CHAPITRE II
ESPACES DE RIESZ ET ANNEAUX DE RIESZ

Rédaction n° 068

Nombre de pages : 75

Nombre de feuilles : 75

Livre VIII Chap. II. Etat 3

Espaces de Riesz

68

A 68

2

(Etat 3)

CHAPITRE II.

ESPACES DE RIESZ ET ANNEAUX DE RIESZ

Le but de ce chapitre est l'étude générale de certains espaces vectoriels munis en outre d'une <u>relation d'ordre</u>, ainsi que de certaines <u>formes linéaires</u> définies dans des espaces de cette nature ; les résultats obtenus seront appliqués ensuite aux clans de fonctions et aux formes linéaires croissantes définies sur des clans, dont l'étude élémentaire a été faite au chap.I.

§ 1. Espaces de Riesz.

1. Définition des espaces de Riesz. Définition 1. Etant données, sur un ensemble E , une structure d'espace vectoriel par rapport au corps des nombres réels, et une structure d'ordre, on dit que ces deux structures sont compatibles si elles satisfont aux axiomes suivants :

(EO_I) La relation $x \leqslant y$ entraîne $x+z \leqslant y+z$ quel que soit z .

(EO_{II}) Les relations $x \geqslant 0$ et $\lambda \geqslant 0$ entraînent $\lambda x \geqslant 0$.

Muni de ces deux structures, E est appelée espace vectoriel ordonné.

L'axiome (EO_I) signifie que la structure d'ordre et la structure de groupe additif de E sont compatibles, autrement dit que E , muni de ces deux structures, est un groupe ordonné (Alg., chap.V).

Définition 2. On dit qu'un espace vectoriel ordonné est un espace de Riesz si sa structure d'ordre est une structure d'ensemble réticulé.

Muni de sa structure de groupe additif et de sa structure d'ordre, un espace de Riesz est donc un groupe réticulé (Alg., chap.V). Pour qu'un espace vectoriel ordonné E soit un espace de Riesz, il suffit donc (Alg., chap.V) que, pour tout $x \in E$, l'ensemble formé de x et de 0 admette une borne supérieure, qu'on note x^+ (partie positive de x) ;

rappelons qu'on note de même x^- la borne supérieure de $-x$ et de 0 , et qu'on pose $|x| = \sup(x,-x)$ (valeur absolue de x). Une autre condition suffisante pour qu'un espace vectoriel ordonné E soit un espace de Riesz est que dans l'ensemble E_+ , deux éléments quelconques aient une borne supérieure (Alg., chap.V).

Toutes les propriétés des groupes réticulés sont naturellement applicables aux espaces de Riesz ; nous allons rappeler les principales .
On a $x = x^+ - x^-$, $|x| = x^+ + x^-$; on tire ici de ces relations que $x^+ = \frac{1}{2}(x+|x|)$, $x^- = \frac{1}{2}(|x|-x)$; on a, quels que soient x et y , l'inégalité du triangle

(1) $$|x+y| \leqslant |x| + |y|$$

Si $\lambda \geqslant 0$, des relations $u \geqslant 0$, $u \geqslant \lambda x$, on tire $\frac{u}{\lambda} \geqslant 0$, $\frac{u}{\lambda} \geqslant x$ d'après (EO_{II}) , donc $\frac{u}{\lambda} \geqslant x^+$, $u \geqslant \lambda x^+$, et réciproquement ; on a donc $(\lambda x)^+ = \lambda x^+$, et on voit de même que $(\lambda x)^- = \lambda x^-$, d'où $|\lambda x| = \lambda |x|$. Si au contraire $\lambda \leqslant 0$, on a $(\lambda x)^+ = (-\lambda x)^- = |\lambda| x^-$, et $(\lambda x)^- = (-\lambda x)^+ = |\lambda| x^+$; on en conclut que, pour tout λ et tout $x \in E$

(2) $$|\lambda x| = |\lambda| . |x|$$

On a, quel que soit $z \in E$,

(3) $$\sup(x+z,y+z) = z+\sup(x,y)$$

d'où, en particulier

(4) $$\sup(x,y) = x+(y-x)^+ = \frac{1}{2}(x+y+|x-y|)$$

Si $\lambda \geqslant 0$, on a, d'après (EO_{II})

(5) $$\sup(\lambda x, \lambda y) = \lambda \sup(x,y)$$

et en outre

(6) $$\sup(-x,-y) = -\inf(x,y) .$$

On a aussi la relation

(6 bis) $$\sup(x,y) + \inf(x,y) = x+y .$$

Si x,y,z sont $\geqslant 0$, on a

(7) $$\inf(x+y,z) \leqslant \inf(x,z)+\inf(y,z)$$

Si A et B sont deux parties de E ayant chacune une borne supérieure, A+B admet également une borne supérieure, et on a

(8) $$\sup(A+B) = \sup A + \sup B$$

Notons encore que, si $(x_{\lambda\mu})$ est une famille "double", on a

$$\sup_{\lambda,\mu}(x_{\lambda\mu}) = \sup_\lambda(\sup_\mu(x_{\lambda\mu}))$$

pourvu que les bornes supérieures du second membre existent ; en particulier, si la famille (x_λ) a une borne supérieure

(9) $$\sup_\lambda(x_\lambda^+) = (\sup_\lambda(x_\lambda))^+$$

On montre de même que, si la famille (x_λ) est minorée dans E ,

(10) $$\inf_\lambda(x_\lambda^+) = (\inf_\lambda(x_\lambda))^+$$

d'où on déduit les relations de distributivité

(11) $$\inf(x,\sup_\lambda(y_\lambda)) = \sup_\lambda(\inf(x,y_\lambda))$$
$$\sup(x,\inf_\lambda(y_\lambda)) = \inf_\lambda(\sup(x,y_\lambda))$$

lorsque la famille (y_λ) a une borne supérieure (resp. inférieure).

Deux éléments x,y de E sont dits <u>étrangers</u> si $\inf(|x|,|y|) = 0$. D'après (6 bis), cette relation équivaut à $\sup(|x|,|y|) = |x|+|y|$ ou, d'après (4), à $||x|-|y|| = |x|+|y|$

Pour tout $x \in E$, x^+ et x^- sont étrangers.

Si y est étranger à x , tout z tel que $|z| \leqslant |y|$ est aussi étranger à x ; de même, tout multiple λy est étranger à x ; si y et z sont étrangers à x , il en est de même de y+z . Si une partie A de E est formée d'éléments étrangers à x , et si A admet une borne supérieure, cette borne sup A est encore étrangère à x .

Si x,y,z sont des éléments $\geqslant 0$ tels que x et y soient étrangers, et que $x \leqslant y+z$, on a $x \leqslant z$ (lemme d'Euclide).

Enfin, rappelons l'énoncé du <u>lemme de décomposition</u> :

<u>Si</u> (x_i), (y_j) <u>sont deux suites finies d'éléments</u> $\geqslant 0$ <u>de</u> E , <u>telles que</u> $\sum_i x_i = \sum_j y_j$, <u>il existe une suite double finie</u> (z_{ij}) <u>d'éléments</u> $\geqslant 0$, <u>telle que</u> $x_i = \sum_j z_{ij}$ <u>pour tout</u> i , <u>et</u> $y_j = \sum_i z_{ij}$ <u>pour tout</u> j .

<u>Exemples</u>. 1) Tout clan de fonctions (§ 1) est un espace de Riesz.

2) L'espace R^E de toutes les fonctions numériques définies sur un ensemble E est un espace de Riesz (laborne supérieure de deux fonctions f,g étant l'application $x \longrightarrow \max(f(x),g(x))$). Cet espace peut être considéré comme le <u>produit</u> d'une famille d'espaces identiques à R et ayant E comme ensemble d'indices, la relation d'ordre étant le <u>produit</u> des relations d'ordre des facteurs. Plus généralement, le produit d'une famille quelconque d'espaces de Riesz est un espace de Riesz.

3) Si E est un espace topologique, l'espace $\mathcal{C}(E)$ des fonctions continues dans E (avec la relation d'ordre induite par celle de R^E) est un espace de Riesz ; ce n'est pas un clan s'il existe dans E des fonctions numériques continues non bornées.

4) Considérons l'ensemble E des fonctions numériques continues définies dans l'intervalle $I = [0,1]$ de R et telles que :

a) $x(0)=0$; b) la dérivée à droite $x'_+(0)$ existe et soit finie. C'est un espace de Riesz (avec la relation d'ordre induite par celle de $\mathcal{C}(I)$) : en effet, si $x'_+(0) > 0$, on a $x(t) > 0$ pour t assez voisin de 0 , donc $x(t)=x^+(t)$ dans un voisinage de 0 , et par suite $x^+(t)$ est dérivable au point 0 . On raisonne de même si $x'_+(0) < 0$; enfin, si $x'_+(0)=0$, $x(t)/t$ tend vers 0 avec t , donc il en est de même de $x^+(t)/t$.

Cet espace de Riesz n'est pas un clan, car si $x'_+(0) \neq 0$ la fonction $\sqrt{|x|}$ n'appartient pas à E .

*5) Nous verrons, dans une partie ultérieure de cet ouvrage, que l'ensemble E des fonctions <u>harmoniques</u> dans un ensemble ouvert A d'un espace numérique R^n est un espace de Riesz, avec la relation d'ordre induite par celle de R^A ; on notera qu'ici la borne supérieure de deux fonctions harmoniques f, g , c'est-à-dire la plus petite des fonctions harmoniques h qui soit $\geqslant f$ et $\geqslant g$ n'est pas égale en général à l'application $x \longrightarrow \max(f(x), g(x))$. On notera aussi que cet espace de Riesz n'est pas un clan, ni même un anneau, le produit de deux fonctions harmoniques n'étant pas une fonction harmonique en général.

<u>2. Espaces de Riesz cohérents</u>. <u>Définition 3</u>. <u>On dit qu'un espace de Riesz</u> E <u>est cohérent, lorsque toute partie majorée de</u> E <u>admet une borne supérieure</u>.

Toute partie minorée d'un espace de Riesz cohérent admet donc une borne inférieure.

Pour qu'un espace vectoriel ordonné E soit un espace de Riesz <u>cohérent</u>, il suffit que <u>toute partie majorée de</u> E_+ admette une <u>borne supérieure</u> ou (ce qui revient au même) que <u>toute partie</u> de E_+ admette une <u>borne inférieure</u>. En effet, E est alors un espace de Riesz ($n^o 1$) ; d'autre part, si A est une partie majorée de E , et <u>a</u> un majorant de A , pour tout $x \in A$, on a $x^+ \leqslant a^+$; donc l'ensemble des x^+ , où x parcourt A , a une borne supérieure $b \in E_+$; l'ensemble des x^- a de même une borne inférieure c ; d'autre part, si $u \geqslant x$ pour tout $x \in A$, on a $u^+ \geqslant x^+$ et $u^- \leqslant x^-$, donc $u^+ \geqslant b$, $u^- \leqslant c$, et par suite $u \geqslant b-c$, ce qui prouve que $b-c$ est la borne supérieure de A dans E .

<u>Exemples</u>. 1) L'espace R^E de toutes les fonctions numériques définies dans un ensemble E est cohérent ; plus généralement, tout produit d'espaces cohérents est cohérent. De même, le clan de toutes les fonctions bornées définies dans un ensemble E est un espace cohérent

2) En général, l'espace $\mathcal{C}(E)$ des fonctions numériques continues dans un espace topologique E n'est pas cohérent l'enveloppe supérieure d'une famille majorée de fonctions continues n'étant pas continue en général. De même, les exemples 4) et 5) ci-dessus ne sont pas des espaces cohérents.

Dans un espace de Riesz cohérent, on est amené à faire intervenir des sous-espaces particuliers, définis de la façon suivante :

<u>Définition 4</u>. <u>Dans un espace de Riesz cohérent</u> E , <u>on dit qu'un sous-espace vectoriel</u> B <u>est une bande, s'il satisfait aux conditions suivantes</u>: 1) <u>les relations</u> $x \in B$ <u>et</u> $|y| \leqslant |x|$ <u>entraînent</u> $y \in B$; 2) <u>pour toute partie</u> X <u>de</u> B , <u>majorée dans</u> E , <u>la borne supérieure</u> sup X <u>de</u> X <u>dans</u> E <u>appartient à</u> B .

En remplaçant X par -X , on conclut de cette définition que pour toute partie X de B , minorée dans E , la borne inférieure inf X de X dans E appartient à B . Il est clair qu'une bande B de E , munie de la structure d'espace vectoriel ordonné induitepar cellede E , est encore un espace de Riesz cohérent.

Par exemple, dans l'espace R^E des fonctions numériques définies dans un ensemble E , l'ensemble des fonctions nulles en tous les points d'une partie A de E forme une bande.

Etant donnée une bande B dans E , nous dirons que l'ensemble $B_+ = B \cap E_+$ des éléments $\geqslant 0$ de B est une <u>demi-bande</u> ; pour tout $x \in B$, on a $x^+ \leqslant |x|$ donc $x^+ \in B_+$, et de même $x^- \in B_+$, donc la bande B est identique au <u>sous-groupe additif</u> de E engendré par B_+ . La demi-bande $C = B_+$

possède évidemment les propriétés suivantes : a) $x \in C$ et $y \in C$ entraînent $x+y \in C$; b) $x \in C$ et $0 \leqslant y \leqslant x$ entraînent $y \in C$; c) pour toute partie A de C majorée dans E , sup A appartient à C . Inversement :

<u>Proposition 1</u>. <u>Toute partie C de E_+ possédant les propriétés</u> a),b),c) <u>précédentes est une demi-bande</u>.

Désignons en effet par B le sous-groupe additif de E engendré par C ; nous allons montrer que B est une bande, et que $C = B_+$. Tout d'abord, pour λ réel $\geqslant 0$ quelconque, il existe n entier tel que $\lambda < n$, donc pour $x \in C$, $\lambda x \leqslant nx \in C$, et par suite $\lambda x \in C$, ce qui prouve que B est un sous-espace vectoriel. Tout $x \in B$ est de la forme $y-z$, où $y \in C$, $z \in C$, donc $|x| \leqslant |y| + |z| = y+z \in C$, ce qui prouve que $|x| \in C$. Si inversement on a $|x| \in C$, on en tire $x^+ \in C$ puisque $0 \leqslant x^+ \leqslant |x|$; et de même $x^- \in C$, donc $x \in B$. Supposons alors que $x \in B$ et $|y| \leqslant |x|$; comme $|x| \in C$, on en déduit que $|y| \in C$, donc que $y \in B$. Enfin, soit A une partie majorée de B , a=sup A sa borne supérieure dans E . D'après (9), a^+ est la borne supérieure des x^+ , où x parcourt A , donc $a^+ \in C$; de même, a^- est la borne inférieure des x^- , où x parcourt A ; tout $y \in E_+$ tel que $y \leqslant x^-$ pour tout $x \in A$ appartient à C , donc $a^- \in C$, et par suite $a \in B$.

Toute intersection d'une famille de bandes dans E est encore une bande ; étant donnée une partie Y de E , il existe donc une <u>plus petite bande</u> X contenant Y ; on dira que X est la bande engendrée par Y . Sa structure est précisée par la proposition suivante :

<u>Proposition 2</u>. <u>Soit Y' le sous-groupe additif engendré par l'ensemble des valeurs absolues des éléments de</u> Y , Y" <u>l'ensemble des minorants</u> $\geqslant 0$ <u>des valeurs absolues des éléments de</u> Y'. <u>Si</u> X <u>est la bande engendrée par</u> Y , <u>la demi-bande</u> X_+ <u>est identique à l'ensemble</u> Z <u>des bornes supérieures des parties majorées de</u> Y" .

Il est évident que Z est contenu dans X_+ ; la proposition sera démontrée si on prouve que Z est une <u>demi-bande</u>. En premier lieu, si A et B sont deux parties de Y" , A+B est contenu dans Y" : car si $x\in A$, $y\in B$, il existe x' et y' dans Y' tels que $x \leqslant |x'|$, $y \leqslant |y'|$, ce qui entraîne $x+y \leqslant |x'|+|y'|$. Mias il existe des éléments $u_i \in Y$ et des éléments $v_j \in Y$ tels que $|x'| \leqslant \sum_i |u_i|$ et $|y'| \leqslant \sum_j |v_j|$, d'où $x+y \leqslant \sum_i |u_i| + \sum_j |v_j|$, ce qui montre que $x+y \in Y"$. Si alors A et B sont majorées dans E , il en est de même de A+B et on a la relation (8) ce qui prouve que $\sup A + \sup B \in Z$, autrement dit, Z contient la somme de deux quelconques de ses éléments.

Soit maintenant A une partie majorée de Y" , $a=\sup A$, et x un élément quelconque tel que $0 \leqslant x \leqslant a$. D'après (11), on peut écrire $x = \inf(a,x) = \inf(x, \sup_{y\in A} y) = \sup_{y\in A} (\inf(x,y))$. Mais pour tout $y\in A$, $\inf(x,y) \leqslant y$ donc $\inf(x,y) \in Y"$, ce qui montre que $x \in Z$. Enfin, si (A_ι) est une famille de parties majorées de Y" , telle que l'ensemble des bornes supérieures $\sup A_\iota$ soit majoré, on a $\sup_\iota(\sup A_\iota) = \sup(\bigcup_\iota A_\iota)$, et la réunion des A_ι est une partie majorée de Y" ; la démonstration est ainsi achevée, en vertu de la prop.1 .

<u>Corollaire</u>. <u>Soit</u> A <u>la bande engendrée par l'ensemble</u> $\{a\}$ <u>réduit à un seul élément</u> ; <u>la demi-bande</u> A_+ <u>est l'ensemble des bornes supérieures des parties majorées de</u> E_+ <u>formées d'éléments dont chacun est majoré par un multiple entier de</u> $|a|$ (multiple dépendant de l'élément considéré).

Par exemple, dans l'espace R^E de toutes les fonctions numériques définies dans E , ou dans l'espace $\mathcal{B}(E)$ de toutes les fonctions bornées dans E , la bande engendrée par la fonction constante égale à 1 est l'espace tout entier, toute fonction bornée et $\geqslant 0$ étant un minorant d'une fonction constante, et toute fonction non bornée $f \geqslant 0$ étant borne supérieure d'un ensemble de fonctions bornées (par exemple l'ensemble des fonctions $\inf(f,n)$).

Théorème 1. Soit A une partie d'un espace de Riesz cohérent E . L'ensemble A' des éléments étrangers à tous les éléments de A est une bande ; la bande A'' des éléments étrangers à tous les éléments de A' est identique à la bande engendrée par A , et E est somme directe des bandes A' et A''.

D'après la déf.4 et les propriétés des éléments étrangers, il est immédiat que A' est une bande, donc aussi A'' . Montrons en second lieu que E est somme directe de A' et A'' : on a évidemment $A' \cap A'' = \{0\}$, car 0 est le seul élément étranger à lui-même ; tout revient donc à prouver que $E = A' + A''$, autrement dit que tout $x \in E$ peut se mettre sous la forme $x'+x''$, avec $x' \in A'$, $x'' \in A''$. On peut évidemment se borner au cas où $x \geqslant 0$; soit alors B la partie de A'_+ formée des éléments $u \in A'_+$ tels que $u \leqslant x$; elle est majorée, donc $x' = \sup B \in A'_+$ et $x' \leqslant x$. Posons $x'' = x-x' \geqslant 0$; pour tout $u \in A'_+$ on a $\inf(x'',u) \in A'_+$, donc $x'+\inf(x'',u) \in A'_+$, et $x'+\inf(x'',u) \leqslant x'+x'' = x$, donc $x'+\inf(x'',u) \leqslant x'$ d'après la définition de x' , ce qui entraîne $\inf(x'',u)=0$ et prouve que x'' appartient à A'' ; x'' est d'ailleurs la borne supérieure de l'ensemble des éléments $v \in A''_+$ qui sont $\leqslant x$, car pour un tel v , on a $v \leqslant x = x'+x''$, et v est étranger à x' , donc $v \leqslant x''$.

Reste à montrer que A'' est identique à la bande B engendrée par A ; il suffit pour cela de prouver que $A'' \subset B$. Or, E est somme directe de B et de la bande B' formée des éléments étrangers à tous les éléments de B ; E est aussi somme directe de B' et de la bande B'' formée des éléments étrangers à tous les éléments de B' ; comme on a évidemment $B \subset B''$, il en résulte que $B'' = B$. Mais comme $A \subset B$, on a $B' \subset A'$, et par suite $A'' \subset B'' = B$.

Corollaire. Si x et y sont deux éléments étrangers de E , A et B les bandes engendrées par x et y , tout élément de A est étranger à tout élément de B .

En effet, y appartient à la bande A' des éléments étrangers à x , et x à la bande A'' des éléments étrangers à tous les éléments de A' ; et on a $A = A''$, $B \subset A'$.

<u>Proposition 3</u>. <u>Soit</u> a <u>un élément d'un espace de Riesz cohérent</u> E , B_a <u>la bande engendrée par</u> a , B'_a <u>la bande des éléments étrangers à</u> a . <u>Le composant d'un élément</u> $x \in E_+$ <u>dans</u> B_a (pour la décomposition de E en somme directe de B_a et B'_a) <u>est égal à</u> $\sup_n (\inf(n|a|, x))$

En effet, ce composant est égal à sup v , où v parcourt l'ensemble des éléments de B_a qui sont $\leqslant x$; d'après le cor. de la prop.2, tout élément $v \geqslant 0$ qui a cette propriété est borne supérieure d'éléments $w \leqslant x$ et qui dont chacun est majoré par un multiple de $|a|$; le composant de x est donc aussi égal à sup w , où w parcourt l'ensemble des éléments de E_+ qui sont majorés par x et par un multiple de $|a|$; mais tout élément de la forme $\inf(n|a|, x)$ appartient à cet ensemble, et inversement, pour tout w , il existe un n tel que $w \leqslant n|a|$, donc $w \leqslant \inf(n|a|, x)$, d'où la proposition.

<u>Exercices</u>. 1) On dit qu'un espace de Riesz est <u>archimédien</u> si la relation $nx \leqslant c$ pour tout $n \geqslant 0$ entraîne $x \leqslant 0$. Pour qu'un espace de Riesz soit isomorphe à un sous-espace de Riesz d'un espace <u>cohérent</u>, il faut et il suffit que E soit <u>archimédien</u> (<u>Alg</u>.,chap.V). Montrer que cette condition équivaut à la suivante : l'intersection d'un plan quelconque et de l'ensemble convexe E_+ se réduit au point 0 ou est un secteur angulaire <u>fermé</u> .

2) Soit (E_ι) une famille d'espaces de Riesz cohérents E l'espace de Riesz cohérent, produit des E_ι . Montrer que si B est une bande dans E , chacune des projections $pr_\iota(B)$ est une bande dans E_ι , et B est identique au produit de ses projections. En déduire la détermination de toutes les bandes dans l'espace R^E de toutes les fonctions numériques sur un ensemble E .

Montrer que, dans l'espace $\mathcal{B}(E)$ des fonctions numériques bornées sur E , toute bande est la trace sur $\mathcal{B}(E)$ d'une bande dans R^E .

