RÉDACTION N° 066

COTE : **AWR 002**

TITRE : **LIVRE I. THÉORIE DES ENSEMBLES**
INTRODUCTION

FONDS : **ANDRÉ WEIL**

NOMBRE DE PAGES : 34

NOMBRE DE FEUILLES : 34

COMMUNICABLE ULTÉRIEUREMENT

AWR 002 R 66 2

LIVRE I - THEORIE DES ENSEMBLES

INTRODUCTION

Il est de la nature d'une démonstration mathématique de demander à l'esprit du lecteur un assentiment total et sans arrière pensée. C'est là une exigence dont l'enseignement a peut-être tort de ne pas assez mettre en lumière le caractère absolu, total ; la difficulté que rencontrent beaucoup d'esprits, par ailleurs, excellents, à comprendre les raisonnements mathématiques tient peut-être pour une large part au fait qu'ils n'ont pas entièrement compris que chaque théorème nouveau, s'ils l'acceptent sur le moment, ils doivent par là même en accepter toutes les conséquences même lointaines. Le raisonnement de la pensée non mathématique épuise, dirait-on, ses forces au bout d'un certain nombre d'étapes ; pour peu qu'une chaîne de déductions s'allonge, l'esprit éprouve vite le besoin de contrôler ses opérations par quelque expérience directe, ou, au moins, par une autre argumentation convergente. C'est ainsi que le philosophe estime que la vérité d'une même conclusion, disons de l'existence de Dieu, se trouve plus solidement établie s'il en a plusieurs preuves différentes. Le mathématicien considère au contraire un théorème comme vrai dès qu'il en possède une seule démonstration ; les autres démonstrations qu(il pourra en donner par la suite pourront être plus simples ou plus élégantes, mais n'ajouteront rien à la vérité du théorème, lequel est incontestable pour peu qu'il ait été une fois établi.

Il est sans doute facile au mathématicien de railler le philosophe pour le défaut de certitude de ses conclusions et pour n'avoir pas encore résolu une bonne fois un seul des problèmes fondamentaux qui continuent à se poser depuis des siècles. Il est également facile au philosophe de se rebeller contre une ~~xxx~~ attitude qu'il considère comme dogmatique et contraire au devoir qu'il juge être le sien de ne jamais rien accepter définitivement , et de soumettre toutes opinions à un examen critique perpétuel .

Mais raillerie ni hostilité réciproque n'aident à ~~à~~ mieux comprendre . Elles sont d'autant plus hors de saison que jamais le mathématicien ne s'est attaché plus que de nos jours à critiquer les fondements mêmes de sa pensée , et que d'autre part le courant existentialiste de la philosophie moderne tente à mettre l'accent sur la nécessité d'un choix initial et d'un engagement total par lesquels le sujet assume une responsabilité absolue et s'interdit les retours critiques en arrière .

Il sera plus à propos d'essayer d'éclairer ce paradoxe que la même génération de mathématiciens qui accentue plus encore que ses devancières l'idéal de rigueur des démonstrations , et par là-même l'exigence de vérité absolue des théorèmes , est aussi celle qui se livre à l'examen le plus critique - et , à bien des égards , le plus destructeur - des fondements ~~xxxx~~ mêmes des mathématiques . Le mathématicien est l'être à la fois intransigeant et a-dogmatique . Nous serons conduits à nous demander si la coexistence surprenante de ces deux attributs ne s'explique pas par une différence entre les significations que le mathématicien et l'homme du sens commun attachent au mot de vérité .

Un jugement est vrai , dit-on généralement , quand il est conforme à la nature des choses , quand il reflète la réalité . Est-il vrai que la somme des angles d'un triangle soit égale à deux droits ? L'empiriste répondra : " oui ; si vous en doutez , faites l'expérience avec un certain nombre de triangles que vous aurez dessinés ." . Le platonicien répondra :"oui , car la propriété d'avoir la somme de ses angles égale à deux droits est inhérente à la nature de l'idée de triangle ." . Mais le mathématicien :"oui , voici la démonstration ." . Il n'y a pas encore jusqu'ici de divergence radicale ; l'empiriste , s'il veut rester tel à tout prix , dira que l'expérience a montré que les jugements qui se déduisaient par les règles logiques habituelles des jugements vrais (conformes à l'expérience) étaient encore vrais ; le rationaliste admettra une participation de notre intellect au monde des idées et par suite pour nous la possibilité d'enchaîner les vérités intelligibles . Mais voici un autre théorème : l'ensemble des points d'une droite n'est pas dénombrable . Il n'est plus question ici de vérification expérimentale ; l'énoncé même du théorème impliquerait une opération irréalisable en principe , celle de faire le décompte des éléments d'un ensemble infini . Et il est de fait que plusieurs mathématiciens , et des plus grands ,ont soutenu que , dans de pareils énoncés , la pensée se laisse emporter par un jeu verbal en deça des limites posées à son efficacité , qu'elle perd le contact avec la réalité . Mais ces critiques n'ont pas empêché l'immense majorité des mathématiciens de se servir des outils admirables que Cantor a mis à leur disposition . Est-ce , demandera le pragmatiste , justement parceque ces outils sont utiles que le mathématicien les utilise Mais une méthode n'est utile au mathémaicien que si elle lui permet de démontrer des théorèmes <u>vrais</u> ; s'il ne s'agissait que d'obtenir des théorèmes en grand nombre , ou très beaux , la moindre erreur serait bien plus utile que n'importe quelle théorie : elle permettrait de démontrer <u>tous</u> les théorèmes . Faut-il donc penser que le fait d'accepter comme valable le théorème cité plus haut implique une conversion du mathématicien à la doctrine de l'existence réelle d'un monde intelligible qui contiendrait effectivement des ensembles infinis de puissances différente Il est très remarquable qu'il n'en soit de fait nullement ainsi . Un grand nombre de mathématiciens estiment que l'existence effective des ensembles infinis appartient à un ordre de spéculations qu'ils qualifient dédaigneusement de "métaphysique ils entendent par là une sphère de la pensée dans laquelle les jugements sont dénué de certitude , et même , disent certains , de signification . Qu'on imagine un

AWR 002 5

généticien qui affirmerait comme absolument vrai que la cellule humaine contient 48 chromosomes, mais qui rejetterait comme "métaphysique" et dénuée de certitude ou de signification l'assertion qu'il existe effectivement des cellules et des chromosomes ! Comment donc de nombreux mathématiciens peuvent-ils rester à peu près indifférents à la question de l'existence réelle des objets dont parlent, ou semblent parler, les théorèmes qu'ils démontrent avec un soin si rigoureux ?

Pour essayer de le comprendre, essayons d'imaginer un mathématicien qui serait aussi fermement convaincu de l'existence réelle des ensembles que le naturaliste de celle des êtres vivants. La confirmation définitive de la vérité d'un théorème ne pourrait résulter, semble-t-il, pour ce mathématicien que d'une vision intellectuelle directe des objets dont parle l'énoncé. De même que le naturaliste s'efforce d'améliorer les techniques expérimentales qui doivent lui permettre de voir les phénomènes de la vie se dérouler dans le champ de son microscope, de même l'un des soucis principaux du mathématicien fictif que nous essayons d'imaginer serait de mettre au point une sorte de yoga propre à lui faire prendre une connaissance immédiate des propriétés des objets mathématiques. Sans doute recourrait-il encore aux démonstrations dans la mesure où l'imperfection du cerveau humain l'empêcherait de parvenir à une intuition directe de la vérité ; mais il se préoccuperait constamment de contrôler par l'expérience (ce serait chez lui une sorte d'expérience intérieure) les résultats qu'il obtiendrait de cette manière. Si la conception dont nous essa ons d'imaginer les conséque ces reflétait la véritable nature des mathématiques, les ouvrages d'eenseignement comporteraient (comme ceus de physique) une part de description des méthodes expérimentales : régulation du système respiratoire, immobilité complète, degrés successifs de la méditation, tous les stages de l'accès à la vie mystique s'y tr uveraient décrits. Nos universités comporteraient des laboratoires de recherches dans lesquels les étudiants en mathématiques apprendraient à pratiquer la concentration intérieure, de même que les étudiants en chimie apprennent à travailler le verre et les biologistes à se servir d'un microscope. Un mémoire original qui ne contiendrait que des démonstrations de théorèmes nouveaux aurait la valeur de ce qu'on appelle en Physique une "théorie", c'est à dire un moyen de prévoir des résultats d'expérience ; cette théorie ne serait véritablement reçue comme vraie que le jour où une forme ingénieuse de yoga permettrait d'en apercevoir directement les conclusions.

