§1 APPLICATIONS ALGEBRIQUES.
LA METHODE D'HERMITE

Rédaction n° 072

Nombre de pages : 9

Nombre de feuilles : 9

Algèbre (Applications algébriques)

La méthode d'Hermite

|72|

§ 1. Applications algèbriques. La méthode d'Hermite.

On doit à Hermite une très intéressante et ingénieuse application de la théorie des formes quadratiques et des formes hermitiennes à la recherche du nombre des racines d'une équation algèbrique situées dans certaines régions du plan complexe.

Nombre de racines dans un demi-plan. Nous nous proposons de chercher d'abord le nombre p de racines (comptées chacune avec leur ordre de multiplicité) d'une équation

$$(1) \qquad f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots\dots + a_n x^n = 0$$

situées dans le demi-plan (ouvert) $\Im x > 0$. L'idée directrice de la méthode d'Hermite consiste à associer au polynome $f(x)$ une forme hermitienne dont le nombre de carrés positifs sera égal au nombre p, et dont les coefficients s'exprimeront rationnellement en fonction des parties réelles et parties imaginaires des coefficients de $f(x)$.

A cet effet, considérons le polynome dont les racines sont conjuguées de celles de $f(x)$

$$(2) \qquad f^*(x) = \bar{a}_0 + \bar{a}_1 x + \bar{a}_2 x^2 + \dots\dots + \bar{a}_n x^n$$

et formons le polynome symétrique en x et y

$$(3) \qquad K(f) = \frac{f(x)f^*(y) - f(y)f^*(x)}{x - y} = \sum_{h=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} A_{hk} x^h y^k$$

Si on prend la quantité complexe conjuguée de $K(f)$, on obtient, en remarquant que $f^*(\bar{x}) = \overline{f(x)}$ et $f(\bar{x}) = \overline{f^*(x)}$, l'identité en x et y

$$\sum_{h=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \bar{A}_{hk} \bar{x}^h \bar{y}^k = - \sum_{h=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} A_{hk} \bar{x}^h \bar{y}^k$$

d'où $\bar{A}_{hk} = -A_{nk} = -A_{kh}$ quels que soient les indices h et k compris entre 0 et $n-1$. Il en résulte que la forme bilinéaire

$$(4) \qquad H(f;\, u_o, u_1, \ldots, u_{n-1}) = \sum_{h=o}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{i} A_{hk} u_h \bar{u}_k$$

est une <u>forme hermitienne</u> à n variables, que nous associons à tout polynome.

Calculons maintenant la forme hermitienne $H(f_1, f_2)$ du produit de deux polynomes

$$\begin{aligned} f_1(x) &= b_o + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_r x^r \\ f_2(x) &= c_o + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_s x^s \end{aligned} \qquad (r + s = n)$$

On voit immédiatement qu'on peut écrire

$$K(f_1 f_2) = f_2^*(x) f_2(y) K(f_1) + f_1(x) f_1^*(y) K(f_2)$$

ou si,

$$K(f_1) = \sum_{h=0}^{r-1} \sum_{k=0}^{r-1} B_{hk} x^h y^k$$

$$K(f_2) = \sum_{h=0}^{s-1} \sum_{k=0}^{s-1} C_{hk} x^h y^k$$

$$K(f_1 f_2) = \sum_{h=0}^{r-1} \sum_{k=0}^{r-1} B_{hk} (\bar{c}_o x^h + c_1 x^{h+1} + \ldots + \bar{c}_s x^{h+s})(c_o y^k + c_1 y^{k+1} + \ldots + c_s y^{k+s})$$
$$+ \sum_{h=0}^{s-1} \sum_{k=0}^{s-1} C_{hk} (b_o x^h + b_1 x^{h+1} + \ldots + b_r x^{h+r})(\bar{b}_o y^k + \bar{b}_1 y^{k+1} + \ldots + \bar{b}_r y^{k+r})$$

d'où <u>l'identité fondamentale</u>

$$(5) \quad H(f_1 f_2; u_o, u_1, \ldots, u_{n-1}) = H(f_1; v_o, v_1, \ldots, v_{r-1}) + H(f_2; w_o, w_1, \ldots, w_{s-1})$$

où les v_h et w_k sont les formes linéaires suivantes en $u_o, u_1, \ldots, u_{n-1}$

$$(6) \quad \begin{aligned} v_h &= \bar{c}_o u_h + \bar{c}_1 u_{h+1} + \ldots + \bar{c}_s u_{h+s} \qquad (h = 0, 1, \ldots, r-1) \\ w_k &= b_o u_k + b_1 u_{k+1} + \ldots + b_r u_{k+r} \qquad (k = 0, 1, \ldots, s-1) . \end{aligned}$$

