ANNEXES A L'INTEGRATION
(ETAT 3 BIS)

Rédaction n° 067

Nombre de pages : 30

Nombre de feuilles : 30

Intégration (Annexes)

État 3 bis

67

ANNEXES A L'INTEGRATION (Etat 3 bis)

Sous ce titre, le rédacteur réunira un certain nombre d'exposés de questions touchant l'Intégration, mais dont il restera à déterminer : 1° si elles doivent être traitées dans Bourbaki ; 2° dans l'affirmative, quelle doit être leur place dans le Livre de l'Intégration (ou ailleurs).

ANNEXE I.

INTÉGRALES DE FONCTIONS A VALEURS DANS DES ESPACES LOCALEMENT CONVEXES.

1. <u>L'intégrale faible</u>.

Soient F, F' deux espaces vectoriels sur R, en <u>dualité faible</u> (cf. <u>Esp. vect. top.</u>, chap. II) par une application bilinéaire $(x,x') \to \langle x,x' \rangle$ de $F \times F'$ dans R, définissant respectivement sur F et F' deux topologies localement convexes séparées (topologies <u>faibles</u>) $\sigma(F,F')$ et $\sigma(F',F)$. On sait qu'en général, F <u>n'est pas complet</u> pour la topologie $\sigma(F,F')$; son complété $\hat{F}$ n'est autre que le <u>dual algébrique</u> de F', muni de la topologie faible $\sigma(\hat{F},F')$.

Considérons d'autre part un ensemble E, une tribu $\mathcal{T}$ sur E et une mesure μ définie sur $\mathcal{T}$, et soit U l'intégrale attachée à cette mesure ; nous désignerons par U^* l'intégrale supérieure correspondant à U, par Λ_f l'ensemble des fonctions sommables finies.

Désignons par $\mathcal{E}$ l'ensemble des applications de E dans l'espace vectoriel topologique F ; c'est un espace vectoriel sur R ; pour toute fonction $f \in \mathcal{E}$ et tout élément $a' \in F'$, nous poserons $N_{a'}(f) = U^*(|\langle f,a' \rangle|)$; désignons par $\mathcal{F}$ la partie de $\mathcal{E}$ formée des fonctions f telles que $N_{a'}(f) < +\infty$ pour tout $a' \in F'$; il est immédiat que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$, et que, sur $\mathcal{F}$, les $N_{a'}(f)$ (où a' parcourt F') sont des <u>semi-normes</u>, définissant une topologie d'espace localement convexe (en général non séparé).

Considérons maintenant l'ensemble $\mathcal{L}_0$ des éléments de $\mathcal{E}$ qui sont de la forme $f = \sum_i f_i a_i$, où les a_i sont des éléments quelconques de F, les f_i des fonctions numériques finies sommables ; il est immédiat que l'ensemble de ces fonctions est contenu dans $\mathcal{F}$ et est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}$; nous désignerons par $\mathcal{L}(F)$, ou simplement $\mathcal{L}$, l'<u>adhérence</u> dans $\mathcal{F}$ de ce sous-espace , qui est encore un sous-espace vectoriel topologique de $\mathcal{F}$; nous dirons que les fonctions $f\in\mathcal{L}$ sont <u>faiblement sommables</u> (pour la mesure μ).

Cela étant , pour toute fonction $f=\sum_i f_i a_i$ de $\mathcal{L}_0$, posons $U(f)=\sum_i U(f_i)a_i$ cet élément de F ne dépend bien que de f , et non de son expression $\sum_i f_i a_i$; en effet , si on a $\sum_j g_j b_j=0$, on a aussi $\sum_j g_j\langle b_j,a'\rangle=0$ pour tout $a'\in F'$ donc $\sum_j U(g_j)\langle b_j,a'\rangle=0$, ce qui s'écrit $\langle\sum_j U(g_j)b_j,a'\rangle=0$; comme a' est arbitraire dans F' et que la topologie faible est séparée , on a $\sum_j U(g_j)b_j=0$ dans F .

L'application $f\to U(f)$ de $\mathcal{L}_0$ dans F ainsi définie est évidemment linéaire; pour tout $a'\in F'$, on a

(1) $$\langle U(f),a'\rangle=U(\langle f,a'\rangle)$$

d'où résulte l'inégalité $|\langle U(f),a'\rangle|\leq U(|\langle f,a'\rangle|)=N_{a'}(f)$; donc U est une application <u>continue</u> de $\mathcal{L}_0$ dans F ; elle se prolonge par suite en une application linéaire continue de l'espace $\mathcal{L}$ <u>dans le complété</u> $\hat{F}$ de l'espace F pour la topologie faible . Nous dirons que cette application de $\mathcal{L}$ dans $\hat{F}$, que nous noterons encore $f\to U(f)$ est l'<u>intégrale faible</u> des fonctions $f\in\mathcal{L}$; nous la noterons encore $\int f\,d\mu$.

Pour toute fonction $f\in\mathcal{L}$, tout $a'\in F'$ et tout $\varepsilon>0$, il existe une fonction $g\in\mathcal{L}_0$ telle que $U^*(|\langle f-g,a'\rangle|)\leq\varepsilon$, ce qui s'écrit $U^*(|\langle f,a'\rangle-\langle g,a'\rangle|)\leq\varepsilon$; comme $\langle g,a'\rangle$ est sommable et ε arbitraire , cela prouve que $\langle f,a'\rangle$ est <u>sommable</u> ; inversement :

PROPOSITION 1 .- <u>Si f est une application de E dans F telle que , pour tout</u> $a'\in F'$, $\langle f,a'\rangle$ <u>soit sommable , f est faiblement sommable et on a la relation</u> (1) .

En effet , f appartient à $\mathcal{F}$ par définition ; considérons un voisinage V de f dans l'espace $\mathcal{F}$, formé des $g \in \mathcal{F}$ tels que $N_{a'_i}(f-g) \leq 1$ pour un nombre fini d'éléments $a'_i \in F'$ $(1 \leq i \leq n)$ qu'on peut supposer linéairement indépendants ; soient a_i $(1 \leq i \leq n)$ n éléments de F tels que $\langle a_i, a'_j \rangle = \delta_{ij}$; par hypothèse $\langle f, a'_i \rangle = f_i$ est sommable ; si $h = \sum_{i=1}^{n} f_i a_i$, on a $\langle f-h, a'_i \rangle = 0$ par définition pour $1 \leq i \leq n$, donc h appartient à V ; comme c'est un élément de $\mathcal{L}_0$, f est adhérent à $\mathcal{L}_0$, c'est-à-dire faiblement sommable . En outre, on a $N_{a'}(f) = U(\langle f, a' \rangle)$ pour toute fonction $f \in \mathcal{L}$, et la définition de la topologie de $\mathcal{L}$ prouve que $f \to \langle f, a' \rangle$ est une application linéaire <u>continue</u> de l'espace $\mathcal{L}$ dans l'espace Λ_f (muni de la semi-norme $U(|f|)$) pour tout $a' \in F'$. On en déduit aussitôt que l'identité (1) est encore vraie dans (principe de prolongement des identités).

Plus généralement :

PROPOSITION 2 .- <u>Soient</u> F,G <u>deux espaces localement convexes séparés , u une application linéaire faiblement continue de</u> F <u>dans</u> G . <u>Pour toute fonction</u> $f \in \mathcal{L}(F)$, <u>la fonction</u> $u \circ f$ (à valeurs dans G) <u>est faiblement sommable et on a</u>

$$U(u \circ f) = u(U(f)) \tag{2}$$

(u étant considérée comme prolongée par continuité en une application linéaire de $\hat{F}$ dans $\hat{G}$, au second membre de (2)) .

En effet , pour tout $b' \in G'$, on a $\langle u \circ f, b' \rangle = \langle f, {}^t u(b') \rangle$, donc cette fonction est sommable , et par suite $u \circ f$ appartient à $\mathcal{L}(G)$; en outre , on a

$$\langle u(U(f)), b' \rangle = \langle U(f), {}^t u(b') \rangle = U(\langle f, {}^t u(b') \rangle) = U(\langle u \circ f, b' \rangle)$$

d'où la proposition .

Lorsque F'_1 est un sous-espace vectoriel de F' tel que la topologie faible $\sigma(F, F'_1)$ soit encore séparée , toute fonction f faiblement sommable pour la topologie $\sigma(F, F')$ est encore faiblement sommable pour la topologie $\sigma(F, F'_1)$, et son intégrale garde la même valeur .

2 . Propriétés de l'intégrale faible .

Un certain nombre de propriétés de l'intégrale des fonctions numériques s'étendent aux intégrales faibles .

PROPOSITION 3 .- *Si f est une fonction faiblement sommable , g une fonction numérique mesurable et bornée , gf est faiblement sommable* .

En effet , pour tout $a' \in F'$, $\langle gf, a' \rangle = g\langle f, a' \rangle$ est sommable , donc (prop.1) gf est faiblement sommable .

COROLLAIRE .- *Si f est faiblement sommable , il en est de même de $\varphi_A f$ pour toute fonction caractéristique d'une partie mesurable A de E* .

L'intégrale $U(\varphi_A f)$ se note encore $\int_A f\, d\mu$, et s'appelle *l'intégrale de f dans l'ensemble A* .

PROPOSITION 4 .- *Soit f une fonction à valeurs dans F , telle que $f(E)$ soit contenu dans un ensemble convexe fermé $D \subset \hat{F}$; pour toute fonction numérique finie $g \geqslant 0$, sommable , non négligeable et telle que gf soit faiblement sommable , $U(gf)/U(g)$ appartient à D* .

En effet , D est l'intersection d'une famille de demi-espaces fermés $\langle x, a'_\alpha \rangle \leq 1$, où $a'_\alpha \in F'$; on a donc $\langle f, a'_\alpha \rangle \leq 1$ pour tout α , d'où $\langle gf, a'_\alpha \rangle \leq g$, ce qui entraîne $U(\langle gf, a'_\alpha \rangle) \leq U(g)$, ou encore , d'après (1) $\langle U(gf)/U(g), a'_\alpha \rangle \leq 1$ pour tout α , d'où la proposition .

PROPOSITION 5 .- *Si E a une mesure finie , et si $\mathfrak{F}$ est un filtre sur $\mathcal{L}$, qui converge uniformément dans E* (pour la topologie faible sur F) *vers une fonction f , f est faiblement sommable et on a*

$$U(f) = \lim_{\mathfrak{F}} U(g) \tag{3}$$

En effet , pour tout $a' \in F'$, l'image de $\mathfrak{F}$ par l'application $g \to \langle g, a' \rangle$ est une base de filtre formée de fonctions numériques sommables , qui est uniformément convergente dans E ; comme μE est finie , la limite $\langle f, a' \rangle$ de cette base de filtre est sommable et on a $U(\langle f, a' \rangle) = \lim_{\mathfrak{F}} U(\langle g, a' \rangle)$; cela montre que f est faiblement sommable et que , suivant le filtre $\mathfrak{F}$, $U(g)$ a une limite égale à $U(f)$.