3) Soit E un espace de Riesz cohérent. On dit qu'un filtre $\mathcal{F}$ sur E est majoré (resp. minoré, borné) s'il existe dans $\mathcal{F}$ un ensemble majoré (resp. minoré, borné). Pour un filtre majoré (resp. minoré) $\mathcal{F}$, on appelle limite supérieure (resp. limite inférieure) de $\mathcal{F}$, et on note lim.sup $\mathcal{F}$ (resp. lim.inf $\mathcal{F}$) l'expression inf(sup X) (resp. sup(inf X)), où X parcourt l'ensemble des ensembles majorés (resp. minorés) de $\mathcal{F}$, si cette expression existe. Pour un filtre borné $\mathcal{F}$, lim.sup $\mathcal{F}$ et lim.inf $\mathcal{F}$ existent toujours ; on dit que $\mathcal{F}$ a une limite ou est convergent si lim.sup $\mathcal{F}$ = lim.inf $\mathcal{F}$; la valeur commune de ces deux expressions se note alors lim $\mathcal{F}$ et on dit que $\mathcal{F}$ converge vers cet élément. Si un filtre a une limite, tout filtre plus fin a la même limite.

a) Pour qu'un filtre borné $\mathcal{F}$ ait une limite, il faut et il suffit que inf(sup X - inf X)=0 , où X parcourt l'ensemble des ensembles bornés de $\mathcal{F}$.

b) On dit qu'une partie A de E est un ensemble fermé si pour tout filtre sur A qui admet une limite dans E , cette limite appartient à A . Montrer que E_+ est fermé, et que toute bande dans E est fermée.

c) Soit f une application dans E d'un ensemble M filtré par un filtre $\mathcal{G}$; on dit que f a une limite suivant le filtre $\mathcal{G}$, si f($\mathcal{G}$) est la base d'un filtre borné convergent dans E ; la limite de cette base de filtre est par définition la limite de f suivant $\mathcal{G}$, et se note $\lim_{\mathcal{G}} f$. Si F est un espace de Riesz cohérent, f une application de F dans E , on dit que f est continue dans F si elle transforme tout filtre convergent $\mathcal{G}$ sur F en une base de filtre convergente sur E , et si en outre $f(\lim \mathcal{G}) = \lim_{\mathcal{G}} f$. Si f est continue dans F , l'image réciproque par f de tout ensemble fermé dans E est un ensemble fermé dans F .

d) Soit f une application croissante d'un ensemble ordonné filtrant M dans un espace de Riesz cohérent E . Si l'image par f du filtre des sections de M est une base de filtre bornée, elle est convergente vers la borne supérieure de f dans M .

e) Soient E et F deux espaces de Riesz cohérents. Pour que, sur $E \times F$, le filtre produit d'un filtre $\mathfrak{F}$ sur E et d'un filtre $\mathfrak{G}$ sur F soit convergent, il faut et il suffit que chacun des filtres $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$ soit convergent.

f) Si E est un espace de Riesz cohérent, chacune des applications $(x,y) \longrightarrow x+y$, $(\lambda ,x) \longrightarrow \lambda x$ est continue (dans les espaces produits $E \times E$ et $R \times E$ respectivement. L'application $x \longrightarrow x^+$ de E dans E est continue (remarquer que $\sup_\iota x_\iota^+ - \inf_\iota x_\iota^+ \leqslant \sup_\iota x_\iota - \inf_\iota x_\iota$) .

4) Soit E un espace de Riesz cohérent, $(x_\iota)_{\iota \in I}$ une famille d'éléments de E . Pour toute partie finie H de I, on pose $s_H = \sum_{\iota \in H} x_\iota$; on dit que la famille (x_ι) est <u>sommable</u> si l'application $H \longrightarrow s_H$ a une limite (exerc. 3c)) suivant l'ensemble filtrant $\mathfrak{F}(I)$ des parties <u>finies</u> de I ; cette limite s est appelée la <u>somme</u> de la famille (x_ι) et s'écrit $\sum_{\iota \in I} x_\iota$.

a) Pour qu'une famille $(x_\iota)_{\iota \in I}$ soit sommable, il faut et il suffit que : 1° pour toute partie finie H de I , l'ensemble des $|s_K|$, où K parcourt l'ensemble des parties finies ne rencontrant pas H , admet une borne supérieure $r_H \geqslant 0$; 2° $\inf r_H = 0$, lorsque H parcourt l'ensemble $\mathfrak{F}(I)$ (utiliser l'exerc. 3a)).

b) Si la famille $(x_\iota)_{\iota \in I}$ est sommable, il en est de même de toute sous-famille $(x_\iota)_{\iota \in J}$ de la famille $(x_\iota)_{\iota \in I}$; on désigne alors par s_J la somme de cette sous-famille.

c) Soit (I_1, I_2) une partition de I ; montrer que si chacune des sous-familles $(x_\iota)_{\iota \in I_1}$, $(x_\iota)_{\iota \in I_2}$ est sommable, il en est de même de $(x_\iota)_{\iota \in I}$, et on a $s = s_{I_1} + s_{I_2}$ (utiliser a)).

d) Si $(x_\iota)_{\iota \in I}$ est smmable, montrer que l'application $J \to s_J$ a pour limite s suivant l'ensemble filtrant $\mathfrak{P}(I)$ de <u>toutes</u> les parties de I (remarquer que $|s|$ est inférieur à la borne supérieure des $|s_H|$, où H parcourt l'ensemble des parties finies de I ; en déduire, à l'aide de c), que $|s - s_J| \leqslant r_J$, r_J désignant la borne supérieure des $|s_K|$, où K parcourt l'ensemble des parties finies ne rencontrant pas J ; puis utiliser a)).

e) Soit $(I_\lambda)_{\lambda \in L}$ une partition quelconque de I ; montrer que si la famille $(x_\iota)_{\iota \in I}$ est sommable, et si on pose $s_\lambda = \sum_{\iota \in I} x_\iota$, la famille $(s_\lambda)_{\lambda \in L}$ est sommable et a pour somme s (utiliser c) et d)).

f) Soit $(x_\iota)_{\iota \in I}$ une famille d'éléments $\geqslant 0$ de E ; pour que cette famille soit sommable, il faut et il suffit que les sommes partielles finies s_H forment un ensemble majoré (utiliser l'exerc.3d)). Si (x_ι) est sommable, et si $(y_\iota)_{\iota \in I}$ est une seconde famille d'éléments $\geqslant 0$ de E telle que $y_\iota \leqslant x_\iota$ pour tout ι, la famille (y_ι) est sommable et on a $\sum_{\iota \in I} y_\iota \leqslant \sum_{\iota \in I} x_\iota$, l'égalité n'ayant lieu que si $x_\iota = y_\iota$ pour tout ι.

g) Si $(x_\iota)_{\iota \in I}$ et $(y_\iota)_{\iota \in I}$ sont deux familles sommables dans E, les familles $(x_\iota + y_\iota)$ et (λx_ι) sont sommables, pour tout scalaire (utiliser l'exerc. 3f)).

h) Soit (x_ι) une famille d'éléments de E ; si la famille $(|x_\iota|)$ est sommable dans E, il en est de même de la famille (x_ι) (utiliser f) et g)).

5) Soit E un espace de Riesz cohérent. Montrer qu'il existe une famille (u_ι) d'éléments >0 de E telle que, pour deux indices distincts ι, $\varkappa$, on ait $\inf(u_\iota, u_\varkappa)=0$, et que, pour tout $x>0$ de E, il existe au moins un indice ι tel que $\inf(x,u_\iota)>0$ (utiliser le th. de Zorn). En déduire que, pour tout x 0, il existe une famille (x_ι) et une seule d'éléments $\geqslant 0$ tels que x_ι appartienne à la bande B_{u_ι} engendrée par u_ι pour tout ι, et $x = \sum_\iota x_\iota$ (prendre pour x_ι l'élément $p_{u_\iota}(x)$).

§ 2. Formes linéaires sur un espace de Riesz

1. Formes linéaires croissantes sur un espace de Riesz. La définition d'une forme linéaire croissante sur un espace de Riesz E est identique à celle qui a été donnée au chap.I, § 2 pour les formes linéaires croissantes sur un clan : L est une forme linéaire croissante si $x \leqslant y$ entraîne $L(x) \cdot L(y)$; ou encore, ce qui revient au même, si $x \geqslant 0$ entraîne $L(x)$ 0. La prop.1 du chap.I, 2 s'étend aussi sans changement lorsqu'on y remplace le clan de fonctions envisagé par un espace de Riesz quelconque.

Les formes linéaires croissantes sur E forment une partie P du dual E' de E (espace vectoriel de toutes les formes linéaires sur E) ; désignons par Ω le sous-espace vectoriel de E' engendré par P. Comme $L \in P$ entraîne $\lambda L \in P$ pour tout $\lambda > 0$, il est immédiat que Ω est l'ensemble des éléments L-M, où L et M appartiennent à P. On a en outre $P+P \subset P$, et $P \cap (-P) = \{0\}$, car si on a $L(x) \geqslant 0$ et $L(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in E_+$, on en déduit que L est identiquement nulle dans E_+, et par suite dans E. L'espace vectoriel Ω est par suite un espace vectoriel ordonné, dans lequel P est l'ensemble Ω_+ des éléments positifs.

Proposition 1. L'espace Ω est un espace de Riesz cohérent.

Il suffit (§ 1, n°2) de prouver que toute partie majorée A de Ω_+ admet une <u>borne supérieure</u> ; d'après la définition de la relation d'ordre dans Ω_+, dire que A est majorée signifie qu'il existe une $L_0 \in \Omega_+$ telle que $L_0(x)-L(x) \geqslant 0$ pour toute $L \in A$ et tout $x \in E_+$; il faut montrer l'existence d'une $M \in \Omega_+$ telle que $M(x)-L(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in E_+$ et toute $L \in A$, et d'autre part que la relation $N(x)-L(x) \geqslant 0$ pour toute $L \in A$ et tout $x \in E_+$ entraîne $N(x)-M(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in E_+$.

Etant donné un élément quelconque $x \geqslant 0$ de E, nous dirons qu'une suite finie (x_i) d'éléments $\geqslant 0$ est une <u>partition</u> de x si on a $x = \sum_i x_i$, et nous désignerons par $\mathcal{P}(x)$ l'ensemble des partitions de x. Pour toute partition (x_i) de x, on doit avoir, d'après la définition ci-dessus, pour toute famille finie (L_i) de formes appartenant à A (et en nombre égal à celui de x_i)

$$\sum_i L_i(x_i) \leqslant \sum_i M(x_i) = M(x)$$

Nous aurons donc établi la proposition si nous montrons que la relation $M(x) = \sup_{\mathcal{P}(x)} \sum_i L_i(x_i)$ (la borne supérieure étant étendue à toutes les partitions (x_i) de x, et toutes les familles finies (L_i) de formes appartenant à A) définit bien une <u>forme linéaire</u> sur E. Notons d'abord que la borne supérieure ainsi introduite existe, car on a $\sum_i L_i(x_i) \leqslant \sum_i L_0(x_i) = L_0(x)$. Tout revient donc à prouver que $M(x+y) = M(x)+M(y)$ quels que soient $x \in E_+$, $y \in E_+$.

Or, on a $M(x)+M(y) = \sup_{\mathcal{P}(x)} \sum_i L_i(x_i) + \sup_{\mathcal{P}(y)} \sum L'_j(y_j) = \sup(\sum_i L_i(x_i) + \sum_j L'_j(y_j))$, la borne supérieure étant étendue à tous les couples de partitions $(x_i), (y_j)$; mais tous les éléments x_i, y_j d'un tel couple forment une partition de $z=x+y$, donc on a $M(x)+M(y) \leqslant M(x+y)$. D'autre part, on a $M(x+y) = \sup_{\mathcal{P}(z)} \sum_i L_i(z_i)$; mais si (z_i) est une partition de z, on a $z=x+y = \sum_i z_i$, donc, d'après le lemme de décomposition, il existe une partition (x_i) de x et une partition (y_i)

de y telles que $z_i=x_i+y_i$ pour tout i ; on aura donc
$\sum_i L_i(z_i) = \sum_i L_i(x_i) + \sum_i L_i(y_i) \leqslant M(x)+M(y)$, et a fortiori
$M(x+y) \leqslant M(x)+M(y)$, ce qui achève la démonstration.

Nous avons en outre obtenu l'expression de la borne supérieure d'un ensemble majoré de formes linéaires croissantes ; on obtiendrait de la même manière celle de sa borne inférieure, en définissant celle-ci par la formule $N(x) = \inf_{\mathfrak{p}(x)} \sum_i L_i(x_i)$. Ceci nous permet de donner la condition suivante pour que deux formes linéaires croissantes soient des éléments <u>étrangers</u> dans l'espace de Riesz cohérent Ω :

<u>Proposition 2</u>. <u>Pour que deux formes linéaires croissantes</u> L, M <u>soient étrangères dans</u> Ω , <u>il faut et il suffit que, pour tout</u> $x \in E_+$ <u>et tout</u> $\varepsilon > 0$, <u>il existe une partition de</u> x <u>en deux éléments</u> y, z , <u>telle que</u> $L(y)+M(z) \leqslant \varepsilon$.

En effet, dire que L et M sont étrangères signifie par définition que $\inf(L,M)=0$, c'est-à-dire, pour tout $x \in E_+$, $\inf_{\mathfrak{p}(x)} \sum_i L_i(x_i)=0$, pour toutes les familles (L_i) d'éléments pris dans l'ensemble $\{L, M\}$; en groupant ceux des termes pour lesquels $L_i=L$ et ceux pour lesquels $L_i=M$, on a aussitôt la proposition.

<u>2. Formes linéaires relativement bornées</u>. Soit x_0 un élément >0 quelconque de E . Pour tout $\lambda > 0$ soit $V(x_0; \lambda)$ l'ensemble des $x \in E$ tels que $|x| \leqslant \lambda x_0$; lorsque parcourt l'ensemble des nombres >0 , les $V(x_0; \lambda)$ forment un système fondamental de voisinages de 0 dans une topologie de groupe sur E , topologie que nous désignerons par $\mathcal{T}_{x_0}$.

Si L est une forme linéaire croissante sur E , et si $|x| \leqslant \lambda x_0$, on a $|L(x)| \leqslant L(|x|) \leqslant \lambda L(x_0)$; L est donc une forme <u>continue</u> pour chacune des topologies $\mathcal{T}_{x_0}$. Il en est de même des formes linéaires appartenant à Ω , puisque chacune d'elles est différence de deux formes linéaires croissantes. Une forme linéaire L continue pour chacune des topologies $\mathcal{E}_{x_0}$ est caractérisée par la propriété que L(x) reste <u>borné</u> lorsque x parcourt un quelconque des voisinages $V(x_0; \lambda)$; nous dirons qu'une telle forme linéaire est <u>relativement bornée</u>, et nous allons montrer que :

<u>Proposition 3</u>. <u>Toute forme linéaire relativement bornée sur</u> E <u>est la différence de deux formes linéaires croissantes</u>.

Soit L une forme linéaire relativement bornée sur E ; le théorème sera établi si on prouve qu'il existe une forme linéaire croissante M telle que $M(x) \geqslant L(x)$ pour tout $x \in E_+$; car alors M-L sera une forme linéaire croissante. Or, comme on a par hypothèse $M(x) \geqslant 0$, on doit avoir aussi $M(x) \geqslant (L(x))^+$ pour tout $x \in E_+$; d'où pour toute partition (x_i) de x, $M(x) = \sum_i M(x_i) \geqslant \sum_i (L(x_i))^+$. Si on pose $M(x) = \sup_{\mathcal{P}(x)} \sum_i (L(x_i))^+$, il est clair qu'on aura achevé la démonstration si on montre que M(x) est fini pour tout $x \in E_+$, et que M est une forme linéaire ; ce sera en outre évidemment <u>la plus petite</u> forme linéaire croissante telle que $M \geqslant L$, c'est-à-dire l'élément L^+ dans l'espace de Riesz Ω.

Pour voir que M(x) est finie, remarquons qu'on peut écrire $\sum_i (L(x_i))^+ \leqslant \sum_i |L(x_i)| = \sup \left|\sum_i \alpha_i L(x_i)\right|$, où les n nombres α_i prennent toutes les valeurs telles que $|\alpha_i| \leqslant 1$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Mais on a $\sum_i \alpha_i L(x_i) = L(\sum_i \alpha_i x_i)$, et $\left|\sum_i \alpha_i x_i\right| \leqslant \sum_i x_i = x$; donc $\sum_i |L(x_i)|$ est borné par hypothèse pour toutes les partitions (x_i) de x.

Montrons maintenant que M est une forme linéaire ; par hypothèse, on a $M(x+y) = \sup_{\mathcal{P}(x+y)} \sum_i (L(z_i))^+$; pour toute partition (z_i) de $z=x+y$, il existe, d'après le lemme de décomposition deux partitions (x_i), (y_i) de x et y respectivement, telles que $z_i = x_i + y_i$ pour tout i, d'où $L(z_i) = L(x_i) + L(y_i)$, et par suite $(L(z_i))^+ \leqslant (L(x_i))^+ + (L(y_i))^+$; on en conclut $M(x+y) \leqslant M(x) + M(y)$. D'autre part, $M(x)+M(y) = \sup \sum ((L(x_i))^+ + (L(y_j))^+)$, (x_i) parcourant $\mathcal{P}(x)$, (y_j) parcourant $\mathcal{P}(y)$;

comme les x_i et les y_j forment une partition de $x+y$, on a $M(x)+M(y) \leqslant M(x+y)$, ce qui achève la démonstration.

<u>Remarque</u>. On peut définit autrement la forme linéaire $L^+=M$. En effet, pour $x \geqslant 0$ et pour tout y tel que $0 \leqslant y \leqslant x$, on a $L(y) \leqslant (L(y))^+ \leqslant \leqslant M(y) \leqslant M(x)$. Réciproquement, si N est une forme linéaire croissante telle que $N(x) \geqslant L(y)$ pour tout y tel que $0 \leqslant y \leqslant x$, pour toute partition (x_i) de x , désignons par y la somme de ceux de x_i pour lesquels $L(x_i) \geqslant 0$, c'est-à-dire $(L(x_i))^+=L(x_i)$; on a $0 \leqslant y \leqslant x$ et $L(y) = \sum L(x_i)$, la somme étant étendue à ceux des x_i pour lesquels $L(x_i) \geqslant 0$; comme pour les autres $(L(x_i))^+=0$, on a $L(y)= \sum(L(x_i))^+$, la somme étant étendue à <u>tous</u> les x_i de la partition ; l'hypothèse faite sur N , et la définition de M entraînent donc $M(x) \leqslant N(x)$ pour tout $x \geqslant 0$; on peut donc encore définir $M(x)$ comme égale à $\sup\limits_{0 \leqslant y \leqslant x} L(y)$.

<u>3. Fonctions convexes de formes linéaires</u>. Le raisonnement qui conduit à la prop.3 est susceptible d'une généralisation étendue. Considérons en effet les applications linéaires d'un espace de Riesz E dans un <u>espace vectoriel à n diemensions</u> V sur le corps $\mathbb{R}$. Soit $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une base de V ; la donnée d'une application linéaire L de E dans V revient à la donnée de n formes linéaires L_i sur E , $L_i(x)$ désignant la composante d'indice i de $L(x)$. Nous dirons que L est <u>relativement bornée</u> dans E si L est continue pour chacune des topologies $\mathcal{T}_{x_0}$; si $\|u\|$ est une norme quelconque sur V (on sait que toutes les normes sur V sont équivalentes), il revient au même de dire que, lorsque x parcourt un quelconque des voisinages $V(x_0;\lambda)$, $\|L(x)\|$ reste <u>borné</u>. Pour que L soit relativement bornée, il faut et il suffit que chacune des formes linéaires composantes L_i soit relativement bornée.

Soit maintenant $q(u)$ une <u>fonction convexe positive et positivement homogène</u> définie dans V (c'est-à-dire (Livre VI) telle que $q(u+v) \leqslant q(u)+q(v)$ $q(u) \geqslant 0$ pour tout u et $q(\lambda u)=\lambda q(u)$ pour tout scalaire $\lambda \geqslant 0$) ; on sait qu'il existe une constante $m>0$ telle que, pour tout $u=\sum_{i=1}^{n} u_i a_i$, on ait $q(u) \leqslant m. \sum_{i=1}^{n} |u_i|$. La prop.3 se généralise alors comme suit :

<u>Proposition 4</u>. <u>Si</u> L <u>est une application linéaire relativement bornée de</u> E <u>dans</u> V , <u>il existe une forme linéaire croissante</u> M <u>sur</u> E <u>telle que, pour tout</u> $x \geqslant 0$, $q(L(x)) \leqslant M(x)$.

On doit avoir, pour toute partition (x_i) de x , $M(x_i) \geqslant q(L(x_i))$ d'où $M(x)=\sum_i M(x_i) \geqslant \sum_i q(L(x_i))$; si on prend $M(x)=\sup_{\mathscr{P}(x)} \sum_i q(L(x_i))$ tout revient à montrer que $M(x)$ est finie pour tout $x \geqslant 0$, et que M est une forme linéaire ; ce sera alors <u>la plus petite</u> forme linéaire croissante répondant à la question. Or, une fois démontré que $M(x)$ est fini, la preuve de la relation $M(x+y)=M(x)+M(y)$ se fait exactement comme dans la prop.3, où on a uniquement utilisé l'inégalité de convexité pour la fonction t^+ (dans $\mathbb{R}$).

Pour voir que $M(x)$ est fini, remarquons qu'on a

$$\sum_i q(L(x_i)) \leqslant m. \sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_i \big|L_j(x_i)\big|\Big) ;$$

or on a vu dans la prop.3 que les nombres $\sum_i |L_j(x_i)|$ forment un ensemble majoré lorsque (x_i) parcourt l'ensemble des partitions de x , puisque L_j est une forme linéaire relativement bornée.

Nous désignerons par $q(L)$ la forme linéaire croissante M définie dans la démonstration précédente ; lorsque $V=\mathbb{R}$, et qu'on prend $q(t)$ égal à l'une des trois fonctions t^+ , t^- et $|t|$, la fonction $q(L)$ est bien respectivement égale aux éléments L^+ , L^- et $|L|$ de l'espace de Riesz Ω .

De même, lorsque V est quelconque, et $q(u) = \|u\|$ une <u>norme</u> sur V la forme linéaire croissante q(L) correspondante se note encore $\|L\|$; c'est donc la plus petite forme linéaire croissante M telle que $\|L(x)\| \leqslant M(x)$ pour tout $x \in E_+$.

On notera que l'existence d'une forme linéaire croissante M telle que $\|L(x)\| \leqslant M(x)$ pour tout $x \in E_+$ entraîne évidemment que L est relativement bornée ; c'est donc une condition <u>nécessaire et suffisante</u> pour que L soit relativement bornée.

<u>4. Fonctions lipschitziennes de formes linéaires.</u> La formule

(1) $$q(L)(x) = \sup_{\mathfrak{p}(x)} \sum_i q(L(x_i))$$ de la prop.4

peut s'interprèter autrement. Etant donnée une partition (x_i) de x , nous dirons qu'une partition (x'_k) de x est <u>plus fine</u> que la partition (x_i) si chacun des x_i est somme d'une sous-famille de la famille (x'_k), deux sous-familles de (x'_k) dont les sommes sont égales à deux x_i d'indices différents n'ayant aucun terme commun ; cette relation est une <u>relation d'ordre</u> dans $\mathfrak{p}(x)$ lorsqu'on considère deux partitions de x comme identiques si elles ne diffèrent que par l'ordre des termes. En outre, le lemme de décomposition exprime que $\mathfrak{p}(x)$, muni de cette relation d'ordre, est un ensemble ordonné <u>filtrant</u> (pour la relation "plus fine").