Telle sera peut-être la mathématique du futur. L'exemple du développement prodigieux des méthodes expérimentales durant les cinq siècles passés et le fait que les méthodes orientales de concentration intérieure sont encore mal connues et n'ont jamais été appliquées dans le domaine de la recherche scientifique, nous mettent en garde contre l'attitude qui consisterait à nier *a priori* la possibilité d'un pareil développement. Peut-être nos successeurs considèreront-ils la mathématique d'aujourd'hui d'une manière aussi dédaigneusement condescendante que nous les essais de physique déductive du moyen-âge. Mais on sent bien que, si l'en est ainsi, c'est qu'une véritable révolution aura bouleversé la conception que nous nous faisons de la mathématique. Le fait que la mathématique actuelle ne présente pratiquement aucune similarité avec l'image que nous avons essayé de former nous force à conclure que la croyance que certains mathématiciens de nos jours professent en l'existence réelle des êtres mathématiques est une croyance tout abstraite : une opinion, et non une foi ; elle ne joue presque aucun rôle dans leur activité en tant que mathématicien.

Nous sommes ainsi conduits à penser que la définition de la vérité d'un jugement comme conformité à un ordre de choses réel est inopérante dans le cas des assertions mathématiques. L'argument décisif et en dernière analyse unique en faveur de la vérité d'un théorème consiste à en donner une démonstration , c'est à dire à montrer que son énoncé est la dernière d'une suite de phrases logiquement enchaînées les unes aux autres . Jeu verbal , objectaient tout à l'heure les intuitionnistes ; jeu verbal en effet , diraient beaucoup de mathématiciens modernes , de même que les whigs en arrivèrent à se glorifier du nom dont les appelaient mailicieusement leurs adversaires . Et il faut convenir en effet que ce qui fait la force d'une démonstration , c'est la perfection même avec laquelle elle suit les règles du jeu verbal , telles que la logique les codifie . Le recours à l'intuition a mauvaise réputation en mathématiques ; bien loin de constituer la preuve parfaite de vérité comme dans la science fictive que nous imaginions plus haut , il est au contraire considéré comme une faute grave propre à invalider la portée d'une démonstration (s'il n'est pas doublé d'un raisonnement logique qui en garantisse la validité) . Nous touchons là de nouveau à la source de cette difficulté dont nous parlions plus haut , qu'éprouvent beaucoup de personnes à suivre le raisonnement mathématique : on ne leur a pas dit que comprendre une démonstration et l'accepter sont des choses bien différentes . Comprendre une démonstration de géométrie élémentaire , c'est en rapporter les étapes successives à l'intuition spatiale des objets géométriques , c'est , en quelque sorte , la voir se dérouler sous nos yeux ; mais l'accepter , c'est vérifier pas à pas que chaque assertion nouvelle est bien une conséquence logique des précédentes . Or le mathématicien demande que l'on rejette certaines "démonstrations" que l'on comprend bel et bien (c'est le cas où la pseudo-démonstration en question comporte certaines assertions qui ne se justifient que par l'intuition des objets dont il est traité) - et même que l'on accepte des démonstrations que l'on ne comprend pas : c'est pourquoi des personnes tout à fait incapables de "voir dans l'espace" peuvent néanmoins faire de la géométrie à trois dimensions . L'équivoque est d'ailleurs entretenue par le fait que faire comprendre une démonstration est le meilleur moyen (sinon le seul) de créer la conviction dans l'esprit de l'auditeur que le résultat est correct . Et cette remarque ne s'applique pas seulement à l'enseignement élémentaire ; un mathématicien qui communique oralement ses résultats à un confrère cherche à persuader son interlocuteur en traduisant les termes de son discours dans un langage qui fasse appel à l'intuition de celui à qui il parle . Néanmoins , la convention demeure tacite entre les deux que rien n'est fait tant qu'une démonstration formelle n'a pas été rédigée . Sans doute cette démonstration ne reproduira-t-elle pas entièrement tous les enchaînements logiques nécessaires ; mais ces omissions ne sont que pour éviter des longueurs , et le devoir de l'auteur en tant que mathématicien est de se tenir toujours prêt à fournir tel ou tel détail sur demande . Il arrive d'ailleurs que l'abondance des détails contenus dans une démonstration écrite ou la manière maladroite dont ils sont rédigés nuise à l'intelligibilité à tel point que l'on soit obligé à l'occasion d'accepter des démonstrations que l'on ne comprend pas ; celà ne va pas sans un malaise intellectuel profond mais le mathématicien qui a été forcé de suivre pas à pas les étapes d'une démonstration sans en comprendre les idées directrices ne met nullement en doute la validité du résultat , même s'il s'en prend avec acrimonie à l'inexpérience du rédacteur .

Il est d'ailleurs facile de comprendre pourqoi l'exigence d'assentiment absolu qui est le propre des mathématiques entraîne l'interdiction des recours à l'intuition . C'est que l'intuition n'est jamais parfaite ; le fût-elle , elle serait immédiate et les conséquences les plus lointaines s'apercevraient du premier coup sans qu'il soit besoin de démonstrations pour y parvenir . Le caractère partiel de nos intuitions n'a qu'une importance secondaire dans les sciences naturelles ou en philosophie , où des expériences ou intuitions ultérieures peuvent revenir en arrière et préciser peu à peu les résultats qu'une première intuition peut-être grossière avait fait énoncer . Mais il n'en est pas ainsi en mathématiques , dont la devise est " tout ou rien" .La loi de Mariotte n'en est pas moins une bonne loi physique pour n'être pas entièrement correcte ; le physicien saura lui apporter suivant les circonstances les corrections nécessaires toutes les fois qu'il l'utilisera. Mais il n'est pas question d'apporter des corrections à un théorème antérieur que l'on utilise au cours d'une démonstration . La moindre erreur qui s'y trouverait se verrait multipliée au delà de toute limite contrôlable dans la suite des raisonnements et vicierait radicalement les conclusions souvent fort lointaines que l'on tire du théorème en question .