PROPOSITION 6 .- Soit (f_n) une suite de fonctions faiblement sommables , qui converge simplement dans E vers une fonction f (pour la topologie faible dans F) ; si , pour tout $a' \in F'$, il existe une fonction numérique sommable $g_{a'} \geqslant 0$ telle que $|\langle f_n, a'\rangle| \leqslant g_{a'}$ pour tout n , f est faiblement sommable et on a (pour la topologie faible dans $\hat{F}$)

(4) $$U(f) = \lim_{n\to\infty} U(f_n) .$$

En effet , le th. de Lebesgue (chap.III, § 1, th.3) montre que pour tout $a' \in F'$, $\langle f, a'\rangle$, qui est la limite simple de la suite de fonctions numériques sommables $\langle f_n, a'\rangle$, est sommable ; donc (prop.1) f est faiblement sommable ; en outre , on a , pour tout $a' \in F'$, $U(\langle f, a'\rangle) = \lim_{n\to\infty} U(\langle f_n, a'\rangle)$, ce qui s'écrit , d'après (1) et la continuité de $\langle x, a'\rangle$ dans $\hat{F}$, $\langle U(f), a'\rangle = \langle \lim_{n\to\infty} U(f_n), a'\rangle$; comme a' est arbitraire dans F' , on a la relation (4).

COROLLAIRE .- Si (A_n) est une suite croissante de parties mesurables de E, A la réunion des A_n , on a , dans $\hat{F}$

(5) $$\lim_{n\to\infty} \int_{A_n} f\, d\mu = \int_A f\, d\mu .$$

En effet , pour tout $a' \in F'$, on a $|\langle f\varphi_{A_n}, a'\rangle| \leqslant |\langle f, a'\rangle|$, et cette dernière fonction numérique est sommable par hypothèse .

On en conclut que la fonction additive d'ensemble $A \to \int_A f\, d\mu$ à valeurs dans $\hat{F}$, est complètement additive .

A d'autres points de vue , l'intégrale faible s'écarte de l'intégrale des

2 fonctions numériques . En premier lieu , on peut avoir $U(|\langle f, a'\rangle|) = 0$ pour tout $a' \in F'$ bien que $f(t) \neq 0$ pour tout $t \in E$.

Par exemple , prenons pour F un espace hilbertien ayant une base orthonormale (e_t) équipotente à $[0,1]$, pour E l'ensemble $[0,1]$, pour μ la mesure de Lebesgue . Soit f la fonction définie dans E , à valeurs dans F , telle que $f(t) = e_t$; on a ici $F' = F$, et tout $a' \in F'$ s'écrit $a' = \sum_t \lambda_t e_t$, où $\lambda_t = 0$ sauf pour une infinité dénombrable de valeurs de t , et $\sum_t \lambda_t^2 < +\infty$; on en déduit que $\langle f(t), a'\rangle = \lambda_t$ est nulle sauf pour une infinité dénombrable de valeurs de t , et par suite sommable et telle que $U(|\langle f, a'\rangle|) = 0$, bien que $f(t) \neq 0$ partout.

Toutefois , s'il existe dans F' une famille <u>dénombrable</u> (a'_n) telle que les relations $\langle x,a'_n\rangle=0$ pour tout n entraînent $x=0$ dans F , chacune des relations $U(|\langle f,a'_n\rangle|)=0$ entraîne $\langle f(t),a'_n\rangle=0$ sauf dans un ensemble H_n de mesure nulle ; ces relations ont donc lieu simultanément dans le complémentaire de la réunion H des H_n , et par suite on a $f(t)=0$ dans le complémentaire de H , c'est-à-dire presque partout .

Le théorème de Lebesgue-Fubini ne peut non plus s'étendre sans modification à l'intégrale faible ; en effet , si f est une fonction faiblement sommable dans un ensemble $E=E_1\times E_2$, pour une mesure $\mu=\mu_1\mu_2$ produit d'une mesure μ_1 sur E_1 et d'une mesure μ_2 sur E_2 , il se peut que , pour <u>aucun</u> $t_1\in E_1$, la fonction partielle $t_2\to f(t_1,t_2)$ ne soit faiblement sommable pour la mesure μ_2 . On a seulement la proposition plus faible suivante :

PROPOSITION 7 .- <u>Si f est faiblement sommable pour la mesure</u> $\mu_1\mu_2$ <u>et si</u> , <u>pour presque tout</u> $t_1\in E_1$, <u>la fonction</u> $t_2\to f(t_1,t_2)$ <u>est faiblement sommable pour la mesure</u> μ_2 , <u>alors la fonction</u> $g(t_1)=\int f(t_1,t_2)d\mu_2$, <u>définie presque partout , à valeurs dans</u> $\hat{F}$, <u>est faiblement sommable pour la mesure</u> μ_1 , <u>et on a</u> $\int g(t_1)d\mu_1=\int f(t_1,t_2)d\mu_1 d\mu_2$.

En effet , pour tout $a'\in F'$, il ~~XXXXXX~~ résulte de l'hypothèse et de l'identité (1) que $\langle g(t_1),a'\rangle=\int\langle f(t_1,t_2),a'\rangle d\mu_2$ presque partout ; le th. de Lebesgue-Fubini appliqué à la fonction sommable (pour la mesure $\mu_1\mu_2$) $\langle f(t_1,t_2),a'\rangle$ prouve que $\langle g(t_1),a'\rangle$ est sommable pour la mesure μ_1 ; donc g est faiblement sommable (prop.1) pour μ_1 et on a $\langle\int g(t_1)d\mu_1,a'\rangle=$ $=\int\langle g(t_1),a'\rangle d\mu_1=\int\langle f(t_1,t_2),a'\rangle d\mu_1 d\mu_2=\langle\int f(t_1,t_2)d\mu_1 d\mu_2,a'\rangle$; comme cette relation a lieu pour tout $a'\in F'$, $\int g(t_1)d\mu_1=\int f(t_1,t_2)d\mu_1 d\mu_2$.

<u>3 . Intégrales de fonctions prenant leurs valeurs dans un espace de Banach</u>.

Supposons maintenant que F soit un <u>espace de Banach</u> , et F' un sous-espace fortement fermé du <u>dual fort</u> F^* de F (tel que la relation $\langle x,a'\rangle=0$ pour tout $a'\in F'$ entraîne $x=0$). On a alors la proposition suivante :

PROPOSITION 8 (Dunford). - Pour toute fonction faiblement sommable f à valeurs dans F, l'application $a' \to \langle f,a'\rangle$ de l'espace normé F' dans Λ_f est continue, et U(f) appartient au dual fort $F'' \supset F$ de l'espace normé F'.

Nous allons voir que le graphe de l'application $a' \to \langle f,a'\rangle$ dans $F' \times \Lambda_f$ est fermé ; comme F' et Λ_f sont des espaces complets, il en résultera que l'application précédente est continue (Esp.vect.top., chap.III). Or, si (a'_n) est une suite d'éléments de F qui converge vers a', et est telle que les fonctions numériques $g_n = \langle f,a'_n\rangle$ tendent dans Λ_f vers une fonction g, il existe une suite partielle (g_{n_k}) telle que $g_{n_k}(t) = \langle f(t),a'_{n_k}\rangle$ tende presque partout vers g(t) ; mais $\langle f(t),a'_n\rangle$ tend partout vers $\langle f(t),a'\rangle$, donc on a $g(t) = \langle f(t),a'\rangle$ presque partout, ce qui établit notre assertion. Cela étant, il existe un nombre k(f) tel que $U(|\langle f,a'\rangle|) \leq k(f)\|a'\|$, et a fortiori $|U(\langle f,a'\rangle)| \leq k(f)\|a'\|$; comme $U(\langle f,a'\rangle) = \langle U(f),a'\rangle$, la forme linéaire $a' \to \langle U(f),a'\rangle$ est continue dans F', ce qui montre que U(f) appartient au dual fort de F'.

COROLLAIRE. - Si F est le dual fort d'un espace de Banach F', U(f) appartient à F pour toute fonction faiblement sommable f à valeurs dans F.

4. Fonctions fortement sommables.

Supposons maintenant que F soit un espace de Banach, F' son dual. Pour toute fonction f à valeurs dans F et définie dans E, posons $N(f) = U^*(\|f\|)$, et soit $\mathcal{F}_0$ la partie de $\mathcal{F}$ formée des f telles que $N(f) < +\infty$; il est immédiat que $\mathcal{F}_0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}$, puisque $N_{a'}(f) \leq \|a'\|N(f)$ pour tout $a' \in F'$; en outre, sur $\mathcal{F}_0$, N(f) est une semi-norme et la topologie induite par cette semi-norme est plus fine que celle induite par la topologie de $\mathcal{F}$. Cela étant, il est clair que l'ensemble $\mathcal{L}_0$ est contenu dans $\mathcal{F}_0$; son adhérence $\mathcal{L}^1(F)$ (ou simplement $\mathcal{L}^1$) dans $\mathcal{F}_0$ (pour la topologie définie par N(f)) est donc contenue dans $\mathcal{L}(F)$; nous dirons que les fonctions $f \in \mathcal{L}^1$ sont fortement sommables (pour la mesure μ).

Soit $f=\sum_i f_i a_i$ une fonction de $\mathcal{L}_0$; comme f prend ses valeurs dans un sous-espace de dimension finie de F , et que $\|x\|$ est une norme sur ce sous-espace , $\|f\|$ est sommable , et on a

(6) $$\|U(f)\| \leq U(\|f\|)$$

Autrement dit , U est une application <u>continue</u> de $\mathcal{L}_0$ (muni de la semi-norme N(f)) dans l'espace de Banach F ; elle se prolonge par suite (F étant séparé et <u>complet</u>) en une application linéaire continue de $\mathcal{L}^1$ dans F , que nous noterons pour le moment U_0 . Pour toute fonction $f \in \mathcal{L}^1$ et tout $a' \in F'$, $\langle f,a'\rangle$ est sommable et on a $U(|\langle f,a'\rangle|) \leq$ $\leq \|a'\| . U^*(\|f\|) = \|a'\| . N(f)$, donc $f \to \langle f,a'\rangle$ est une application continue de $\mathcal{L}^1$ (muni de la semi-norme N(f)) dans Λ_f (muni de la semi-norme $U(|f|)$). Comme $\langle U_0(f),a'\rangle = U(\langle f,a'\rangle)$ pour toute $f \in \mathcal{L}_0$, cette relation a encore lieu dans $\mathcal{L}^1$, par continuité ; on voit donc que toute fonction $f \in \mathcal{L}^1$ est <u>faiblement sommable</u> , son intégrale U(f) est identique à $U_0(f)$ et <u>appartient donc à</u> F; en outre , on a la proposition suivante :

PROPOSITION 9 .- <u>L'espace $\mathcal{L}^1$ est complet ; pour toute fonction f fortement sommable , il existe une suite (f_n) de fonctions de $\mathcal{L}_0$ qui converge vers f dans $\mathcal{L}^1$, et qui est telle que $f_n(t)$ tende</u> (dans F) <u>presque partout vers f(t) ; enfin , $\|f\|$ est sommable et on a l'inégalité</u> (6) .