Cela étant, si à toute partition (x_i) de x on fait correspondre le nombre réel $\sum_i q(L(x_i))$, on définit une application <u>croissante</u> de $\mathfrak{p}(x)$ dans R , en vertu de la convexité de q . D'après le théorème de la limite monotone (<u>Top.gén.</u>, chap.IV, § 5,th.2) on peut donc écrire la formule (1) sous la forme

(2) $$q(L)(x) = \lim_{\mathfrak{p}(x)} \sum_i q(L(x_i))$$

Cette nouvelle interprétation va nous permettre d'étendre la définition de q(L) à des cas où la fonction q n'est plus convexe.

Nous nous appuierons sur le théorème fondamental suivant :

<u>Théorème 1.</u> <u>Soient</u> $U(x)$ <u>une forme linéaire croissante sur un espace de Riesz</u> E , $L(x)$ <u>une application linéaire relativement bornée de</u> E <u>dans un espace vectoriel</u> V <u>à</u> n <u>dimensions, telle que</u> $\|L\| \leqslant c.U$ (c nombre >0). <u>Pour tout</u> $x \in E_+$ <u>et tout</u> $\varepsilon > 0$, <u>il existe une partition</u> (x_i) <u>de</u> x <u>telle que, si on pose</u> $a_i = L(x_i)/U(x_i)$ ($a_i = 0$ si $U(x_i)=0$ <u>et</u> $L(x_i)=0$), <u>et si</u> (x_{ij}) <u>est pour chaque</u> i <u>une partition de</u> x_i, <u>on ait</u>

$$(3) \qquad \sum_{i,j} \| L(x_{ij}) - a_i U(x_{ij}) \| \leqslant \varepsilon$$

Notons d'abord que la relation $\|L\| \leqslant cU$ entraîne $\|L(x)\| \leqslant cU(x)$ pour tout $x \in E_+$, et par suite $\|a_i\| \leqslant c$ pour tout les indices i .

Etant donné $\delta > 0$ arbitraire, il existe un nombre fini de points b_k ($1 \leqslant k \leqslant m$) de la boule $\|u\| \leqslant c$ dans V , tels que pour tout point u de cette boule, il existe un indice k tel que $\|u - b_k\| \leqslant \delta$ (compacité de la boule fermée dans V). Considérons alors dans l'espace à $n+1$ dimensions $V \times R$ la fonction convexe positivement homogène $q(u,x) = \sum_{k=1}^{m} \| u - x b_k \|$; appliquons ce qui précède à cette fonction convexe et à l'application linéaire relativement bornée $x \longrightarrow (L(x), U(x))$ de E dans $V \times R$; on en conclut que l'expression $\sum_{k,i} \| L(x_i) - b_k U(x_i) \|$ a une limite suivant l'ordonné croissant $\mathcal{P}(x)$ des partitions de x . Cela entraîne que, pour tout $\eta > 0$, il existe une partition (x_i) de x telle que si (x_{ij}) désigne une partition quelconque de x_i pour chaque i , on ait

$$(4) \qquad \sum_{i,k} \left[\left(\sum_j \| L(x_{ij}) - b_k U(x_{ij}) \| \right) - \| L(x_i) - b_k U(x_i) \| \right] \leqslant \eta$$

Soit $a_i = L(x_i)/U(x_i)$ ($a_i = 0$ si $U(x_i)=0$) ; pour chaque indice i , soit k_i un indice tel que $\| a_i - b_{k_i} \| \leqslant \delta$. Remarquons d'autre part que pour chaque couple d'indices (i,k), le terme d'indices i,k qui figure dans la somme (4) est $\geqslant 0$ (d'après la convexité de $\| u - b_k x \|$ et la relation $x_i = \sum_j x_{ij}$) ; donc cette inégalité subsiste encore quand on n'y conserve que les termes pour lesquels $k=k_i$; ce qui donne

$$\sum_{i,j} \| L(x_{ij}) - b_{x_i} U(x_{ij}) \| \leqslant \eta + \sum_i \| (a_i - b_{k_i}) U(x_i) \| \leqslant \eta + \delta\, U(x)$$

et comme $\sum_{i,j} x_{ij} = x$, on a $\sum_{i,j} \| (a_i - b_{k_i}) U(x_{ij}) \| \leqslant \delta\, U(x)$, d'où finalement

$$\sum_{i,j} \| L(x_{ij}) - a_i U(x_{ij}) \| \leqslant \eta + 2\,\delta\, U(x)$$

ce qui démontre le théorème, puisque η et sont arbitraires.

<u>Corollaire</u>. <u>Pour toute partition</u> (x'_k) <u>de</u> x , <u>plus fine que</u> (x_i), <u>et une partition quelconque</u> (x'_{kh}) <u>de chacun des</u> x'_k , <u>si on pose</u> $a'_k = L(x'_k)/U(x'_k)$ ($a'_k = 0$ si $U(x'_k)=0$), <u>on a</u>

$$\sum_{k,h} \| L(x'_{kh}) - a'_k U(x'_{kh}) \| \leqslant 2\varepsilon$$

En effet, (x'_k) est la réunion de partitions (x_{ij}) de chacun des x_i ; si on pose $a_{ij} = L(x_{ij})/U(x_{ij})$ ($a_{ij}=0$ si $U(x_{ij})=0$, ce qui entraîne $L(x_{ij})=0$), la relation (3) montre que $\sum_{i,j} \| a_{ij} - a_i \| \; U(x_{ij}) \leqslant \varepsilon$. Si (x_{ijh}) est une partition quelconque de x_{ij} , les x_{ijh} correspondant à un même indice i forment une partition de x_i , donc on a, d'après (3) $\sum_{i,j,h} \| L(x_{ijh}) - a_i U(x_{ijh}) \| \leqslant \varepsilon$. On a par suite

$$\sum_{i,j,h} \| L(x_{ijh}) - a_{ij} U(x_{ijh}) \| \leqslant \sum_{i,j,h} \| L(x_{ijh}) - a_i U(x_{ijh}) \| + \sum_{i,j,h} \| a_{ij} - a_i \| \, U(x_{ijh})$$

et comme

$$\sum_{i,j,h} \| a_{ij} - a_i \| \, U(x_{ijh}) = \sum_{i,j} \| a_{ij} - a_i \| \, U(x_{ij}) \text{ , on a bien}$$

$$\sum_{i,j,h} \| L(x_{ijh}) - a_{ij} U(x_{ijh}) \| \leqslant 2\varepsilon$$

ce qui démontre le corollaire.

On peut encore dire que, non seulement il existe <u>une</u> partition (x_i) de x ayant la propriété énoncée dans le th.1, mais qu'il en existe d'<u>aussi fines qu'on veut</u>.

Définition 1. Etant donnés deux espaces vectoriels V, V' *de dimension finie sur le corps* $\mathbb{R}$ *, on dit qu'une application* p *de* V *dans* V' *est lipschitzienne si elle est positivement homogène, et s'il existe* $c \geqslant 0$ *tel que pour tout couple de points* u, v *de* V *, on ait*

$$\|p(u)-p(v)\| \leqslant c\,\|u-v\| .$$

Théorème 2. Soient L *une application linéaire relativement bornée d'un espace de Riesz* E *dans un espace vectoriel* V *de dimension finie,* p *une application lipschitzienne de* V *dans un espace vectoriel* V' *de dimension finie. Il existe une application linéaire relativement bornée* M *de* E *dans* V' *, telle que, pour tout* $x \in E_+$

$$M(x) = \lim_{\mathfrak{p}(x)} \sum_i p(L(x_i)) \tag{5}$$

Montrons d'abord que la limite du second membre de (5) existe pour tout $x \in E_+$; appliquant le critère de Cauchy, tout revient à prouver que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partition (x_i) de x telle que, si (x_{ij}) désigne, pour chaque i, une partition quelconque de x_i , on ait

$$\Big\| \sum_{i,j} p(L(x_{ij})) - \sum_i p(L(x_i)) \Big\| \leqslant \varepsilon .$$

Posons $U = \|L\|$; pour tout $\eta > 0$, le th.1, appliqué à L et U , montre qu'il existe une partition (x_i) de x telle que, pour toute partition (x_{ij}) de chacun des x_i , on ait

$$\sum_{i,j} \big\| L(x_{ij}) - a_i U(x_{ij}) \big\| \leqslant \eta \quad \text{avec} \quad a_i = L(x_i)/U(x_i) \tag{6}$$

Comme p est lipschitzienne, on en déduit

$$\Big\| \sum_{i,j} p(L(x_{ij})) - \sum_{i,j} p(a_i U(x_{ij})) \Big\| \leqslant c\eta$$

et comme p est positivement homogène, $p(a_i U(x_{ij})) = U(x_{ij})\,p(a_i)$,

donc $\sum p(a_i U(x_{ij})) = \big(\sum_j U(x_{ij})\big)p(a_i) = U(x_i)\,p(a_i) = p(a_i U(x_i)) = p(L(x_i))$

ce qui démontre l'existence de la limite.

Reste à montrer que cette limite $M(x)$ est une fonction linéaire relativement bornée. Montrons d'abord que pour $x \in E_+$ et $y \in E_+$,

$M(x+y)=M(x)+M(y)$; or, une partition quelconque (x_i) de x et une partition quelconque (y_j) de y définissent une partition de $x+y=z$; d'après le lemme de décomposition, si (z_k) est une partition quelconque de z, il existe une partition (x'_i) de x plus fine que (x_i) et une partition (y'_j) de y plus fine que (y_j) telle que la partition de z formée des x'_i et des y'_j soit plus fine que (z_k) ; comme on peut prendre (x_i), (y_j) et (z_k) de sorte que $\sum_i p(L(x_i))$, $\sum_j p(L(y_j))$ et $\sum_k p(L(z_k))$ soient distants respectivement de $M(x)$, $M(y)$, $M(x+y)$ de moins de ε , $\sum_i p(L(x'_i))$ et $\sum_j p(L(y'_j))$ seront distants respectivement de $M(x)$ et $M(y)$ de moins de ε , et leur somme sera distante de $M(x+y)$ de moins de ε , ce qui prouve que $\| M(x+y)-M(x)-M(y) \| \leqslant 3\varepsilon$, et par suite $M(x+y)=M(x)+M(y)$. De la même manière, on prouve que $M(\lambda x)= \lambda M(x)$ pour $\lambda > 0$, et par suite que M définit une application linéaire de E dans V' , en posant pour $x \in E$, $M(x)=M(x^+)-M(x^-)$; cette application est relativement bornée, car on a $\| p(u)\| \leqslant c \|u\|$, donc $\| \sum_i p(L(x_i)) \| \leqslant \sum_i \|p(L(x_i))\| \leqslant c \sum_i \| L(x_i) \| \leqslant c. \|L\|(x)$, et en passant à la limite $\|M(x)\| \leqslant c. \|L\| (x)$ pour tout $x \in E_+$. Le théorème est donc complètement démontré.

Nous désignerons encore par $p(L)$ la fonction linéaire M définie par la formule (5) ; cette notation est justifiée par la proposition suivante :

<u>Proposition 5</u>. <u>Soient</u> E <u>un espace de Riesz</u>, V, V', V'' <u>trois espaces vectoriels de dimension finie</u>, p <u>une application lipschitzienne de</u> V <u>dans</u> V' , q <u>une application lipschitzienne de</u> V' <u>dans</u> V'' , $r=q \circ p$ <u>l'application composée de</u> q <u>et</u> p , <u>qui est une application lipschitzienne de</u> V <u>dans</u> V''. <u>Si</u> L <u>est une application linéaire relativement bornée de</u> E <u>dans</u> V , <u>et si on pose</u> $M=p(L)$ <u>et</u> $N=q(M)$, <u>on a</u> $N=r(L)$.

En effet, avec les notations du th.2, on déduit de la relation (6) que $\sum_{i,j} \| p(L(x_{ij}))-U(x_{ij})p(a_i) \| \leqslant c\eta$, d'où a fortiori $\sum_i \| \sum_j p(L(x_{ij}))-U(x_i)p(a_i) \| \leqslant c\eta$, c'est-à-dire

$$(7) \qquad \sum_i \| \sum_j p(L(x_{ij}))-p(L(x_i)) \| \leqslant c\eta$$

en passant à la limite suivant chacun des ordonnés filtrant $\mathcal{P}(x_i)$ il vient donc $\sum_i \| M(x_i)-p(L(x_i)) \| \leqslant c\eta$. Comme q est lipschitzienne, on déduit de là que $\sum_i \| q(M(x_i))-q(p(L(x_i))) \| \leqslant cc'\eta$, c' étant une constante convenable. Mais la partition (x_i) de x peut être prise aussi fine qu'on veut (cor. du th.1) ; en passant à la limite suivant $\mathcal{P}(x)$, on voit donc que $\| N(x)-r(L)(x) \| \leqslant cc'\eta$, et comme η est arbitraire, $N=r(L)$.

5. Fonctions continues de formes linéaires. Nous allons maintenant montrer que l'on peut supprimer l'hypothèse que p est lipschitzienne dans le th.2 sans modifier la conclusion ; de façon précise :

Théorème 3. Soient L une application linéaire relativement bornée d'un espace de Riesz E dans un espace vectoriel V de dimension finie, p une application continue et positivement homogène de V dans un espace vectoriel V' de dimension finie. Il existe une application linéaire relativement bornée M de E dans V' telle que, pour tout $x \in E_+$

$$(8) \qquad M(x) = \lim_{\mathcal{P}(x)} \sum_i p(L(x_i)) .$$

Montrons d'abord que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une application lipschitzienne q de V dans V' telle que $\| p(x)-q(x) \| \leqslant \varepsilon . \| x \|$ pour tout $x \in V$. En effet, soit S la sphère $\| x \| = 1$ dans V ; il existe une application f de la boule $\| x \| \leqslant 1$ dans V', différentiable et telle que, sur S, $\| p(x)-f(x) \| \leqslant \varepsilon$ (il suffit par exemple d'approcher chaque composante de p par un polynome, en vertu du th. de Weierstrass) ;

27

on a donc, pour $\|x\| = \|y\| = 1$, $\|f(x)-f(y)\| \leq a \|x-y\|$ où a est un nombre > 0 . Posons, pour tout $x \in V$, $q(x) = \|x\| f(\frac{x}{\|x\|})$; q est évidemment positivement homogène, et on a $\|p(x)-q(x)\| \leq \varepsilon \|x\|$ dans V ; enfin q est <u>lipschitzienne</u>, car on a $\|q(x)-q(y)\| \leq a \|x-y\|$ pour $\|x\| = \|y\|$; si au contraire $\|x\| < \|y\|$, on peut écrire

$$q(x)-q(y) = q(x)-q(\frac{\|x\|}{\|y\|} y) + (\|x\| - \|y\|)q(\frac{y}{\|y\|})$$

et en remarquant que $\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x-y\|$ et

$$\|x - \frac{\|x\|}{\|y\|} y\| = \|x - y + (\|x\|-\|y\|) \frac{y}{\|y\|}\| \leq \|x-y\| + \big|\|x\| - \|y\|\big| \leq 2 \|x-y\|$$

il vient $\|q(x)-q(y)\| \leq (2a+M)\|x-y\|$, où M est le maximum de $\|f\|$ sur S .

Cela posé, tout revient à montrer que la limite du second membre de (8) existe, la fin de la démonstration étant la même que dans le th.2 ; il faut donc prouver que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partition (x_i) de x telle que, pour toute partition (x_{ij}) de chacun des x_i , on ait $\|\sum_{i,j} p(L(x_{ij})) - \sum_i p(L(x_i))\| \leq \varepsilon$. Soit $\delta > 0$, et q une fonction lipschitzienne telle que $\|p(x)-q(x)\| \leq \delta \|x\|$; on a donc

$\|\sum_i p(L(x_i)) - \sum_i q(L(x_i))\| \leq \delta \sum_i \|L(x_i)\| \leq \delta \|L\|(x)$ pour toute partition de x , d'où

$$\|(\sum_{i,j} p(L(x_{ij})) - \sum_i p(L(x_i))) - (\sum_{i,j} q(L(x_{ij})) - \sum_i q(L(x_i))\| \leq 2\delta \|L\|(x)$$

or, d'après le th.2, on peut trouver (x_i) telle que, pour toute partition (x_{ij}) de chacun des x_i , on ait

$\|\sum_{i,j} q(L(x_{ij})) - \sum_i q(L(x_i))\| \leq \delta$; on en déduit que

$$\|\sum_{i,j} p(L(x_{ij})) - \sum_i p(L(x_i))\| \leq (2\|L\|(x)+1)\delta$$

ce qui achève la démonstratèon, puisque δ est arbitraire.

On désigne encore par p(L) la fonction linéaire M définie par (8) , et on a la proposition généralisant la prop.5 :

Proposition 6. Soient E un espace de Riesz, V, V', V'' trois espaces vectoriels de dimension finie, p une application continue et positivement homogène de V dans V' , q une application continue et positivement homogène de V' dans V'' , $r=q\circ p$ l'application composée de q et de p , qui est une application continue et positivement homogène de V dans V''. Si L est une application linéaire relativement bornée de E dans V , et si on pose $M=p(L)$ et $N=q(M)$, on a $N=r(L)$.

Tout d'abord, on a la relation analogue à (7) pour une partition assez fine (x_i) de x, et toute partition (x_{ij}) de chacund des x_i

(9) $$\sum_i \left\| \sum_j p(L(x_{ij}))-p(L(x_i)) \right\| \leqslant \eta$$

car on peut trouver une fonction lipschitzienne p_1 telle que $\| p(x)-p_1(x) \| \leqslant \delta \|x\|$, puis une partition (x_i) telle que

$$\sum_i \left\| \sum_j p_1(L(x_{ij}))-p_1(L(x_i)) \right\| \leqslant \delta$$

d'après (7) ; d'où

$$\sum_i \left\| \sum_j p(L(x_{ij}))-p(L(x_i)) \right\| \leqslant (2\|L\|(x)+1)\delta$$

et δ est arbitraire.

En passant à la limite dans (9) suivant chacun des ordonnés filtrants $\mathcal{P}(x_i)$, il vient $\sum_i \| M(x_i)-p(L(x_i)) \| \leqslant \eta$. Considérons maintenant une fonction lipschitzienne q_1 telle que $\| q(x)-q_1(x) \| \leqslant \varepsilon \|x\|$.
Il existe une constante c dépendant de ε telle que

$$\sum_i \| q_1(M(x_i))-q_1(p(L(x_i))) \| \leqslant c\eta$$

d'où

$$\sum_i \| q(M(x_i))-q(p(L(x_i))) \| \leqslant c\eta+\varepsilon\left(\sum_i \| M(x_i) \| + \sum_i \| p(L(x_i)) \| \right) \leqslant$$
$$\leqslant c\eta+\varepsilon(\|M\|(x)+ \|p(L)\|(x))$$

Or, ε et η étant donnés, on peut trouver une partition (x_i) aussi fine qu'on veut telle que l'inégalité précédente ait lieu ; passant à la limite suivant l'ordonné filtrant $\mathcal{P}(x)$, il vient

$$\| N(x)-r(L)(x) \| \leqslant c\eta+\varepsilon(\| M \|(x)+\| p(L)\| (x))$$

or on peut prendre ε, puis η de sorte que le second membre soit arbitrairement petit, ce qui prouve que $N=r(L)$.

Dans le cas où p et q sont deux fonctions continues positivement homogènes et <u>scalaires</u> définies sur V et telles que $p(x) \leqslant q(x)$ pour tout $x \in V$, on a aussi $p(L) \leqslant q(L)$ pour toute fonction linéaire L relativement bornée sur E, à valeurs dans V, comme il résulte de la définition de p(L) et q(L). De cette propriété et de la prop.6, on déduit que si p et q sont continues, positivement homogènes, à valeurs dans V' et telles que $\| p(x)\| \leqslant \| q(x)\|$ pour tout $x \in V$, on a aussi $\| p(L)\| \leqslant \| q(L)\|$ pour toute application linéaire relativement bornée L de E dans V.

<u>Exercices</u>. 1) Soit L une forme linéaire croissante sur un espace de Riesz E. On considère un élément $a > 0$ de E, et l'ensemble des formes linéaires croissantes M telles que : 1° $M(x) \leqslant L(x)$ pour tout $x \geqslant 0$; 2° $M(x)=L(x)$ pour tout x tel que $0 \leqslant x \leqslant a$; 3° $M(x)=0$ pour tout $x \geqslant 0$ étranger à a. Montrer que cet ensemble de formes linéaires croissante admet un plus grand élément L_a, donné par $L_a(x)=\inf L(y)$, où y parcourt l'ensemble de tous les éléments tels que $0 \leqslant y \leqslant x$, et que $x-y$ soit étranger à a (pour voir que L_a est linéaire, utiliser le lemme de décomposition). Montrer que pour tout $\lambda > 0$, on a $L_{\lambda a}=L_a$, et $L_{a+b}=L_a+L_b$ si a et b sont étrangers. Si E est un espace de Riesz cohérent (§ 1) et si b appartient à la demi-bande engendrée par a, montrer que $L_b \leqslant L_a$.

2) Soit V un espace vectoriel de dimension finie, C un cône convexe dans V, L une application linéaire relativement bornée d'un espace de Riesz E dans V, telle que, pour $x > 0$, $L(x) \in C$. Si p est une fonction convexe, positive et positivement homogène, définie dans C,

généraliser la prop.4 . Généraliser de même les th.2 et 3 . En particulier, montrer que, si L_1, L_2 sont des formes linéaires croissantes dans E , il existe une forme linéaire croissante M telle que, pour tout $x > 0$, $M(x) = \lim_{\mathfrak{P}(x)} \sum_i \sqrt{L_1(x_i)L_2(x_i)}$.

3) Dans le plan $\mathbb{R}^2$, soit $p(x,y)$ la fonction positivement homogène, égale à $\sqrt{x^2+y^2}$ si y/x (ou x/y) est irrationnel, à 0 dans le cas contraire. Soit E l'espace de Riesz formé des fonctions numériques continues dans $I = [0,1]$, et soient $L(x) = \int_0^1 x(t)dt$, $M(x) = \int_0^1 tx(t)dt$ deux formes linéaires croissantes sur E . Montrer que l'expression $\sum_i p(L(x_i), M(x_i))$ ne tend vers <u>aucune limite</u> suivant l'ordonné filtrant $\mathfrak{P}(x)$.