Il nous faut maintenant examiner les conditions de possibilité d'un " pur jeu verbal " , d'une démonstration dont nous puissions être sûrs qu'elle ne fasse pas appel à des intuitions étrangères à la marche même du raisonnement .Or , il est bien clair que le danger de manque de rigueur réside dans la signification que les mots ont pour notre esprit . C'est par leur sens qu'ils se rattachent encore à un monde indécis , à une existence opaque et fluente de laquelle notre esprit ne parvient pas à prendre une connaissance adéquate . La force même du mouvement de l'esprit qui a voulu instaurer une science certaine le pousse donc à rompre les amarres qui attachent les mots aux choses qu'ils représentent , à les vider de leur signification , à faire de la science certaine une certitude sur un rien . Un pur jeu verbal est un jeu sur des mots qui ne veulent rien dire . Avant d'expliquer plus en détail comment le mathématicien peut concevoir des opérations sur des mots privés de signification , arrêtons nous un moment pour constater que le mouvement que nous venons de décrire , pour étrange qu'il puisse d'abord paraître , n'est pas cependant particulier aux mathématiques ; il semble même qu'il soit inhérent en principe à l'acte même par lequel le langage se constitue comme tel . Nous renvoyons ici à l'analyse très profonde que fait un éminent critique contemporain , M. Blanchot , des conditions de la littérature . Le mot , observe M. Blanchot , a au moins autant pour fonction d'écarter de nous la chose qu'il signifie que de nous la livrer : " pour que je puisse dire : cette femme , il faut que , d'une manière ou d'une autre , je lui retire sa réalité d'os et de chair , la rende abstraite et l'anéantisse " - et encore : " Dieu avait créé les êtres , mais l'homme dut les anéantir . C'est alors qu'ils prirent un sens pour lui ... " . La création des mots creuse donc déjà un fossé entre le mot lui-même et la chose qu'il signifie (la question de savoir si la chose même ne se constitue pas comme être séparé de par le regard que nous jetons sur elle de l'autre côté du fossé est une autre question que nous n'aborderons pas ici) . Le langage courant préserve à vrai dire une sorte de communication entre le mot et la chose : "...le mot s'y rapporte encore (à l'existence de ce qu'il désigne) par l'inexistence devenue l'essence de cette chose . Nommer le chat , c'est si l'on veut en faire un non-chat , un chat qui a cessé d'exister d'être le chat vivant , mais ce n'est pas pour autant en faire un chien , ni même un non-chien " - le langage courant admet que , la nonexistence du chat une fois passée dans le mot , le chat lui-même ressuscite pleinement et certainement comme son idée (son être) et comme son sens ... " . Or la littérature , dit M. Blanchot , ne s'en tient pas là , et la mathématique non plus , nous venons de le voir . En l'une comme en l'autre , le langage "subit la tentation ... de vouloir atteindre la négation en elle-même et de faire de rien tout . Si des choses on ne parle qu'en disant d'elles ce par quoi elles ne sont rien , eh bien , ne rien dire , voilà le seul espoir d'en tout dire. "

Or , que reste-t-il d'un mot auquel on retire sa signification , sinon sa contexture matérielle ? Le fait que les mots sont aussi des choses peut être regardé d'un certain point de vue comme un échec de la constitution du langage comme ensemble de signifiations : la lettre obnubile l'esprit , c'est à dire que l'attachement aux mots pour eux-mêmes est toujours en danger de voiler le message que les mots sont chargés de communiquer . Mais , si l'on renonce dès l'abord aux significations , alors la réalité physique des mots devient , comme le dit M. Blanchot , " ma seule chance" . A ce point , à vrai dire , les chemins de la littérature et de la mathématique s'écartent quelque peu l'un de l'autre . Pour le poète , ce sont les mots-choses eux-mêmes qui deviennent l'essentiel , avec toutes leurs particularités individuelles : " Tout ce qui est physique joue un rôle : le rythme , le poids , la masse , la figure , et puis le papier sur lequel on écrit , la trace de l'encre, le livre " . Pour le mathématicien au contraire , l'intérêt se concentre non pas sur les qualités individuelles des mots mais sur leur articulation en phrases . Une syntaxe reste possible après l'acte qui a chassé les significations , de même que l'on peut encore jouer à ces assemblages de bois découpé que l'on appelle "puzzles" en retournant les pièces face sur table de manière à ne pas voir les fragments d'images qui y sont dessinés . Le mathématicien va d'ailleurs renoncer aux mots eux-mêmes et leur substituer des signes , plus maniables ; il y est à peu près forcé du fait que les règles de la syntaxe sont beaucoup trop imprécises pour l'usage qu'il se propose d'en faire , et aussi du fait que la syntaxe usuelle n'est pas une syntaxe pure , mais fait dépendre en plus d'un cas ses prescriptions du sens des phrases qu'il s'agit de former .

Il faut maintenant entrer un peu plus avant dans la description de ce que pourrait être une mathématique entièrement privée de signification . On peut s'aider pour le comprendre , d'une analogie avec les opérations du calcul algébrique élémentaire . Nous ne considèrerons , pour simplifier , que le calcul d'expressions algébriques ne comportant que des additions ou soustractions (sans multiplication ou division), et nous ne considèrerons ce calcul que dans la mesure où il vise à établir des identités algébriques (non à résoudre des équations). On y trouve alors des formules dont chacune affirme l'égalité de deux expressions algébriques, écrites de part et d'autre du signe =. On enseigne généralement que les lettres qui figurent dans ces expressions représentent des nombres, que les signes + et - sont des symboles d'opérations à effectuer sur ces nombres et que les identités algébriques sont des formules qui expriment l'égalité des valeurs prises par deux expressions algébriques pour tous les systèmes de valeurs numériques possiblent des lettres qui y figurent. Mais la technique du calcul consiste justement à faire abstraction de toutes ces significations et à opérer directement sur les expressions algébriques sans se soucier de savoir si elles ont des valeurs numériques. Quand nous remplaçons -(a+b) par (-a)+(-b), nous le faisons d'une manière tout automatique, et non pas en pensant au théorème suivant lequel l'opposé de la somme de deux nombres est la somme des opposés de ces deux nombres. Or, on pourrait imaginer codifiés une fois pour toutes ces automatismes qu'une longue pratique du calcul a implantés dans notre esprit. On aurait alors un système de règles normatives du calcul algébrique qui seraient entièrement indépendantes de l'interprétation des expressions algébriques comme symboles d'opérations à effectuer sur des nombres. Ces règles devraient d'abord nous apprendre à reconnaître une expression algébrique (car une combinaison de signes telle que a++ n'en est pas une). Nous aurions donc des énoncés du genre des suivants : toute lettre est une expression algébrique; le signe 0 est une expression algébrique ; si E et F sont des expressions algébriques déjà écrites, les combinaisons de signes -(E) (c'est à dire : le signe -, suivi du signe (, suivi de la transcription de l'expression E, suivie du signe)) (E)+(F) et (E)-(F) sont des expressions algébriques ; on préciserait de plus que les parenthèses qui entourent E peuvent être supprimées dans le cas où E est une lettre ou le signe 0 . On conviendrait d'appeler généralement expréssions algébriques toutes les combinaisons des signes qui sont des expressions algébriques en vertu des règles précédentes appliquées une ou plusieurs fois .

On aurait ensuite des règles permettant d'écrire des identités , dont voici quelques échantillons (la liste n'est pas complète) : si E et F sont des expressions algébriques , les assemblages de signes E = E , (E) + (F) = (F) + (E) sont des identités ; si E = F est une identité , il en est de même de F = E et de (E) - (F) = 0 ; si les assemblages de signes E = F et F = G sont des identités , il en est de même de E = G . On appellerait alors identités algébriques tous les assemblages de signes que l'on pourrait obtenir par application répétée des règles précédentes .

Ceci dit , la mathématique formelle aurait une structure toute semblable à celle du calcul algébrique codifié que nous venons d'imaginer . Elle comporterait d'abord des règles de formation de phrases , précisant quelles combinaisons de signes seront appelées phrases , et des règles de déduction , permettant d'écrire des phrases vraies , ou théorèmes . Dans un système basé sur la théorie des ensembles , on aurait par exemple (entre autres) les règles formatives suivantes :

L'assemblage de signes obtenu en écrivant deux lettres , l'une à gauche , l'autre à droite du signe $\in$ est une phrase (c'est la transcription formelle de l'assertion suivant laquelle l'objet représenté par la lettre de gauche appartient à l'ensemble représenté par la lettre de droite) ;

si P et Q sont des phrases , les assemblages de signes $\sim(P)$ et $(P) \Rightarrow (Q)$ sont des phrases (la première est la transcription formelle de la négation de l'assertion dont P est la transcription formelle ; la seconde est la transcrip-

-tion formelle de l'assertion suivant laquelle l'assertion transcrite par P ne peut être vraie sans qu'il en soit de même de l'assertion transcrite par Q) ;

si P est une phrase , il en est de même de l'assemblage de signes ($\forall$ x)(P), ou de tout autre assemblage déduit du précédent en y remplaçant x par toute autre lettre (($\forall$ x)(P) est la transcription formelle de l'assertion suivant laquelle l'assertion transcrite par P , assertion qui parle de l'objet x , est universellement vraie , c'est à dire vraie de tout objet x) .