En effet , soit (f_n) une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}_0$; on peut supposer (en extrayant au besoin une suite partielle) qu'on a $U(\|f_{n+1}-f_n\|) \leq 2^{-n}$, d'où on conclut (chap.III, § 1, prop.10) que la série de terme général $g_n(t) = \|f_{n+1}(t)-f_n(t)\|$ converge presque partout vers une fonction sommable g(t); comme F est complet , la suite $(f_n(t))$ converge presque partout vers une limite f(t) , et on a $\|f(t)-f_n(t)\| \leq \sum_{p=0}^{\infty} g_{n+p}(t)$, d'où $U^*(\|f-f_n\|) \leq \sum_{p=0}^{\infty} U(g_{n+p})$ ce qui montre que $f \in \mathcal{L}^1$, et que f est limite dans $\mathcal{L}^1$ de la suite (f_n). En outre , comme $\big|\|f_{n+1}\| - \|f_n\|\big| \leq \|f_{n+1}-f_n\|$, la suite $(\|f_n\|)$ est une suite de Cauchy dans Λ_f , donc $\|f\|$ est sommable , et $U(\|f\|)=\lim_{n\to\infty} U(\|f_n\|)$; l'inégalité (6) se prolonge donc par continuité .

COROLLAIRE .- <u>Si f est fortement sommable , il existe une suite</u> (f_n) <u>de fonctions étagées sur la phratrie des ensembles de mesure finie , qui converge vers f dans</u> $\mathcal{L}^1$ <u>, et est telle que</u> $f_n(t)$ <u>tende presque partout vers</u> $f(t)$.

En effet , l'ensemble des fonctions étagées considérées est partout dense dans $\mathcal{L}_0$; on peut donc appliquer le raisonnement de la prop.9 en prenant pour les f_n des fonctions étagées .

<u>Remarque</u> .- On notera que le choix des fonctions f_n fait dans la prop.9 est tel que toutes ces fonctions satisfassent à une inégalité de la forme $\|f_n(t)\|\leq g(t)$, où g est la fonction sommable $\sum_{n=1}^{\infty}\|f_{n+1}(t)-f_n(t)\|$.

PROPOSITION 10 .- <u>Soient</u> F,G <u>deux espaces de Banach , u une application linéaire fortement continue de</u> F <u>dans</u> G.<u>Pour toute</u> ~~XX~~ <u>fonction f fortement sommable à valeurs dans</u> F , u∘f <u>est une fonction fortement sommable</u> (à valeurs dans G) <u>et on a</u>

$$U(u\circ f)=u(U(f)) \quad (7)$$

En effet , pour toute fonction f à valeurs dans F , on a $\|u\circ f\|\leq\|u\|.\|f\|$, d'où $U^*(\|u\circ f\|)\leq\|u\|.U^*(\|f\|)$; pour toute $f\in\mathcal{F}_0(F)$, on a donc $u\circ f\in\mathcal{F}_0(G)$, et l'application linéaire $f\to u\circ f$ est continue dans $\mathcal{F}_0(F)$; comme la proposition est évidente dans $\mathcal{L}_0(F)$, on voit que $f\to u\circ f$ applique $\mathcal{L}^1(F)$ dans l'adhérence $\mathcal{L}^1(G)$ de $\mathcal{L}_0(G)$, et la relation (7) est vraie par continuité.

La prop.3 s'étend aussitôt lorsqu'on y remplace les fonctions faiblement sommables par les fonctions fortement sommables ; il en est de même de la prop.5 (la topologie faible dans F étant remplacée par la topologie forte), en vertu de la relation $U^*(\|f-g\|)\leq\mu E.\sup_{t\in E}\|f(t)-g(t)\|$. La prop.6 s'étend aux fonctions fortement sommables de la façon suivante :

PROPOSITION 11 .- <u>Soit</u> (f_n) <u>une suite de fonctions fortement sommables</u> , qui converge simplement dans E vers une fonction f (pour la topologie forte de F) ; s'il existe une fonction numérique sommable $g \geqslant 0$ telle que $\|f_n\| \leq g$ pour tout n , f est fortement sommable , et la suite (f_n) converge vers f dans $\mathcal{L}^1$.

En effet , on a $\|f_n - f_m\| \leq 2g$ quels que soient m et n ; la suite double $(\|f_m - f_n\|)$ de fonctions numériques sommables converge simplement vers 0, donc le th. de Lebesgue (chap.III, § 1, th.3) montre que $\lim_{m\to\infty, n\to\infty} U(\|f_m - f_n\|) = 0$; la suite (f_n) est donc une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}^1$, et la proposition découle alors aussitôt de la prop.9 .

COROLLAIRE .- Si (A_n) est une suite croissante de parties mesurables de E , A la réunion des A_n , on a (pour la topologie forte de F)

(8) $$\lim_{n\to\infty} \int_{A_n} f\, d\mu = \int_A f\, d\mu .$$

Les propriétés des fonctions fortement sommables se rapprochent plus de celles des fonctions sommables numériques que celles des fonctions faiblement sommables . En premier lieu , on a la proposition suivante :

PROPOSITION 12 .- Si f est fortement sommable , il existe un ensemble H E de mesure nulle telle que $f(\complement H)$ soit contenu dans un sous-espace vectoriel fermé de F engendré par un ensemble dénombrable .

En effet , la prop.9 montre qu'il existe une suite (f_n) de fonctions de $\mathcal{L}_0$ et un ensemble $H \subset E$ de mesure nulle , tels que $f_n(t)$ tende vers f(t) pour tout $t \in \complement H$; comme $f_n(t)$ prend ses valeurs dans un sous-espace de F de dimension finie , $f(\complement H)$ est contenu dans l'adhérence de la réunion de ces sous-espaces , qui est donc engendrée par la réunion de leurs bases , ensemble dénombrable .

COROLLAIRE .- Si f est une fonction fortement sommable telle que $U(\langle f, a' \rangle) = 0$ pour tout $a' \in F'$, f est nulle presque partout .

D'après la prop.12 , on peut se borner au cas où f(E) est contenu dans un sous-espace fermé V tel qu'il existe une partie dénombrable (a_n) de V , par tout dense dans V . Montrons que , pour tout entier $m>0$, on a $\|f(t)\| \leq \frac{3}{2m}$ presque partout (ce qui établira le corollaire) . Dans le cas contraire , comme V est réunion des boules de centre a_n et de rayon $1/2m$, il existerait un indice n tel que $\|a_n\|>1/m$ et que l'on ait $\|f(t)-a_n\| \leq 1/2m$ dans une partie A de E de mesure >0 . Soit $a'_n \in F'$ tel que $\|a'_n\|=1$ et $\langle a_n,a'_n\rangle=\|a_n\|$; on aurait , dans A $|\langle f(t)-a_n,a'_n\rangle| \leq 1/2m$, d'où $|\langle f(t),a'_n\rangle| \geq 1/2m$, et par suite $U(|\langle f,a'_n\rangle|) \geq \frac{\mu A}{2m} > 0$, contrairement à l'hypothèse .

Ce corollaire prouve donc que la fonction faiblement sommable donnée en exemple au n°1 , telle que $U(|\langle f,a'\rangle|)=0$ pour tout $a' \in F'$, bien que $f(t)\neq 0$ en tout point , n'est pas fortement sommable .

Le th. de Lebesgue-Fubini est ici valable sans aucune restriction ; de façon précise :

PROPOSITION 13 .- <u>Soit f une fonction fortement sommable dans $E_1 \times E_2$ pour la mesure $\mu_1\mu_2$; pour presque tout $t_1 \in E_1$, la fonction $t_2 \to f(t_1,t_2)$ est fortement sommable pour la mesure μ_2 , la fonction $g(t_1)=\int f(t_1,t_2)d\mu_2$ définie presque partout , est fortement sommable pour la mesure μ_1 , et on a</u>

$$\int d\mu_1 \int f(t_1,t_2)d\mu_2 = \int f(t_1,t_2)d\mu_1 d\mu_2 . \tag{9}$$

En effet , soit (f_n) une suite de fonctions de $\mathcal{L}_0$ qui converge vers f dans $\mathcal{L}^1$ et soit telle que la suite $(f_n(t_1,t_2))$ converge vers $f(t_1,t_2)$ sauf dans un ensemble A de mesure-$\mu_1\mu_2$ nulle ; on peut supposer en outre qu'il existe une fonction sommable numérique $h(t_1,t_2)$ telle que $\|f_n(t_1,t_2)\| \leq h(t_1,t_2)$ pour tout n . La proposition est une conséquence évidente du th. de Lebesgue-Fubini pour f_n , donc , pour chaque n , il existe un ensemble H_n de mesure-μ_1 nulle, tel que , pour $t_1 \notin H_n$, $f_n(t_1,t_2)$ soit fortement sommable pour la mesure μ_2 ; d'autre part , d'après le th. de Lebesgue-Fubini , l'ensemble K des $t_1 \in E_1$ tels que la coupe $A(t_1)$ soit de mesure-μ_2 non nulle , est de mesure-μ_1 nulle . Si H est l'ensemble de mesure-μ_1 nulle réunion des H_n et de K , on voit que , pour $t_1 \notin H$, $f_n(t_1,t_2)$ est fortement sommable et converge presque partout (pour la mesure μ_2) vers $f(t_1,t_2)$; comme $\|f_n(t_1,t_2)\| \leq h(t_1,t_2)$ pour tout n , et qu'on peut supposer $h(t_1,t_2)$ sommable (pour μ_2) pour chaque $t_1 \notin H$ (en ajoutant au besoin un ensemble de mesure-$_1$ nulle à H) , la prop.11 montre que , pour $t_1 \notin H$, $f(t_1,t_2)$ est fortement sommable pour la mesure μ_2 et que $g_n(t_1) = \int f_n(t_1,t_2)d\mu_2$ tend vers $g(t_1) = \int f(t_1,t_2)d\mu_2$. On a en outre , d'après (6) , $\|g_n(t_1)\| \leq \int h(t_1,t_2)d\mu_2$, et cette dernière fonction est sommable (pour μ_1) d'après le th. de Lebesgue-Fubini ; la prop.12 montre donc que $g(t_1)$ est fortement sommable , et qu'on a

$$\int g(t_1)d\mu_1 = \lim_{n\to\infty} \int g_n(t_1)d\mu_1 = \lim_{n\to\infty} \int d\mu_1 \int f_n(t_1,t_2)d\mu_2 = \lim_{n\to\infty} \int f_n(t_1,t_2)d\mu_1 d\mu_2 =$$
$$= \int f(t_1,t_2)d\mu_1 d\mu_2 \text{ .}$$

Supposons plus particulièrement que F soit le <u>dual fort</u> d'un espace de Banach F' ; nous allons voir que , dans certains cas , on peut conclure de la sommabilité faible à la sommabilité forte pour une fonction~~s~~ à valeurs dans F .

