ce qui entraîne que U satisfait aussi à cet axiome ; généraliser le th. 1, la prop. 1 et leurs corollaires en remplaçant partout les fonctions sommables par les fonctions largement sommables, les mesures attachées à U, U_1 et U_2 par les mesures largement attachées à ces intégrales.

---

7) Soient $E_1=E_2=\left[0,1\right]$; on prend pour μ_1 et μ_2 la mesure de Lebesgue sur $\left[0,1\right]$. Pour tout $n>0$, soit $A'_n=\left[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}\right]$ $A''_n=\left[\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^{n-1}}\right]$, $B'_n=A'_n\times A'_n$, $B''_n=A''_n\times A''_n$, $C'_n=A'_n\times A''_n$, $C''_n=A''_n\times A'_n$ on pose $f(x_1,x_2)=4^{n+1}$ dans B'_n et B''_n ; $f(x_1,x_2)=-4^{n+1}$ dans C'_n et C''_n, $f(x_1,x_2)=0$ aux autres points de $E_1\times E_2$. Montrer que pour cette fonction, les deux derniers membres de la formule (1') ont un sens et sont égaux, mais que f n'est pas sommable pour la mesure produit $\mu_1\mu_2$.

8) Soit (E_n) une suite d'ensembles, Φ_n un clan unitaire de fonctions sur E_n ; U_n une moyenne sur Φ_n qui soit une intégrale pour chaque n. Soit U l'intégrale produit des U_n, μ la mesure attachée à U.

a) Soit f une fonction $\geqslant 0$, sommable pour μ. Soit (J_n) une suite croissante de parties de N, et soit $g=\sup_n f_{J_n}$, $h=\sup_n f_{J'_n}$; pour tout $a>0$, soit A_a l'ensemble des points $t\in E=\prod_n E_n$ tels que $g(t)>a$, B_a l'ensemble des points t tels que $h(t)>a$. Montrer que $a.\mu A_a \leqslant \int f\,d\mu$ et $a.\mu B_a \leqslant \int f\,d\mu$ (remarquer que A_a est la réunion des ensembles où un au moins des $f_{J_n}(t)>a$, et exprimer cette réunion comme réunion d'ensembles cylindriques deux à deux sans point commun).

b) On suppose que (J_n) est une suite croissante de parties finies de N, dont la réunion est N. Montrer que f_{J_n} tend presque partout vers f et $f_{J'_n}$ tend presque partout vers la constante $\int f\,d\mu$ dans E (pour tout $\varepsilon>0$, considérer une fonction g de Φ telle que $\int|f-g|\,d\mu<\varepsilon$, et appliquer a) à la fonction $|f-g|$).