Les règles formatives que nous venons de citer ne constituent pas un système complet ; nous ne les avons données que comme exemples . Par ailleurs , le mot "lettre" qui y figure doit être qualifié . L'emploi des 26 lettres que comporte l'alphabet ne saurait en effet suffire à la mathématique formelle ; on convient donc d'appeler encore lettre tout assemblage de signes formé d'une lettre affectée d'un nombre quelconque de primes : ainsi x , y' , z'' , a''' , ...

Les règles de déduction permettent d'appeler certaines phrases des théorèmes . En voici deux exemples :

a) l'assemblage de signes obtenu en écrivant la même lettre de part et d'autre du signe = est un théorème ;

b) si les phrases P et (P) $\Longrightarrow$ (Q) sont des théorèmes , Q est un théorème .

Les deux exemples que nous venons de citer présentent l'un avec l'autre une différence évidente . La règle a) permet d'écrire certains théorèmes sans aucune connaissance préalable ; on dit qu'elle constitue un schéma d'axiomes . La règle b) au contraire n'est applicable que si on sait déjà que certaines phrases sont des théorèmes .

Un texte mathématique composé de phrases écrites dans un ordre déterminé est appelé une démonstration si les règles du raisonnement permettent d'établir de proche en proche que chaque phrase du texte est un théorème . La première phrase doit alors naturellement être ~~une~~ un axiome , c'est à dire qu'elle doit être un théorème en vertu d'une règle , telle que a) , dont l'application ne nécessite la connaissance d'aucun théorème préalable . Par contre , les phrases suivantes du texte pourront être des théorèmes en veru d'une règle telle que b) et d'un certain nombre de phrases qui figurent déjà dans la démonstration et qui ont par suite été reconnues comme théorèmes . La dernière phrase d'une démonstration s'appelle la conclusion de la démonstration .

Il convient encore d'observer que l'énoncé des règles de raisonnement ne fait pas partie de la mathématique formelle ; ~~lesr~~ les règles constituent une sorte de mode d'emploi d'un texte mathématique . Ce mode d'emploi peut d'ailleurs être conçu comme s'appliquant soit à l'auteur soit au lecteur : dans le premier cas , il indique les conditions de l'écriture d'un texte correct ; dans le second cas , il donne le moyen de vérifier qu'un texte donné est bien correct . Les règles formatives sont en général telles qu'elles permettent de reconnaitre par simple inspection si un assemblage de signes donné est une phrase . Au contraire, les règles de déduction ne permettent nullement de décider par simple inspection si une phrase donnée est un théorème ; mais elles permettent de reconnaitre si une suite donnée de phrases est une démonstration . Pour rendre cette vérification plus aisée , un commentaire au texte (en langage ordinaire) pourra indiquer pour chaque phrase , en vertu de quelle règle de raisonnement et de quels théorèmes antérieurs cette phrase est un théorème .

Nous n'avons donné qu'une esquisse très rapide et partielle de ce en quoi pourrait consister une mathématique formelle , un "pur jeu verbal" . Nous allons maintenant essayer d'estimer la valeur d'une telle construction pour le mathématicien .

Une remarque s'impose dès l'abord : c'est qu'une pareille mathématique n'existe pas en fait . Les textes mathématiques courants sont bien entendu écrits dans le langage commun , gouverné par les lois de la syntaxe et de la grammaire ordinaires . De plus , les spécialistes mêmes de la logique formelle n'ont jamais présenté un texte mathématique ni même un système de règles (règles formatives et règles de raisonnement) se conformant strictement aux exigences d'un formalisme pur . L'une des raisons de cette carence en apparence surprenante est l'extrême complication qu'un pareil système de règles devrait présenter . Pour remédier à cette complication , on introduit des abréviations , qui sont des signes nouveaux non plus privés de signification comme ceux de la mathématique formelle proprement dite ,mais qui représentent d'autres signes ou combinaisons de signes ; or il est clair qu'un texte qui utilise ces abréviations n'est déjà plus un texte formel pur . De plus , et surtout , aucune nécessité pressante ne contraint aujourd'hui les mathématiciens à se livrer au travail considérable que représenterait la rédaction d'un ouvrage se conformant strictement aux canons d'un mathématique formelle . Les démonstrations ordinaires sont jugées éxemptes de regours intempestif à des intuitions extérieures ; aucune contestation sérieuse ne s'élevant à leur propos , il n'est pas jugé nécessaire de les remplacer par des démonstrations formelles . Les mathématiciens sont bien plus à la recherche d'intuitions à éviter que de manières de les éviter .

Néanmoins , la mathématique formelle constitue une sorte d'horizon de la mathématique réelle . La possibilité , conçue comme toujours ouverte , de formaliser les démonstrations joue un rôle psychologique assez considérable en garantissant l'existence d'une sorte de ligne Maginot supposée imprenable sur laquelle il serait toujours possible de se replier en cas de contestation sérieuse . Mais cette garantie tout idéale est-elle philosophiquement justifiable ? C'est ce qu'il nous faut maintenant examiner .

Nous avons vu l'exigence de certitude absolue des démonstrations rendre suspects tous les recours à l'intuition dans le développement de la mathématique . Les êtres réels , du seul fait qu'ils sont réels , sont des ^etres opaques qui ne se laissent pas éclairer entièrement par la lumière de l'esprit ; seule la conscience est entièrement transparente à elle-même . Il nous a donc fallu , pour nous assurer la possibilité d'un raisonnement rigoureux , détacher les mots ou signes mathématiques de leur signification et opérer sur eux s ivant des règles purement formelles . Mais , en voulant faire l'ange , n'avons-nous pas fait la bête ? Car , une fois les mots privés de leur signifieation , nous n'avons de prise sur eux que par leur aspect physique , leur constitution matérielle . Nous n'avons nullement éliminé l'intuition concrète ; nous avons seulement remplacé l'intuition de ce que les mots voulaient dire par celle de l'aspect sensible des signes . Et , de fait , les règles de la mathématique formelle s'adressent non pas à un pur esprit , mais à un mathématicien qui voit des signes . Leur application postule la capacité de l'oeil à reconnaître les signes les uns des autres , à reconnaître l'identité d'un même signe en des lieux différents de la page ; les mots de "gauche" et de "droite" y sont employés librement , on nous demande de savoir distinguer les lignes successives d'un texte , etc,etc,... L'esprit ne s'est-il pas englué de nouveau dans un monde d'objets réels , et pouvons nous affirmer que les signes constituent un domain e privilégié du monde sensible qui soit entièrement transparent au regard de l'intelligence ? Il n'existe pas de texte mathématique formel pur ; mais, ce qui s'en rapprocherait le plus serait sans doute un long calcul , disons de géométrie analytique (nous avons déjà reconnu plus haut l'analogie entre les règles de la déduction et celles du calcul algébrique élémentaire) . Or l'esprit se sent-il invinciblement contraint d'accep-