PROPOSITION 14 (Pettis) .- <u>Si E est mesurable et s'il existe un ensemble dénombrable fortement dense dans F</u> , <u>toute fonction bornée faiblement sommable</u> (à valeurs dans F) <u>est fortement sommable sur tout ensemble de mesure finie</u> .

En effet , on sait alors qu'il existe un ensemble dénombrable (a'_n) fortement dense dans F' . Montrons d'abord que si f est faiblement sommable , $\|f\|$ est une fonction <u>mesurable</u> ; comme E est mesurable , il suffit de prouver que , pour tout $\alpha > 0$, l'ensemble A des $t \in E$ tels que $\|f(t)\| \leq \alpha$ est mesurable . Or , $\|f(t)\|$ est par définition la borne supérieure de l'ensemble des $\langle f(t),x'\rangle$ lorsque x' parcourt la boule $\|x'\| \leq 1$; comme les a'_n sont denses dans F' et l'application $x' \to \langle f(t),x'\rangle$ continue dans F' , $\|f(t)\|$ est aussi la borne supérieure de l'ensemble des $\langle f(t),a'_n\rangle$ pour les a'_n tels que $\|a'_n\| \leq 1$; donc A est l'intersection des ensembles A_n , où A_n est l'ensemble des t tels que $\langle f(t), a'_n \rangle \leq \alpha$, et n est tel que $\|a'_n\| \leq 1$; ce qui prouve que A est mesurable .

Cela étant , pour tout entier $n > 0$, il existe une suite $(a_{kn})_{k \geq 1}$ telle que tout point $x \in F$ soit contenu dans une boule ouverte de centre a_{kn} et de rayon $1/n$ (pour un k convenable) . Soit B_{kn} l'ensemble des $t \in E$ tels que $\|f(t) - a_{kn}\| < 1/n$; d'après la première partie de la démonstration , B_{kn} est mesurable ; si on pose $C_{kn} = B_{kn} \cap \complement (\bigcup_{i<k} B_{in})$, C_{kn} est mesurable , et les C_{kn} non vides forment une partition de E ; si on pose $f_n(t) = a_{kn}$ pour $t \in C_{kn}$, on a donc $\|f(t) - f_n(t)\| \leq 1/n$ pour tout $t \in E$.

Comme f est bornée , il en est de même de f_n ; d'autre part , si on pose $g_{kn}(t) = f_n(t)$ pour $t \in C_{in}$ avec $i \leq k$, $g_{kn}(t) = 0$ dans les C_{in} d'indice $> k$, g_{kn} est fortement sommable et tend vers f_n en restant bornée , dans toute partie de E de mesure finie ; d'après la prop.11 , f_n est fortement sommable dans tout ensemble de mesure finie , et il en est de même de f d'après l'analogue de la prop.5 pour les fonctions cortement sommables .

Remarque .- L'exemple donné au n°1 de fonction faiblement bornée sommable et non fortement sommable montre que la prop.14 n'est plus exacte lorsqu'on ne suppose plus qu'il existe dans F un ensemble dénombrable partout dense . De même , l'hypothèse que f est bornée est essentiell pour la validité de la prop.14 . Prenons par exemple pour E l'intervalle $[0,1]$ avec la mesure de Lebesgue , pour F un espace hilbertien ayant une base orthonormale dénombrable (e_n) ; prenons $f(t) = \frac{2^n}{n} e_n$ dans l'intervalle $\left] \frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}} \right] = A_n$; pour tout $a' = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n e_n \in F' = F$, avec $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^2 < +\infty$; on a $\left| \int_0^1 \langle f(t), a' \rangle dt \right| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \gamma_n \right| \leq \sqrt{\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^2\right)} < +\infty$ donc f est faiblement sommable et $\int_0^1 f(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e_n$; mais f n'est pas fortement sommable , car on a $\int_0^1 \|f(t)\| dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$. On montre de la même manière que si E a une mesure infinie , il y a des fonctions faiblement sommables et bornées , à valeurs dans l'espace hilbertien F , qui ne sont pas fortement sommables .

ANNEXE II
L'ESPACE DE KAKUTANI
ET LA CLASSIFICATION DES MESURES.

1 . Les théorèmes de Stone .

Nous dirons qu'un ensemble réticulé E est un réseau booléien si : 1° E admet un plus petit élément α et un plus grand élément ω ; 2° pour tout $x \in E$, il existe un élément $x^* \in E$ tel que $\inf(x,x^*)=\alpha$ et $\sup(x,x^*)=\omega$; 3° quels que soient x,y,z dans E , on a $\inf(z,\sup(x,y))=\sup(\inf(x,z),\inf(y,z))$ et $\sup(z,\inf(x,y))=\inf(\sup(x,z),\sup(y,z))$ (distributivité de chacune des lois sup , inf par rapport à l'autre).

On voit aussitôt que pour tout $x \in E$, il existe un seul élément x^* tel que $\inf(x,x^*)=\alpha$ et $\sup(x,x^*)=\omega$; en effet , si x' et x'' sont deux éléments satisfaisant à ces relations , on a $x''=\inf(x'',\omega)=\inf(x'',\sup(x,x'))=$ $=\sup(\inf(x,x''),\inf(x',x''))=\sup(\alpha,\inf(x',x''))=\inf(x',x'')$, c'est-à-dire $x'' \leq x'$, et on prouve de même que $x' \leq x''$, donc $x''=x'$. L'unique élément x^* de E ainsi déterminé est appelé le complément de x dans E ; on a évidemment $(x^*)^*=x$; $\alpha^*=\omega$, $\omega^*=\alpha$. En raison de la distributivité , on vérifie aussitôt que $(\sup(x,y))^*=\inf(x^*,y^*)$.

Nous dirons qu'une partie non vide F de E est un préfiltre si elle possède les trois propriétés suivantes : 1° $\alpha \notin F$; 2° si $x \in F$, la relation $x \leq y$ entraîne $y \in F$; 3° si $x \in F$ et $y \in F$, $\inf(x,y) \in F$. Un préfiltre sera dit maximal s'il n'est contenu dans aucun préfiltre qui en soit distinct . Il est immédiat que l'ensemble $\mathfrak{F}$ des préfiltres sur E , ordonné par inclusion , est inductif , la réunion d'un ensemble totalement ordonné de préfiltres étant un préfiltre ; donc , d'après le th. de Zorn :

PROPOSITION 1 .- Tout préfiltre dans un réseau booléien E est contenu dans un préfiltre maximal .

PROPOSITION 2 .- Si U est un préfiltre maximal et si $x \notin U$, on a $x^* \in U$.

Remarquons d'abord que si $\inf(x,y)=\alpha$, on a $y \leq x^*$, car on a $x^*=\sup(x^*,\alpha)$

$=\sup(x^*,\inf(x,y))=\inf(\sup(x,x^*),\sup(y,x^*))=\inf(\omega,\sup(y,x^*))=\sup(y,x^*)$; si on montre qu'il existe dans U un y tel que $\inf(x,y)=\alpha$, il en résultera que $x^*\in U$. Or, dans le cas contraire, l'ensemble F des éléments $z\in E$ tels que $z\geqslant\inf(x,y)$ pour un $y\in U$ au moins serait un préfiltre : en effet, il satisferait visiblement aux deux premières conditions de la définition de ces derniers, et si on a $z\geqslant\inf(x,y)$, $z'\geqslant\inf(x,y')$, on a $\inf(z,z')\geqslant$ $\geqslant\inf(x,\inf(y,y'))$ avec $\inf(y,y')\in U$. Mais F serait un préfiltre contenant U et distinct de U, ce qui est absurde.

THÉORÈME 1 (Stone). – <u>Soient</u> E <u>un réseau booléien</u>, Ω <u>l'ensemble des préfiltres maximaux sur</u> E. <u>Si, à tout</u> $x\in E$, <u>on fait correspondre l'ensemble</u> A_x <u>des préfiltres maximaux</u> U <u>tels que</u> $x\in U$, <u>on définit une application biunivoque</u> $x\rightarrow A_x$ <u>de</u> E <u>dans</u> $\mathfrak{P}(\Omega)$, <u>telle que</u> $A_{x^*}=\complement A_x$, $A_{\inf(x,y)}=A_x\cap A_y$ <u>et</u> $A_{\sup(x,y)}=A_x\cup A_y$.

Tout d'abord, si $x\neq y$, on a $\inf(x,y^*)\neq\alpha$ ou $\inf(y,x^*)\neq\alpha$; supposons par exemple que $\inf(y,x^*)\neq\alpha$; alors l'ensemble F des majorants de $\inf(y,x^*)$ est un préfiltre ; si U est un préfiltre maximal contenant F, on a $y\in U$ mais $x\notin U$ puisque $\inf(x,\inf(y,x^*))=\alpha$; donc $A_x\neq A_y$. La relation $A_{x^*}=\complement A_x$ est une autre expression de la prop. 2 ; la relation $A_{\inf(x,y)}=A_x\cap A_y$ signifie que pour un préfiltre maximal U, la relation $\inf(x,y)\in U$ est équivalente à "$x\in U$ et $y\in U$", ce qui est évident ; enfin la relation $A_{\sup(x,y)}=A_x\cup A_y$ se déduit des deux précédentes par passage aux complémentaires et utilisation de la relation $(\sup(x,y))^*=\inf(x^*,y^*)$.

Nous <u>identifierons</u> désormais E au réseau booléien (pour la relation d'inclusion) formé des ensembles A_x dans $\mathfrak{P}(\Omega)$; on remarquera qu'on a $A_\alpha=\emptyset$ et $A_\omega=\Omega$.