4) Soit E un espace de Riesz, Ω l'espace de Riesz des formes linéaires relativement bornées sur E , F un sous-espace de Riesz de Ω . Pour tout $x \in E$, l'application $x' \longrightarrow x'(x)$ de F dans $\mathbb{R}$ est une forme linéaire relativement bornée sur F , que nous désignerons par u_x , et l'application $x \longrightarrow u_x$ est une application linéaire croissante de E dans l'espace de Riesz Ω' des formes linéaires relativement bornées sur E . Pour que $x \longrightarrow u_x$ soit un isomorphisme de E dans Ω' , c'est-à-dire que $u_x \geqslant 0$ entraîne $x \geqslant 0$, et qu'on ait $u_{\sup(x,y)} = \sup(u_x, u_y)$, où la borne supérieure du second membre est prise <u>dans</u> Ω' , il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient remplies :

a) Pour tout $x > 0$ dans E , il existe un $x' > 0$ dans F , tel que $x'(x) > 0$.

b) Pour tout couple d'éléments étrangers y, z de E_+ , tout nombre $\varepsilon > 0$ et tout $x' \in F_+$, il existe deux éléments $y' \in F_+, z' \in F_+$ tels que $x' = y' + z'$ et $y'(y) + z'(z) \leqslant \varepsilon$.

(Pour montrer que la condition b) est nécessaire, utiliser la prop.2. Pour voir que, si elle est vérifiée, $u_x \geqslant 0$ entraîne $x \geqslant 0$, montrer qu'on a alors $x'(x^-) \leqslant \varepsilon$ pour tout $x' \in F_+$ et tout $\varepsilon > 0$; enfin, prouver que si la condition b) est vérifiée, et si v est une forme linéaire croissante sur F telle que $v(x') \geqslant x'(x)$ pour tout $x' \in F_+$, on a $v(x') \geqslant x'(x^+) - \varepsilon$ quel que soit $\varepsilon > 0$, pour tout $x' \in F_+$).

Si la condition b) est remplie, mais non la condition a), l'ensemble des $x \in E$ tels que $x'(x)=0$ pour <u>tout</u> $x' \in F$ est un sous-espace de Riesz H de E ; montrer (à l'aide de la condition b)) que si $x \in H$, on a $x^+ \in H$, et que si $y \in H$, $z \in H$ et $y \leqslant z$, tout x tel que $y \leqslant x \leqslant z$ appartient à H. Par passage au quotient l'application $x \longrightarrow u_x$ définit un <u>isomorphisme</u> de l'espace de Riesz quotient E/H dans l'espace de Riesz Ω'.

5) Avec les notations de l'exerc.4, montrer que si on prend $F = \Omega$, la condition b) est vérifiée (utiliser l'exerc.1). Si en outre la condition a) est remplie, E est un espace de Riesz archimédien.

§ 3. Topologies sur un espace de Riesz

1. <u>Définition d'une topologie par des formes linéaires croissantes</u>. Soit E un espace de Riesz, et (U_ι) une famille de formes linéaires croissantes sur E. Pour chaque ι, il est immédiat que la fonction $U_\iota(|x|)$ est une <u>semi-norme</u> (Livre VI) sur l'espace vectoriel E ; la famille de ces semi-normes définit donc sur E une topologie d'espace vectoriel <u>localement convexe</u>, que nous allons étudier.

En général, cette topologie n'est pas séparée ; l'espace séparé associé est l'espace quotient E/H, où H est le sous-espace vectoriel de E formé des x tels que $U_\iota(|x|)=0$ pour tout ι. Il résulte de la définition de H que la relation $x \in H$ équivaut à $|x| \in H$; en outre, si $x \in H$, tout $y \in E$ tel que $|y| \leqslant |x|$ appartient à H ; en particulier, on a $x^+ \in H$ et $x^- \in H$; on en conclut que, si $y \in H$ et $z \in H$ on a $\sup(y,z) \in H$ et $\inf(y,z) \in H$. Les fonctions U_ι sont compatibles avec la relation d'équivalence $x-y \in H$, car si $U_\iota(|x|)=0$ pour tout ι , on a aussi $U_\iota(x^+)=U_\iota(x^-)=0$ pour tout ι d'après ce qui précède, d'où $U_\iota(x)=0$ pour tout ι ; nous désignerons par $\dot{U}_\iota$ la fonction obtenue par passage au quotient à partir de U_ι ; c'est une forme linéaire sur E/H .

Nous allons maintenant définir sur E/H une structure d'espace vectoriel ordonné ; il suffit pour cela de définir la relation $\dot{x} \geqslant 0$ pour une classe $\dot{x}$ (mod. H) : nous poserons $\dot{x} \geqslant 0$ s'il existe un $x \in \dot{x}$ tel que $x \geqslant 0$. Avec cette définition, si $\dot{x} \geqslant 0$ et $\dot{y} \geqslant 0$, il existe $x \in \dot{x}$ et $y \in \dot{y}$ tels que $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$; on en conclut $x+y \geqslant 0$, et comme $x+y \in \dot{x}+\dot{y}$, $\dot{x}+\dot{y} \geqslant 0$; de même, si $\dot{x} \geqslant 0$ et $\lambda \geqslant 0$, la classe $\lambda \dot{x}$ contient $\lambda x \geqslant 0$, donc on a $\lambda \dot{x} \geqslant 0$; pour voir qu'on a ainsi défini sur E/H une structure d'espace vectoriel ordonné, il suffit d'établir que si $\dot{x} \geqslant 0$ et $\dot{x} \leqslant 0$, on a $\dot{x} = 0$. Or, il existe alors $y \in \dot{x}$ et $z \in \dot{x}$ tels que $y \geqslant 0$, $z \leqslant 0$; on en conclut que pour tout , $U_\iota(y) \geqslant 0$ et $U(z) \leqslant 0$; mais, comme $U_\iota(y)=U_\iota(z)$, on a $U_\iota(y)=0$, et comme $y=|y|$, on en conclut que $\dot{x} \doteq 0$.

Montrons maintenant que l'espace ordonné E/H ainsi défini est un espace de Riesz, c'est-à-dire que deux éléments quelconques $\dot{x},\dot{y}$ ONT une borne supérieure ; or, si $x \in \dot{x}$, $y \in \dot{y}$, et $z=\sup(x,y)$, on a $\dot{z} \geqslant \dot{x}$ et $\dot{z} \geqslant \dot{y}$; mais inversement, si $\dot{u} \geqslant \dot{x}$ et $\dot{u} \geqslant \dot{y}$, il existe $x \in \dot{x}$, $y \in \dot{y}$, $v \in \dot{u}$ et $w \in \dot{u}$ tels que $x \leqslant v$, $y \leqslant w$; si on pose $u=\sup(v,w)$, u appartient encore à la classe $\dot{u}$, et on a $u \geqslant z$, donc $\dot{u} \geqslant \dot{z}$, ce qui montre que $\dot{z}$ est borne supérieure de $\dot{x}$ et $\dot{y}$.

Enfin, il est immédiat que la topologie de l'espace quotient E/H est définie par les semi-normes $\dot{U}_\iota(|\dot{x}|)$.

Dans l'espace topologique E , la fonction $|x|$ est <u>uniformément continue</u>, car $||x|-|y|| \leqslant |x-y|$ et par suite, pour tout ι , $|U_\iota(|x|)-U_\iota(|y|)| \leqslant U_\iota(|x-y|)$. On en conclut que les fonctions x^+ et x^- sont uniformément continues dans E , les fonctions $\sup(x,y)$ $\inf(x,y)$ uniformément continues dans $E \times E$. Les fonctions U_ι sont uniformément continues dans E , en vertu de l'inégalité $|U_\iota(x)| \leqslant U_\iota(|x|)$

L'ensemble E_+ des éléments $\geqslant 0$ de E est <u>fermé</u> dans l'espace topologique E lorsque ce dernier est séparé : en effet, E_+ est l'ensemble des $x \in E$ tels que $x^+=x$, et les fonctions x et x^+ sont continues dans E (<u>Top.gén.</u>, chap.I, § 8, cor. de la prop.6).

2. <u>Complétion d'un espace de Riesz</u>. Nous supposerons désormais que l'espace de Riesz E , muni de la topologie définie par les semi-normes $U_\iota(|x|)$ est <u>séparé</u>, c'est-à-dire que, pour tout $x \neq 0$, il existe un indice ι tel que $U_\iota(|x|) \neq 0$.

Considérons alors le <u>complété</u> $\hat{E}$ de E ; nous allons montrer qu'on peut définir sur $\hat{E}$ une structure d'<u>espace de Riesz</u> qui <u>prolonge</u> celle de E . Remarquons tout d'abord que les fonctions uniformément continues $|x|$, x^+ , x^- se prolongent par continuité à $\hat{E}$; nous désignerons encore leurs prolongements respectifs par les mêmes notations. De même les fonctions U se prolongent par continuité à $\hat{E}$; les fonctions $U_\iota(|x|)$ sont encore des semi-normes sur $\hat{E}$, et définissent la structure uniforme de cet espace.

Cela étant, l'ensemble des éléments $\geqslant 0$ de $\hat{E}$ doit contenir E_+ et être <u>fermé</u> dans $\hat{E}$, autrement dit, il doit contenir <u>l'adhérence</u> $\overline{E}_+$ de E_+ dans $\hat{E}$. Nous allons voir qu'en prenant $\overline{E}_+$ comme ensemble des éléments $\geqslant 0$ de $\hat{E}$, on définit bien sur $\hat{E}$ une structure d'espace de Riesz.

Comme l'application $(x,y) \longrightarrow x+y$ est continue dans $\hat{E}\ \hat{E}$, et qu'elle applique $E_+ \times E_+$ dans E_+ , elle applique $\overline{E}_+ \times \overline{E}_+$ dans $\overline{E}_+$; pour voir qu'on définit bien sur $\hat{E}$ une structure d'espace vectoriel ordonné, il suffit de prouver que $\overline{E}_+ \cap (-\overline{E}_+) = \{0\}$. Or, l'identité $x = x^+ - x^-$ se prolonge par continuité à $\hat{E}$; de même, on a, par prolongement, $x^+ = 0$ dans $-\overline{E}_+$ (car $-\overline{E}_+$ est l'adhérence dans $\hat{E}$ de $-E_+$, en vertu du fait que $x \longrightarrow -x$ est un homéomorphisme de $\hat{E}$ sur lui-même), et $x^- = 0$ dans $\overline{E}_+$, d'où $x=0$ dans $\overline{E}_+ \cap (-\overline{E}_+)$.

Reste à montrer que l'espace ordonné $\hat{E}$ ainsi défini est <u>réticulé</u> ; il suffira de prouver que, pour tout $x \in \hat{E}$, les éléments x et 0 ont dans $\hat{E}$ une borne supérieure égale à x^+ . Comme on a $x^+ - x \geqslant 0$, c'est-à-dire $x^+ - x \in E_+$ pour tout x E , on a aussi, par prolongement, $x^+ - x \in \overline{E}_+$ pour tout $x \in \hat{E}$, c'est-à-dire $x^+ \geqslant x$ pour tout $x \in \hat{E}$; de même, on a $x^+ \geqslant 0$ pour tout $x \in \hat{E}$. Montrons inversement que si $u \in \hat{E}$ est tel que $u \geqslant x$ et $u \geqslant 0$, on a $u \geqslant x^+$.

Comme x^+ est uniformément continue dans $\hat{E}$, pour tout voisinage V de 0 , il existe un voisinage W de 0 contenu dans V , tel que, pour $x' - x \in 3W$, on ait $x'^+ - x^+ \in V$. Prenons $x' \in E$ tel que $x' - x \in W$; alors le voisinage $u - x' + 2W$ de $u - x'$ contient le voisinage $u - x + W$ de $u - x$, et par suite contient un point $u' - x' \in E_+$. Enfin, le voisinage $u + W$ de u contient un point $u'' \in E_+$; dans E , on a $u'' \geqslant 0$, $u' \geqslant x'$, donc $\sup(u', u'') \geqslant x'^+$, ou encore $u' + (u'' - u')^+ - x'^+ \in E_+$. Or, on a $u - x^+ - (u' + (u'' - u')^+ - x'^+) = (u - u') - (u'' - u')^+ - (x'^+ - x^+)$; les hypothèses entraînent $u - u' \in 2W$, $u'' - u' \in 3W$, donc $(u'' - u')^+ \in V$; par suite $u - x^+ + 4V$ contient un point de E_+ , et comme V est arbitraire, $u - x^+ \in \overline{E}_+$, c'est-à-dire $u \geqslant x^+$.

Les espaces de Riesz topologisés comme il vient d'être dit possèdent des propriétés qui généralisent celles de la droite numérique $\mathbb{R}$ (cff. <u>Top. gén.</u>, chap. IV, § 5.)

<u>Proposition 1</u> . <u>Soient</u> f <u>et</u> g <u>deux fonctions définies dans un ensemble</u> A <u>filtré par un filtre</u> $\mathfrak{F}$, <u>prenant leurs valeurs dans un espace de Riesz séparé</u> E . <u>Si, pour tout</u> x A , <u>on a</u> $f(x) \leqslant g(x)$, <u>et si</u> $\lim_{\mathfrak{F}} f$ <u>et</u> $\lim_{\mathfrak{F}} g$ <u>existent, on a</u> $\lim_{\mathfrak{F}} f \leqslant \lim_{\mathfrak{F}} g$.

En effet, en considérant la différence g-f, tout revient à prouver que si $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in A$, $\lim_{\mathfrak{F}} f \geqslant 0$; or, pour tout ensemble $M \in \mathfrak{F}$, $f(M) \subset E_+$; comme $\lim_{\mathfrak{F}} f$ est adhérent à tous les f(M) , et que E_+ est fermé dans E , on a $\lim_{\mathfrak{F}} f \in E_+$.

<u>Proposition 2</u>. <u>Pour qu'un ensemble filtrant à droite</u> A <u>dans un espace de Riesz séparé et complet</u> E <u>admette une borne supérieure</u> (qui est alors aussi la <u>limite</u> de x suivant l'ensemble filtrant A) , <u>il faut et il suffit que, pour tout indice</u> ι , $U_\iota(x)$ <u>soit majorée dans</u> A ; <u>pour toute fonction numérique</u> L <u>continue et croissante dans</u> E (en particulier pour $L=U_\iota$) , <u>on a</u>

$$(1) \qquad \sup_{x \in A} L(x) = \lim_{x \in A} L(x) = L(\lim_{x \in A} x) = L(\sup A) .$$

La condition est évidemment nécessaire ; montrons qu'elle est suffisante. Par hypothèse, U_ι est croissante et majorée dans A ; elle tend donc vers une limite a_ι suivant l'ensemble filtrant A (<u>Top.gén.</u>, chap.IV, § 5,th.2) ; pour tout $\varepsilon > 0$, il existe donc $x_0 \in A$ tel que, pour tout $x \in A$ tel que $x \geqslant x_0$, $|U_\iota(x)-a| \leqslant \varepsilon$. Si $y \geqslant x_0$ et $z \geqslant x_0$ appartiennent à A , il existe par hypothèse un x A tel que x y et $x \geqslant z$, donc $U_\iota(|x-y|)=U_\iota(x-y) \leqslant 2\varepsilon$, $U_\iota(|x-z|)=U_\iota(x-z) \leqslant 2\varepsilon$, et finalement U (y-z) $\leqslant 4\varepsilon$. Cela prouve que le filtre des sections $\mathfrak{F}$ de A est une base de filtre de Cauchy dans E , et par suite converge dans E vers un point u ; comme $a_\iota = \lim_{\mathfrak{F}} U_\iota(x)$ et que U_ι est canti-nue dans E , on a $U_\iota(u)=a_\iota$. Pour tout $x \in A$, l'ensemble des $y \in A$

qui sont $\geqslant x$ appartient à $\mathfrak{F}$, donc (prop.1) $u = \lim_{y \in A} y \geqslant x$, u est un majorant de A ; d'autre part, si v est un majorant de A , on a $x \leqslant v$ pour tout $x \in A$, donc $u = \lim_{x \in A} x \leqslant v$, ce qui prouve que u est la borne supérieure de A .

Corollaire. Un espace de Riesz complet E est cohérent.

En effet, soit A un ensemble majoré dans E , B l'ensemble des bornes supérieures des parties finies de A ; B est un ensemble filtrant à droite , et majoré (par tout majorant de A) ; la prop.2 prouve donc que B admet une borne supérieure, qui est évidemment aussi borne supérieure de A .

3. Espaces de Riesz normés. Considérons en particulier le cas où la topologie d'un espace de Riesz est définie par un nombre fini de formes linéaires croissantes U_i , et est séparée. Cette topologie est alors normable (Livre VI, chap.III), et $\|x\| = \sup_i U_i(|x|)$ est une norme compatible avec cette topologie.

Les éléments du complété $\hat{E}$ de E peuvent alors s'obtenir de façon particulièrement simple :

Proposition 3. Soit I l'ensemble des éléments de $\hat{E}$ qui sont limites de suites croissantes d'éléments de E ; tout élément de $\hat{E}$ est limite d'une suite décroissante d'éléments de I .

En effet, soit x un élément quelconque de $\hat{E}$; comme E est normé, x est limite d'une suite de Cauchy (x_n) d'éléments de E ; on peut donc définir par récurrence une suite (n_k) d'indices, telle que $\| x_{n_{k+1}} - x_{n_k} \| \leqslant 2^{-k}$; autrement dit, en remplaçant au besoin la suite de Cauchy (x_n) par une suite de Cauchy qui en est extraite, on peut supposer que la série de terme général $x_n - x_{n-1} = u_n$ (pour $n \geqslant 2$, et $u_1 = x_1$) est absolument convergente. On en conclut que les séries

37

(u_n^+) et (u_n^-) sont absolument convergentes ; soit $y = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^+$, $z = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^-$; on a donc $x=y-z$. Or, si on pose $y_n = \sum_{p=1}^{n} u_p^+$, $z_n = \sum_{p=1}^{n} u_p^-$, y est limite de la suite croissante (y_n) d'éléments de E, donc appartient à I ; de même, $y-z_m$ est limite de la suite croissante (y_n-z_m) d'éléments de E, donc appartient aussi à I ; enfin, $x=y-z$ est limite de la suite décroissante $(y-z_n)$ d'élément de I.

4. Topologies sur l'espace des formes linéaires croissantes. Soit E un espace de Riesz, Ω l'ensemble des formes linéaires relativement bornées (§ 2, n°2) sur E ; nous avons vu que Ω est un espace de Riesz. En outre, pour tout $x \in E_+$, l'application $X \to X(x)$ est une forme linéaire croissante sur Ω ; désignons-la par U_x ; d'après ce qui précède, toute famille (x_ι) d'éléments $\geqslant 0$ de E définit sur Ω une topologie, par la famille de semi-normes $U_{x_\iota}(|X|) = |X|(x_\iota)$.

Nous considérerons dans ce qui suit la topologie définie par la famille de toutes les semi-normes $U_x(|X|)$, x parcourant l'ensemble E_+. Cette topologie est séparée, car pour tout $X \neq 0$, il existe un $x \in E_+$ tel que $X(x) \neq 0$; a fortiori, on a $|X|(x) \neq 0$.

Si V_x désigne l'ensemble des $X \in \Omega$ telles que $|X|(x) \leqslant 1$, les V_x forment un système fondamental de voisinages de 0 dans Ω lorsque x parcourt E_+. En effet, tout voisinage de 0 contient un ensemble W formé des X tels que $|X|(x_i) \leqslant 1$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$, les x_i étant n éléments $\neq 0$ de E_+ ; si on pose $x = \sup x_i$, on aura évidemment $V_x \subset W$.

En outre, Ω, muni de cette topologie, est complet. En effet, soit $\mathfrak{F}$ un filtre de Cauchy sur Ω ; pour tout $x \in E_+$, il existe un ensemble $A \in \mathfrak{F}$ tel que, quels que soient $X \in A$ et $Y \in A$, on ait $|X-Y|(x) \leqslant \varepsilon$, et a fortiori $|X(x)-Y(x)| \leqslant \varepsilon$. On en conclut que les fonctions X convergent simplement dans E suivant $\mathfrak{F}$, vers une limite que nous noterons X_o ; il est immédiat par prolongement, que X_o est une <u>forme linéaire</u> sur E . Nous allons montrer que X_o appartient à Ω (c'est-à-dire est relativement bornée), et est limite du filtre $\mathfrak{F}$ dans Ω . En effet, pour toute partition (x_i) de $x > 0$, évaluons la somme $\sum_i |X_o(x_i)-X(x_i)|$ pour un $X \in A$ quelconque ; cette somme est limite de $\sum_i |Y(x_i)-X(x_i)|$ lorsque Y tend simplement vers X_o (suivant le filtre $\mathfrak{F}$) ; on a par suite $\sum_i |X_o(x_i)-X(x_i)| \leqslant \sup_{Y \in A} \sum_i |Y(x_i)-X(x_i)|$; mais on a par définition de $|X|$ dans Ω , $\sum_i |Y(x_i)-X(x_i)| \leqslant |Y-X|(x)$, donc $\sum_i |X_o(x_i)-X(x_i)| \leqslant |Y-X|(x) \leqslant \varepsilon$. Cela prouve en premier lieu que X_o-X est relativement bornée, donc aussi X_o ; en outre, par définition de $|X|$, on a $|X_o-X|(x) \leqslant \varepsilon$; ce qui prouve que X_o est limite du filtre $\mathfrak{F}$ dans Ω .

Utilisant le corollaire de la prop.2, on retrouve le fait que Ω est un espace de Riesz <u>cohérent</u> (§ 2,prop.1).

Soit maintenant V un espace vectoriel de dimension finie n sur le corps $\mathbb{R}$, et soit Ω_V l'espace vectoriel des applications linéaires relativement bornées de E dans V ; on a vu (§ 2,n°3) que Ω_V est isomorphe au <u>produit</u> de n espaces identiques à Ω . Considérons sur Ω_V la <u>topologie produit</u> des topologies des n espaces Ω facteurs de Ω_V ; on voit immédiatement que cette topologie est indépendante de la base choisie dans V . D'ailleurs, si $\|x\|$ est une norme dans V , la topologie de Ω_V est définie par la famille des semi-normes $\|X\|(x)$, où x parcourt E_+ ; on le voit aussitôt en remarquant que dans V la norme $\|x\|$ est équivalente à la norme $\sup_i |x_i|$, x_i désignant les composantes de x sur une base quelconque de V . Muni de la topologie ainsi définie, l'espace vectoriel Ω_V est évidemment <u>séparé</u> et <u>complet</u> comme l'espace Ω.

Proposition 4. Soient V et V' deux espaces vectoriels de dimension finie, p une application positivement homogène de V dans V'. Si p est lipschitzienne, l'application $X \to p(X)$ de Ω_V dans $\Omega_{V'}$ est uniformément continue ; si p est continue dans V, l'application $X \to p(X)$ est continue dans Ω_V.