-ter un résultat qui soit le terme d'un calcul d'une longueur considérable ? Nous avons parlé plus haut du malaise que laisse une démonstration acceptée mais non comprise ; nous avons , il est vrai , laissé entendre que ce désir insatisfait de comprendre était l'aspiration à une sorte de luxe , à un plaisir que l'intellect s'offrirait à lui-même , mais que la compréhension des idées d'une démonstration n'ajoute en rien à sa force contraignante . La valeur de certitude d'une preuve réside , disions-nous , uniquement dans l'articulation logique rigoureuse des assertions dont elle se compose . Or nous avons ramené les opérations par lesquelles cette correction se vérifie à une série de comparaisons matérielles de signes écrits ; ne devons-nous pas alors réviser notre opinion en tenant compte des possibilités d'erreurs matérielles ? Quiconque a calculé a fait des erreurs , et , le plus souvent , des erreurs de nature très simple , comme de transcrire un chiffre à la place d'un autre , mal lu . Ces erreurs sont en général découvertes et redressées au bout d'un certain temps , le plus souvent parcequ'elles conduisent à des résultats inadmissibles . On remonte alors la chaîne des calculs , on vérifie chaque étape , on corrige ses fautes ; mais n'est-ce pas direque , comme en physique et en philosophie ; l'esprit revient en arrière , corrige des intuitions défectueuses à la lumière d'intuitions postérieures ? Le fait est que la plupart des erreurs que l'on peut faire dans un calcul de géométrie analytique se révèlent par l'absurdité des conséquences géométriques qu'elles entraînent , c'est à dire par leur contradiction avec certaines intuitions de nature toute différente de celle des signes écrits . Ce fait n'invite-t-il pas à une attitude de méfiance radicale à l'égard de démonstrations qui se voudraient purement formelles et qui renonceraient par suite à tout autre intuition que celle des signes mathématiques ?

Ces remarques peuvent passer pour décourageantes ; convient-il cependant d'en conclure que le formalisme a été un faux espoir , et sans valeur pour le mathématicien ? Autant vaudrait dire que la géométrie analytique est un aspect négligeable d la géométrie : nul mathématicien ne saurait soutenir pareil paradoxe . Il convient de rappeler ici que l'intention du formalisme à ses débuts avait été non pas d'éliminer tout recours à l'intuition , mais seulement de montrer que l'on pouvait se passer de la considération d'ensembles infinis pensés comme ayant une existence objective . Or , cet objectif limité peut désormais être considéré comme atteint . Depuis les travaux de v. Neumann , de Bernays et de Gödel , nous sommes en possession d'un langage pour la théorie des ensembles dont il semble au moins probable que les fameux "paradoxes" ne peuvent s'y formules . Nous sommes en mesure de démontrer les théorèmes de la théorie des ensembles , et par suite de les appliquer dans les autres branches des mathématiques , sans avoir à nous préoccuper de savoir si les ensembles dont nous parlons existent et si les axiomes dont nous partons reflètent bien leurs propriétés réelles . Il est vrai que , en dépit de ce succès, l'état de choses actuel ne saurait être considéré comme satisfaisant . L'intuition d'un ensemble comme collection de tous les objets possédant une certaine propriété demeure en effet présente , croyons-nous , dans l'esprit du mathématicien , même quand le raisonnement formel ne lui fait aucune part . Or , si on examine les axiomes de la théorie des ensembles non pas formellement , mais du point de vue de cette intuition toujours présente en fait , on constate qu'ils ne cadrent pas entièrement avec elle . Qu'il s'agisse de la distinction entre "classes" et "ensembles" de Gödel , ou d'autres artifices analogues que l'on peut employer pour éviter les paradoxes , on retrouve toujours dans les systèmes d'axiomes que l'on est amené à formuler certaines restrictions dont le caractère artificiel provoque une sorte de gêne intellectuelle mal surmontable . Si le mot a pour fonction de chasser la chose , et de libérer l'esprit de l'opression d'une présence trop prochaine , il se doit aussi de restituer la chose = "par l'inexistence devenue l'essence de cette chose " , comme le dit M.Blanchot . Mais on sent que les axiomes de la théorie des ensembles ne nous restituent pas adéquatement son essence . S'agit-il là d'une carence définitive , ou peut-on espérer que , suivant l'opinion de Gödel citée par H.Weyl , "our logical optics is only slightly out of focus" et que "after some minor correction of it we shall see sharp , and then everybody will agree that we see right " ? C'est ce que l'avenir sans doute décidera .

Mais ce n'est pas seulement en théorie des ensembles que la conception de la possibilité d'une démonstration purement formelle confère à la mathématique une vigueur créatrice nouvelle . Le mouvement par lequel le raisonnement se détache de l'intuition d'un objet particulier n'a pas seulement pour effet de libérer la conclusion du caractère douteux que risquait de lui conférer l'insuffisance de notre connaissance de l'objet en question ; il a aussi pour effet que la démonstration , maintenant libre de son objet initial , paut s'appliquer à d'autres objets . C'est là le fondement de la méthode axiomatique , dont on sait le rôle immense qu'elle joue dans les mathématiques modernes ? Elle est fondée sur la reconnaissance des similarités de structure logique qui peuvent se rencontrer dans des théories en apparence très différentes . Une fois ces similarités reconnues , on peut remplacer plusieurs démonstrations anlogues portant sur des objets différents par une démonstration unique portant sur un objet ~~in~~déterminé dont on postule qu'il possède juste ce qu'il faut de propriétés pour que la démonstration puisse être menée à bien . Cette manière de faire n'est bien entendu légitime que parce que la démonstration à laquelle on arrive est formelle ; c'est à dire valable indépendamment de la nature de l'objet sur lequel elle porte .

La méthode axiomatique est donc d'abord méthode d'économie de pensée , en ceci qu'elle permet de condenser en un seul plusieurs raisonnements différents. M. R. Queneau, dans ses "Exercices de style", s'est attaché à donner de multiples récits d'un même incident ; le mathématicien apprend, lui, à donner un même récit de multiples incidents ! Mais la méthode axiomatique est aussi méthode de découverte et de progrès. C'est qu'en effet l'intelligence, libérée de l'emprise d'objets qui la serraient de trop près, qui paralysaient son activité dans un monde trop réel pour être translucide, retrouve en se libérant des significations une agilité qui lui permet de s'élancer vers des conquêtes nouvelles. De même que les dieux aztèques ne prolongeaient leur existence qu'en buvant le sang des victimes qui leur étaient immolées, de même aussi c'est un sacrifice toujours renouvelé de la réalité qu'exige l'intellect pour pouvoir poursuivre sa marche en avant.

Nous avons dit plus haut que l'une des raisons principales pour lesquelles il n'existe pas de littérature mathématique formelle pure est l'extrême complicationqu'une telle mathématique devrait présenter. De plus avons-nous ajouté, une pareillle mathématique existât-elle, ses conclusions n'auraient même pas pour nous le caractère de certitude absolue que nous serions en droit d'en attendre en raison de l'impossibilité de se prémunir absolument contre les risques d'erreurs de calcul. Or, contre le danger d'étouffement que lui fait courir un monde trop complexe pour être im-médiatement compris, l'esprit dispose d'une défense, toujours la même, qui est de nommer les choses qui le serrent de trop près ; c'est à dire de les tenir à distance, de substituer leur essence à leur existence, et, dans le vide ainsi créé, de regagner sa liberté de mouvement. Et puisque, dans la circonstance présente, ce sont les mots, ces mots-choses privés de leur signification, qui refusent de se laisser péné-

-trer par son regard , il reste la possibilité de nommer les mots , et leurs combinaisons . C'est ainsi que naît ce qu'on appelle la métamathématique .

Tous les ouvrages de logique formelle moderne introduisent , dès le début de l'exposition , des abréviations qui sont des signes non pas privés de signification , comme ceux de la mathématique formelle , mais dont chacun re-présente une combinaison de signes sans signification . Les "phrases" où inter-viennent de pareils signes d'abréviation ne sont ni des phrases de la mathéma-tique formelle (puisqu'elles renvoient au moins partiellement à des significa-tions , au lieu de se contenter de subsister sur le papier dans leur présence matérielle d'êtres en soi) ni des phrases du langage courant(car elles contien-nent aussi des signes sans signification , alors que tous les mots d'une phrase du langage courant ont un sens). Afin d'éviter le caractère équivoque de telles "phrases" , il serait sans doute préférable de leurrestituer entièrement la valeur de substantifs non formels qui désigneraient des phrases formelles . Une fois ce pas accompli , on est en plein dans le domaine de la métamathématique , qui peut se définir comme une étude des phrases (et plus généralement des suites de phrases eteen particulier des démonstrations) d'une mathématique formelle prise comme objet d'une pensée descriptive .