Cela étant, à chaque <u>partition finie</u> $\varpi=(A_i)$ de Ω, formée d'ensembles appartenant à E, faisons correspondre, dans $\Omega\times\Omega$, l'ensemble $C_\varpi=$ $=\bigcup_i(A_i\times A_i)$; on sait que $\overset{2}{C}=\overset{-1}{C}=C$; en outre, si $\varpi'=(B_j)$ est une seconde partition finie de Ω en ensembles appartenant à E , $\varpi''=(A_i \cap B_j)$ en est une troisième , et on a $C_{\varpi''}=C_{\varpi} \cap C_{\varpi'}$. Lorsque ϖ parcourt l'ensemble $\mathcal{P}$ des partitions finies de Ω en ensembles appartenant à E , les C_{ϖ} forment donc une <u>base du filtre d'entourages</u> d'une structure uniforme $\mathcal{U}$ sur Ω .

PROPOSITION 3 .- <u>L'espace uniforme obtenu en munissant Ω de la structure $\mathcal{U}$ est précompact</u> .

Il est immédiat que Ω est <u>séparé</u> : car si u et v sont deux éléments distincts de Ω , c'est-à-dire deux préfiltres maximaux distincts sur E , il y a un $x \in E$ tel que $x \in u$ et $x \notin v$ par exemple , c'est-à-dire $u \in A_x$ et ~~XX~~ $v \notin A_x$; en d'autres termes , si ϖ est la partition de Ω formée de A_x et de $\complement A_x$, on a $(u,v) \notin C_{\varpi}$. D'autre part , pour toute partition $\varpi=(A_i)$ appartenant à $\mathcal{P}$, les A_i sont <u>petits d'ordre</u> C_{ϖ} et forment un recouvrement de Ω , donc Ω est précompact .

THÉORÈME 2 (Stone) .- <u>L'espace compact $\hat{\Omega}$, complété de Ω , est totalement discontinu ; pour qu'une partie de $\hat{\Omega}$ soit un ensemble à la fois ouvert et fermé dans $\hat{\Omega}$, il faut et il suffit qu'il soit de la forme $\bar{A}$, où A appartient au réseau booléien E ; l'application $A \rightarrow \bar{A}$ est une application biunivoque de E sur le réseau booléien des ensembles à la fois ouverts et fermés dans $\hat{\Omega}$ telle que</u> $\overline{\complement A}=\complement \bar{A}$, $\overline{A \cap B}=\bar{A} \cap \bar{B}$, $\overline{A \cup B}=\bar{A} \cup \bar{B}$.

Montrons d'abord que pour tout $A \in E$, $\bar{A}$ est ouvert dans $\hat{\Omega}$ (et par suite ouvert et fermé) ; en effet , si ϖ est la partition de Ω formée de A et de $B=\complement A$, on a $C_{\varpi}(A)=A$ et $C_{\varpi}(B)=B$; il n'existe donc aucun couple (x,y) tel que $x \in A$ et $y \in B$, qui soit ~~XXXXX~~ dans C_{ϖ}; cela entraîne qu'il n'existe aucun point de $\hat{\Omega}$ adhérent à la fois à A et B , autrement dit qu'on a $\bar{A} \cap \bar{B}=\emptyset$; comme $\hat{\Omega}=\bar{A} \cup \bar{B}$, on voit que $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont à la fois ouverts et fermés . Etant donnée la définition des voisinages des points de $\hat{\Omega}$, cela montre aussitôt que $\hat{\Omega}$ est totalement discontinu . Montrons maintenant que, réciproquement , tout ensemble $G \subset \hat{\Omega}$, à la fois ouvert et fermé dans $\hat{\Omega}$, est de la forme $\bar{A}$, où $A\in E$. En effet , pour tout point $x\in G$, il existe un ensemble V_x , adhérence d'un ensemble de E , qui soit un voisinage de x contenu dans G ; comme G est compact , il existe un recouvrement de G par un nombre <u>fini</u> d'ensembles V_x , et comme les V_x sont contenus dans G , G est réunion de ces ensembles , donc est bien de la forme $\bar{A}$, où $A\subset E$. Il est immédiat que si $A\in E$ et $B=\complement A$ (dans Ω) , on a $\bar{B}=\complement\bar{A}$ (dans $\hat{\Omega}$) d'après ce qu'on a vu plus haut ; on en déduit que si A et B sont quelconques dans E , $\overline{A\cap B}=\bar{A}\cap\bar{B}$, en passant aux complémentaires ; de là résulte enfin que l'application $A\to\bar{A}$ est biunivoque , car si $A\neq B$ et $D=A\cap B$, on peut écrire $A=D\cup A_1$, $B=D\cup B_1$, où l'un au moins des ensembles A_1,B_1 n'est pas vide , et $A_1\cap B_1=\emptyset$; on a par suite $\bar{A}_1\cap\bar{B}_1=\emptyset$, ce qui prouve que $\bar{A}\neq\bar{B}$, et achève la démonstration .

Nous dirons que l'espace compact $\hat{\Omega}$ défini par la méthode précédente est <u>l'espace compact associé au réseau booléien</u> E .

On peut démontrer que l'espace $\hat{\Omega}$ est entièrement <u>caractérisé</u> , à une homéomorphie près , par le fait que le réseau booléien de ses sous-ensembles à la fois ouverts et fermés ait une structure d'ordre isomorphe à celle de E . En d'autres termes , si deux espaces compacts totalement discontinus sont tels que les réseaux booléiens de leurs ensembles ouverts et fermés soient isomorphes , ces espaces sont homéomorphes .

<u>2 . L'espace de Kakutani associé à une forme linéaire croissante</u> .

Soit A un <u>anneau de Riesz</u> (chap.II, § 4) possédant un <u>élément unité</u> e ; nous supposerons en outre que les éléments de A sont <u>bornés</u> , c'est-à-dire que pour tout $x\in A$, il existe un nombre $\lambda>0$ tel que $|x|\leq\lambda e$. Soit U une <u>forme linéaire croissante</u> sur A , telle que la relation $U(x^2)=0$ entraîne $x=0$; comme , pour tout $y\in A^+$, il existe λ tel que $y\leq\lambda e$, on a , pour tout $x\in A$, $|U(yx)|\leq U(\lambda|x|)=\lambda U(|x|)$; par ailleurs $U(x)=U(ex)$ pour tout $x\in A$, donc la topologie définie sur A par les semi-normes U_y (chap.II, § 4) est ici une topologie d'espace <u>normé</u> , définie par la norme $\|x\|_1=$

$=U(|x|)$; comme au chap.II, § 4 , nous désignerons par A_U le <u>complété</u> de cet espace normé . La forme linéaire croissante U se prolonge par continuité à l'espace de Riesz A_U , la norme dans A_U étant encore $\|y\|_1=U(|y|)$; on sait en outre que pour tout $y\in A$, l'application $x\to xy$ de A dans lui-même se prolonge par continuité à A_U ; en particulier $ex=x$ pour tout $x\in A_U$. Mais ici , on a une propriété supplémentaire : désignons en effet par B_U la partie de A_U formée des z tels qu'il existe $\lambda>0$ satisfaisant à $|z|\leq\lambda e$; il est immédiat que B_U est un sous-espace de Riesz de A_U ; mais en outre , pour tout $z\in B_U$, l'application $x\to xz$ de A dans A_U est <u>continue</u> , car on a $|xz|\leq\lambda|x|$. Cette application peut donc se <u>prolonger par continuité</u> à A_U , autrement dit le produit zx est défini pour $z\in B_U$ et $x\in A_U$, et possède les mêmes propriétés que lorsque $z\in A$, en raison du principe de prolongement des identités ; en particulier , on voit ainsi que B_U est un <u>anneau de Riesz</u> , dont e est élément unité . On notera que dans B_U la relation $x^2=0$ entraîne $x=0$, car en vertu de l'inégalité de Schwarz , on a $U(e|x|)=0$, ou $U(|x|)=0$, c'est-à-dire $x=0$ par hypothèse . La relation $U(x^2)=0$ pour $x\in B_U$ entraînant $x^2=0$ (puisque $x^2\geq 0$) entraîne donc $x=0$.

Cela étant , soit $e=c_1+c_2$ une décomposition de e en deux éléments <u>étrangers</u> et ≥ 0 , qui appartiennent nécessairement à B_U ; on a $c_1c_2=0$ (chap.II, § 4,prop.1), donc $c_1=ec_1=c_1^2$, $c_2=ec_2=c_2^2$, c_1 et c_2 sont des <u>idempotents</u> dans l'anneau B_U . Inversement , soit $c=c^2$ un idempotent quelconque dans B_U ; on a $c\geq 0$, et comme $ec=c$, on a $(e-c)^2=e-c$, $e-c$ est aussi un idempotent , en particulier est ≥ 0 , donc $0\leq c\leq e$; enfin , on a $c(e-c)=0$, d'où $0\ (\inf(c,e-c))^2\leq c(e-c)=0$, ce qui entraîne $\inf(c,e-c)=0$, c et $e-c$ sont <u>étrangers</u> .

PROPOSITION 4 .- <u>L'ensemble $\mathcal{J}$ des idempotents de l'anneau B_U , ordonné par la relation $\leq$, est un réseau booléien</u> .

Montrons d'abord que si c_1 et c_2 sont deux idempotents , on a $\inf(c_1,c_2)=$

$=c_1c_2$; en effet , comme $c_1 \leq e$, $c_2 \leq e$, on a $c_1c_2 \leq c_1$, $c_1c_2 \leq c_2$; d'autre part $c_1(c_2-c_1c_2)$ donc (par le même raisonnement que ci-dessus) c_1 et $c_2-c_1c_2$ sont étrangers ; par suite , si on a à la fois $0 \leq x \leq c_1$ et $x \leq c_2 = (c_2-c_1c_2)+c_1c_2$, x est étranger à $c_2-c_1c_2$, donc $x \leq c_1c_2$, ce qui démontre notre assertion . En outre , on a $(c_2-c_1)^+=c_2-\inf(c_1,c_2)=c_2-c_1c_2$, d'où $\sup(c_1,c_2)=c_1+(c_2-c_1)^+=c_1+c_2-c_1c_2$. On vérifie aussitôt , à l'aide de ces formules , que chacune des lois sup et inf dans $\mathcal{I}$ est <u>distributive</u> par rapport à l'autre ; d'autre part , pour tout $c \in \mathcal{I}$, on a $\inf(c,e-c)=0$ comme on l'a vu ci-dessus , et $\sup(c,e-c)=c+e-c-c(e-c)=e$; comme 0 et e sont évidemment le plus petit et le plus grand élément de $\mathcal{I}$, on voit bien que $c'=e-c$ est un <u>complément</u> de c dans $\mathcal{I}$, ce qui achève la démonstration .

Le réseau booléien $\mathcal{I}$ n'est pas quelconque ; de façon précise :

PROPOSITION 5 .- <u>Le réseau booléien $\mathcal{I}$ est achevé</u> .