On remarquera que le déterminant des formes (6) n'est autre que le <u>résultant</u> des polynomes $f_1(x)$ et $f_2^*(x)$, mis sous la forme de Sylvester ; ces n formes sont donc linéairement indépendantes si f_1 et f_2^* n'ont pas de racine commune, et sont effectivement de degrés r et s respectivement ; il en sera en particulier toujours ainsi si le polynome $f_1 f_2$ de degrés n n'a ni racines réelles, ni couples de racines conjuguées.

D'autre part, on a

$$K(x - a) = a - \bar{a}$$

d'où (7) $$H(x-a\,;\,u_o) = (a - \bar{a})\, u_o \bar{u}_o$$

Celà étant, si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont les racines de f (distinctes ou non) l'application par récurrence de la formule (6) montre, en tenant compte de (7), que l'on a

(8) $$H(f\,;\,u_o, u_1, \ldots, u_{n-1}) = |a_n|^2 \sum_{h=1}^{n} \frac{1}{i}(a_h - \bar{a}_h)\, V_h \bar{V}_h$$

les V_h étant des formes linéaires en $u_o, u_1, \ldots, u_{n-1}$.

La remarque faite ci-dessus au sujet de la substitution (6) montre que, si f n'a, ni racines réelles, ni couples de racines conjuguées, les formes V_h sont linéairement indépendantes. Supposons au contraire que f ait au moins une racine réelle ou un couple de racines conjuguées ; soit g(x) le plus grand commun diviseur de f(x) et $f^*(x)$, r sont degré, et posons $f = gf_1$; en appliquant l'identité fondamentale (5) au produit gf_1, on a, puisque $K(g) = 0$,

$$H(f; u_o, u_1, \ldots, u_{n-1}) = H(f_1;\, w_o, w_1, \ldots, w_{n-r-1})$$

ce qui montre que H(f) est réductible à une somme de n-r carrés, et par suite que les formes V_h de la formule (8) ne sont pas linéairement indépendantes.

En réunissant ces résultats, et tenant compte de la loi d'inertie il vient le théorème fondamental suivant :

<u>Théorème 1</u>. <u>Soit</u> $g(x)$ <u>le p.g.c.d. des polynomes</u> $f(x)$ <u>et</u> $f^*(x)$; <u>si r est son degré, le rang de la forme</u> $H(f)$ <u>est égal à</u> $n-r$; <u>le nombre de ses carrés positifs est égal au nombre des racines de l'équation</u> $f(x)/g(x) = 0$ <u>situées dans le demi-plan</u> $\mathcal{I}\, x > 0$; <u>le nombre de ses carrés négatifs, au nombre des racines de cette équation contenues dans le demi-plan</u> $\mathcal{I}\, x > 0$.

<u>En particulier, pour que le rang de</u> $H(f)$ <u>soit égal à n, il faut et il suffit que f n'ait ni racines réelles, ni couples de racines conjuguées</u> ; <u>dans ce cas, le nombre des carrés positifs de cette forme est égal au nombre p des racines de l'équation (1) situées dans le demi-plan</u> $\mathcal{I}\, x > 0$.

<u>Corollaire</u>. <u>Pour que l'équation</u> $f(x) = 0$ <u>ait toutes ses racines dans le demi-plan</u> $\mathcal{I}\, x > 0$, <u>il faut et il suffit que la forme associée soit définie positive</u>.

<u>Polynomes à coefficients réels. Nombre de racines réelles dans un intervalle</u>. La méthode précédente ne résout pas complètement le problème posé ; elle le ramène seulement à la recherche du <u>nombre des racines imaginaires d'une équation à coefficients réels</u>, mais ne permet pas d'effectuer cette recherche.