Ce qui rend assez singulière une entreprise comme celle de fonder une métamathématique , c'est que la mathématique formelle qu'elle se propose d'étudier n'existe , nous l'avons vu , que comme possibilité idéale . La méta-mathématique est donc science descriptive d'un objet purement imaginaire . Son propos est , entre autres , d'étudier la question de savoir quels théorèmes pour-raient être démontrés en mathématique formelle (si elle existait) et notamment de déterminer s'il est vrai que la mathématique formelle est non contradictoire (c'es

-à-dire s'il n'existe aucun théorème dont la négation soit aussi un théorème) ; de quels moyens la métamathématique dispose-t-elle pour aborder son objet ? Elle devra être en mesure de parler de toutes les combinaisons possibles de signes formels , qui sont naturellement en nombre infini . Il est alors tout naturel de songer à employer dans ce but les nombres entiers de l'arithmétique ordinaire ; cette dernière fonctionnera alors non pas en tant que mathématique formelle , mais comme mathématique appliquée (les entiers y étant non pas des symboles vides de sens , mais retenant au contraire leur pouvoir nombrant) . Ayant ainsi désigné chaque démonstration possible par un nombre , on peut raisonner sur ces démonstrations en termes d'arithmétique ~~ordinaire~~ élémentaire . C'est la méthode qu'a suivie Gödel ; elle l'a conduit à certains résultats d'une portée très générale dont nous allons maintenant dire un mot . La question de savoir si la mathématique formelle n'est pas contradictoire reste ouverte . Mais , à supposer qu'elle ne le soit pas , on sait qu'il lui sera à jamais impossible d'établir elle-même qu'elle ne l'est pas . Expliquons de manière plus précise ce que cela signifie . Nous avons vu tout à l'heure comment on pouvait utiliser l'arithmétique élémentaire pour raisonner en métamathématique . Mais l'arithmétique élémentaire peut aussi être considérée comme une partie de la mathématique formelle . Il est donc possible de traduire en des énoncés formels les assertions de la métamathématique et en démonstrations formelles les raisonnements métamathématiques (pour autant qu'ils n'utilisent pas d'autres moyens que ceux dont dispose la mathématique) . Ceci dit , le théorème de Gödel affirme que la traduction formelle de l'énoncé (non formel) "la mathématique n'est pas contradictoire" ne saurait être la conclusion d'aucune démonstration formelle (à moins que la mathématique ne soit contradictoire) . Par ailleurs Gödel a aussi montré que , toujours en supposant la mathématique non contradictoire ,il est possible d'y écrire une phrase formelle P telle que ni P ni sa négation ne soit un théorème ; on peut donc énoncer des problèmes dont on sait qu'ils ne sont pas résolubles . Plus précisément , on peut énoncer (en termes formels) une propriété P(x) d'un entier arbitraire x qui est telle que , pour tout entier a donné , la phrase P(a) (qui affirme que cet entier possède la propriété en question) soit un théorème , alors que la phrase formelle qui traduit l'assertion que "tout entier x possède la propriété P(x)" n'est pas un théorème ; la négation de cette phrase n'est naturellement pas non plus un théorème .

Ce dernier résultat présente un intérêt considérable pour la raison suivante . Nous avons dit plus haut que la mathématique formelle , en se passant de l'intuition des êtres mathématiques , permet de démontrer bien plus de théorèmes que ne sont disposés à en admettre ceux qui veulent que tous les énoncés parlent d'êtres réels accessibles à l'intuition . Par contre , le résultat de Gödel montre que certains théorèmes peuvent être vrais du point de vue intuitif sans l'être en mathématique formelle . Car , si on ne fait pas abstraction du sens des mots "pour tout entier x" , il est bien clair qu'on admettra comme vrai que "tout entier x possède la propriété P(x)" si cejugement de fait est conforme à la réalité , c'est à dire si , en fait, tous les entiers possèdent la propriété en question . Or les résultats de Gödel cités plus haut s'appliquent non pas seulement à tel ou tel système donné de mathématique formelle , mais à tout système suffisamment riche pour qu'on puisse y formuler l'arithmétique élémentaire . C'est dire que toute tentative de remplacer le raisonnement déductif par un pur jeu verbal ne saurait viser qu'à une substitution partielle : il y a des méthodes de démonstration non formelles basées sur des intuitions que nul , semble-t-il , ne saurait contester , qui sont plus puissantes que tous les raisonnements formels possibles .

Il convient de ne pas conclure cet examen des résultats de la science métamathématique sans citer un théorème qui est de portée plus positive que les résultats énoncés plus haut . C'est en effet la métamathémaique qui a fourni les premiers renseignements sur une question purement mathématique de la théorie des ensembles , à savoir celle de l'hypothèse du continu . Nous ne formulerons pas ici cette hypothèse ; qu'il suffise de savoir que c'est une assertion dont on ne sait pas encore qu'elle est vraie (c'est à dire qu'elle est un théorème) . Or Gödel a montré que , si la théorie des ensembles n'est pas contradictoire , on peut affirmer que l'hypothèse du continu n'est pas fausse , c'est à dire que sa négation n'est pas un théorème de la théorie ; c'est là un progrès considérable dans l'étude d'une question qui n'a pas cessé depuis plus d'un demi-siècle d'intriguer les spécialistes de la théorie des ensembles .

Nous avons été conduits plus haut à débouter la mathématique de sa prétention à une certitude absolue . Fût-elle purement formelle , elle ne saurait se prémunir absolument contre les dangers d'erreurs matérielles . Et , en ce qui concerne les mathématiques actuellement existantes , les résultats de Gödel montrent bien que leur traduction même en langage formel n'est pas une opération à propos de lauqelle aucune contestation sérieuse ne puisse s'élever : nous avons vu que l'interprétation en signes formels d'assertions portant sur <u>tous</u> les entiers par exemple , ne saurait constituer une traduction adéquate . Il ne faudrait pas cependant conclure de là que la possibilité de formalisation qui reste à l'horizon de la mathématique actuelle soit dénuée de valeur pratique pour clarifier des divergences de vues ou des polémiques <u>limitées</u> . Il est en effet toujours possible de procéder à des formalisations <u>partielles</u> , grâce à l'emploi de signes adéquats et de règles opérationnelles portant sur ces signes . Si des doutes s'élèvent sur la portée de telle ou telle définition ou de tel ou tel théorème , et notamment sur le sens des mots qui y figurent , il est toujours loisible de préciser ce dont on parle en indiquant d'une manière au moins partielle la nature des opérations formelles que l'on se propose d'effectuer ; cette manière de faire est peut-être préférable, parfois , à celle qui consiste à expliquer le sens que l'on attribue au mot contesté en le référant à des intuitions qui ne sont pas nécessairement les mêmes dans des esprits différents . S'il y a divergence réelle il y a des chances pour que la méthode qui tend à une formalisation partielle permette de localiser le débat et de trouver en quel point les définitions doivent être précisées pour rétablir l'accord entre les mathématiciens sur la portée des théorèmes énoncés .