Il faut montrer que tout ensemble $F \subset \mathcal{I}$, filtrant pour la relation $\leq$, admet une borne supérieure <u>dans</u> $\mathcal{I}$. Comme il est majoré dans l'espace de Riesz cohérent A_U , il admet une borne supérieure c <u>dans</u> A_U , et on a évidemment $0 \leq c \leq e$; tout revient à montrer que c et $c'=e-c$ sont <u>étrangers</u> . Or , comme c est la limite de x suivant l'ensemble filtrant F , dans l'espace A_U , c' est la limite de $x'=e-x$, et aussi la borne inférieure de l'ensemble filtrant pour la relation $\geq$, que forment les x' ; comme $c' \leq x'$ c' est étranger à tout $x \in A$, et par suite à leur borne supérieure c , ce qui démontre la prop.5 .

Nous définirons à présent l'<u>espace de Kakutani</u> associé à la forme linéaire croissante U sur A , comme <u>l'espace compact</u> E <u>associé</u> au réseau booléien $\mathcal{I}$; par définition , il existe donc une application biunivoque $c \to R(c)$ du réseau booléien $\mathcal{I}$ sur le réseau booléien $\mathcal{R}$ (pour la relation $\subset$) des ensembles <u>à la fois ouverts et fermés</u> dans E , telle que $R(0)=\emptyset$, $R(e)=E$, $R(e-c)=\complement R(c)$, $R(\inf(c_1,c_2))=R(c_1)\cap R(c_2)$, $R(\sup(c_1,c_2))=R(c_1)\cup R(c_2)$ .Il revient au même de dire que l'application $c \to \varphi_{R(c)} = \theta_c$ est une application biunivoque strictement croissante de $\mathcal{J}$ sur le réseau booléien (pour la relation $\leq$) $K(\mathcal{R})$ des <u>fonctions caractéristiques</u> des ensembles à la fois ouverts et fermés dans E . Or , ces fonctions caractéristiques sont <u>continues</u> dans E ; nous nous proposons d'abord de montrer comment on peut <u>prolonger</u> l'application $c \to \theta_c$ en un <u>isomorphisme</u> de l'anneau B_U <u>sur</u> l'anneau $\mathcal{C}(E)$ de <u>toutes</u> les fonctions numériques continues dans E .

Soit x un élément ≥ 0 quelconque de l'espace A_U ; pour tout λ réel et ≥ 0, nous désignerons par x_λ l'élément $(\lambda e - x)^+$, et par $c(\lambda)$ la composante de e dans la <u>bande</u> (chap.II, § 1) engendrée par x_λ ; comme $e - c(\lambda)$ est étranger à $c(\lambda)$, $c(\lambda)$ est un <u>idempotent</u> de B_U , dont nous allons étudier les propriétés . La relation $\lambda \leq \mu$ entraîne $\lambda e - x \leq \mu e - x$, donc $x_\lambda \leq x_\mu$, et par suite $c(\lambda) \leq c(\mu)$, autrement dit , l'application $\lambda \to c(\lambda)$ est croissante dans R_+ .

<u>Lemme 1 .- Pour tout</u> $y \in A_U^+$, $c(\lambda)y$ <u>est la composante de</u> y <u>dans la bande engendrée par</u> x_λ .

En effet , si z est étranger à x_λ , il est étranger à $c(\lambda)$ par définition de $c(\lambda)$, d'où $c(\lambda)z = 0$, ou encore $z = (e - c(\lambda))z$; on a donc $c(\lambda)yz = 0$, $c(\lambda)y$ appartient bien par suite à la bande engendrée par x_λ ; d'autre part on a $(y - c(\lambda)y)x_\lambda = (e - c(\lambda))x_\lambda y = 0$ puisque $e - c(\lambda)$ est étranger à x_λ , donc $y - c(\lambda)y$ est étranger à x_λ , ce qui achève de démontrer le lemme .

Si c est un idempotent tel que $c \leq c(\lambda)$, on a $cx \leq \lambda c$, car on peut écrire $\lambda c - cx = c(\lambda e - x) = c(\lambda e - x)^+ \geq 0$, puisque c est étranger à $(\lambda e - x)^-$. De même , si $c \leq e - c(\lambda)$, on a $cx \geq \lambda c$, car on a $cx - \lambda c = c(x - \lambda e) = c(x - \lambda e)^+ \geq 0$, c étant cette fois disjoint de $(\lambda e - x)^+ = (x - \lambda e)^-$.

<u>Lemme 2 .- Si une suite</u> (u_n) <u>d'éléments</u> ≥ 0 <u>de</u> A_U <u>tend en croissant vers</u> u <u>, le composant</u> x'_n <u>de</u> x <u>dans la bande engendrée par</u> u_n <u>tend vers le composant</u> x' <u>de</u> x <u>dans la bande engendrée par</u> u .

En effet , on a $x' = \sup_m(\inf(mu, x))$ et $x'_n = \sup_m(\inf(mu_n, x))$, d'où $U(x' - x'_n) \leq$

$\leqq U(x'-\inf(mu_n,x))=U(x'-\inf(mu,x))+U(\inf(mu,x)-\inf(mu_n,x))$ pour tout $m>0$. On peut prendre m assez grand pour que $U(x'-\inf(mu,x))\leq\varepsilon$; m étant fixé, il résulte de la continuité de $\inf(u,v)$ dans $A_U\times A_U$ qu'il existe n_o tel que pour tout $n\geqslant n_o$, on ait $U(\inf(mu,x)-\inf(mu_n,x))\leq\varepsilon$; on aura donc $U(x'-x'_n)\leq 2\varepsilon$ pour tout $n\geqslant n_o$, ce qui établit le lemme.

<u>Lemme 3 .- La fonction croissante</u> $\lambda\to c(\lambda)$ <u>est continue à gauche dans</u> $[0,+\infty]$; <u>on a</u> $c(0)=0$ <u>et</u> $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} c(\lambda)=e$.

En effet, si $\lambda<\mu$, $c(\mu)-c(\lambda)$ est un idempotent, puisque $c(\lambda)\leq c(\mu)$, d'où $\inf(c(\lambda),c(\mu))=c(\lambda)c(\mu)=c(\lambda)$; on a d'autre part $c(\mu)-c(\lambda)\leq e-c(\lambda)$, d'où $\lambda(c(\mu)-c(\lambda))\leq c(\mu)x-c(\lambda)x$. Tout revient à prouver que le second membre de cette inégalité tend vers 0 lorsque λ tend vers μ en restant $<\mu$. Comme $c(\lambda)x$ est le composant de x dans la bande engendrée par $(\lambda e-x)^+$ (lemme 1) et que $(\lambda e-x)^+$ tend vers $(\mu e-x)^+$ lorsque λ tend vers μ, il résulte du lemme 2 que $c(\lambda)x$ tend vers $c(\mu)x$. La relation $c(0)=0$ est évidente, puisque $(-x)^+=0$; enfin, si e_o est la limite de $c(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$, e_o est un idempotent $\leq e$, et on a $e-e_o\leq e-c(\lambda)$ pour tout λ ; donc $(e-e_o)x\geqslant\lambda(e-e_o)$ pour tout λ ; on en tire $\lambda U(e-e_o)\leq U(x)$ pour tout $\lambda>0$, d'où $U(e-e_o)=0$ et par suite $e=e_o$.

Pour tout $x\in B_U$, il existe par hypothèse un $\lambda>0$ tel que $|x|\leqq\lambda e$; soit $\|x\|$ la <u>borne inférieure</u> des nombres $\lambda>0$ ayant cette propriété ; on vérifie aussitôt que $\|x\|$ est une <u>norme</u> sur B_U et qu'on a $|x|\leq\|x\|e$, d'où $U(|x|)=\|x\|_1\leq\|x\|U(e)$. De cette dernière relation suit aussitôt que B_U, muni de la norme $\|x\|$, est <u>complet</u> ; en effet, toute suite de Cauchy (x_n) dans cet espace est a fortiori une suite de Cauchy dans A_U muni de la norme $\|x\|_1$, donc converge (pour cette dernière norme) vers un élément x_o ; en outre, pour tout $\varepsilon>0$, il existe n_o tel que pour $m\geqslant n_o$ et $n\geqslant n_o$, on ait $\|x_m-x_n\|\leqq\varepsilon$, c'est-à-dire $|x_m-x_n|\leqq\varepsilon e$; faisant tendre x_m vers x_o (dans A_U) dans cette inégalité, il vient $|x_o-x_n|\leq\varepsilon e$, c'est-à-dire $\|x_o-x_n\|\leq\varepsilon$ pour tout

$n \geqslant n_0$, ce qui montre que $x_0 \in B_U$ et est la limite de la suite (x_n) pour la norme $\|x\|$.

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME 3 .- L'application $x \to \theta_x$ de $\mathcal{T}$ sur l'ensemble $K(\mathcal{R})$ des fonctions caractéristiques des ensembles ouverts et fermés dans E se prolonge d'une manière et d'une seule en une application linéaire continue de l'espace B_U (muni de la norme $\|x\|$) dans l'espace $\mathcal{C}(E)$ des fonctions numériques continues dans E (muni de la norme $\|u\| = \sup_{t \in E} |u(t)|$) ; cette application est un isomorphisme du premier de ces espaces normés sur le second , et un isomorphisme de la structure d'anneau de B_U sur celle de $\mathcal{C}(E)$.

Désignons par D_U l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de $\mathcal{T}$; c'est évidemment une sous-algèbre ~~XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX~~ de B_U ; nous allons d'abord prouver qu'on peut prolonger d'une seule manière l'application $x \to \theta_x$ en une application linéaire (notée encore $x \to \theta_x$) de D_U dans $\mathcal{C}(E)$. En effet , si $(c_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une suite finie quelconque d'éléments de $\mathcal{T}$, il existe un nombre fini $(d_k)_{1 \leq k \leq m}$ d'éléments de étrangers deux à deux , et tels que e et chacun des c_i soit somme d'un certain nombre des d_k ; car on peut écrire $e = \prod_{i=1}^{n} (c_i + (e - c_i)) = \sum_H d_H$, où H parcourt l'ensemble des parties de $[1,n]$, et d_H est égal au produit des c_i d'indice $i \in H$ et des $e - c_i$ d'indice $i \notin H$; il est immédiat que si H et K sont des parties distinctes de $[1,n]$, et si d_H et d_K sont $\neq 0$, ils sont étrangers; en outre , pour tout $i \in H$, $c_i d_H = d_H$ et pour tout $i \notin H$, $c_i d_H = 0$. Si on désigne par d_k $(1 \leq k \leq m)$ ceux des d_H qui sont $\neq 0$, on a donc $e = \sum_{k=1}^{m} d_k$ et $c_i = c_i e = \sum_{i \in H} c_i d_H = \sum_{i \in H} d_H$, ce qui démontre la proposition . On voit donc que tout élément de D_U peut s'écrire $x = \sum_k \alpha_k d_k$, où les $d_k \neq 0$ sont deux à deux étrangers ; on en déduit que $x^+ = \sum_k \alpha_k^+ d_k$, donc appartient à D_U , ce qui montre que D_U est un sous-anneau de Riesz de B_U .