En effet, supposons d'abord p lipschitzienne ; il existe donc $c \geqslant 0$ tel que $\| p(x)-p(y)\| \leqslant c\,\|x-y\|$; on en conclut (§ 2, n°5) que $\| p(X)-p(Y)\| \leqslant c\,\|X-Y\|$ dans $\Omega_V \times \Omega_V$, c'est-à-dire, pour tout $x \in E_+$, $\| p(X)-p(Y)\|(x) \leqslant c.\|X-Y\|(x)$, ce qui établit la continuité uniforme de $X \to p(X)$. Si maintenant on suppose seulement p positivement homogène et continue, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une application q de V dans V', positivement homogène et lipschitzienne, telle que $\| p(x)-q(x)\| \leqslant \varepsilon \|x\|$; on en déduit $\| p(X)-q(X)\| \leqslant \varepsilon \|X\|$, d'où $\| p(X)-p(Y)\| \leqslant \| q(X)-q(Y)\| + \varepsilon(\|X\| + \|Y\|) \leqslant c.\|X-Y\| + \varepsilon(\|X\| + \|Y\|)$, et par suite, pour tout $x \in E_+$,

$$\begin{aligned}\| p(X)-p(Y)\|(x) &\leqslant c.\|X-Y\|(x)+\varepsilon(\|X\|(x)+\|Y\|(x)) \\ &\leqslant (c+\varepsilon).\|X-Y\|(x)+2\varepsilon\|X\|(x)\end{aligned}$$

Or, si $x \in E_+$ et $X \in \Omega_V$ sont donnés, ainsi que $\delta > 0$, on peut commencer par prendre ε tel que $2\varepsilon\|X\|(x) \leqslant \delta/2$; on détermine ensuite q, et par suite c, et il suffit alors de prendre Y tel que $(c+\varepsilon).\|Y-X\|(x) \leqslant \delta/2$, pour que le second membre de l'inégalité précédente soit $\leqslant \delta$, ce qui prouve la continuité de p au point $X \in \Omega_V$.

Exercices. 1) Généraliser la prop. 1 au cas où on suppose seulement que, pour tout ensemble M du filtre $\mathfrak{F}$, il existe $x \in M$ tel que $f(x) \leqslant g(x)$.

2) Soit E un espace de Riesz séparé et complet pour la topologie définie sur lui par une famille (U_ι) de formes linéaires croissantes

Si A est une partie non vide de E , la bande A' (§ 1) formée des éléments étrangers à tous les éléments de A est fermée dans E ; la bande A" engendrée par A est fermée dans E , et E est isomorphe au produit des deux espaces de Riesz (topologiques) A' et A" (utiliser le th. 1 du 1).

3) Soit E un espaces de Riesz séparé et complet pour la topologie définie sur lui par une famille (U_ι) de formes linéaires croissantes. Si un filtre $\mathfrak{F}$ sur E a une limite a au sens défini dans l'exerc.3 du § 1 , il a la même limite a pour la topologie définie par les U_ι (utiliser la prop.2).

Si une famille (x_α) de points de E est sommable au sens de l'exerc.4 du § 1 , elle est donc sommable au sens de la topologie de E . Montrer que la réciproque est vraie si les x_α sont tous $\geqslant 0$.

4) Soit E l'espace de Riesz formé par les fonctions règlées dans l'intervalle compact $[0,1]$, U la forme linéaire croissante $U(x)=\int_0^1 x(t)dt$, $\hat{E}$ le complété de E pour la topologie définie sur E par la seule forme linéaire U . Pour tout entier $n>0$, et tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant 2^n-1$, on pose $x_{kn}(t)=0$ pour $x<k/2^n$ et $x>(k+1)/2^n$, et $x_{k,n}(t)=1$ pour les autres valeurs de t . Montrer que la base de filtre sur $\hat{E}$ engendrée par les complémentaires des parties finies de l'ensemble des $x_{k,n}$ est convergente vers 0 pour la topologie de $\hat{E}$, mais n'est pas convergente au sens de l'exerc.3 du §1 .

5) Soit E un espace de Riesz cohérent, dans lequel il existe un élément $u>0$ tel que, pour tout $x>0$, $\inf(x,u)>0$. Pour tout $\varepsilon>0$, on désigne par V_ε l'ensemble des x E tels que $|x| \leqslant \varepsilon u$. Montrer que les V_ε forment un système fondamental de voisinages de 0 dans une topologie séparée $\mathcal{C}$ compatible avec la structure d'espace

vectoriel de E . Montrer que E est complet pour cette topologie, en remarquant que si $\mathfrak{F}$ est un filtre de Cauchy pour cette topologie $\mathfrak{F}$ a une limite **a** au sens de l'exerc.3 du § 1, et que $\mathfrak{F}$ converge vers **a** au sens de la topologie $\mathcal{E}$.

Donner un exemple d'espace de Riesz cohérent E , et d'un filtre $\mathfrak{F}$ sur E , qui a une limite au sens de l'exerc.3 du § 1, mais non au sens de la topologie $\mathcal{E}$ (prendre pour E l'espace de toutes les fonctions bornées dans l'intervalle $[0,1]$).

§ 4. Anneaux de Riesz.

1. Définition des anneaux de Riesz. Définition 1. Un anneau de Riesz A est un ensemble muni, d'une part, d'une structure d'anneau à opérateurs commutatif, par rapport au corps $\mathbb{R}$, d'autre part d'une structure d'ordre, telles que :

1° la structure d'espace vectoriel (par rapport à $\mathbb{R}$) de A , et sa structure d'ordre, définissent sur A une structure d'espace de Riesz ;

2° la relation $x \geqslant 0$ entraîne

(1) $$\sup(xy,xz) = x.\sup(y,z) .$$

En remplaçant y et z par -y et -z dans (1), on en déduit

(2) $$\inf(xy,xz) = x.\inf(y,z)$$

Si on a $y \leqslant z$ et $x \geqslant 0$, on a $\sup(y,z)=z$, donc, d'après (1) , $\sup(xy,xz)=xz$, autrement dit, les relations $x \geqslant 0$ et $y \leqslant z$ entraînent $xy \leqslant xz$. En particulier, si $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$, on a $xy \geqslant 0$; on en déduit que si $x \geqslant 0, y \leqslant 0$, on a $xy=-(x(-y)) \leqslant 0$, et si $x \leqslant 0, y \leqslant 0$, $xy=(-x)(-y) \geqslant 0$ (règle des signes) ; plus particulièrement, si $x \geqslant 0$ ou $x \leqslant 0$, on a $x^2 \geqslant 0$.

Quels que soient x,y dans E , on a

(3) $$|xy| = |x|.|y|$$

42

En effet, supposons d'abord $x \geqslant 0$, d'où $|x| = x$; la relation (3) est alors une conséquence de (1), où on remplace z par $-y$. Si maintenant x est quelconque, on a d'une part

$$|xy| = |x^+y - x^-y| \leqslant |x^+y| + |x^-y| = (x^+ + x^-)|y| = |x| \cdot |y|$$

et d'autre part

$$|xy| = |x^+y - x^-y| \geqslant \big| |x^+y| - |x^-y| \big| = \big|(x^+ - x^-) \cdot |y|\big| = |x^+ - x^-| \cdot |y| = |x| \cdot |y|$$

et la comparaison de ces deux inégalités donne bien (3).

<u>Proposition 1</u>. <u>Si</u> x <u>et</u> y <u>sont deux éléments étrangers dans</u> A, <u>on a</u> $xy=0$.

D'après (3), il suffit de le démontrer pour $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$. On a $(x-y)^+ = \sup(x-y,0) = \sup(x,y)-y = (x+y)-y = x$, et de même $\sup(y-x,0)=y$ donc $|x-y| = (x-y)^+ + (x-y)^- = x+y$; on a d'autre part $|x+y| = x+y$, donc d'après (3), $|x^2-y^2| = |x+y| \cdot |x-y| = (x+y)^2 = x^2 + 2\,xy + y^2$; mais $|x^2-y^2| \leqslant x^2+y^2$, donc $2\,xy \leqslant 0$, ce qui entraîne $2\,xy=0$ et par suite $xy = 0$.

<u>Corollaire</u>. <u>Pour tout</u> $x \in A$, <u>on a</u> $x^2 \geqslant 0$.

En effet, x^+ et x^- sont étrangers, donc $x^+x^-=0$, et par suite $x^2 = (x^+-x^-)^2 = (x^+)^2 + (x^-)^2 \geqslant 0$.

<u>Exemples d'anneaux de Riesz</u>. 1) Si A est un espace de Riesz formé de fonctions numériques définies sur un ensemble E (la relation $x \leqslant y$ signifiant $x(t) \leqslant y(t)$ pour tout $t \in E$), et si le produit de deux fonctions de A appartient encore à A, A est un anneau de Riesz, la relation (1) étant évidemment vérifiée. En particulier, tout clan de fonctions est un anneau de Riesz ; il en est de même des exemples 2,3 et 4 du § 1, n° 1.

2) Si (A_ν) est une famille quelconque d'anneaux de Riesz, l'anneau produit $\prod_\nu A_\nu$, muni de la structure d'ordre produit de celles des A_ν, est encore un anneau de Riesz.

3) Si E est un espace de Riesz quelconque, on définit sur E une structure d'anneau de Riesz en définissant la multiplication dans E par la relation $xy=0$ pour tout x et tout y .

2. <u>Formes linéaires croissantes sur un anneau de Riesz</u>. Soit A un anneau de Riesz ; nous allons nous donner, une fois pour toutes, une forme linéaire croissante U définie sur A , et considérer, pour chaque $y \in A$, la forme linéaire $x \to U(yx)$, que nous désignerons par U_y ; pour $y \geqslant 0$, U_y est une forme linéaire <u>croissante</u> ; pour y quelconque, $U_y = U_{y+} - U_{y-}$, donc U_y est une forme linéaire <u>relativement bornée</u> sur A .

Quels que soient $x \in A$, $y \in A$, on a l'inégalité de Schwarz

$$|U(xy)| \leqslant \sqrt{U(x^2)U(y^2)} \tag{4}$$

En effet, quels que soient λ et μ réels, on a $(\lambda x+\mu y)^2 \geqslant 0$, donc $U((\lambda x+\mu y)^2) \geqslant 0$, ce qui s'écrit $\lambda^2 U(x^2)+2\lambda\mu U(xy)+\mu^2 U(y^2) \geqslant 0$; l'inégalité (4) exprime que le discriminant de cette forme quadratique en λ et μ est négatif.

On en déduit l'<u>inégalité de Minkowski</u>

$$\sqrt{U((x+y)^2)} \leqslant \sqrt{U(x^2)}+\sqrt{U(y^2)} \tag{4 bis}$$

car cette inégalité revient à $2U(xy) \leqslant 2\sqrt{U(x^2)U(y^2)}$, conséquence de (4).

Considérons sur A la topologie définie par les semi-normes $U_y(|x|)$, où y parcourt A_+ ; en général, cette topologie n'est pas séparée ; l'espace séparé associé à A est l'espace quotient $A/\mathcal{N}$, où $\mathcal{N}$ est l'ensemble des $x \in A$ tels que $U_y(|x|)=0$ pour tout $y \in A_+$ (§3, n°1); pour tout $x \in \mathcal{N}$, on a donc en particulier $U(|x|^2)=U(x^2)=0$; réciproquement, cette relation entraîne $U(|x|y)=0$ pour tout $y \in A$ d'après l'inégalité de Schwarz , et peut donc servir de définition à $\mathcal{N}$.

Il est immédiat que $\mathcal{N}$ est un <u>idéal</u> de l'anneau A ; on sait par ailleurs (§3) qu'on définit sur $A/\mathcal{N}$ une structure d'espace de Riesz ;

montrons que cette structure et celle d'anneau quotient définissent sur $A/\mathcal{N}$ une structure d'<u>anneau de Riesz</u>. Il suffit de vérifier que la relation (1) a lieu identiquement dans $A/\mathcal{N}$; or, si $\bar{x} \geqslant 0$ dans $A/\mathcal{N}$, et si $\bar{y}$ et $\bar{z}$ sont deux éléments quelconques de $A/\mathcal{N}$, il existe $x \geqslant 0$ dans la classe $\bar{x}$; désignant par y(resp. z) un élément quelconque de $\bar{y}$ (resp. $\bar{z}$), on a $\sup(xy,xz)=x.\sup(y,z)$; mais pour deux éléments quelconques u,v de A, on a $\overline{uv}=\bar{u}.\bar{v}$ et $\overline{\sup(u,v)}=\sup(\bar{u},\bar{v})$, donc on a bien $\sup(\bar{x}.\bar{y},\bar{x}.\bar{z})=\bar{x}.\sup(\bar{y},\bar{z})$.

On sait que les fonctions U_y $(y \in A)$ sont compatibles avec la relation $x-y\equiv 0$ $(\mathcal{N})$ (§ 3) ; soit $\dot{U}_y$ la fonction obtenue par passage au quotient à partir de U_y ; si $y \equiv z$ $(\mathcal{N})$, on a $\dot{U}_y=\dot{U}_z$, car on a déjà $U_y=U_z$, comme le montre la relation $U((y-z)^2)=0$, jointe à l'inégalité de Schwarz. On désignera par $U_{\bar{y}}$, pour un élément quelconque $\bar{y} \in A/\mathcal{N}$, la valeur commune de toutes les formes linéaires $\dot{U}_y$ sur $A/\mathcal{N}$, lorsque y parcourt $\bar{y}$. On a évidemment les relations $U_{\overline{y+z}} = U_{\bar{y}}+U_{\bar{z}}$, $U_{\lambda\bar{y}} = \lambda U_{\bar{y}}$, $U_{\overline{yz}}(\bar{x}) = U_{\bar{y}}(\overline{zx})$; la relation $\bar{y} \geqslant 0$ dans $A/\mathcal{N}$ entraîne que $U_{\bar{y}}$ est <u>croissante</u>, c'est-à-dire $U_{\bar{y}}(\bar{x})$ 0 pour tout $\bar{x}$ 0 ; en outre, si $\bar{y} \geqslant 0$ est tel que $U_{\bar{y}}(\bar{x})=0$ identiquement, on a $\bar{y}=0$, car cette relation signifie que pour tout $y \in \bar{y}$, et tout $x \in A_+$, on a $U(yx)=0$, et en particulier $U(y^2)=0$, ce qui équivaut à $y \in \mathcal{N}$ ou à $\bar{y}=0$.

Réciproquement, si $U_{\bar{y}}$ est croissante, on a $\bar{y} \geqslant 0$; en effet, étant donné un $y \in \bar{y}$, on a par hypothèse $U(yx) \geqslant 0$ pour tout $x \in A_+$; en particulier $U(yy^-) \geqslant 0$, ce qui donne (prop.1) $U(-(y^-)^2) \geqslant 0$, c'est-à-dire $U((y^-)^2)=0$; cela signifie que $y^- \in \mathcal{N}$, donc $y \equiv y^+$ $(\mathcal{N})$ autrement dit $\bar{y} \geqslant 0$.

3. Complétion d'un anneau de Riesz. Nous supposerons désormais que l'idéal $\mathfrak{N}$ est réduit à 0 , autrement dit, que la topologie définie sur A par les U_y ($y \geqslant 0$) est séparée ; cela équivaut au fait que la relation $U(y^2)=0$ entraîne $y=0$; a fortiori, $y^2=0$ entraîne $y=0$. En outre, pour tout y fixe dans A , nous supposerons qu'il existe un nombre $a_y > 0$ tel que, pour tout $x \in A$

(5) $$|U(xy)| \leqslant a_y . U(|x|)$$

Pour tout y fixe dans A , l'application linéaire $x \longrightarrow xy$ est continue dans A , au sens de la topologie précédente ; en effet, pour tout $z \in A_+$, on a

$$U_z(|xy|) = U(|x|.|y|.z) = U_{z|y|}(x)$$

Désignons par A_U l'espace de Riesz complété de A pour la topologie précédente (§ 3). On ne peut en général prolonger à A_U la structure d'anneau de A ; mais, comme pour tout $y \in A$, l'application linéaire $x \longrightarrow xy$ de A dans lui-même est continue, on peut la prolonger en une application linéaire de A_U dans lui-même, que nous noterons encore $x \longrightarrow xy$; le "produit" xy n'est donc défini que si $x \in A_U$, $y \in A$, mais non si x et y appartiennent tous deux à A_U . D'après le principe de prolongement des identités, on a, pour $x \in A_U$, $y \in A$, $y' \in A$, $\lambda \in R$,

$$x(y+y')=xy+xy' \quad , \quad x(yy')=(xy)y' \quad , \quad (\lambda x)y = \lambda(xy)= x(\lambda y)$$

et en outre, d'après la continuité de $\sup(x,x')$ dans $A_U \times A_U$,

$$\sup(xy,xy') = x.\sup(y,y')$$

si $x \geqslant 0$ (prolongement de (1)). De même, si $x \in A_U$, $x' \in A_U$, $y \in A$ et $y \geqslant 0$,

$$\sup(xy,x'y) = \sup(x,x').y$$

Par le même principe, pour $x \in A_U$, $y \in A$, on a $|xy| =|x|.|y|$.

On sait (§ 3) que, pour tout $y \in A$, la forme linéaire U_y se prolonge par continuité à A_U , où nous la noterons par le même symbole ;

les semi-normes $U_y(|x|)$ pour $y \in A_+$ définissent la topologie de A_U . Si $y \in A$, $z \in A$, on a, pour tout $x \in A_U$, $U_{yz}(x)=U_y(xz)$, par prolongemen

On notera qu'on ne peut plus écrire en général $U_y(x)=U(xy)$ pour $x \in A_U$, $y \in A$, car la fonction U n'est pas nécessairement continue pour la topologie définie par les semi-normes U_y , et par suite ne peut en général se prolonger à A_U .

Proposition 2. Pour tout $y \in A$, on a

(6) $$|U_y| = U_{|y|}$$

Il suffit de démontrer que, pour tout $x \in A_+$, on a $|U_y|(x)=U_{|y|}(x)=$ $= U(|y|x)$. Or, on a $|U_y|(x)= \sup\limits_{\mathscr{P}(x)} \sum\limits_i |U(yx_i)|$, $\mathscr{P}(x)$ désignant l'ensemble des partitions de x . On a évidemment $|U(yx_i)| \leqslant U(y\, x_i)$, donc $|U_y|(x) \leqslant U_{|y|}(x)$; tout revient à démontrer que $U(|y|x) \leqslant |U_y|(x)$.

On peut écrire $U(|y|x)=U(y^+x)+U(y^-x)$. Considérons, dans l'espace de Riesz cohérent A_U , la bande B engendrée par y^+ (§ 1) ; on peut écrire d'une seule manière $x=x'+x''$, où $x' \in B$ et x'' est étranger à y^+ ; en outre, si on pose $x_n=\inf(ny^+,x)$, la suite (x_n) est croissante et on a $x'= \sup\limits_n x_n=\lim x_n$ dans A_U (§ 1, prop.3 et § 3, prop. 2), d'où $x''=\lim(x-x_n)$; comme $\inf(y^+,x'')=0$ et que la fonction $\inf(u,v)$ est continue dans $A_U \times A_U$, on a $\lim(\inf(y^+,x-x_n))=0$.

Nous allons en déduire que $\lim U(y^+(x-x_n))=0$. En effet, si u et v sont deux éléments de A_+ , et si on pose $t=\inf(u,v)$, on a $|u-v|= u+v-2t$, $|u+v|=u+v$, d'où $|u^2-v^2| =|u-v|.|u+v|=u^2+v^2+2uv-2t(u+v)$; comme $|u^2-v^2| \leqslant u^2+v^2$, on en tire $uv \leqslant t(u+v)$. Si on pose $t_n=\inf(y^+,x-x_n)$ on a donc $y^+(x-x_n) \leqslant t_n(x-x_n+y) \leqslant t_n(x+y)$, d'où $U(y^+(x-x_n)) \leqslant U_{x+y}(t_n)$; comme t_n tend vers 0 dans A_U , et que U_{x+y} est continue dans A_U , on a bien $\lim U(y^+(x-x_n))=0$. Cette relation s'écrit aussi $\lim U(y^+x_n)= U(y^+x)$;

or, y^- et x_n sont étrangers dans A , donc $y^-x_n=0$ (prop.1), et $y^+x_n=yx_n$, d'où finalement $\lim U(yx_n)=U(y^+x)$. Nous avons donc prouvé que, pour tout $\varepsilon>0$, il existe $z_1\leqslant x$, majoré par un multiple entier de y^+ , et tel que $U(y^+x)\leqslant |U(yz_1)|+\varepsilon$. De la même manière, on prouve qu'il existe $z_2\leqslant x$, majoré par un multiple entier de y^- ,et tel que $U(y^-x)\leqslant|U(yz_2)|+\varepsilon$ Comme y^+ et y^- sont étrangers, il en est de même de z_1 et z_2 ; donc (lemme d'Euclide), de $z_1\leqslant(x-z_2)+z_2$, on déduit $z_1\leqslant x-z_2$, ou $z_1+z_2\leqslant x$. Si on pose $z_3=x-(z_1+z_2)$, les z_i forment une partition de x , et on a $U(|y|x)\leqslant\sum_{i=1,2,3}|U(z_iy)|+2\varepsilon\leqslant|U_y|(x)+2\varepsilon$; comme ε est arbitraire, la proposition est démontrée.

<u>Remarque</u>. Comme la continuité de U_y intervient seule dans la prop.2, cette proposition est encore valable même si U ne vérifie pas l'inégalité (5) .

<u>Corollaire</u>. <u>Si</u> X <u>est une forme linéaire croissante sur</u> A <u>telle que</u> $X\leqslant\lambda U$, <u>on a</u> $|X_y|=X_{|y|}$.

Il suffit de remarquer que, dans le raisonnement précédent, la seule propriété de U qui soit intervenue est le fait que U_y est <u>continue</u> dans A_U ; tout revient donc à prouver que X_y est continue dans A pour tout $y\in A_+$; mais comme $|X_y(x)|\leqslant X_y(|x|)\leqslant\lambda\, U_y(|x|)$ cette propriété résulte de la définition de la topologie sur A .

Considérons maintenant l'espace de Riesz Ω des formes linéaires relativement bornées sur A , muni de la topologie définie par les semi-normes $N_x(X)=|X|(x)$, où x parcourt A_+ ; on a vu (§3,n°4) que cet espace est séparé et <u>complet</u>. Considérons l'application $y\to U_y$ de A dans Ω ; c'est évidemment une application <u>linéaire</u> de A sur un sous-espace vectoriel F_U de Ω ; on a vu (n°2) que la relation $y>0$ est équivalente à $U_y>0$, donc $y\longrightarrow U_y$ est <u>biunivoque</u> et est un

48

<u>isomorphisme</u> de la structure d'<u>ordre</u> de A sur celle induite sur F_U par la structure d'ordre de Ω . Enfin, la prop.2 montre que $y \to U_y$ est un <u>homéomorphisme</u> de A sur F_U , puisque $N_x(U_y)=|U_y|(x) = U(|y|x)=U_x(|y|)$ pour tout $x \in A_+$.

Cela étant, nous pouvons <u>prolonger</u> l'application $y \to U_y$ en une application linéaire biunivoque et bicontinue de l'espace A_U , complété de A , sur l'adhérence $\overline{F}_U$ de F_U dans Ω , puisque cette adhérence est isomorphe au complété de l'espace vectoriel topologique F_U ; nous désignerons encore cette application par $y \to U_y$. Montrons que c'est encore un isomorphisme de la structure d'ordre de A_U sur celle induite sur $\overline{F}_U$ par celle de Ω . Tout revient à prouver que $\overline{F}_U \cap \Omega_+$ est l'adhérence de $F_U \cap \Omega_+$ dans Ω . Or, si $X \geqslant 0$ appartient à $\overline{F}_U$, pour toute suite finie (x_i) de points de A_+ , et tout $\varepsilon > 0$, il existe $y \in A_+$ tel que $|X-U_y|(x_i) \leqslant \varepsilon$ pour tout indice i ; mais on a $|X-U_y| \geqslant \big| |X|-|U_y| \big| = |X-U_{|y|}|$ puisque $|X|= X$ et en vertu de la prop.2 ; on a donc $|X-U_{|y|}|(x_i) \leqslant \varepsilon$ ce qui prouve que X est adhérent à $F_U \cap \Omega_+$.