Ce dernier problème revient évidemment à chercher le nombre des racines réelles d'une équation à coefficients réels ; or, nous allons voir, toujours d'après Hermite, qu'on peut encore associer à une telle équation une <u>forme quadratique</u>, dont la décomposition en carrés permette d'évaluer, plus généralement, le <u>nombre des racines réelles contenues dans un intervalle quelconque</u>.

Etant donnée l'équation <u>à coefficients réels</u> (1), et un nombre réel arbitraire t, considérons le polynome de degré n

$$(9) \qquad f^*(x) = (x-t)f'(x)$$

et formons le polynome symétrique en x, y

$$(10) \qquad K(f) = \frac{f(x)f^*(y)-f(y)f^*(x)}{x-y} = \sum_{h=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} A_{hk}x^h y^k$$

Les coefficients A_{hk} étant réels, nous associerons à f la forme quadratique à n variables

$$(11) \qquad H(f;u_0,u_1,\ldots,u_{n-1}) = \sum_{h=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} A_{hk}u_h u_k$$

Calculons la forme associée au produit $f_1 f_2$ de deux polynomes à coefficients réels

$$f_1(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_r x^r$$
$$f_2(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_s x^s \qquad (r+s = n)$$

On voit immédiatement que l'on a

$$K(f_1 f_2) = f_2(x)f_2(y)K(f_1) + f_1(x)f_1(y)K(f_2)$$

d'où l'<u>identité fondamentale</u>

$$(12) \quad H(f_1 f_2;u_0,u_1,\ldots,u_{n-1}) = H(f_1;v_0,v_1,\ldots,v_{r-1}) + H(f_2;w_0,w_1,\ldots,w_{s-1})$$

avec

$$(13) \quad \begin{aligned} v_h &= c_0 u_h + c_1 u_{h+1} + \ldots + c_s u_{h+s} & (h = 0,1,\ldots,r-1) \\ w_k &= b_0 u_k + b_1 u_{k+1} + \ldots + b_r u_{k+r} & (k = 0,1,\ldots,s-1) \end{aligned}$$

Le déterminant des formes (13) est le résultant des polynomes f_1 et f_2 ; ces n formes seront donc linéairement indépendantes si f_1 et f_2 n'ont pas de racine commune, et sont effectivement de degrés r et s ; il en sera ainsi en particulier si $f_1 f_2$ est de degré n et <u>n'a pas de racine multiple</u>.

Remarquons maintenant qu'on a, par un calcul facile :

pour $\qquad f(x) = x - \alpha$

$$(14) \qquad H(x-\alpha\,;\,u_0) = (\alpha - t)\,u_0^2$$

pour $f(x) = (x-\alpha)^2 + \beta^2$, si $\alpha \neq t$

$$(15) \qquad H((x-\alpha)^2+\beta^2;\, u_o,u_1) = \frac{2}{\alpha - t}\left\{\left[(\alpha-t)u_1-(\alpha^2+\beta^2-\alpha t)u_o\right]^2 - \beta^2\left[(\alpha-t)^2+\beta^2\right]u_o^2\right\}$$

si $\alpha = t \neq 0$

$$(16) \qquad H((x-\alpha)^2+\beta^2;\, u_o,u_1) = 4\,\beta^2 t\left(u_o - \frac{u_1}{2t}\right)^2 - \beta^2 u_1^2/t$$

et enfin, si $\alpha = t = 0$

$$(17) \qquad H(x^2+\beta^2) = -\beta^2\left[(u_o+u_1)^2-(u_o-u_1)^2\right]$$

Celà étant, on peut toujours décomposer $f(x)$ en un produit de facteurs linéaires à coefficients réels et de facteurs du second degré à coefficients réels et à racines imaginaires. En appliquant par récurrence l'identité fondamentale (12) et en tenant compte des relations (14), (15), (16) et (17), ainsi que de la remarque concernant le déterminant des formes (13), on a finalement le théorème suivant :

Théorème 2. Si $f(x)$ n'a pas de racine multiple, et si t n'est pas une racine de $f(x)$, la forme $H(f)$ associée à $f(x)$ est de rang n ; le nombre de carrés positifs de $H(f)$ est égal au nombre de racines réelles de $f(x)$ supérieures à t, augmenté du nombre de couples de racines conjuguées de $f(x)$.