Cela étant , à tout élément $x = \sum_i \lambda_i c_i$ de D_U , faisons correspondre dans

$\mathcal{C}(E)$ la fonction $\sum_i \lambda_i \theta_{c_i}$; il faut montrer que cette fonction ne dépend que de x , et non de son expression comme combinaison d'idempotents , ou encore que si $\sum_i \lambda_i c_i = 0$, on a $\sum_i \lambda_i \theta_{c_i} = 0$; or , on peut trouver m idempotents $d_k \neq 0$ étrangers deux à deux et tels que e et chacun des c_i soit somme d'un certain nombre des d_k , soit $c_i = \sum_{k=1}^{m} \varepsilon_{ik} d_k$ ($\varepsilon_{ik}=0$ ou 1) , d'où $0 = \sum_{k=1}^{m} \mu_k d_k$ avec $\mu_k = \sum_i \varepsilon_{ik} \lambda_i$; pour $h \neq k$, on a $d_h d_k = 0$, d'où $0 = \mu_k d_k$ pour $1 \leq k \leq m$, et par suite $\mu_k = 0$ pour tout k . Cela étant , les ensembles $R(d_k)$ sont deux à deux sans point commun , et dans $R(d_k)$ la fonction $\sum_i \lambda_i \theta_{c_i}$ a pour valeur $\sum_i \lambda_i \varepsilon_{ik} = \mu_k = 0$, puisque $R(c_i)$ est la réunion des $R(d_k)$ tels que $\varepsilon_{ik} = 1$; la fonction $\sum_i \lambda_i \theta_{c_i}$ est donc bien identiquement nulle dans E .

Soit donc θ_x l'unique fonction de $\mathcal{C}(E)$ correspondant ainsi à $x \in D_U$; il est clair que l'application $x \to \theta_x$ ainsi prolongée est <u>linéaire</u> ; elle est <u>biunivoque</u> , car le raisonnement qui précède montre qu'on peut toujours supposer x mis sous la forme $\sum_{k=1}^{m} \mu_k d_k$ où les d_k sont deux à deux étrangers ; dire que $\theta_x = 0$ signifie alors que la valeur μ_k de θ_x dans $R(d_k)$ est nulle pour tout k , autrement dit que x=0 . De même , on a $(\theta_x)^+ = \theta_{x^+}$, comme on le voit en exprimant x de la même manière ; donc $x \to \theta_x$ est <u>strictement croissante</u> . Enfin , on a $\|\theta_x\| = \|x\|$, car , en supposant toujours x mis sous la forme précédente , on a $\|x\| = \operatorname{Max}_k |\mu_k|$, car on a $|x| \leq \operatorname{Max}_k |\mu_k| \cdot \sum_{k=1}^{m} d_k \leq (\operatorname{Max}|\mu_k|)e$, et d'autre part , si $|x| \leq \lambda e$, on a aussi $|x d_k| \leq \lambda e d_k = \lambda d_k$, ce qui donne $|\mu_k| d_k \leq \lambda d_k$ pour tout k , ou $\operatorname{Max}_k |\mu_k| \leq \lambda$; d'autre part , il est évident que $\|\theta_x\| = \operatorname{Max}_k |\mu_k|$. L'application $x \to \theta_x$ est donc un <u>isomorphisme</u> de l'espace normé D_U dans l'espace normé $\mathcal{C}(E)$; pour montrer qu'elle se prolonge en un <u>isomorphisme de B_U sur</u> $\mathcal{C}(E)$, il suffira (<u>Top.gén.</u>, chap.II , § 3, prop.8) de montrer que D_U est <u>partout dense</u> dans B_U (pour la norme $\|x\|$) et l'image D'_U de D_U dans $\mathcal{C}(E)$ <u>partout dense</u> dans ce dernier espace .

Le second point est immédiat ; en effet , si u est une fonction numérique continue dans E , pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $t \in E$, il existe un voisinage V_t

de t , à la fois ouvert et fermé dans E , tel que l'oscillation de u dans V_t soit $\leq \varepsilon$; on peut recouvrir E par un nombre fini de V_{t_k} , et il existe alors un nombre fini d'ensembles à la fois ouverts et fermés W_i ($1 \leq i \leq n$) sans point commun deux à deux et tels que chacun des V_{t_k} soit réunion d'un certain nombre des W_i ; si λ_i est une des valeurs de u dans W_i , on a donc $\| u - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_{W_i} \| \leq \varepsilon$, et il est clair que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_{W_i}$ appartient à D_U .

Reste à prouver que D_U est partout dense dans B_U ; il suffira pour cela de montrer que , pour tout élément $x \geq 0$ de B_U et tout $\varepsilon > 0$, il existe $z \in D_U$ tel que $\| x - z \| \leq \varepsilon$. Or , soit $(\lambda_i)_{0 \leq i \leq n}$ une suite finie strictement croissante de nombres réels , telle que $\lambda_0 = 0$, $\lambda_i - \lambda_{i-1} \leq \varepsilon$ pour $1 \leq i \leq n$ et $\lambda_n = \| x \| + 1$. On a donc $\lambda_n e - x \geq e$, et par suite (lemme 1) $c(\lambda_n) x = x$. Considérons alors l'élément $z = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{i-1}(c(\lambda_i) - c(\lambda_{i-1}))$ de D_U ; comme $c(\lambda_i) - c(\lambda_{i-1}) \leq e - c(\lambda_{i-1})$, on a $\lambda_{i-1}(c(\lambda_i) - c(\lambda_{i-1})) \leq (c(\lambda_i) - c(\lambda_{i-1}))x$ pour $1 \leq i \leq n$, d'où $z \leq c(\lambda_n) x = x$; d'autre part , comme $c(\lambda_i) - c(\lambda_{i-1}) \leq c(\lambda_i)$, on a $(c(\lambda_i) - c(\lambda_{i-1}))x \leq \lambda_i (c(\lambda_i) - c(\lambda_{i-1})) \leq (\lambda_{i-1} + \varepsilon)(c(\lambda_i) - c(\lambda_{i-1}))$, d'où $x = c(\lambda_n) x \leq z + \varepsilon e$, ou encore $0 \leq x - z \leq \varepsilon e$, ce qui prouve que $x \to \theta_x$ est un isomorphisme de l'espace normé B_U sur l'espace normé $\mathcal{C}(E)$. Par continuité , on a encore $(\theta_x)^+ = \theta_{x^+}$ dans B_U . Enfin , pour voir que $x \to \theta_x$ est un isomorphisme de la structure d'<u>anneau</u> de B_U sur celle de $\mathcal{C}(E)$, il suffit de prouver que $\theta_{x^2} = (\theta_x)^2$ pour tout $x \in B_U$; or , cette relation est évidente pour $x \in D_U$ (en mettant x sous la forme $\sum_{k=1}^{n} \mu_k d_k$, où les d_k sont des idempotents deux à deux étrangers) ; d'autre part , on a , dans B_U , $\| xy \| \leq \| x \| \cdot \| y \|$, donc l'application $(x, y) \to xy$ de $B_U \times B_U$ dans B_U est continue , et a fortiori l'application $x \to x^2$ de B_U dans lui-même ; donc , par prolongement par continuité , on a bien $\theta_{x^2} = (\theta_x)^2$ pour tout $x \in B_U$.

C.Q.F.D.

Toute fonction continue $u \in \mathcal{C}(E)$ pouvant s'écrire d'une seule manière $u = \theta_x$, avec $x \in B_U$, on définit une <u>forme linéaire croissante</u> $\check{U}$ sur $\mathcal{C}(E)$, en posant $\tilde{U}(\theta_x)=U(x)$; cette forme linéaire se prolonge en une *intégrale de Radon* sur E ; nous désignerons par μ la mesure de Radon correspondante , de sorte qu'on peut écrire , pour tout $x\in B_U$, $U(x)=\int\theta_x d\mu$. Il est clair que l'on a $U(c)=\mu(R_c)$ pour tout idempotent $c\in\mathcal{J}$, et par suite que le *noyau* de la mesure μ est identique à E . Pour toute fonction $u\in\mathcal{C}(E)$, soit $\check{u}$ la classe de fonctions mesurables équivalentes à u dans l'espace de Riesz $L^1(E,\mu)$; l'application $u\to\check{u}$ est un *isomorphisme* de $\mathcal{C}(E)$ sur un sous-espace de Riesz $\check{B}_U$ de $L^1(E,\mu)$, car la relation $\int|u|\,d\mu=0$ entraîne $\check{u}=0$, puisque si $u=\theta_x$ elle équivaut à $U(|x|)=0$, donc à $x=0$. L'application $x\to\check{\theta}_x$ est donc un isomorphisme de l'espace de Riesz B_U sur l'espace de Riesz $\check{B}_U$, tel que $\|x\|_1=\|\check{\theta}_x\|_1$.

THÉORÈME 4 .- *L'isomorphisme $x\to\check{\theta}_x$ de B_U sur $\check{B}_U$ se prolonge d'une seule manière en une application linéaire continue de l'espace normé A_U* (pour la norme $\|x\|_1$) *sur l'espace normé $L^1(E,\mu)$* ; *cette application est un isomorphisme de la structure d'espace normé et de la structure d'espace de Riesz de A_U sur celles de $L^1(E,\mu)$* .

En effet , on sait que $\check{B}_U$ est partout dense dans $L^1(E,\mu)$; d'autre part, B_U est partout dense dans A_U : en effet , pour tout $y\geqslant 0$ dans A_U , on a $y=\sup_n x_n$, où $x_n=\inf(y,ne)\in B_U$, donc aussi $y=\lim_{n\to\infty} x_n$ pour la norme $\|x\|_1$. Il en résulte que $x\to\check{\theta}_x$ se prolonge d'une seule manière en un isomorphisme d'espace normé de A_U sur $L^1(E,\mu)$; cette isomorphisme est aussi un isomorphisme pour les structures d'espace de Riesz , car on a $\check{\theta}_{|x|}=|\check{\theta}_x|$ par continuité , et la relation $|x|=x$ dans un espace de Riesz est équivalente à $x\geqslant 0$.