En vertu de la continuité de la fonction $|X|$ dans Ω , on a encore par prolongement, la relation (6) pour tout $y \in A_U$; on en conclut aussitôt que la borne supérieure de deux éléments $X=U_x$, $Y=U_y$ de $\overline{F}_U$, prise <u>dans</u> Ω , est égale à leur borne supérieure prise <u>dans l'espace de Riesz</u> $\overline{F}_U$, c'est-à-dire à $U_{\sup(x,y)}$; en effet, la borne supérieure de X et Y dans Ω est égale à $\frac{1}{2}(X+Y+|X-Y|)= \frac{1}{2}(U_{x+y}+|U_{x-y}|) = \frac{1}{2}(U_{x+y}+U_{|x-y|})=U_{\sup(x,y)}$. Plus généralement, si B est une partie de $\overline{F}_U$, <u>majorée dans</u> Ω , sa borne supérieure <u>dans</u> Ω (qui existe, puisque Ω est cohérent) appartient à $\overline{F}_U$; c'est en effet la limite, dans Ω , de l'ensemble filtrant à droite formé des bornes supérieures des parties finies de B ; cet ensemble est contenu dans $\overline{F}_U$, d'après ce qui précède, donc sa limite appartient à $\overline{\overline{F}}_U$, puisque cet ensemble est fermé.

Remarque. Pour $y \in A_U$ mais n'appartenant pas à A , la forme linéaire U_y sur A est relativement bornée, mais en général *ne sera pas continue* pour la topologie de A , et par suite *ne pourra être prolongée à* A_U , contrairement aux formes U_y correspondant à $y \in A$. Autrement dit, pour $x \in A$, $y \in A_U$, U_x est une forme linéaire (continue) *sur* A_U , U_y une forme linéaire (non continue en général) *sur* A ; en outre pour $x \in A$, $y \in A_U$, on a $U_x(y) = U_y(x)$, car les deux membres sont fonctions continues de y dans A_U , et sont égaux tous deux à $U(xy)$ pour $y \in A$.

Nous allons maintenant supposer qu'en plus des conditions précédentes, la forme linéaire croissante U satisfait à la condition :

(N) *En désignant par* S *l'ensemble des* $y \in A_+$ *tels que, pour tout* $x \in A_+$, *on ait* $yx \leq x$, *on a la relation*

$$X(x) = \sup_{y \in S} X(xy) \tag{7}$$

pour tout $x \in A_+$ *et toute forme linéaire croissante* X *sur* A , *telle que* $0 \leq X \leq \lambda U$ *pour un scalaire* λ *convenable*.

Cette condition est évidemment remplie lorsque A admet un *élément unité* e , car on a $e = e^2 > 0$, et $ex = x$ pour tout x, donc $e \in S$. Elle est remplie aussi lorsque A est un *clan* de fonctions, avec ou sans élément unité (chap.I, §2, prop. 4).

Dans ces conditions, nous allons caractériser d'une autre manière le sous-espace de Riesz $\overline{\overline{F}}_U$ que nous venons de définir :

Théorème 1. *Le sous-espace* $\overline{\overline{F}}_U$ *de l'espace de Riesz cohérent* Ω *est identique à la bande engendrée par* U *dans* Ω .

Soit B_U la bande engendrée par U dans Ω ; nous allons montrer successivement que : 1° $B_U \subset \overline{F}_U$; 2° $\overline{F}_U \subset B_U$.

1° D'après la prop.2 du § 1, la demi-bande correspondant à B_U est l'ensemble des bornes supérieures des parties majorées de l'ensemble des minorants des éléments λU de Ω . Comme la borne supérieure de toute partie majorée de $\overline{F}_U$ appartient à $\overline{F}_U$, la relation $B_U \subset \overline{F}_U$ sera une conséquence de la proposition suivante :

<u>Proposition 3</u>. <u>Pour toute forme linéaire</u> X <u>sur</u> A <u>telle que</u> $0 \leqslant X \leqslant \lambda U$, <u>il existe un</u> $y \in A_U$ <u>tel que</u> $X = U_y$.

D'après l'inégalité de Minkowski (4 bis), la fonction $\sqrt{U(x^2)}$ est une <u>norme</u> sur l'espace vectoriel A , puisque $U(x^2)=0$ entraîne $x=0$; comme la fonction $U(xy)$ est une forme bilinéaire symétrique sur A , elle définit sur A une structure d'espace <u>préhilbertien</u>, dont la topologie est définie par la norme $\sqrt{U(x^2)}$; si on <u>complète</u> cet espace, on obtient un espace <u>hilbertien</u> H .

D'après l'inégalité (4), la topologie définie sur A par la norme $\sqrt{U(x^2)}$ est <u>plus fine</u> que celle définie par les semi-normes $U_y(|x|)$ $(y \geqslant 0)$; autrement dit, l'application identique φ de A , considéré comme sous-espace de H , sur A , considéré comme sous-espace de A_U , est <u>continue</u> ; elle se prolonge donc en une application linéaire continue de H dans A_U , que nous noterons encore φ . Soit alors $\langle x,y \rangle$ le produit scalaire de deux éléments de H ; pour $x \in A$, on a $\langle x,y \rangle = U_x(\varphi(y)) = U_{\varphi(y)}(x)$; en effet, les fonctions $y \longrightarrow \langle x,y \rangle$ et $y \longrightarrow U_x(\varphi(y))$ sont continues dans H et identiques dans la partie partout dense A de H .

Cela étant, l'hypothèse $X \leqslant \lambda U$ entraîne que, pour tout $y \in A$, X_y est une forme linéaire continue dans A , considéré comme sous-espace de A_U;

a fortiori, X_y est continue dans A, considéré comme sous-espace de H ; comme A est partout dense dans H, X_y est la restriction à A d'une forme linéaire continue dans H, donc de la forme $x \to \langle x,u_y \rangle$. D'après ce qui précède, il existe donc un élément $z_y \in A_U$ tel que $X_y = U_{z_y}$.

Il est immédiat que l'application $y \longrightarrow z_y$ de A dans A_U est linéaire. Si $y \geqslant 0$, on a $U_{z_y}(x)=X_y(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in A_+$, donc $z_y \geqslant 0$; autrement dit, $y \to z_y$ est <u>croissante</u>. Enfin, $y \longrightarrow z_y$ est <u>continue</u> dans A (considéré comme sous-espace de A_U) ; en effet, pour tout $x \in A_+$, on a $U_x(|z_y|)=U_{|z_y|}(x)=|U_{z_y}|(x) =|X_y|(x)=X_{|y|}(x) \leqslant \lambda U_x(|y|)$ d'après la prop.2 et son corollaire.

Remarquons maintenant que l'ensemble S est <u>filtrant à droite</u>, car si $x \in S$ et $y \in S$, on a $z=\sup(x,y) \in S$, puisque les relations $xu \leqslant u$ et $yu \leqslant u$ pour tout $u \geqslant 0$ entraînent $zu=\sup(xu,yu) \leqslant u$. L'ensemble S est <u>majoré</u> dans A_U, car son image par l'application $y \longrightarrow U_y$ est majoré dans $\overline{F}_U$, en raison de la relation $U_y \leqslant U$ pour tout $y \in S$. Il en résulte (§ 3,prop.2) que S a une borne supérieure e dans A_U, borne supérieure qui est aussi la limite de son filtre des sections. Comme $y \to z_y$ est linéaire et continue dans A (et par suite se prolonge par continuité dans A_U), $\lim_{y \in S} z_y=z_e$ existe ; comme $y \to U_x(y)$ est continue dans A_U pour tout $x \in A$, on a $U_x(z_e)= \lim_{y \in S} U_x(z_y)= \lim_{y \in S} X(xy)$; mais d'après la condition (N), $\lim_{y \in S} X(xy)=X(x)$ pour tout $x \in A_+$; on a donc $U_{z_e}(x)=X(x)$ pour tout $x \in A_+$, ce qui démontre la proposition.

<u>Remarque</u>. Si la condition (N) n'est pas vérifiée, le raisonnement précédent prouve encore qu'on a $X_e=U_{z_e}$, mais on n'a pas nécessairement $X=X_e$ (exerc.   )

2° Nous allons démontrer en même temps la relation $\overline{F}_U \subset B_U$ et le critère suivant, qui constitue une nouvelle caractérisation de $\overline{F}_U$:

Proposition 4. Pour qu'une forme linéaire $X \in \Omega$ appartienne à $\overline{F}_U$, il faut et il suffit que, pour tout $y \in A_+$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que les relations $0 \leqslant x \leqslant y$ et $U(x) \leqslant \eta$ entraînent $|X(x)| \leqslant \varepsilon$.

En effet, si $X \in \overline{F}_U$, pour tout $y \in A_+$ et tout $\delta > 0$, il existe par hypothèse $z \in A$ tel que $|X-U_z|(y) \leqslant \delta$, et a fortiori, pour $0 \leqslant x \leqslant y$, $|X-U_z|(x) \leqslant \delta$, puis $|X(x)-U(zx)| \leqslant \delta$; d'après (5), on en tire $|X(x)| \leqslant \delta + |U(zx)| \leqslant \delta + a_z.U(x)$; il suffit donc de prendre $\delta \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, puis (z étant alors déterminé), η tel que $a_z.\eta \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ pour avoir $|X(x)| \leqslant \varepsilon$.

Réciproquement, supposons que X satisfasse à la condition de l'énoncé. On peut écrire d'une seule manière $X=Y+Z$, où $Y \in B_U$ et où Z est étranger à U (§ 1,th.1) ; comme $Y \in B_U \subset \overline{F}_U$, Y satisfait à la conditio de l'énoncé, donc il en est de même de $Z=X-Y$; de ce fait et de la relation $\inf(|Z|,U)=0$, on va déduire que $Z=0$. En effet, pour tout $x \in A_+$ et tout $\eta > 0$, il existe une partition (y,z) de x telle que $U(y)+|Z|(z) \leqslant \eta$ (§ 1,prop.2) ; on a en particulier $U(y) \leqslant \eta$; si on a choisi η ε de sorte que les conditions $0 \leqslant v \leqslant x$, $U(v) \leqslant \eta$ entraînent $|Z(v)| \leqslant \varepsilon$, on aura donc $|Z(y)| \leqslant \varepsilon$, et comme $|Z(z)| \leqslant |Z|(z) \leqslant \varepsilon$, on aura $|Z(x)| \leqslant |Z(y)|+|Z(z)| \leqslant 2\varepsilon$; ε étant arbitraire, on a $Z(x)=0$ pour tout $x \in A_+$, donc $Z=0$.

Cette deuxième partie de la démonstration prouve que tout X satisfaisant à la condition de l'énoncé appartient à B_U ; d'après la première partie, on a donc $\overline{F}_U \subset B_U$, ce qui achève de démontrer le th.1 .

Le th.1, joint au th.1 du § 1, permet donc d'énoncer le théorème suivant :

Théorème 2. Toute forme linéaire relativement bornée X sur A peut s'écrire d'une seule manière sous la forme

$$X = U_y + Z \tag{8}$$

où $y \in A_U$ et où $\inf(|Z|,U)=0$.

En outre, la prop.4 donne une condition pour que, dans la décomposition (8), on ait $Z=0$.

<u>Exercices</u>. 1) Montrer que, dans un anneau de Riesz A , on a $\sup(x,y)\inf(x,y)=xy$.

2) Soit A l'anneau de Riesz formé des fonctions numériques continues définies dans $[0,1]$, telles que : a) $x(0)=0$; b) la dérivée à droite $x'_+(0)$ existe et est finie (§ 1, exemple 4). On pose $U(x)=x'_+(0)+\int_0^1 x(t)dt$. Montrer que $U(x^2)=0$ entraîne $x=0$, et que la condition (5) est vérifiée, mais non la condition (N) ; montrer ensuite que la prop.3 est inexacte pour l'anneau A et la forme linéaire U.

3) Soient A un anneau de Riesz, U une forme linéaire croissante à laquelle s'applique le th.1. Soit p une fonction scalaire définie dans R^m , continue et positivement homogène ; si $X_1,X_2,\dots,X_m$ sont des formes linéaires appartenant à $\overline{F}_U$, il en est de même de $p(X_1,X_2,\dots,X_m)$ (utiliser la prop.4).

4) Généraliser la prop.2 au cas où l'idéal $\mathfrak{N}$ n'est pas nul (on remarquera que la relation $\overline{xy}\leq\overline{zt}$ dans $A/\mathfrak{N}$ entraîne $U_{\bar x}(\bar y)\leq U_{\bar z}(\bar t)$, et que, si $\bar x$ et $\bar y$ sont disjoints dans $A/\mathfrak{N}$, on a $U_{\bar x}(\bar y)=0$, en utilisant l'exerc.1).

§ 5. <u>Complétion d'un clan de fonctions</u>.

<u>1. L'espace Φ</u> . Soit Φ un <u>clan de fonctions</u> définies sur un ensemble E (chap.I, § 1). On a vu (§ 4) que Φ est un <u>anneau de Riesz</u> ; nous allons supposer donnée, une fois pour toutes, sur Φ une <u>forme linéaire croissante</u> U , et nous supposerons, pour simplifier, que la relation $U(|x|)=0$ entraîne $x=0$ dans Φ (cf. exerc.1) ; a fortiori, la relation $U(x^2)=0$ entraîne $x^2=0$, donc $x=0$. Comme toute fonction de Φ est <u>bornée</u> par hypothèse, on a, d'après le théorème de la moyenne (chap.I, § 2, formule (5))

$$|U(xy)|\leq\|y\|.U(|x|)$$

autrement dit, la condition (5) du § 4 est vérifiée. Enfin, la condition (N) du § 4 est vérifiée pour <u>toute</u> forme linéaire croissante X sur Φ, d'après la prop.4 du chap.I, § 2. Toutes les propositions établies au § 4 sont donc applicables à Φ et U. Nous désignerons par $\bar{\Phi}$, dans ce paragraphe, l'espace de Riesz obtenu en <u>complétant</u> Φ, muni des semi-normes $U_y(|x|)$, où y parcourt Φ_+.

On a vu (§ 3) que, dans $\bar{\Phi}$, les fonctions x^+, x^-, $|x|$ sont uniformément continues et prolongent les fonctions correspondantes sur Φ ; il en est de même de $y \to xy$, pour tout $x \in \Phi$. De même les fonctions $\inf(x,y)$ et $\sup(x,y)$ sont uniformément continues dans $\bar{\Phi} \times \bar{\Phi}$. Plus généralement :

<u>Proposition 1. Soit f une application lipschitzienne de R^n dans R s'annulant au point $(0,0,\dots,0)$ de R^n ; l'application $(x_1,\dots,x_n) \to f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ de Φ^n dans Φ est uniformément continue et se prolonge par continuité en une application de $\bar{\Phi}^n$ dans $\bar{\Phi}$</u>.

En effet, il existe par hypothèse une constante $\gamma > 0$ telle que $|f(x_1,\dots,x_n)-f(x'_1,\dots,x'_n)| \leq \gamma \sum_{i=1}^{n} |x_i - x'_i|$. Pour tout $z \in \Phi_+$, on a donc $U_z(|f(x_1,\dots,x_n)-f(x'_1,\dots,x'_n)|) \leq \gamma \sum_{i=1}^{n} U_z(|x_i-x'_i|)$, ce qui démontre la proposition.

La fonction prolongée à $\bar{\Phi}^n$ se notera encore f.

<u>Définition 1. On dit qu'un élément</u> $x \in \bar{\Phi}$ <u>est modéré s'il existe un</u> $a \in \Phi_+$ <u>tel que</u> $|x| \leq a$.

L'ensemble des éléments $x \in \bar{\Phi}$ tels que $|x| \leq a$ se notera I_a ; sa trace sur Φ (c'est-à-dire l'ensemble des $x \in \Phi$ tels que $|x| \leq a$) se notera J_a.

Nous désignerons par Φ_m l'ensemble des éléments modérés dans $\bar{\Phi}$;

il est immédiat que c'est un sous-espace de Riesz de $\overline{\Phi}$; en outre, c'est un espace de Riesz cohérent, car si un ensemble d'éléments modérés $\geqslant 0$ est majoré dans Φ_m , il est a fortiori majoré dans $\overline{\Phi}$, donc il a une borne supérieure dans $\overline{\Phi}$, et cette borne appartient visiblement à Φ_m .

Proposition 2. L'ensemble I_a est l'adhérence de J_a dans $\overline{\Phi}$.

En effet, soit x un élément de I_a ; lorsque y tend vers x en restant dans Φ , $\sup(\inf(y,a),-a)$ tend vers $\sup(\inf(x,a),-a)=\sup(x,-a)=x$, d'après la continuité de $\sup(u,v)$ et $\inf(u,v)$ dans $\overline{\Phi}\times\overline{\Phi}$; comme $\sup(\inf(y,a),-a)$ appartient à J_a , la propriété est démontrée.

Proposition 3. Tout élément $x \geqslant 0$ de $\overline{\Phi}$ est borne supérieure des éléments modérés y tels que $0 \leqslant y \leqslant x$.

En effet, lorsque y tend vers x en restant dans Φ_+ , $\inf(x,y)$ tend vers $\inf(x,x)=x$, et est un élément modéré tel que $0 \leqslant \inf(x,y) \leqslant x$; donc x est limite de l'ensemble filtrant des z modérés tels que $0 \leqslant z \leqslant x$, d'où la proposition, d'après la prop.2 du § 3.

Proposition 4. Pour tout y modéré, U_y est continue dans Φ , et se prolonge donc par continuité à ; en outre, pour tout $x \in \overline{\Phi}$

$$U_y(x) = U_x(y) \quad (1)$$

En effet, si $|y| \leqslant a$, où $a \in \Phi_+$, on a, pour tout $z \in \Phi_+$ $|U_y(z)| \leqslant |U_y|(z) = U_{|y|}(z) \leqslant U_a(z)$, et U_a est continue dans Φ . Pour établir la relation (1), il suffit de prouver que, pour tout y modéré, l'application $x \to U_x(y)$ est continue dans $\overline{\Phi}$; or, si $|y| \leqslant a$, où $a \in \Phi_+$, $|U_x(y)| \leqslant U_{|x|}(|y|) \leqslant U_{|x|}(a) = U_a(|x|)$, d'où la proposition.

Si $y \in \overline{\Phi}$ n'est pas modéré, U_y n'est pas continue dans Φ en général, comme on l'a déjà signalé (§ 4) ; mais on a la proposition suivante :

<u>Proposition 5</u>. <u>Pour tout</u> $y \in \overline{\Phi}$ <u>et tout</u> $a \in \Phi_+$, U_y <u>est uniformément continue dans l'ensemble</u> J_a .

En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $z \in \Phi$ tel que $|U_y - U_z|(a) \leqslant \varepsilon$ c'est-à-dire, pour toute partition (x_i) de a , $\sum_i |U_y(x_i) - U_z(x_i)| \leqslant \varepsilon$ A fortiori, pour tout $x \in \Phi$ tel que $0 \leqslant x \leqslant a$, $|U_y(x) - U_z(x)| \leqslant \varepsilon$; donc, pour tout $x \in J_a$, $|U_y(x) - U_z(x)| \leqslant 2\varepsilon$. Cela signifie que, dans J_a , U_y est <u>limite uniforme</u> des fonctions uniformément continues U_z , donc est elle-même uniformément continue.

La fonction U_y se prolonge donc par continuité à tout ensemble I_a ; si $0 \leqslant a \leqslant b$ (a et b appartenant à Φ), les prolongements de U_y à I_a et I_b coïncident dans I_a , tout point de I_a étant adhérent à J_a , donc à $J_b \supset J_a$; il en résulte que si a et b sont quelconques dans Φ_+, les prolongements de U_y dans I_a et I_b coïncident dans $I_a \cap I_b$, car ce sont les restrictions du prolongement de U_y dans I_{a+b} . En d'autres termes, on peut prolonger U_y à l'espace de Riesz Φ_m des éléments modérés, et on voit aussitôt par continuité que la fonction prolongée, qu'on note encore U_y , est une <u>forme linéaire relativement bornée</u> sur Φ_m .

<u>2. L'anneau</u> $L^{\infty}(\Phi)$. Dans l'espace de Riesz cohérent $\overline{\Phi}$, l'ensemble filtrant S des $z \in \Phi_+$ tels que $zx \leqslant x$ pour tout $x \in \Phi_+$, admet une <u>borne supérieure</u> e , en vertu de la prop.2 du § 3, puisque, pour tout $z \in S$ et tout $x \in \Phi_+$, on a $U_x(z) = U(xz) \leqslant U(x)$.

<u>Proposition 6</u>. <u>Pour tout</u> $x \in \Phi_+$, <u>on a</u> $ex = x$.

En effet, quels que soient x et y dans Φ_+ , on a, en vertu de la condition (N) et de la continuité de U_y et de $z \to zx$ dans Φ , $U_y(x) = U(xy) = \sup_{z \in S} U(xyz) = \sup_{z \in S} U_y(zx) = \lim_{z \in S} U_y(zx) = U_y(ex)$. Autrement dit, $U_y(x - ex) = 0$ quel que soit $y \in \Phi_+$, donc, comme $x - ex \geqslant 0$, on a nécessairement $x - ex = 0$.

On a évidemment $U=U_e$, donc, en vertu de la prop.5, U se prolonge par continuité à Φ_m .

Pour tout $\lambda \geqslant 0$, nous désignerons par K_λ l'ensemble des $x \in \overline{\Phi}$ tels que $|x| \leqslant \lambda e$; la réunion des K_λ lorsque λ parcourt l'ensemble des nombres $\geqslant 0$ sera désignée par $L^\infty(\Phi)$; c'est un sous-espace de Riesz cohérent de $\overline{\Phi}$, qui contient Φ et Φ_m , et est donc <u>partout dense</u> dans $\overline{\Phi}$ pour la topologie de cet espace.

Pour tout $x \in L^\infty(\Phi)$, nous désignerons par $\|x\|_\infty$ la borne inférieure des $\lambda > 0$ tels que $|x| \leqslant \lambda e$. Pour tout $y \in \Phi_+$, la relation $|x| \leqslant \lambda e$ entraîne $U_y(|x|) \leqslant U_y(\lambda e)=\lambda U_y(e)=\lambda U_e(y)=\lambda U(y)$; réciproquement, si $U_y(|x|) \leqslant \lambda U(y)$ pour tout $y \in \Phi_+$, cette relation s'écrit $U_y(\lambda e-|x|) \geqslant 0$, et entraîne donc $\lambda e-|x| \geqslant 0$; en d'autres termes, on peut écrire

$$\|x\|_\infty = \sup_{y \in \Phi_+,\ U(y) \leqslant 1} U_y(|x|) \tag{1}$$

Cette relation montre en particulier que, pour $x \in \Phi$, $\|x\|_\infty$ coïncide avec le nombre défini au chap.I, § 3 et désigné par la même notation ; on a en outre ici $\|x\|_\infty = \|x\|$ (norme dans $\mathcal{B}(E)$) (cf. chap.I, § 3, prop.3).

Comme $|x|= \sup(x^+,x^-)$, on a $\|x\|_\infty= \sup(\|x^+\|_\infty , \|x^-\|_\infty)$.