Mais il y a plus . Il semble en effet que le concept d'une mathématique formelle sous-jacente possible , concept presque toujours présent à l'arrière plan de la pensée mathématique contemporaine , ait pour effet de modifier assez profondément le contenu intuitif même des théorèmes . La notion d'espace topologique fut d'abord tirée par abstraction de l'idée générale de continuité ; ce sont des images relatives à la structure de l'espace sensible qui hantent d'abord l'esprit du mathématicien lorsqu'il commence à raisonner en topologue . Mais ces images d'un espace malléable et percé de trous disparaissent , croyons-nous , assez rapidement de la conscience pour y être remplacées par des intuitions d'opérations formelles possibles : un espace topologique , cela cesse bientôt d'être pour l'esprit une balle de caoutchouc pour devenir un espace à propos duquel on peut parler de continuité , de convergence , de connexité ou d'ensembles fermés . La coexistence de deux espèces d'intuitions se remarque assez bien dans certains cas où deux définitions équivalentes sont possibles , tel celui des variétés différentiables . Pour l'intuition chosiste , une variété différentiable est un espace composé de morceaux d'espace euclidien raccordés suivant une certaine loi, mais , pour l'intuition formelle , c'est un espace à propos duquel on peut parler de fonctions différentiables . L'un et l'autre point de vue conduisent à des définitions formelles , d'ailleurs équivalentes , de la notion de variété différentiable , mais il est clair que le sens de ce qui est défini n'est pas le même dans les deux cas . Il est enfin des cas où les contenus de pensée se rapportent presque uniquement à l'aspect formel de la notion considérée . C'est ainsi qu'un mathématicien sur le contenu de l'idée qu'il se fait d'êtres mathématiques isomorphes constateré , croyons-nous , qu'il pense bien moins à une similarité complète de deux objets en tant que choses qu'à ceci : tout théorème portant sur l'un de ces objets peut être traduit en un théorème portant sur l'autre . Un exemple plus frappant encore est celui d'une notion comme celle de "suite exacte" de groupes et d'homomorphismes ; dans ce cas , l'intuition chosiste d'objets qui seraient les groupes de la suite disparait presque entièrement au profit d'une intuition qui ne se rapporte qu'à un certain nombre de méthodes de démonstration utilisables dans des circonstances variées .

L'importance des intuitions formelles (nous voulons dire , de celles qui se rapportent au formalisme) dans la pensée mathématique se révèle encore dans l'examen des figures qui viennent parfois aider à la compréhension du texte. Les figures d'un ouvrage de géométrie élémentaire représentent les objets mêmes - droites , cercles , triangles ,... - dont parlent les théorèmes : ce sont des figures chosistes . Mais il existe aussi un autre type de figures dont l'objet est de représenter non pas les objets eux-mêmes mais un certain nombre de connexions formelles . C'est ainsi que la théorie des corps et des anneaux commutatifs s'aide souvent de diagrammes qui représentent les relations d'inclusion ou d'isomorphisme entre les objets dont il est traité . Or ces figures ne représentent pas , comme on pourrait croire , un sous-corps par une partie d'un espace dont la totalité représenterait le sur-corps ; tout au contraire , le sous-corps et le sur-corps sont représentés par des lettres qui sont jointes l'une à l'autre par un signe en forme de flèche , le même que celui qui représente un homomorphisme . L'intuition à laquelle fait appel une telle figure est une intuition qui vide l'idée d'inclusion de sa signification première (rapport de contenant à contenu) pour n'en retenir que certaines propriétés formelles qui la rapprochent de celle d'homomorphisme .

La reconnaissance de l'importance de plus en plus grande que prend cette intuition des formes du raisonnement dans la mathématique actuelle pourrait inciter à tenter une interprétation toute nouvelle de notre science , suivant laquelle elle serait en fait identique à la métamathématique . On avancerait alors l'hypothèse que les théorèmes qui se trouvent dans les ouvrages de mathématique ne sont pas , comme l'entendaient les intuitionnistes , des énoncés qui parlent d'objets réels donnés , ou les formalistes , des énoncés privés de signification et des substituts de phrases formelles trop longues à écrire , - mais des énoncés qui , sans <u>être</u> des phrases formelles , du moins <u>parlent</u> de phrases formelles . On affirmerait bien quelque chose dans un théorème ; mais ce qu'on affirmerait serait non pas une propriété des objets réels dont on semble parler , mais bien le fait que la mathématique (formelle) contient une démonstration (formelle) de la phrase (formelle) en laquelle il serait possible de traduire l'énoncé ~~du~~ théorème donné . Démontrer le théorème , ce serait alors indiquer comment on pourrait construire la démonstration formelle dont son énoncé affirme l'existence . La mathématique tout entière deviendrait alors critique d'une littérature imaginaire, possible mais non réalisée.

Cette hypothèse ne laisse pas d'être d'abord attrayante. D'une part, elle restaure le droit des théorèmes à signifier quelque chose, et rétablit par là une ligne de communication entre leurs énocés et l'acte intellectuel par lequel on les formule. Deplus, la signification qu'elle leur attribue est en accord avec le contenu intuitif que beaucoup de mathématiciens leur confèrent d'ores et déjà (dans la mesure où ce contenu intuitif est formel et non chosiste). Enfin, il suffit de lire un ouvrage mathématique moderne pour se convaincre que beaucoup de démonstrations effectivement données le sont sous la forme d'indications sur la structure d'une démonstration hypothétique non donnée.

L'hypothèse que nous venons de présenter peut conduire à des spéculations curieuses. On peut par exemple se demander quel statut il conviendrait d'accorder à un énoncé dont on pourrait démontrer qu'il en existe une démonstration, sans que la preuve de ce fait permette de construire effectivement une démonstration de cet énoncé. Un tel énoncé ne saurait être considéré (tant qu'on ~~xx~~ n'en a pas donné effectivement une démonstration) comme un théorème de la mathématique formelle; néanmoins, l'opinion mathématique serait probablement assez divisée sur la question de savoir si un pareil énoncé devrait être tenu pour vrai.

Mais laissons là ces ~~xxx~~ considérations pour le moins inactuelles, et revenons à l'examen de l'hypothèse que nous imaginions plus haut. Bien que cette hypothèse contienne, croyons-nous, une part de vérité, nous ne pensons pas qu'elle suffise à elle seule à rendre compte de toute la mathématique existance. Elle est notamment incapable de nous éclairer sur la nature des calculs (algébriques ou autres) qui font, aussi bien que les énoncés des théorèmes, partie de la mathématique réelle . Un calcul consiste en effet en une suite de formules écrites sur le papier qui ne prétendent en aucune manière à dire quelque chose , mais seulement à être ce qu'elles sont . On peut dire que tout calcul est un morceau de mathématique formelle inséré au milieu de la mathématique réelle On pourrait , il est vrai , soutenir , si l'on voulait à tout prix sauver l'hypothèse formulée plus haut , que les formules écrites ne sont là qu'à titre de substantifs désignant des assemblages de signes de la mathématique formelle ; l'on pourrait même ajouter pour corroborer cette opinion que les formules écrites contiennent des signes abréviateurs , et que ces signes ne sauraient avoir la valeur d'existants bruts puisqu'ils renvoient à des significations . Mais ce qui ruine cette position , c'est qu'elle ne rend nullement compte de l'attitude que prend le mathématicien vis-à-vis d'un calcul . Que les signes qui interviennent dans les formules soient abréviateurs ou non , cela n'entre en jeu qu'aux stades antérieur (mise en équations) et postérieur (interprétation des résultats) au moment du calcul proprement dit . Mais le mathématicien qui calcule n'est pas un homme qui pense , c'est à dire qui établit des rapports entre des symboles et des significations ; c'est une machine qui accomplit certaines opérations matérielles suivant des règles prescrites ; les signes qui interviennent dans ses formules n'ont pas d'autre valeur pour lui - et tant qu'il calcule - que leur forme même et leur disposition sur la page . On ne saurait nier que les calculs ne tiennent une place importante dans la mathématique : le calcul algébrique d'abord , le plus vieux de tous ; le calcul de la théorie des ensembles avec ses opérations formelles sur les signes $\in$, $\subset$, $\supset$; le calcul approché , avec son jeu formel sur les signes O et o ; toutes les méthodes "symboliques" , comme celle de la théorie des invariants , ou de la géométrie projective , ou le calcul de Heaviside ; et même enfin une sorte de calcul verbal , dans la mesure où une longue pratique d'un certain type de raisonnement permet au mathématicien de construire des démonstrations de la même manière qu'il calcule algébriquement , en combinant des énoncés sans se référer à leur signification .