COROLLAIRE .- *Pour toute fonction numérique u définie dans l'espace de Kakutani E , mesurable* (pour μ) *et bornée en mesure , il existe une fonction continue et une seule u_0 qui est égale à u presque partout* .

En effet , la classe $\check{u}=\check{\theta}_x$ de fonctions mesurables équivalentes à u étant majorée par une ~~XX~~ classe $\lambda\tilde{\theta}_e$, x est majoré par λe ; on voit de même que x est minoré par un élément $\lambda' e$, donc $x \in B_U$ et $\tilde{u} \in \tilde{B}_U$, d'où le corollaire puisque l'application $u \to \tilde{u}$ de $\mathcal{C}(E)$ sur $\tilde{B}_U$ est biunivoque .

En particulier , pour toute partie mesurable M de E , il existe un ensemble G ouvert et fermé dans E et tel que $\mu(M \cap \complement G) = \mu(G \cap \complement M) = 0$.

PROPOSITION 6 .- <u>Dans l'espace de Kakutani</u> E , <u>tout ensemble rare</u> (et par suite aussi tout ensemble <u>maigre</u>) <u>est de mesure nulle</u> .

Il suffit de le démontrer pour un ensemble rare <u>fermé</u> H . La fonction caractéristique φ_H étant semi-continue supérieurement , est mesurable et bornée , donc il existe une fonction continue et une seule u_o qui est presque partout égale à φ_H ; s'il existait un point $t_o \in E$ tel que $u_o(t_o) \neq 0$, il existerait un voisinage ouvert et fermé V de t_o tel que ~~XXXXXX XXXX~~ $u_o(t) \neq 0$ dans V ; par hypothèse , il existe dans V un ensemble ouvert non vide W qui ne rencontre pas H , donc où on a $\varphi_H(t)=0$; on aurait donc $u_o(t) \neq \varphi_H(t)$ en tous les points de l'ensemble W qui est de mesure $\neq 0$, contrairement à la définition de u_o .

COROLLAIRE .- <u>Pour toute fonction u définie dans l'espace de Kakutani</u> E , <u>mesurable</u> (pour μ) <u>et finie presque partout , il existe une fonction</u> u_o <u>et une seule , continue dans</u> E <u>et finie dans un ensemble ouvert partout dense dans</u> E , <u>et égale presque partout à u</u> .

On peut se borner au cas où $u \geqslant 0$ dans E ; pour tout entier $n > 0$, $u_n = \inf(u,n)$ est une fonction mesurable et bornée , donc il existe une fonction continue bien déterminée v_n égale à u_n presque partout ; en outre , comme $u_n \leq u_{n+1}$, on a $v_n \leq v_{n+1}$ presque partout , et comme l'ensemble des points où $v_n(t) > v_{n+1}(t)$ est ouvert , il ne peut être de mesure nulle que s'il est vide , donc $v_n \leq v_{n+1}$ partout . Soit F_n l'ensemble des points $t \in E$ où $v_n(t) \geqslant n$, et soit $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$; comme u est presque partout égale à l'enveloppe supérieure u_o de la suite croissante (v_n) , on a $u(t) = +\infty$

presque partout dans F , donc l'hypothèse entraîne que F est de mesure nulle . Or , dans l'ensemble ouvert $\complement F_n$, on a $u(t)<n$ presque partout , donc $v_n(t)=v_{n+p}(t)$ presque partout , quel que soit $p>0$, ce qui implique que $v_n=v_{n+p}$ partout dans $\complement F_n$, en vertu de la continuité des v_m ; on a donc $u_o=v_n$ dans $\complement F_n$, et comme $\complement F$ est réunion des ensembles ouverts $\complement F_n$, cela prouve que u_o est continue dans $\complement F$. En outre , u_o est égale à $+\infty$ aux points de F et semi-continue inférieurement en ces points , donc aussi continue . L'unicité de u_o est immédiate , car si u'_o est continue dans E, finie dans un ensemble ouvert partout dense et égale presque partout à u_o, l'ensemble des points où $u_o(t)\neq u'_o(t)$ est ouvert et de mesure nulle , donc vide .

On voit en particulier que dans toute classe de fonctions sommables (pour μ) il existe une fonction continue dans E et une seule ; on peut donc identifier l'espace $L^1(E,\mu)$ à l'espace vectoriel formé des fonctions numériques (finies ou non) continues dans E et sommables .

Remarques .- 1) Soit U un ensemble ouvert dans l'espace de Kakutani E ; par hypothèse , il existe un ensemble ouvert et fermé V tel que $\mu(V\cap\complement U)=\mu(U\cap\complement V)=0$; on a nécessairement $U\subset V$, sans quoi $U\cap\complement V$ serait un ensemble ouvert non vide , donc de mesure non nulle ; de même , l'intérieur de $\complement U$ est contenu dans $\complement V$ pour la même raison, donc $V=\overline{U}$. Ceci entraîne des restrictions sur la structure topologique de E . En particulier , E ne peut avoir de base dénombrable sans quoi il serait homéomorphe à l'ensemble triadique de Cantor K, et dans K il y a des ensembles ouverts U tels que $\overline{U}$ ne soit pas à la fois ouvert et fermé .

2) Soient u et v deux fonctions continues (finies ou non) et sommables dans E ; leur somme n'est définie initialement que dans l'ensemble ouvert partout dense G où elles ne sont pas infinies de signes contraires ; mais le cor. de la prop.6 montre qu'il existe une fonction w continue dans E et égale à $u+v$ dans G ; on en conclut que

$u(t)+v(t)$ a nécessairement une <u>limite</u> par rapport à G (égale à $w(t)$) en <u>tout</u> point où u et v sont infinies de signes contraires .

3) Il n'y a aucune difficulté à étendre toute la théorie qui précède au cas où on se donne sur l'anneau de Riesz A (possédant un élément unité e et dont tous les éléments sont bornés) une <u>famille</u> (U_ι) de formes linéaires croissantes telle que la relation "quel que soit $\iota, U_\iota(x^2)=0$" entraîne $x=0$; on en déduit aisément que les semi-normes $U_\iota(|x|)$ définissent sur A une structure d'espace localement convexe ; si $\hat{A}$ est le <u>complété</u> de cet espace , c'est un espace de Riesz , à partir duquel on peut reprendre tous les raisonnements faits dans ce n° : on associe ainsi à A un espace compact totalement discontinu E et une <u>famille</u> (μ_ι) de mesures de Radon sur E , de sorte que $\hat{A}$ puisse être identifié à l'ensemble des classes de fonctions sommables pour <u>toutes</u> ces mesures simultanément (deux fonctions appartenant à la même classe si leur différence est nulle presque partout pour <u>toutes</u> les mesures μ_ι). Les éléments bornés de $\hat{A}$ peuvent encore être identifiés aux fonctions continues ~~XXXXXXX~~ et finies dans E .

Considérons en particulier le cas où A est un <u>clan unitaire</u> de fonctions numériques sur un ensemble F , et U une <u>intégrale</u> sur A ; si μ est la mesure sur F attachée à l'intégrale U , nous avons vu au chap.III que l'espace de Riesz A_U peut être identifié à l'espace $L^1(F,\mu)$ des classes de fonctions sommables pour μ . Soit $\tilde{F}$ l'espace de Kakutani associé à U , et $\tilde{\mu}$ la mesure de Radon correspondante sur F ; il existe alors , d'après ce qui précède , un isomorphisme canonique de l'espace $L^1(F,\mu)$ sur l'espace $L^1(\tilde{F},\tilde{\mu})$, qui est aussi un isomorphisme de la structure d'ordre du premier de ces espaces sur celle du second ; en outre , à toute fonction sommable (pour μ) u définie dans F , on peut faire correspondre une fonction $\tilde{u}$ et une seule , définie et continue dans $\tilde{F}$, et sommable pour la mesure $\tilde{\mu}$, telle que par passage aux quotients l'application $u \to \tilde{u}$ donne l'isomorphisme canonique de $L^1(F,\mu)$ sur $L^1(\tilde{F},\tilde{\mu})$. En particulier , on a $\int u \, d\mu = \int \tilde{u} \, d\tilde{\mu}$ et si u est bornée en mesure , $\|u\|_\infty = \|\tilde{u}\|$ (de sorte que par passage aux quotients , $u \to \tilde{u}$ donne aussi un isomorphisme canonique de $L^{\infty}(F,\mu)$ sur $L^{\infty}(\tilde{F},\tilde{\mu})$, ce dernier pouvant être identifié à l'espace $\mathcal{C}(\tilde{F})$ des fonctions continues sur $\tilde{F}$); et à tout ensemble mesurable X dans F correspond dans $\tilde{F}$ un ensemble bien déterminé $\tilde{X}$, à la fois ouvert et fermé .

3 . Classification des mesures .

Soient E,E' deux ensembles , μ une mesure sur E , μ' une mesure sur E' telles que $\mu E=\mu' E' < +\infty$. Soient U,U' les intégrales correspondantes , et soient $\mathcal{J}$, $\mathcal{J}'$ les réseaux booléiens d'idempotents dans $L^{\infty}(E,\mu)$ et dans $L^{\infty}(E',\mu')$. On dira que les deux mesures μ , μ' sont isomorphes s'il existe un isomorphisme φ de la structure d'ordre de $\mathcal{J}$ sur celle de $\mathcal{J}'$ telle que $U'(\varphi(x))=U(x)$ pour tout $x \in \mathcal{J}$. Dans ce cas , on voit aussitôt que φ se prolonge en un isomorphisme de $L^1(E,\mu)$ sur $L^1(E',\mu')$ et de $L^{\infty}(E,\mu)$ sur $L^{\infty}(E',\mu')$, avec conservation des normes dans les deux cas ;les espaces de Kakutani associés à μ et μ' sont homéomorphes .

On dit que μ est une mesure homogène sur E si pour tout élément $c \neq 0$ dans $\mathcal{J}$, la plus petite puissance d'un système de générateurs ~~XXXX~~ du sous-réseau booléien des $x \in \mathcal{J}$ tels que $0 \leq x \leq c$, est égale à la plus petite puissance d'un système de générateurs de $\mathcal{J}$.

D.Maharam , élève de Kakutani , démontre les résultats suivants (Proc. Nat.Acad.Sc.U.S.A.,28 (1942),p.108) :

1° Il existe une partition de E en une famille dénombrable d'ensembles A_n telle que la restriction de μ à chaque A_n soit homogène .

2° Si μ est homogène sur E , ou bien μ est isomorphe à une mesure sur un espace réduit à un point , ou bien , en posant $K=[0,1]$, à la mesure produit des mesures de Lebesgue sur l'espace produit K^I , I étant un ensemble de puissance quelconque , qui caractérise μ à une isomorphie près (en supposant que $\mu E=1$).