Sur l'espace vectoriel $L^\infty(\Phi)$, $\|x\|_\infty$ est une <u>norme</u> ; en effet les relations $|x| \leqslant \lambda e$, $|y| \leqslant \mu e$ entraînent $|x+y| \leqslant |x|+|y| \leqslant (\lambda+\mu)e$, et par suite $\|x+y\|_\infty \leqslant \|x\| + \|y\|_\infty$, λ et μ pouvant être pris arbitrairement voisins de $\|x\|_\infty$ et $\|y\|_\infty$ respectivement ; il est immédiat d'autre part que $\|\lambda x\|_\infty = |\lambda| . \|x\|_\infty$; enfin, la relation $\|x\|_\infty = 0$ signifie que pour tout $\varepsilon > 0$, on a $|x| \leqslant \varepsilon e$; donc, pour tout $y \in \Phi_+$, on a $U_y(|x|) \leqslant U_y(\varepsilon e)= \varepsilon U(y)$ quel que soit $\varepsilon > 0$; cela signifie $U_y(|x|)=0$, et comme y est arbitraire, $x=0$.

La topologie définie sur $L^{\infty}(\Phi)$ par la norme $\|x\|_{\infty}$ est <u>plus fin</u> que la topologie induite par $\overline{\Phi}$, car la relation $\|x\|_{\infty} \leqslant \varepsilon$ entraîne $U_y(|x|) \leqslant \varepsilon U(y)$ pour tout $y \in \Phi_+$. En outre :

<u>Proposition 7</u>. <u>L'espace normé obtenu en munissant $L^{\infty}(\Phi)$ de la norme $\|x\|_{\infty}$ est complet.</u>

En effet, soit $\mathfrak{F}$ un filtre de Cauchy sur $L^{\infty}(\Phi)$; $\mathfrak{F}$ est a fortiori un filtre de Cauchy pour la structure uniforme moins fine de $\overline{\Phi}$, donc a une limite x_0 dans $\overline{\Phi}$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $M \in \mathfrak{F}$ tel que, pour tout couple de points x,y de M, on ait $\|x-y\|_{\infty} \leqslant \varepsilon$, c'est-à-dire $|x-y| \leqslant \varepsilon e$; passant à la limite dans $\overline{\Phi}$, on a $|x_0-x| \leqslant \varepsilon e$ pour tout $x \in M$, c'est-à-dire $\|x_0-x\|_{\infty} \leqslant \varepsilon$; cela prouve d'abord que $x_0 \in L^{\infty}(\Phi)$, puis que x_0 est limite de $\mathfrak{F}$ pour la topologie d'espace normé de $L^{\infty}(\Phi)$.

Considérons de nouveau $L^{\infty}(\Phi)$ comme sous-espace de $\overline{\Phi}$; pour tout $y \in L_{\infty}(\Phi)$, l'application linéaire $x \to xy$ de $\overline{\Phi}$ dans $\overline{\Phi}$ est <u>continue</u> ; en effet, si $|y| \leqslant \lambda e$, on a, pour tout $z \in \Phi_+$, $U_z(|xy|) \leqslant U_z(\lambda e|x|) = \lambda U_z(|x|)$. On peut donc prolonger par continuité l'application linéaire précédente à $\overline{\Phi}$, ce qui définit le produit xy pour $x \in \overline{\Phi}$ et $y \in L^{\infty}(\Phi)$; on voit aussitôt, par prolongement, que pour $x \in \overline{\Phi}$, $y \in L^{\infty}(\Phi)$, $y' \in L^{\infty}(\Phi)$, $\lambda \in R$, on a

$$x(y+y')=xy+xy' , \qquad (\lambda x)y = \lambda(xy)=x(\lambda y) ,$$

$$\sup(xy,xy') = x.\sup(y,y') \quad \text{si} \quad x \geqslant 0$$

De même, si $x \in \overline{\Phi}$, $x' \in \overline{\Phi}$, $y \in L^{\infty}(\Phi)$ et $y \geqslant 0$,

$$\sup(xy,x'y) = \sup(x,x').y$$

Le produit yy' de deux éléments de $L^{\infty}(\Phi)$ est ainsi défini ; si $|y| \leqslant \lambda e$, $|y'| \leqslant \lambda' e$, on a $|yy'| \leqslant \lambda\lambda' e$, donc yy' appartient à $L^{\infty}(\Phi)$; en outre, pour tout $x \in \overline{\Phi}$, on a, par un double prolongement,

l'identité $x(yy')=(xy)y'$; en particulier, la multiplication dans $L^{\infty}(\Phi)$ est associative, ce qui, joint aux relations précédentes, achève de montrer que cette multiplication définit sur $L^{\infty}(\Phi)$ une structure d'<u>anneau de Riesz</u>. En outre, dans tout ensemble $K_\lambda \times K_\lambda$, l'application $(x,y) \to xy$ est <u>uniformément continue</u>, car on a, pour x,y,x',y' dans K_λ, $|xy-x'y'|=|x(y-y')+(x-x')y'| \leqslant \lambda(|x-x'|+|y-y'|)$
d'où, pour tout $z \in \Phi_+$, $U_z(|xy-x'y'|) \leqslant \lambda(U_z(|x-x'|)+U_z(|y-y'|))$.

Le même raisonnement montre aussi que xy est uniformément continue dans $K_\lambda \times K_\lambda$, lorsqu'on munit $L^{\infty}(\Phi)$ de la topologie définie par la norme $\|x\|_\infty$, car on a $\|xy-x'y'\|_\infty \leqslant \lambda(\|x-x'\|_\infty+\|y-y'\|_\infty)$.

Ce prolongement de la fonction xy peut se généraliser :

<u>Proposition 8</u>. <u>Soit</u> f <u>une fonction continue numérique, définie dans</u> $\mathbb{R}^n$ <u>et telle que</u> $f(0,0,\ldots,0)=0$. <u>L'application</u> $(x_1,\ldots,x_n) \to f(x_1,\ldots,x_n)$ <u>de</u> Φ^n <u>dans</u> Φ <u>peut se prolonger par continuité en une application de</u> $(L^{\infty}(\Phi))^n$ dans $L^{\infty}(\Phi)$, <u>lorsqu'on munit</u> $L^{\infty}(\Phi)$ <u>de la topologie définie par la norme</u> $\|x\|_\infty$.

Il suffit en effet (Top.gén., chap.II, § 3, prop.7) de voir que f transforme tout filtre de Cauchy $\mathfrak{F}$ sur Φ^n en une base de filtre de Cauchy sur Φ. Or, si A est un ensemble de $\mathfrak{F}$ tel que $\|x_i-y_i\| \leqslant 1$ pour tout couple d'éléments $(x_i),(y_i)$ de A, il existe un nombre $a>0$ tel que $x_i(E)$ soit contenu dans $[-a,+a]=I$ pour tout point $(x_i) \in A$; comme f est uniformément continue dans I^n, la proposition est démontrée.

On voit aussitôt par continuité que si $f(t_1,\ldots,t_n) \geqslant 0$ pour $|t_i| \leqslant \lambda$ on a $f(x_1,\ldots,x_n) \geqslant 0$ dans $(K_\lambda)^n$. De même, si $f_1,\ldots,f_m$ sont m applications continues de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, nulles à l'origine, g une application continue de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}$, nulle à l'origine, et h l'application l'application composée $(t_1,..,t_n)\to g(f_1(t_1,..,t_n),\dots,f_m(t_1,..,t_n))$, on a identiquement $h(x_1,..,x_n)=g(f_1(x_1,..,x_n),\dots,f_m(x_1,..,x_n))$.

On peut remarquer en outre que l'application $(x_1,..,x_n)\to f(x_1,..,x_n)$ de $(L^\infty(\Phi))^n$ dans $L^\infty(\Phi)$ est <u>uniformément continue</u> dans tout ensemble $(K\ \ )^n$, non seulement lorsqu'on munit $L^\infty(\Phi)$ de la topologie définie par la norme $\|x\|_\infty$ (comme il résulte de la prop. 8), mais aussi lorsqu'on considère $L^\infty(\Phi)$ comme sous-espace de $\overline{\Phi}$. En effet, soit à la borne supérieure de $|f(t_1,..,t_n)|$ pour $|t_i|\leq\lambda$ $(1\leq i\leq n)$; on a $\|f(x_1,..,x_n)\|_\infty\leqslant a$ pour $(x_i)\in(K_\lambda)^n$; d'autre part, pour tout $\varepsilon>0$ il existe $\delta>0$ tel que, dans $(K_\lambda)^n$, la relation $\sum_{i=1}^n\|x_i-y_i\|_\infty\leqslant\delta$ entraîne $\|f(x_1,..,x_n)-f(y_1,..,y_n)\|_\infty\leqslant\varepsilon$; quels que soient (x_i), (y_i) dans $(K_\lambda)^n$, on a donc

$$|f(x_1,..,x_n)-f(y_1,\dots,y_n)|\leqslant\varepsilon e+2\,\frac{a}{\delta}\sum_{i=1}^n|x_i-y_i|$$

d'où, pour tout $z\in\Phi_+$.

$$U_z(|f(x_1,\dots,x_n)-f(y_1,\dots,y_n)|)\leqslant\varepsilon U(z)+2\,\frac{a}{\delta}\sum_{i=1}^n U_z(|x_i-y_i|)$$

ce qui est arbitrairement petit si ε, puis les $|x_i-y_i|$ sont pris assez petits.

<u>3. Les espaces</u> $L^p(\Phi)$. Généralisant la formule (1), nous poserons, pour tout nombre $p\geqslant 1$ et tout $x\in\overline{\Phi}$,

$$(2)\qquad \|x\|_p=\sup_{y\in\Phi_+,\ \|y\|_{p'}\leqslant 1}U_y(|x|)$$

et nous désignerons par $L^p(\Phi)$ l'ensemble des $x\in\overline{\Phi}$ pour lesquels $\|x\|_p<+\infty$. On a évidemment $\Phi\subset L^p(\Phi)$, et sur Φ, $\|x\|_p$ coïncide avec l'expression $(U(|x|^p))^{1/p}$ définie au chap. I (§ 3, prop. 1).

<u>Proposition 9</u>. <u>L'ensemble</u> $L^p(\Phi)$ <u>est un sous-espace de Riesz de</u> $\overline{\Phi}$ <u>et</u> $\|x\|_p$ <u>est une norme sur</u> $L^p(\Phi)$.

En effet, si $x \in L^p(\Phi)$, $y \in L^p(\Phi)$, on a, pour tout $z \in \Phi_+$ tel que $\|z\|_{p'} \leqslant 1$, $U_z(|x+y|) \leqslant U_z(|x|)+U_z(|y|) \leqslant \|x\|_p + \|y\|_p$, ce qui montre que $x+y \in L^p(\Phi)$, et qu'on a l'inégalité qui prolonge l'inégalité de Minkowski

(3) $$\|x+y\|_p \leqslant \|x\|_p + \|y\|_p$$

Il est immédiat que, pour tout scalaire λ, $\|\lambda x\|_p = |\lambda| . \|x\|_p$. $L^p(\Phi)$ est donc bien un sous-espace vectoriel de $\overline{\Phi}$; c'est un sous-espace de Riesz, car si $x \geqslant 0$ appartient à $L^p(\Phi)$, on a, pour tout y tel que $0 \leqslant y \leqslant x$, $\|y\|_p \leqslant \|x\|_p$, donc $y \in L^p(\Phi)$. Pour voir que $\|x\|_p$ est une norme, il suffit donc de montrer que $\|x\|_p = 0$ entraîne $x=0$. Or, pour tout $y \in \Phi_+$ tel que $\|y\|_{p'} \leqslant 1$, on a $U_y(|x|)=0$; mais pour tout $y \in \Phi_+$, il existe λ tel que $\|\lambda y\|_{p'} \leqslant 1$, donc $\lambda U_y(|x|)=0$, et par suite $U_y(|x|)=0$, ce qui entraîne bien $x=0$.

Lorsqu'on munit $L^p(\Phi)$ de la norme $\|x\|_p$, la topologie définie sur $L^p(\ \ )$ par cette norme est <u>plus fine</u> que celle induite par $\overline{\Phi}$, car en vertu de la définition (2), on a, pour tout $y \in \Phi_+$,

(4) $$U_y(|x|) \leqslant \|y\|_{p'} . \|x\|_p$$

dans $L^p(\Phi)$.

<u>Théorème 1</u>. <u>L'espace normé</u> $L^p(\Phi)$ <u>est complet, et, pour</u> $p < +\infty$, <u>Φ est partout dense dans cet espace normé</u>.

1° $L^p(\Phi)$ <u>est complet</u>. La proposition est démontrée pour $p=+\infty$. Nous pouvons donc nous borner dans ce qui suit au cas où p est fini. Soit $\mathfrak{F}$ un filtre de Cauchy sur $L^p(\Phi)$; d'après (4), $\mathfrak{F}$ est aussi un filtre de Cauchy dans $\overline{\Phi}$, donc converge vers $x_0 \in \Phi$. En outre d'après (4), pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble $M \in \mathfrak{F}$ tel que, pour tout couple d'éléments x, y de M et tout $z \in \Phi_+$, on ait

$U_z(|x-y|) \leqslant \varepsilon \| z \|_{p'}$; laissant fixes z et x et faisant tendre y vers x_o suivant $\mathfrak{F}$, on voit qu'on a par continuité $U_z(|x_o-x|) \leqslant \varepsilon \| z \|_{p'}$ pour tout $x \in M$ et tout $z \in \Phi_+$; mais, d'après (2), cela montre que $x_o - x \in L^p(\Phi)$, donc $x_o \in L^p(\Phi)$, et en outre $\| x_o - x \|_p \leqslant \varepsilon$ pour tout $x \in M$, ce qui achève de prouver que x_o est limite de $\mathfrak{F}$ dans $L^p(\Phi)$.

2° Pour la topologie de $L^p(\Phi)$, Φ est dense par rapport à Φ_m.

Il suffira de prouver que, sur tout ensemble I_a ($a \in \Phi_+$), la topologie définie par la norme $\| x \|_p$ est identique à celle induite par $\overline{\Phi}$. Supposons d'abord $p > 1$; pour $x \in J_a$ et $y \in \Phi_+$, on a $\| x \|_p^p = U(|x|^p) \leqslant U(a^{p-1}|x|) = U_b(|x|)$, en posant $b = a^{p-1}$; d'après (4), on a donc

(5) $$(U_y(|x|))^p \leqslant (\| y \|_{p'})^p U_b(|x|)$$

et, en passant à la limite pour la topologie de $\overline{\Phi}$, on voit que cette inégalité a encore lieu dans I_a ; il résulte alors de (2) que pour tout $x \in I_a$, on a

(6) $$\| x \|_p^p \leqslant U_b(|x|)$$

et par suite que la topologie induite par $L^p(\Phi)$ sur I_a est moins fine que celle induite par Φ ; comme elle est aussi plus fine que cette dernière, elle lui est identique.

En second lieu, considérons le cas où $p=1$; il faut montrer que la topologie induite sur I_a par $L^1(\Phi)$ est moins fine que celle induite par Φ ; autrement dit, pour tout $\varepsilon > 0$, il faut prouver qu'il existe $b \in \Phi_+$ et $\eta > 0$ tels que les relations $U_b(x) \leqslant \eta$ et $0 \leqslant x \leqslant a$ entraînent $U(x) \leqslant \varepsilon$. Or, il existe par hypothèse $b \in \Phi_+$ tel que $|U - U_b|(a) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, et a fortiori $|U(x) - U_b(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout x tel que $0 \leqslant x \leqslant a$; si on suppose en outre que $U_b(x) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, on aura bien $U(x) \leqslant \varepsilon$.

3° Φ_m <u>est partout dense dans</u> $L^p(\Phi)$. D'après la prop.3, tout revient à montrer que si $x \geqslant 0$ est un élément de $L^p(\Phi)$, il est limite au sens de la norme $\|x\|_p$, de l'ensemble filtrant A des $y \in \Phi_m$ tels que $0 \leqslant y \leqslant x$.

Montrons d'abord que, si u et v sont deux éléments $\geqslant 0$ de Φ_m , on a $\|u\|_p^p + \|v\|_p^p \leqslant \|u+v\|_p^p$; si u et v appartiennent à Φ_+ , cette relation s'écrit $U(u^p)+U(v^p) \leqslant U((u+v)^p)$, et résulte de l'inégalité $a^p+b^p \leqslant (a+b)^p$ valable pour tout couple de nombres positifs a,b ; l'inégalité dans Φ_m résulte d'un passage à la limite par continuité, en vertu du 2° .

Cela étant, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $z \in \Phi_+$ tel que $\|z\|_{p'}=1$ et $\|x\|_p \leqslant U_z(|x|)+\varepsilon$; d'après la continuité de U_z dans $\bar{\Phi}$, il existe $y \in \Phi_m$ tel que $0 \leqslant y \leqslant x$ et $U_z(x)$ $U_z(y)+\varepsilon \leqslant \|y\|_p+\varepsilon$, donc $\|x\|_p \leqslant \|y\|_p+2\varepsilon$; autrement dit, lorsque y parcourt l'ensemble filtrant A , $\|y\|_p$ tend en croissant vers $\|x\|_p$. On en déduit que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe y_0 A tel que pour tout $y \in A$ et $\geqslant y_0$, on ait $\|y\|_p - \|y_0\|_p \leqslant \varepsilon$; donc $\|y-y_0\|_p^p \leqslant \|y\|_p^p - \|y_0\|_p^p \leqslant k\varepsilon$ où $k > 0$ ne dépend que de x ; on peut prendre par exemple $k = p\|x\|_p^{p-1}$; mais d'après ce qui précède, $\|x-y_0\|_p$ est la limite de $\|y-y_0\|_p$ lorsque y tend vers x ; on a donc $\|x-y_0\|_p \leqslant (k\varepsilon)^{1/p}$, et a fortiori $\|x-y\|_p \leqslant (k\varepsilon)^{1/p}$ pour tout $y \in A$ et $\geqslant y_0$, ce qui démontre que x est limite de y suivant l'ensemble filtrant A , au sens de la topologie de $L^p(\Phi)$.

<u>Remarque</u>. Au contraire, dans $L^\infty(\Phi)$, Φ n'est pas partout dense en général au sens de la norme $\|x\|_\infty$.

En vertu du th.1, pour tout couple x,y, d'éléments $\geqslant 0$ de $L^p(\Phi)$, on a

(7) $$\|x\|_p^p + \|y\|_p^p \leqslant \|x+y\|_p^p$$

car cette inégalité est vraie dans Φ, et $\overline{\Phi}$ est partout dense dans $L^p(\Phi)$. Le raisonnement de la 3^{è} partie de la démonstration précédente peut alors se généraliser et prouve que :

<u>Proposition 10</u>. <u>Pour qu'un ensemble filtrant à droite</u> A <u>dans</u> $L^p(\Phi)$ <u>admette une borne supérieure dans</u> $L^p(\Phi)$, <u>il faut et il suffit que</u> $\|x\|_p$ <u>soit majoré dans</u> A ; <u>la borne supérieure de</u> A <u>dans</u> $L^p(\Phi)$ <u>est alors identique à sa borne supérieure dans</u> $\overline{\Phi}$, <u>et est aussi la limite de son filtre des sections pour la topologie de</u> $L^p(\Phi)$.

En effet, le raisonnement en question montre que le filtre des sections $\mathfrak{F}$ de A est un filtre de Cauchy dans $L^p(\Phi)$; en outre, sa limite x est nécessairement un majorant de A , l'ensemble des $y \in L^p(\Phi)$ qui sont $\geqslant 0$ étant fermé dans $L^p(\Phi)$. Comme le même raisonnement montre que la borne supérieure de A <u>dans</u> $\overline{\Phi}$ est limite de $\mathfrak{F}$ <u>dans</u> $L^p(\Phi)$, x est nécessairement égal à cette borne.

Le th.1 montre que $L^1(\Phi)$ peut être identifié à l'espace de Riesz obtenu en <u>complétant</u> Φ pour la norme $\|x\|_1 = U(|x|)$, d'après le procédé général décrit au § 3 ; on peut donc prolonger U par continuité à $L^1(\Phi)$, et on a encore $\|x\|_1 = U(|x|)$ dans cet espace.

Dans Φ_m, ce prolongement coïncide avec le prolongement de U déjà défini ci-dessus, puisque les topologies induites sur tout I_a par $L^p(\Phi)$ et par $\overline{\Phi}$ sont identiques.

Considérons l'application $x \to |x|^p$ de Φ, envisagé comme sous-espace de $L^p(\Phi)$, dans Φ envisagé comme sous-espace de $L^1(\Phi)$; dans toute boule $\|x\|_p \leqslant \alpha$ de l'espace $L^p(\Phi)$, cette application est <u>uniformément continue</u>

En effet, on a $\left||x|^p-|y|^p\right| \leqslant p|x-y|(|x|+|y|)^{p-1}$, d'où $U(\left||x|^p-|y|^p\right|) \leqslant$ $\leqslant pU(|x-y|(|x|+|y|)^{p-1}$; d'après l'inégalité de Hölder $U(|x-y|.(|x|+|y|)^{p-1}) \leqslant (U(|x-y|^p))^{1/p}(U((|x|+|y|)^p))^{1/p'}$, autrement dit $\left\|\,|x|^p-|y|^p\right\|_1 \leqslant p\|x-y\|_p.\left\|\,|x|+|y|\right\|^{p-1}$; comme $\left\|\,|x|+|y|\right\|_p \leqslant 2a$, on a finalement $\left\|\,|x|^p-|y|^p\right\|_1 \leqslant p(2a)^{p-1}\|x-y\|_p$, d'où la proposition.
L'application $x \longrightarrow |x|^p$ transforme donc tout filtre de Cauchy sur Φ en une base de filtre de Cauchy sur $L^1(\Phi)$, et peut par suite être prolongée par continuité à $L^p(\Phi)$.

Nous désignerons encore ce prolongement par $x \longrightarrow |x|^p$; par continuité, on a $\|x\|_p = (U|x|^p))^{1/p}$ pour tout $x \in L^p(\Phi)$. On notera que, si $x \in L^\infty(\Phi) \cap L^p(\Phi)$, la définition précédente de $|x|^p$ coïncide avec celle qui découle de l'application de la prop.8 à la fonction t^p de la variable réelle t ; en effet, ces deux définitions coïncident dans Φ_m , puisque sur chaque ensemble I_a , les topologies induites par celles de tous les $L^p(\Phi)$ $(p < +\infty)$ coïncident avec la topologie induite par $\overline{\Phi}$. Si maintenant x est un élément $\geqslant 0$ quelconque de $L^\infty(\Phi) \cap L^p(\Phi)$, $|x|^p$ est, dans $\overline{\Phi}$, la borne supérieure de l'ensemble filtrant des y^p , où y parcourt l'ensemble des éléments de Φ_m tels que $0 \leqslant y \leqslant x$, d'après la continuité de la fonction $u \longrightarrow |u|^p$ dans $L^\infty(\Phi)$ considéré comme sous-espace de $\overline{\Phi}$; x^p est donc aussi, d'après la prop.10, la limite de y^p suivant cet ensemble filtrant, au sens de la topologie de $L^1(\Phi)$, donc coïncide bien avec l'élément x^p défini dans $L^p(\Phi)$.