Il semble donc vain de vouloir faire rentrer la mathématique tout entière dans le cadre d'une conception unique . Ni pur calcul ni pensée pure , elle comporte une part de calculs auxquels la pensée confère ensuite des interprétations variées , et une part de pensée qui peut à l'occasion se matérialiser en calculs .

Ce double aspect évoque de très près la description que donne M. Blanchot de la littérature (dans l'article cité plus haut) :"La littérature est le langage qui se fait ambiguïté", écrit-il , et encore :"Non seulement , chaque moment du langage peut devenir ambigu et dire autre chose qu'il ne dit , mais le sens général du langage est incertain, dont on ne sait s'il exprime ou s'il représente , s'il est une chose ou s'il la signifie ; ... s'il est transparent à cause du peu de sens de ce qu'il dit ou clair par l'exactitude avec laquelle il le dit" . Il y a deux conceptions différentes des mathématiques , l'une comme pur jeu verbal , l'autre comme description significative d'objets (réels ou imaginaires) , mais il n'y a qu'une seule mathématique , participant de l'une et l'autre conception . De même , écrit M. Blanchot , :" La littérature est partagée entre ces deux pentes. La difficulté , c'est que , bien qu'en apparence inconciliables , elles ne conduisent pas à des oeuvres ni à des buts distincts , et que l'art qui prétend suivre un versant est déjà de l'autre côté . Le premier versant est celui de la prose significative ... Mais , sans quitter ce côté du langage , vient un moment où l'art aperçoit la malhonnêteté de la parole courante et s'en écarte, .. Sur l'autre versant ... se rassemblent ceux qu'on appelle poètes . Pourquoi ? parce qu'ils s'intéressent à la réalité du langage , parce qu'ils ne s'intéressent pas au monde , mais à ce que seraient les choses et les êtres s'il n'y avait pas de monde ~~xxx~~ ...". Voilà donc les poètes sur le même versant que les calcultaeurs! mais il est vrai que Platon les réunissait déjà dans une commune aversion . Voici encore comment M. Blanchot parle d'une oeuvre littéraire :"Des mots réels et une histoire imaginaire , un monde où tout ce qui arrive est emprunté à la réalité , et ce monde est inaccessible ;..alors un pur néant ? Mais le livre est là , qu'on touche , les mots se lisent qu'on ne peut changer ..."; sa description s'applique mot pour mot à une oeuvre mathématique .

Le double aspect -formel et significatif - de la littérature fait aussi l'objet des réflexions de M. Paulhan , dans son livre "Les fleurs de Tarbes" , et là encore l'analogie se poursuit avec une situation que les mathématiciens connaissent bien . M. Paulhan donne le nom de "Terreur" à l'attitude résolument hostile à l'art de la réthorique et au langage en général , que semble avoir adoptée la critique littéraire depuis le XIX° siècle . La terreur est obsédée par le danger de voir la pensée se laisser écraser par les mots , et la signification se perdre dans le jeu automatique des clichés et des lieux communs . N'y a-t-il pas là le pendant exact du reproche que l'on entend souvent faire à un certain type de mathématiques : de noyer la pensée dans une mer de calculs , et de laisser le formalisme dépasser les limites du domaine dans lequel il est valable . Les mathématiciens du XIX° siècle qui reviennent à la géométrie pure en dépit de l'existence de la géométrie analytique , ou ceux qui s'attachent à étudier directement les fonctions auxquelles leur caractère quelque peu "tératologique" empêche d'appliquer les procédés du calcul infinitésimal , sont les protagonistes d'un mou-

-vement de réaction analogue à celui de la terreur romantique , d'un retour à une vie directe des choses . Cette tendance , s'appliquant d'abord à ne pas exclure le bizarre ou l'extraordinaire en tant que tels , va bientôt conduire à les rechercher abusivement pour eux-mêmes : en mathématiques , l'école polonaise , et en littérature , le préjugé que tout héros de roman doit se distinguer par quelque monstruosité absolument nouvelle . M. Paulhan propose , comme remède à une terreur outrancière , l'invention d'une ~~xxxxxxxx~~ rhétorique dont les lieux communs , reconnus comme tels , servent de véhicule au mouvement de la pensée au lieu de l'achopper au problème (après tout purement verbal) d'éviter les clichés . Les mathématiques contemporaines semblent de leur côté , se désintéresser de plus en plus des contre-exemples tératologiques ; le fait qu'une fonction puisse n'avoir nulle part de dérivée , et d'autres faits du même ordre émoussent bien vite le piquant par lequel ils ont pu provoquer un moment de scandale délicieux . Plutôt que de s'épuiser dans la recherche de difformités de plus en plus monstrueuses , les mathématiciens contemporains s'orientent plutôt vers ce qui correspondrait assez bien à la construction d'une rhétorique , à savoir l'édification de nouveaux formalismes , de modes de calcul sévèrement contrôlés par la pensée et propres non pas à la dominer mais au contraire à la libérer d'une partie de sa tâche .

Nous ne prendrons parti dans cet ouvrage en faveur d'aucune des conceptions que l'on peut se faire du fondement et de la nature des mathématiques ; aussi bien croyons nous avoir montré dans les pages qui précèdent qu'aucune de ces conceptions ne saurait se suffire à elle-même , et que chacune se change en son opposée pour peu qu'on la pousse assez loin . "Chacun comprend que la littérature ne se partage pas et qu'y choisir précisément sa place , se convaincre qu'on est bien là où on a voulu être , c'est s'exposer à la plus grande confusion, car déjà la littérature vous a fait insidieusement passer d'un versant à l'autre , vous a changé en ce que vous n'étiez pas" , écrit M.Blanchot ; et ceci s'applique aussi à la mathématique . Croire qu'une mathématique parfaite soit possible , qu'une certitude absolue puisse être atteinte , c'est courtiser la confusion et le désesppoir qui sont le lot des architectes d'orgueilleuses Babel .

Plus modestes , nous essayerons de faire oeuvre utile en nous inspirant du conseil que M.Paulhan donne aux écrivains , celui de s'intéresser assez au langage pour en faire un agent efficace de la pensée ? Nous croirons n'avoir pas perdu notre temps si nous avons rendu véritablement communs un certain nombre de "lieux communs" ; je veux dire , si nous avons montré le parti que le mathématicien peut tirer d'un certain nombre de notions dont le caractère très abstrait effraye d'abord la pensée (ainsi , en algèbre , celle de loi de composition en général , ou en analyse celle d'espace topologique , pour ne citer que deux exemples) . La première partiedes "Eléments de Mathématiques" sera consacrée à la fabrication de ces outils linguistiques ; on y cherchera principalement à les rendre aussi maniables que possibles , et tels qu'on puisse les employer directement sans avoir à suivre à nouveau des allées déjà parcourues . L'idéal serait que le lecteur fût aussi familier , à la fin de chaque"livre" de notre ouvrage , avec la"structure" mathématique dont traite ce livre qu'il l'est avec les méthodes du calcul algébrique élémentaire ; en sorte qu'il n'hésite pas plus , le cas échéant , à se servir d'un corps algébriquement clos ou d'un espace compact que le candidat aux grandes écoles ne bronche devant une équation du premier degré . Les parties qui suivent la première traiteront de la plupart des grandes théories de la mathématique classique ou moderne ; c'est à les lire qu'on se convaincra , nous l'espérons , des bénéfices que procure le travail d'assouplissement auquel nous nous sommes livrés dans la première partie .