Il s'ensuit que, si on considère deux nombres réels $t_1 < t_2$, qui ne soient pas racines de $f(x)$, et les formes quadratiques $H_1(f)$ et $H_2(f)$ correspondantes, le nombre de racines de $f(x)$ contenues dans l'intervalle (t_1, t_2) est égal au nombre de carrés positifs de $H_1(f)$, diminué du nombre de carrés positifs de $H_2(f)$.

On peut considérer que le théorème 2 résout complètement, la question posée pour les polynomes à coefficients réels, car on sait toujours, par des opérations rationnelles sur les coefficients d'un polynome, reconnaître s'il a des racines multiples, et, dans ce cas, le décomposer en un produit de facteurs n'ayant que des racines simples.

Remarques. 1°) Lorsqu'une équation (1) (à coefficients quelconques) a des racines réelles ou des couples de racines conjuguées, on peut cependant déterminer le nombre des racines situées dans le demi-plan $\mathfrak{I}x > 0$ de la manière suivante : si h est un nombre positif, l'équation $f(x+ih) = 0$ aura le même nombre de racines dans ce demi-plan, et n'aura ni racines réelles, ni couples de racines conjuguées, pourvu que h soit suffisamment petit ; on formera donc la forme hermitienne associée à cette nouvelle équation, et le signe de la partie principale de chacun des coefficients de sa décomposition en carrés permettra d'obtenir le nombre cherché.

2°) La connaissance du nombre de racines d'une équation algèbrique dans un demi-plan ouvert permet d'obtenir le nombre de racines dans beaucoup d'autres domaines. Tout d'abord, on a le nombre de racines dans un demi-plan fermé, par différence et par suite le nombre de racines sur une droite ; puis le nombre de racines dans tout domaine circulaire fermé ou ouvert, par transformation homographique. Plus généralement, soit $t = \varphi(x)$ une fraction rationnelle quelconque, et, si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont les racines de $f(x)$, soit $g(t)$ le polynome dont les racines sont $\varphi(x_i)$ $(i = 1,2,\ldots,n)$, polynome qu'on sait former par des calculs rationnels ; on connaîtra le nombre de racines de $f(x)$ dans tout domaine du plan des x de la forme $\overset{-1}{\varphi}(C)$, où C est un domaine circulaire quelconque du plan des t .

On peut aussi employer d'autres procédés ; par exemple, si on considère la différence $p-p'$ entre le nombre p des racines de $f(x)$ dans le demi-plan <u>fermé</u> $\mathfrak{J}\, x \geqslant 0$, et le nombre p' des racines de l'équation $f(te^{ih}) = 0$ dans le demi-plan <u>ouvert</u> $\mathfrak{J}\, t > 0$, cette différence est constante et égale au nombre de racines de $f(x)$ situées sur la demi-droite $x \geqslant 0$, dès que h est positif et suffisamment petit.

<u>Exercices</u>. 1) Comment peut-on évaluer le nombre de racines d'une équation algébrique contenues dans un rectangle (ouvert ou fermé)?

2) Montrer comment la méthode d'Hermite peut s'appliquer directement à la recherche du nombre des racines d'une équation (1) contenues dans le cercle unité $|x| < 1$; on formera le polynome

$$f^*(x) = \bar{a}_n + \bar{a}_{n-1}x + \ldots + \bar{a}_o x^n$$

dont les racines sont symétriques de celles de $f(x)$ par rapport à la circonférence $|x| = 1$, puis le polynome symétrique en x, y,

$$K(f) = \frac{f(x)f^*(y) - f(y)f^*(x)}{x-y} = \sum_{h=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} A_{hk} x^h y^k$$

Examiner quelles sont les relations entre les coefficients A_{hk} et montrer qu'on peut former, à l'aide de ces coefficients, une forme hermitienne dont le nombre de carrés positifs soit, en général, égal au nombre de racines de $f(x)$ contenues dans le cercle $|x| < 1$.