Pour tout $x \in \Phi$ et tout $y \in \overline{\Phi}$, montrons maintenant que $xy \in L^1(\Phi)$ et que $U(xy)=U_x(y)$; on peut se borner au cas où $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.
Soit A l'ensemble filtrant des $z \in \Phi_m$ tels que $0 \leqslant z \leqslant y$.

On a , par continuité dans tout ensemble I_a , $U(xz)=U_x(z)$, donc $U(xz) \leqslant U_x(y)$ pour $z \in A$; on en conclut que l'ensemble filtrant des xz admet une borne supérieure <u>dans</u> $L^1(\Phi)$; mais d'après la prop.10, cette borne supérieure est aussi la borne supérieure des xz <u>dans</u> $\overline{\Phi}$, c'est-à-dire xy, donc $xy \in L^1(\Phi)$; en outre, en passant à la limite suivant l'ensemble filtrant A , on a d'une part $\lim_{z \in A} U_x(z)=U_x(y)$ d'après la continuité de U_x dans $\overline{\Phi}$, d'autre part $\lim_{z \in A} U(xz)=U(xy)$ d'après la continuité de U dans $L^1(\Phi)$, donc $U(xy)=U_x(y)$.

Supposons maintenant que $y \in L^{p'}(\Phi)$, et considérons Φ comme partie de $L^p(\Phi)$ $(1 \leqslant p < +\infty)$; d'après le résultat précédent, la formule (4) peut s'écrire, pour $x \in \Phi$

(8) $$\|xy\|_1 \leqslant \|x\|_p . \|y\|_{p'}$$

Elle prouve que l'application linéaire $x \to xy$ de Φ (considéré comme partie partout dense de $L^p(\Phi)$) dans $L^1(\Phi)$ est continue, et peut par suite être prolongée par continuité à $L^p(\Phi)$; autrement dit, l'application $(x,y) \to xy$ est définie dans $L^p(\Phi) \times L^{p'}(\Phi)$; il est immédiat par continuité qu'elle est bilinéaire, et satisfait à l'inégalité (8), qui prolonge donc l'inégalité de Hölder ; en outre, cette inégalité montre que c'est une application bilinéaire <u>continue</u> dans le produit $L^p(\Phi) \times L^{p'}(\Phi)$.

En vertu de l'identité des topologies définies sur tout ensemble I_a par les $L^p(\Phi)$ et par $\overline{\Phi}$ $(1 \leqslant p < +\infty)$, le produit xy qui précède ~~xy~~ , pour $x \in \Phi_m$, $y \in L^{p'}(\Phi)$, est identique au produit défini au n°2 ; d'après la prop.10, pour tout couple d'éléments $\geqslant 0$, $x \in L^p(\Phi)$, $y \in L^{p'}(\Phi)$, xy est la borne supérieure de l'ensemble filtrant des zz' , où z (resp. z') parcourt l'ensemble filtrant des éléments modérés tels que $0 \leqslant z \leqslant x$ (resp. $0 \leqslant z' \leqslant y$). Il en résulte que, si p et q sont deux nombres tels que

$1 \leqslant p < q < +\infty$, et si $x \in L^p(\Phi) \cap L^q(\Phi)$, $y \in L^{p'}(\Phi) \cap L^{q'}(\Phi)$, le produit xy a la même valeur, qu'on considère x comme élément de $L^p(\Phi)$, y comme élément de $L^{p'}(\Phi)$ ou x comme élément de $L^q(\Phi)$ et y comme élément de $L^{q'}(\Phi)$.

La formule (2) définissant $\|x\|_p$, et l'inégalité de Hölder montrent qu'on a, a fortiori, pour tout $x \in L^p(\Phi)$

$$\|x\|_p = \sup_{y \in L^{p'}(\Phi),\ \|y\|_{p'} \leqslant 1} U(|x.y|) \tag{9}$$

Notons enfin que la prop.2 du chap.I, §3, étant une conséquence de l'inégalité de Hölder, est encore valable dans Φ ; de façon précise, si $\|x\|_r$ est fini pour $r=p$ et $r=q$ $(p<q)$, il est fini pour $q \leqslant r \leqslant q$, et $\log \|x\|_r$ est fonction convexe de $1/r$ dans l'intervalle $[1/q, 1/p]$; on en conclut aisément que l'ensemble A des nombres $p \geqslant 1$ pour lesquels $\|x\|_p$ est fini est un intervalle, et que $\log \|x\|_p$ est fonction convexe de $1/p$ dans cet intervalle.

4. Dualité des espaces $L^p(\Phi)$. Théorème 2. *Pour $1 \leqslant p < +\infty$, toute forme linéaire continue sur l'espace normé $L^p(\Phi)$ est de la forme $x \to U(xy)$, où $y \in L^{p'}(\Phi)$.*

En effet, soit X une forme linéaire continue sur $L^p(\Phi)$; il existe donc une constante $a \geqslant 0$ telle que $|X(x)| \leqslant a\|x\|_p$ pour tout $x \in L^p(\Phi)$. En vertu de la continuité de X, cette forme sera déterminée lorsqu'on connaîtra sa restriction au sous-espace partout dense Φ de $L^p(\Phi)$. Or, la restriction de X à Φ est une forme linéaire relativement bornée, donc (§2, prop.3) de la forme $X = X^+ - X^-$, où X^+ et X^- sont des formes linéaires croissantes ; en outre, pour $x \in \Phi_+$, on a $X^+(x) = \sup_{0 \leqslant y \leqslant x} X(y)$; comme $|X(y)| \leqslant a\|y\|_p \leqslant a\|y\|_p$ $\cancel{a\|x\|_p}$, on a aussi $|X^+(x)| \leqslant a\|x\|_p$.
Autrement dit, on peut supposer désormais que X est croissante.

Cela étant, montrons que X (restreinte à Φ) satisfait à la condition de la prop.4 du §4 ; supposons en effet qu'on ait $0 \leqslant x \leqslant z$, où $z \in \Phi$; alors $\|x\|_p = (U(x^p))^{1/p}$ et $U(x^p) \leqslant U(z^{p-1}x) \leqslant \|z^{p-1}\| U(x)$; donc $|X(x)| \leqslant a \|z^{p-1}\|^{1/p} (U(x))^{1/p}$; pour tout $\varepsilon > 0$, si on pose $\eta = \dfrac{\varepsilon^p}{a^p \|z^{p-1}\|}$, les relations $0 \leqslant x \leqslant z$ et $U(x) \leqslant \eta$ entraînent $|X(x)| \leqslant \varepsilon$.

Il existe donc $y \in \Phi$ tel que $X = U_y$, d'où, pour tout $x \in \Phi$, $X(x) = U_y(x) = U(xy)$; si on suppose en outre que $\|x\|_p \leqslant 1$, on a $U_y(x) = U_x(y) \leqslant a$, donc, d'après la formule (2), y appartient à $L^{p'}(\Phi)$, ce qui achève de démontrer le théorème.

<u>Corollaire</u>. <u>Pour</u> $1 \leqslant p < +\infty$, <u>le dual de l'espace</u> $L^p(\Phi)$ <u>est isomorphe à l'espace</u> $L^{p'}(\Phi)$.

En effet, la norme de U_y dans le dual de $L^p(\Phi)$ est la borne supérieure des $|U_y(x)|$ pour les $x \in L^p(\Phi)$, tels que $\|x\|_p \leqslant 1$; d'après la formule (9), cette norme est donc égale à $\|y\|_{p'}$, ce qui démontre l'isomorphie annoncée (avec conservation des normes).

On en conclut que, pour $1 < p < +\infty$, l'espace $L^p(\Phi)$ est <u>réflexif</u> ; plus particulièrement, nous avons déjà vu que l'espace $L^2(\Phi)$ est un espace <u>hilbertien</u> .

Par contre, en général les espaces $L^1(\Phi)$ et $L^\infty(\Phi)$ <u>ne sont pas réflexifs</u> (voir exerc.   ).

<u>5. Complétion d'un produit de clans</u>. Soient Φ_1 , Φ_2 deux clans de fonctions sur deux ensembles E_1, E_2 , Φ le clan <u>produit</u> de Φ_1 et Φ_2 sur l'ensemble $E_1 \times E_2$ (chap.I, §4). Soit U_1 (resp. U_2) une forme linéaire croissante sur Φ_1 (resp. Φ_2), $U = U_1 U_2 = U_2 U_1$ la forme linéaire croissante sur Φ , produit de U_1 et U_2. Pour toute fonction $x \in \Phi$, on a vu que

$x_1(t_1)=U_2(x(t_1,t_2))$ appartient à Φ_1, $x_2(t_2)=U_1(x(t_1,t_2))$ appartient à Φ_2. Si on considère Φ (resp. Φ_1, Φ_2) comme plongé dans $L^1(\Phi)$ (resp. $L^1(\Phi_1)$, $L^1(\Phi_2)$), les applications linéaires $x \to x_1$ et $x \to x_2$ sont <u>continues</u> ; en effet, on a, pour tout $x \in \Phi$, $U_1(|x_1|)=U_1(|U_2(x)|) \leqslant U_1(U_2(|x|))=U(|x|)$, et on voit de même que $x \to x_2$ est continue. On peut donc prolonger ces applications à $L^1(\Phi)$ tout entier ; nous les noterons encore de la même manière ; par continuité, on a encore, dans $L^1(\Phi)$, la relation

$$U_1(x_1)=U_2(x_2)=U(x)$$

En outre, ces applications sont des applications de $L^1(\Phi)$ <u>sur</u> $L^1(\Phi_1)$ et $L^1(\Phi_2)$ respectivement. Pour le voir, remarquons que l'application $(x_1,x_2) \to x_1x_2$ de $\Phi_1 \times \Phi_2$ dans Φ est <u>continue</u> au sens des topologies de $L^1(\Phi_1) \times L^1(\Phi_2)$ et de $L^1(\Phi)$; c'est en effet une application <u>bilinéaire</u>, et on a $U(|x_1x_2|)=U_1(|x_1|)U_2(|x_2|)$, d'où la proposition ; cette application se prolonge donc en une application bilinéaire continue de $L^1(\Phi_1) \times L^1(\Phi_2)$ dans $L^1(\Phi)$, que nous noterons de la même façon. Or, pour x_1 et x_2 dans Φ_1 et Φ_2 respectivement, on a $(x_1x_2)_1 = U_2(x_2)x_1$; cette relation a donc encore lieu par continuité dans $L^1(\Phi_1) \times L^1(\Phi_2)$, et montre que $x \to x_1$ applique bien $L^1(\Phi)$ sur $L^1(\Phi_1)$. En outre, d'après la démonstration du th.1 du chap.I, §4, le sous-espace vectoriel engendré par les éléments x_1x_2 dans $L^1(\Phi)$ est <u>partout dense</u> dans cet espace.

Si Φ est un clan produit de trois clans Φ_i $(1 \leqslant i \leqslant 3)$, U une forme linéaire croissante sur Φ, produit de formes linéaires croissantes U_i sur Φ_i, la propriété d'associativité s'étend encore aux formes U_i prolongées aux $L^1(\Phi_i)$, par simple continuité.

<u>6. Complétion d'un clan vectoriel</u>. Soit V un espace vectoriel à n dimensions sur $\mathbb{R}$, Φ un clan de fonctions numériques sur un ensemble E, Φ_V le clan vectoriel extension de Φ à V (chap. I, § 5). Soit $|x|$ une norme sur V, U une forme linéaire croissante sur Φ ; pour tout $y \in \Phi_+$, $U(y|x|)$ est une semi-norme sur Φ_V. Soit (a_i) une base de V, et $x = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i$ pour tout $x \in V$; on sait que la norme $|x|$ est équivalente à $\sup_i |x_i|$; il en résulte aussitôt que la topologie définie sur Φ_V par les semi-normes $U(y|x|)$ est isomorphe à la topologie produit de n clans identiques à Φ, muni de la topologie définie par les semi-normes $U(y|x|)$; l'espace vectoriel $\overline{\Phi}_V$, complété de Φ_V pour cette topologie, est donc isomorphe au produit de n espaces identiques à $\overline{\Phi}$. De façon plus précise, pour tout $x \in \Phi_V$, l'application linéaire $z \to zx$ de Φ dans Φ_V est continue et se prolonge donc en une application continue de $\overline{\Phi}$, dans $\overline{\Phi}_V$; de même, l'application linéaire $x \to x_i$ de Φ_V dans $\overline{\Phi}$ est continue et se prolonge en une application continue de $\overline{\Phi}_V$ dans $\overline{\Phi}$; enfin la relation $x = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i$ se prolonge par continuité à $\overline{\Phi}_V$.

L'application $x \to |x|$ de Φ_V dans Φ_+ est uniformément continue, comme on le voit aussitôt d'après l'inégalité $\big||x|-|y|\big| \leqslant |x-y|$; elle se prolonge donc aussi en une application de $\overline{\Phi}_V$ dans $\overline{\Phi}_+$; cela permet donc de définir $|x|$ pour tout $x \in \overline{\Phi}_V$, et d'écrire $U(y|x|)$ les semi-normes qui définissent la topologie de $\overline{\Phi}_V$. En outre (par continuité), on voit qu'il existe deux nombres > 0, a et b, tels que $a.\sup|x_i| \leqslant |x| \leqslant b.\sup|x_i|$.

Pour tout $x \in \overline{\Phi}_V$, on définit alors $\|x\|_p$ par la formule (2) ; pour que $\|x\|_p < +\infty$, il faut et il suffit que $\|x_i\|_p < +\infty$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$; l'ensemble $L^p(\overline{\Phi}_V)$ des $x \in \overline{\Phi}_V$ tels que $\|x\|_p < +\infty$

est un sous-espace de vectoriel $\bar{\Phi}_V$, et $\|x\|_p$ est une norme sur cet espace ; la topologie définie par cette norme est identique au produit de n topologies identiques à celle de $L^p(\Phi)$; pour $p < +\infty$, Φ_V est donc dense dans $L^p(\Phi_V)$ et on a $\|x\|_p^p = U(|x|^p)$.

L'application linéaire U de Φ_V dans V peut alors se prolonger par continuité à $L^1(\Phi_V)$, et on a $U(x)=\sum_{i=1}^{n} U(x_i)a_i$; en outre, on a encore, par prolongement, l'inégalité $|U(x)| \leqslant U(|x|)$.

<u>Exercices</u>. 1) Soit Φ un clan de fonctions, U une forme linéaire croissante sur Φ , Φ_o le clan des fonctions $x \in \Phi$ telles que $U(|x|)=0$. Dans Φ , considéré comme un anneau de Riesz, Φ_o est un idéal ; on peut définir sur l'anneau quotient Φ/Φ_o une structure d'ordre qui en fait un anneau de Riesz ; en outre, pour toute fonction φ continue dans R^n , nulle à l'origine, et n éléments quelconques $\dot{x}_i \in \Phi/\Phi_o$, on peut définir $\varphi(\dot{x}_1,\dot{x}_2,\dots,\dot{x}_n)$ comme la classe mod. Φ_o de l'élément $\varphi(x_1,x_2,\dots,x_n)$, où x_i est un élément quelconque de la classe $\dot{x}_i$ (chap.I, §3,exerc.6). Cela étant, montrer qu'on peut étendre à l'anneau de Riesz Φ/Φ_o toutes les définitions et propriétés données dans ce paragraphe.

2) Pour tout $x \in \Phi$, on pose $\varphi(x)=(x^+)^p-(x^-)^p= \operatorname{sgn} x.|x|^p$; φ est une application biunivoque de Φ sur lui-même. Montrer que φ, considéré comme application d'une partie de $L^p(\phi)$ sur une partie de $L^1(\phi)$, peut se prolonger par continuité en un <u>homéomorphisme</u> de $L^p(\phi)$ <u>sur</u> $L^1(\phi)$ (pour prouver que l'application réciproque de φ est continue, on utilisera l'inégalité $|a^{1/p}- b^{1/p}| \leqslant \frac{1}{p}|a-b|^{1/p}$ entre nombres > 0) .

3) a) Démontrer que, pour $1 < p \leqslant 2$ et $0 < x < 1$, on a

(1) $$(1+x)^p+(1-x)^p \geqslant 2(1+x^{p'})^{p-1} \qquad (1/p+1/p'=1)$$

En déduire que

(2) $$(1+x)^{p'}+(1-x)^{p'} \leqslant 2(1+x^{p})^{p'-1}$$

(pour démontrer (1), développer les deux membres en série suivant les puissances de x et de $x^{p'}$ respectivement, et comparer les séries obtenues).

b) Déduire de (2) les inégalités suivantes dans $L^{p}(\Phi)$ pour $p \geqslant 2$

$$\|x+y\|_{p}^{p}+\|x-y\|_{p}^{p} \leqslant 2(\|x\|_{p}^{p'}+\|y\|_{p}^{p'})^{p-1} \leqslant 2^{p-1}(\|x\|_{p}^{p}+\|y\|_{p}^{p})$$

et les inégalités analogues pour $1 \ p \ 2$

$$\|x+y\|_{p}^{p'}+\|x-y\|_{p}^{p'} \leqslant 2(\|x\|_{p}^{p}+\|y\|_{p}^{p})^{p'-1} \leqslant 2^{p'-1}(\|x\|_{p}^{p'}+\|y\|_{p}^{p'})$$

(démontrer d'abord ces inégalités dans Φ).

c) Déduire des inégalités précédentes que $L^{p}(\Phi)$ est <u>uniformément convexe</u> pour $1 < p < +\infty$.

4) a) Soit Φ un clan de fonctions sur un ensemble E , x une fonction $\geqslant 0$ appartenant à Φ . Pour tout nombre $a > 0$, et tout $\varepsilon > 0$, montrer qu'il existe une fonction $y \geqslant 0$ appartenant à Φ , et telle que : 1° pour tout $t \in E$ tel que $x(t) \leqslant a$, $y(t)=x(t)$; 2° pour tout $t \in E$ tel que $x(t) \geqslant a$, $|y(t)-a| \leqslant \varepsilon x(t)$ (considérer la fonction $g(u)$ définie pour $u \geqslant 0$ telle que $g(u)=u$ pour $u \leqslant a$, $g(u)=a$ pour $u \geqslant a$; former un polynome $h(u)$ tel que $g(u) \leqslant h(u) \leqslant g(u)+\varepsilon u$ pour $u \leqslant \|x\|$, puis considérer la fonction $\inf(x(t),h(x(t)))$.)

b) Soit Φ un clan de fonctions sur E , Ψ un clan de fonctions contenu dans Φ. Montrer que si Ψ est dense par rapport à Φ pour la topologie de $L^{1}(\Phi)$, il est aussi dense par rapport à Φ pour la topologie de $L^{p}(\Phi)$, pour $1 \leqslant p < +\infty$. (si $x \in \Phi_{+}$, et $y \in \Psi_{+}$ sont tels que $U(|x-y|) \leqslant \varepsilon$, montrer à l'aide de a), qu'il existe $z \in \Psi_{+}$ tel que $\|z\| \leqslant 2\|x\|$, et $U(|x-z|) \leqslant \varepsilon$).

73

5) Soient p,q deux nombres $\geqslant 1$, tels que $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leqslant 1$; montrer que l'application $(x,y) \to xy$ de $\Phi \times \Phi$ dans Φ est continue lorsqu'on considère $\Phi \times \Phi$ comme sous-espace de $L^p(\Phi) \times L^q(\Phi)$, et Φ comme sous-espace de $L^r(\Phi)$ (utiliser l'inégalité de Hölder) en déduire que cette application se prolonge en une application continue de $L^p(\Phi) \times L^q(\Phi)$ dans $L^r(\Phi)$.

6) Soit V un espace vectoriel de dimension finie, (e_i) une base de V ; pour norme de $t = \sum_i t_i e_i$, on prend $|t| = \sum_i |t_i|$. Soit Φ un clan de fonctions sur un ensemble E, Φ_V l'extension de Φ à V, U une forme linéaire croissante sur Φ, qu'on étend à Φ_V. Pour $x \in \Phi_V$ et $a \in V$, on pose $U_{x-a}(y) = U(xy) - aU(y)$ pour tout $y \in \Phi$; montrer qu'on a encore $|U_{x-a}| = U_{|x-a|}$ (utiliser la prop.4 du chap.I, §2, appliquée à $U_{|x_j - a_j|}$, pour les composantes x_j et a_j de x et a sur la base (e_j)).

Soit p une application continue et positivement homogène de V dans un espace vectoriel de dimension finie V' ; démontrer qu'on a $p(U_x) = U_{p(x)}$. (Se ramener au cas où p est lipschitzienne ; montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver une partition (y_i) de $y \in \Phi_+$, et des éléments $a_i \in V$ tels que $\sum_i U(|x - a_i| y_i) \leqslant \varepsilon$, en utilisant le th.1 du §2, la définition de $|U_{x-a_i}|$, et la relation $|U_{x-a_i}| = U_{|x-a_i|}$).

COMMENTAIRES SUR LE CHAPITRE II.

Le rédacteur a suivi, dans l'ensemble, le plan du projet Weil, modifié selon les indications des "Notes sur l'Intégration" de 1940. Mais, en cour de rédaction, il s'est aperçu, en approfondissant la question, que tout "anneau de Riesz" dans lequel le théorème de Lebesgue-Nikodym (§ 4, th.1) est vrai, est <u>isomorphe</u> à un anneau de <u>classes de fonctions sommables</u> sur un ensemble convenablement construit, et pour une mesure convenablement choisie, l'intégrale de ces fonctions correspondant à la forme linéaire $U(x)$ (ce résultat ne peut être donné dans le texte ni en exercice, la démonstration en étant fort longue et complexe). Ce fait nouveau amène donc à revoir toute l'économie du projet Weil : est-il vraiment nécessaire de développer toute une théorie "abstraite" qui, finalement, ne peut rien donner de plus que la théorie classique, et ne constitue donc qu'un trompe-l'oeil ? Ce sera une sérieuse question à débattre. L'avis personnel du rédacteur n'est pas encore très net ; il pencherait plutôt cependant vers le maintien d'une partie abstraite assez allégée, vu que d'une part le principe de prolongement utilisé est tout de même plus général que ce qui conduit à l'intégrale (cas où l'on prend plusieurs formes croissantes U_α et où on prend les semi-normes $y \to U_\alpha(x|y|)$ pour les $x \geqslant 0$) ; et d'autre part, cette étude abstraite, permettant d'éviter les encombrants ensembles de mesure nulle, fait mieux comprendre l'essentiel de la théorie, et constitue la meilleure introduction à la notion de mesure, qui sans cela apparait gratuite (surtout en ce qui concerne l'"additivité complète" ; voir chap.III). Mais il est d'avis qu'une bonne partie de la rédaction actuelle du chap.II devrait sauter ; notamment toute la théorie, développée au § 2, des "fonctions continues de formes linéaires", qui n'est absolument pas utilisée par la suite (on a besoin en tout et pour tout,

- Suite -

de savoir ce que c'est que $|U|$, ce qui se fait très facilement de façon directe). De même la théorie des $L^p(\Phi)$, pour $1 < p < +\infty$, ne peut apporter rien de plus que ce que donne la théorie classique, et son développement suivant la méthode "abstraite", comme dans le texte, oblige à des détours et contorsions vraiment peu naturels ; le rédacteur proposerait donc de la reporter au chap. III, en ne gardant ici que les espaces L^1 et L^∞, qui se font naturellement et facilement.
